|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **BAR-ILAN UNIVERSITY (RA)**  Faculty of Engineering  Ramat-Gan 52900, Israel | **Tel: 03-5317722**  **engbi@mail.biu.ac.il** | **אוניברסיטת בר-אילן (ע"ר)**  הפקולטה להנדסה  רמת-גן 52900 |

**תורת הגרפים ושימושיה**

**תש"ף סמסטר ב' מועד א'**

**83-652**

**מרצה:** פרופ' שמואל וימר

* הבחינה נערכת ב ZOOM. חובה לפתוח מצלמות וידאו. אי פתיחת מצלמה תגרור פסילת הבחינה.
* פתרון הבחינה חייב להיות בפורמט PDF. יש להעלותו בתוך חלון הזמן שארכו כמשך הבחינה + 15 דקות. אי העלאת קובץ הפתרון בזמן תחשב כאי הגשה.
* בבחינה שתי שאלות ומשקלן שווה. סה"כ הניקוד 120, ציון מקסימלי 100 נקודות.
* יש להקפיד על כתב יד ברור וקריא.
* מותר שימוש בכל חומר עזר.
* משך הבחינה: שעתיים.
* בראש דף הפתרון יש להעתיק ולחתום על ההצהרה הבאה. ללא הצהרה וחתימה הבחינה לא תיבדק .

אני מתחייב(ת) בזאת לשמור על טוהר הבחינה, לפתרה בכוחות עצמי בלבד ולא לעזור לשום גורם אחר שהוא. ידוע לי כי חשד כלשהו בטוהר הבחינה יאפשר לדרוש ממני להגן על פתרון הבחינה בעלפה.

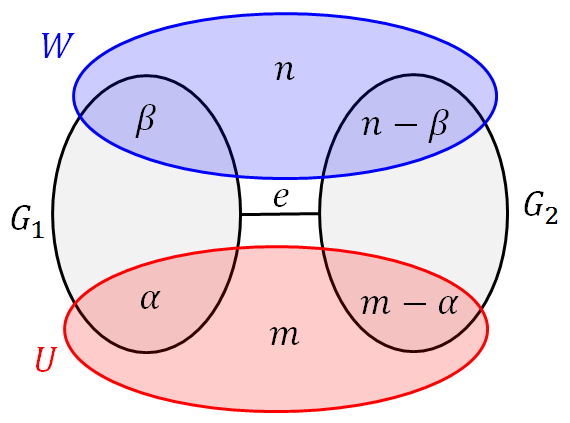
שם התלמיד(ה):\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_חתימה: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**בהצלחה!**

1. (60 Pts) Let be a cycle-free graph (tree). Let be a partition of its vertices into two equal size sets (up to one vertex). Let be the edge distance between two vertices. Let , and . Prove that

**Hint**: Take an edge and consider how many times it is accounted in each of the above sums.

**Solution:**

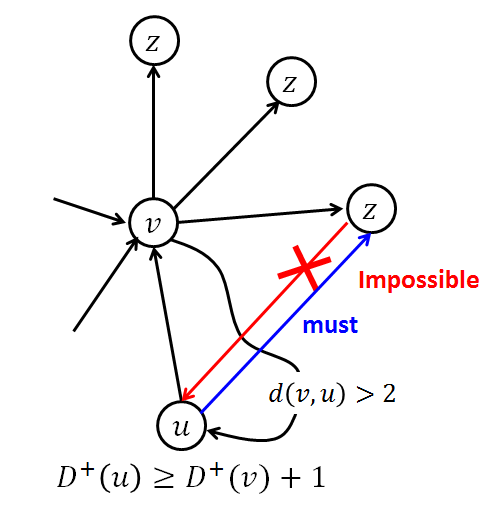


* To calculate the above sums we may ask for every edge how many paths of each expression are passing through it and then sum over all the edges.
* Since is a tree, an edge partitions into two components and . Hence a path whose end vertices are in and includes , whereas a path whose both end vertices fall within either or excludes .
* There is . Let and . There is therefore and .
* is contained in paths of type, in paths of type and paths of .
* It is sufficient to show that , or after rearranging + . If is even then and the left hand side is zero, whereas the right hand side is nonnegative. Otherwise and there is which holds since and are integers.

1. (60 Pts) A tournament of a complete graph is a direction of its edges. Show that for every tournament there is a vertex such that its directed distance to every other vertex is two at most. Namely, .

**Hint**: Consider the vertex of highest out-degree.

**Solution:**



* Let be a vertex with highest out-degree . Since is complete, every vertex is either the head of ’s out-going arc or the tail of ’s in-coming arc .
* The directed distance to ’s head vertex is .
* If the statement of the problem was not true, there would be the tail of an in-coming arc , and .
* Any of an out-going arc cannot be a tail vertex of the arc , as otherwise the directed path satisfied
* Consequently, must be also a head vertex of an out-going arc
* Hence, any out-going arc of implies an out-going arc of . There is also the out-going arc , thus yielding , a contradiction.