

שאלה 1 (60 נק')

נתונה רשימה לא ממויינת $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ בת n אלמנטים ומשקלות בהתאמה $W: w_1, w_2, \dots, w_n$ כך ש $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

$x \in X$ נקרא חציון ממושקל אם מתקיים: $\sum_{x_i < x} w_i < \frac{1}{2}$ וגם $\sum_{x_i > x} w_i \leq \frac{1}{2}$.

לדוגמא: ברשימה בת 7 האיברים

x_i	11	28	6	9	17	4	20
w_i	0.1	0.35	0.05	0.1	0.15	0.05	0.2

החציון הרגיל הוא 11 כי ישנם שלשה איברים קטנים ממנו ושלושה גדולים ממנו, ואילו החציון הממושקל הוא 20 כי האיברים 4, 6, 9 ו-11 ו-17 הקטנים ממנו משקלם הכולל $0.45 < \frac{1}{2}$, וגם האיבר 28 הגדול ממנו משקלו $0.35 < \frac{1}{2}$.

א. (10 נק') הוכיחו שהחציון הממושקל הינו יחיד.

פתרון: נניח בשלילה שקיימים x_l ו x_k שני חציונים ממושקלים, ויהי $x_l > x_k$. מאחר ו x_k חציון ממושקל, מתקיים $\sum_{x_i > x_k} w_i \leq \frac{1}{2}$, ולכן $W_1 = \sum_{x_i < x_k} w_i + w_k \geq \frac{1}{2}$. מאידך, מאחר וגם x_l חציון ממושקל, מתקיים $W_2 = \sum_{x_i < x_l} w_i < \frac{1}{2}$. ולכן $W_1 > W_2$. מאחר ו $x_l > x_k$, מתקיים $W_1 = \sum_{x_i < x_k} w_i + w_k \leq \sum_{x_i < x_l} w_i = W_2$, סתירה לנ"ל.

ב. (10 נק') הוכיחו שבהינתן $w_i = \frac{1}{n}$, $1 \leq i \leq n$ החציון הרגיל והחציון הממושקל זההים.

פתרון: יהי $x \in X$ החציון הממושקל ו m מספר האיברים ברשימה X הקטנים מ x .

מתקיים לכן $\sum_{x_i < x} w_i = \frac{m}{n} < \frac{1}{2}$ וגם $\sum_{x_i > x} w_i = \frac{n-m-1}{n} \leq \frac{1}{2}$.

מכאן נובע ש $m < n/2$ וגם $m \geq n/2 - 1$.

הפתרון היחידי האפשרי הוא $m = \lceil n/2 \rceil - 1$ שהוא גם האיבר החציוני הרגיל $x_{\lceil n/2 \rceil - 1}$.

ג. (10 נק') הראו כיצד לחשב את החציון הממושקל בזמן $O(n \log n)$ גרוע ביותר ע"י שימוש במיון.

פתרון: ראשית נשתמש במיון מתאים, למשל merge sort שהזמן הגרוע ביותר עבורו הוא $O(n \log n)$.

יהיו $x_1, x_2, \dots, x_n$ כבר ממוינים. נסמן $S_k = \sum_{i=1}^k x_i$. אזי ניתן לחשב כל איבר בסדרה העולה $S_1, S_2, \dots$ בזמן $O(1)$ מתוך האיבר הקודם ע"י $S_k = S_{k-1} + x_k$ עד למקום בו מתקיים $S_{k-1} < 1/2$ וגם $S_k \geq 1/2$ ועל כן x_k הוא החציון הממושקל.

ד. (30 נק') הראו כיצד לחשב את החציון הממושקל בזמן $\Theta(n)$ במקרה הגרוע ביותר ע"י שימוש והתאמת האלגוריתם SELECT למציאת k order statistic שנלמד בקורס. הסבירו באופן מלא ומדויק את כל השינויים והצעדים הנדרשים. רישמו בצורה מפורשת את כל החישובים הנדרשים ע"י פסאודו קוד.

הנחיה ורמז:

- העזרו בקוד שבשקפים ושנו את הקריטריון לחלוקה לקבוצת האיברים הקטנים מה pivot (השמאלית) וקבוצת האיברים הגדולים מה pivot (הימנית).
- שימו לב להעברת משקלי הקבוצות הנדרשים כפרמטרים בקריאות הרקורסיביות של SELECT.

פתרון: באלגוריתם SELECT שנלמד בקורס בודקים האם איבר ה pivot (החציון של החציונים) שווה ל k order statistic. אם כן ה pivot הוא האיבר המבוקש ועוצרים.

אחרת, בונים שתי קבוצות ע"פ איבר ה pivot, אלה שקטנים ממנו ואלה שגדולים ממנו, ואז ממשיכים בחפוש באחת משתי הקבוצות הללו על פי בדיקה במי מהן נמצא ה k order statistic וקביעת ה k order statistic בהתאם למיקום הקבוצה וגדלה.

השינוי הנדרש:

בקריאה ל SELECT יש להעביר את המשקל S_L הנדרש מקבוצת האיברים הקטנים מה pivot והמשקל S_R הנדרש מקבוצת האיברים הגדולים מה pivot שמשמשים למבחן האם החציון הממושקל נמצא.

בונים שתי קבוצות ע"פ איבר ה pivot x המתקבל מחיפוש החציון של החציונים, אלה שקטנים ממנו ואלה שגדולים ממנו.

סוכמים את משקל האיברים בכל אחת משתי הקבוצות, $W_L = \sum_{x_i \in L} w_i$ ו $W_R = \sum_{x_i \in R} w_i$ פעולה הדורשת זמן $\Theta(n)$.

כעת בודקים האם משקל איברי קבוצת הקטנים מקיים $W_L < S_L$, ומשקל האיברים הגדולים מקיים $W_R \leq S_R$. במידה וכן x הוא החציון הממושקל המבוקש ועוצרים.

אחרת, ממשיכים בחפוש בקבוצה L אם $W_L \geq S_L$ או בקבוצה R אם $W_R > S_R$. יש לבצע התאמה של משקלי הקבוצות השמאלית והימנית בהתאם, כמתואר בקוד שלהלן.

SELECT $\left(A, \left\lceil \frac{|A|}{2} \right\rceil, S_L, S_R\right)$

1. Divide input into $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$ groups of 5 elements, one possibly smaller.
2. Let B be the set of all medians.
3. Let $x = \text{SELECT}\left(B, \left\lceil \frac{|B|}{2} \right\rceil, S_L, S_R\right)$ be B 's median.
4. Divide A around x : $L = \{x_i \in A \mid x_i < x\}$, $R = \{x_i \in A \mid x_i > x\}$.
5. Compute $W_L = \sum_{x_i \in L} w_i$ and $W_R = \sum_{x_i \in R} w_i$.
6. If $W_L < S_L$ and $W_R \leq S_R$ return x .
7. If $W_L \geq S_L$ then SELECT $\left(L, \left\lceil \frac{|L|}{2} \right\rceil, S_L, W_L - S_L\right)$
else SELECT $\left(R, \left\lceil \frac{|R|}{2} \right\rceil, W_R - S_R, S_R\right)$.

שאלה 2 (60 נק')

בכדי לחשב את מקדמי פולינום המכפלה

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

$bd \mid bc, ad, ac$

א. (10 נק') הראו כיצד ניתן לחשב את מקדמי המכפלה ע"י שלש פעולות כפל בלבד.

רמז: השתמשו במכפלה $(a + b)(c + d)$.

פתרון: $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$ ולכן

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = acx^2 + [(a + b)(c + d) - ac - bd]x + bd$$

ולחישוב מקדמי הבטוי שבאגף ימין נדרשות שלש פעולות כפל בלבד.

בסעיפים להבאים מניחים לשם נוחות ש n חזקה של 2.

נתונים הפולינומים $R(x) = \sum_{j=0}^{n-1} r_j x^j$ ו $S(x) = \sum_{j=0}^{n-1} s_j x^j$. רוצים לחשב את פולינום המכפלה $P(x) = R(x)S(x)$.

ב. (20 נק') הראו שניתן לחשב את $P(x)$ בזמן $\Theta(n^{\log_2 3})$ ע"י פירוק פולינום לשני חצאים, אחד שמקדמיו זוגיים והשני שמקדמיו אי זוגיים, בדומה לנעשה באלגוריתם FFT.

הנחיות לפתרון:

1. השתמשו בפירוק הבא:

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n/2-1} r_{2j+1} x^j, \quad B(x) = \sum_{j=0}^{n/2-1} r_{2j} x^j$$

$$C(x) = \sum_{j=0}^{n/2-1} s_{2j+1} x^j, \quad D(x) = \sum_{j=0}^{n/2-1} s_{2j} x^j$$

2. רישמו את המכפלה במונחים של הפירוק הנ"ל, בדומה לנעשה באלגוריתם FFT.

3. השתמשו בתוצאה של סעיף א' כדי להקטין את מספר המכפלות הנדרש.

4. קבלו בטוי לזמן החישוב ופתרו.

פתרון: מציבים את הפירוק של $R(x)$ ו $S(x)$ במכפלה ומקבלים

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x)S(x) = (xA(x^2) + B(x))(xC(x^2) + D(x)) \\ &= x^2 A(x^2)B(x^2) + x(A(x^2)D(x^2) + B(x^2)C(x^2)) + B(x^2)D(x^2) \\ &= x^2(A(x^2)C(x^2)) \\ &\quad + x[(A(x^2) + B(x^2))(C(x^2) + D(x^2)) - A(x^2)C(x^2) - B(x^2)D(x^2)] \\ &\quad + B(x^2)D(x^2) \end{aligned}$$

הפולינום $P(x)$ הינו אם כן ביטוי של סכום של מכפלות הפולינומים $A(x^2), B(x^2), C(x^2)$ ו $D(x^2)$, שכולם מדרגה $n/2$. מספר המכפלות השונות הינו 3. ולכן אם $T(n)$ הוא זמן החישוב של $P(x)$, מתקיים

$$T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n)$$

ושמוש במשפט המסטר נותן $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$.

ג. (30 נק') הראו שניתן לחשב את $P(x)$ בזמן $\Theta(n^{\log_2 3})$ ע"י פירוק פולינום מדרגה חסומה ע"י n לשני חצאים שדרגתם חסומה ע"י $n/2$.

הנחיות לפתרון:

1. פצלו את $R(x)$ ו $S(x)$ לשני חצאים כרשום להלן.

$$R(x) = \left(\sum_{j=0}^{n/2-1} r_{j+n/2} x^j \right) x^{n/2} + \sum_{j=0}^{n/2-1} r_j x^j = A(x)x^{n/2} + B(x)$$

$$S(x) = \left(\sum_{j=0}^{n/2-1} s_{j+n/2} x^j \right) x^{n/2} + \sum_{j=0}^{n/2-1} s_j x^j = C(x) x^{n/2} + D(x)$$

2. רישמו את המכפלה במונחים של הפירוק הנ"ל.

3. השתמשו בתוצאת סעיף א' כדי להקטין את מספר המכפלות הנדרש.

4. קבלו בטוי לזמן החישוב ופתרו.

פתרון: מציבים את הפירוק של $R(x)$ ו $S(x)$ במכפלה ומקבלים

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x)S(x) = \left(A(x)x^{n/2} + B(x) \right) \left(C(x)x^{n/2} + D(x) \right) \\ &= (A(x)C(x))x^n + (A(x)D(x) + B(x)C(x))x^{n/2} + B(x)D(x) \\ &= (A(x)C(x))x^n \\ &\quad + [(A(x) + B(x))(C(x) + D(x)) - A(x)C(x) - B(x)D(x)]x^{n/2} \\ &\quad + B(x)D(x) \end{aligned}$$

הפולינום $P(x)$ הינו אם כן ביטוי של סכום של מכפלות הפולינומים $A(x), B(x), C(x)$ ו

$D(x)$, שכולם מדרגה $n/2$. מספר המכפלות השונות הינו 3. ולכן אם $T(n)$ הוא זמן החישוב

של $P(x)$, מתקיים

$$T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n)$$

ושמוש במשפט המסטר נותן $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$.