אוניברסיטת בר-אילן

הפקולטה להנדסה

BAR-ILAN UNIVERSITY

Engineering Faculty

תורת הגרפים ושימושיה 83-652

תשע"ז סמסטר ב' מועד א'

שם הקורס	תורת הגרפים ושימושיה		
מספר הקורס	83-652		
שם המרצה	פרופ' שמואל וימר		
	תשע"ז	סמסטר ב'	מועד א'
משך הבחינה	שלש שעות		
חומר עזר	כל חומר אסור בשימוש. **יש לצרף את שאלוני הבחינה למחברת.**		
	יש לענות על כל השאלות. כל תשובה יש לנמק ולהסביר הייטב. כל תשובה מספרית מחייבת את הצגת דרך החישוב. סה"כ הנקודות האפשריות 110. ציון הבחינה לא יעלה על 100. **יש לכתוב בעט בלבד. כתיבה בעפרון לא תיבדק.**		

בהצלחה!

שאלה 1 (40 נק') (השאלה הוכחה בכתה)

Let G be a graph without isolated vertices. Let $\alpha'(G)$ be the maximum size of matching and $\beta'(G)$ the minimum size of edge cover.

Show that $\alpha'(G)+\beta'(G)=|V(G)|$.

Hints:

1. Construct an edge cover from the maximum matching.

2. Show that a minimum edge cover consists of disjoint stars.

Proof: Using the maximum matching as a partial vertex cover, there are $|V(G)|-2\alpha'(G)$ uncovered vertices.

1. By adding an edge to each uncovered vertex, we obtain an edge cover of size

$$\alpha'(G)+\big(|V(G)|-2\alpha'(G)\big)=|V(G)|-\alpha'(G)\geq\beta'(G)$$

yielding $|\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})|\geq\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{G})+\boldsymbol{\beta}'(\boldsymbol{G})$.

2. Consider a minimum edge cover. It neither comprises cycles nor paths of more than two edges. Otherwise, an edge could be deleted, still covering the same vertices.

Hence, the minimum edge cover which size is $\beta'(G)$ consists only of stars, let their number be k.

Since an edge cover touches all $V(G)$, end every edge matches exactly one vertex of a star's periphery, there is $|V(G)|=\beta'(G)+k$.

The centers of the k starts define a matching by choosing arbitrarily one edge outgoing from the center. Hence $k\leq\alpha'(G)$.

Consequently $|\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})|\leq\boldsymbol{\beta}'(\boldsymbol{G})+\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{G})$. ■

שאלה 2 (20 נק')

Let G be a graph with degree of all vertices at most d.

Show that the size of the maximal independent vertex set satisfies $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{d+1}$.

Hint: Consider a maximal independent vertex set S.

Proof: Let S satisfy $\alpha(G) = |S|$.

Any vertex of $V(G) - S$ must be connected to at least one of S vertices, as otherwise S would not be maximal.

Since the degree of a vertex is at most d, there is $|V(G) - S| \leq d|S|$.

There is $|V(G) - S| = |V(G)| - |S|$.

Hence $|V(G)| - |S| \leq d|S|$, or $|V(G)| \leq (d+1)|S|$.

By the choice of S, there is $|V(G)| \leq (d+1)\alpha(G)$. ■