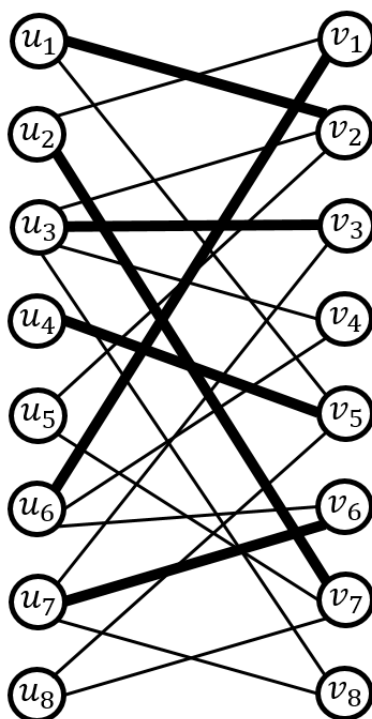


שאלה 1 (40 נק')

(השאלה מנוסחת בלשון זכר לשם נוחות בלבד ☺).

חברה הנדסית מעוניינת לאייש n משרות שונות $u_i, 1 \leq i \leq n$. לצורך כך העבירה חברה משאבי אנוש נתונים של n מועמדים $v_i, 1 \leq i \leq n$. כל מועמד מתאים לשיבוץ לכמה משרות (לפחות אחת) ולכל משרה ישנם כמה מועמדים (לפחות אחד). תיאור יחסי הגומלין משרה-מועמד לדוגמה של 8 משרות ו 8 מועמדים מתואר בגרף שלהלן, כאשר קשת $e(u_i, v_j)$ מתארת התאמה בין משרה למועמד.



נגדיר **התאמה** (matching) כמצב שבו מועמד משובץ למשרה אחת לכל היותר, ומשרה מאויישת במועמד אחד לכל היותר, כמתואר בדוגמה ע"י הקשתות מודגשות. לא מובטח מראש שניתן לשבץ את כל n המועמדים לכל n המשרות. שתי החברות מעוניינות במציאת התאמה בת מקסימום קשתות. הניחו שמספר המשרות שמתאימות למהנדס חסום מעל ע"י מספר קבוע שאינו תלוי ב n .

שלשה מהנדסים נתבקשו לפתור את הבעיה. מהנדס א' הציע אלגוריתם שבודק את כל הקבוצות החלקיות האפשריות של קשתות שבגרף ובכל קבוצה חלקית פועל כדלהלן:

1. בודק האם כל הקשתות מהוות התאמה כמוגדר לעי"ל.
2. במדה ולא, עובר לקבוצה החלקית הבאה.

3. במדה וכן, בודק מהו מספר הקשתות בהתאמה. במדה ומשפר את ההתאמת המקסימום עד כה, שומר את ההתאמה הנוכחית כמקסימום ועובר לקבוצה החלקית הבאה.

(a) (3 נקודות) האם האלגוריתם מוצא התאמת מקסימום? יש לנמק את התשובה.

כן. התאמת מקסימום מגדירה קבוצה חלקית של הקשתות, וכל הקבוצות החלקיות נבדקות.

(b) (7 נקודות) מצאו חסם על סיבוכיות זמן ריצת הפתרון בתלות ב n .

$\Theta(n^2)$. ראשית, כל הקבוצות החלקיות נבדקות, ומספרן 2^n . שנית, מאחר ודרגת כל צומת חסומה ע"י קבוע, סך כל הקשתות הוא $\Theta(n)$ ומספר הקשתות הממוצע בקבוצה חלקית גם הוא $\Theta(n)$.

מהנדס ב' הציע לבחון שיבוצים אפשריים כדלהלן. כל שיבוץ מרכב מ n זוגות $(u_i, v_{\pi(i)})$ המתקבלות ע"י פרמוטציות π של $1 \leq i \leq n$. לכל שיבוץ שכזה נותנים ציון בהתאם למספר הזוגות שעבורם אכן קיימת קשת בגרף. לבסוף בוחרים בשיבוץ שמכיל מספר מקסימלי של קשתות. הניחו שהזמן ליצירת פרמוטציה של $1, 2, \dots, n$ הוא $\Theta(1)$.

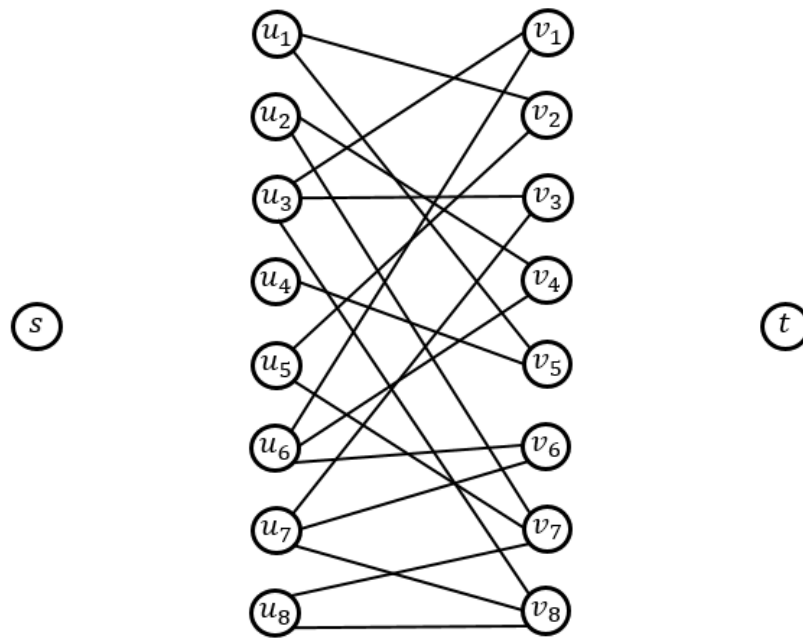
(c) (3 נקודות) האם האלגוריתם מוצא התאמת המקסימום? יש לנמק את התשובה.

כן. התאמת מקסימום מרכבת מקשתות שמגדירות זוגות קודקודים. ישנם בסה"כ $n!$ בחירות אפשריות של n זוגות קודקודים, והתאמת מקסימום מתאימה לאחת מהבחירות הללו.

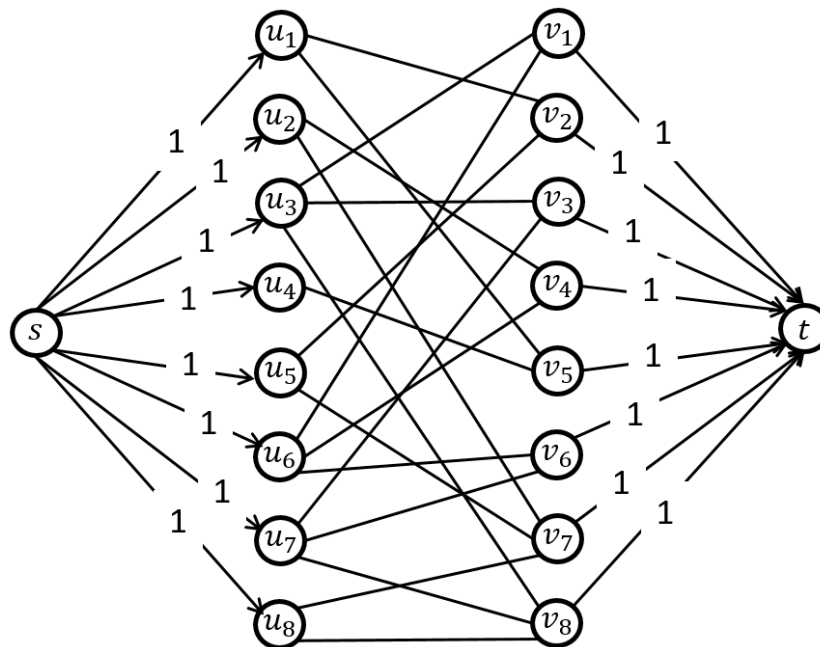
(d) (7 נקודות) מהי סיבוכיות זמן ריצת הפתרון בתלות ב n .

$\Theta(nn!)$. מאחר וישנם סה"כ $n!$ פרמוטציות, ובכל פרמוטציה בודקים את כל n זוגות הקודקודים.

מהנדס ג' הציע להפוך את בעיית התאמת המקסימום לבעיית זרימה ע"י הוספת שני צמתים כמתואר בגרף שלהלן, הוספת קשתות (אינן בציור) והפיכת הגרף למכוון. הצומת s מייצגת את החברה ההנדסית ומחוברת לצמתים $u_i, 1 \leq i \leq n$. הצומת t מייצגת את חברת משאבי האנוש ומחוברת לצמתים $v_i, 1 \leq i \leq n$.



(e) (5 נקודות) השלם את הציור כך שהגרף יהפוך לרשת זרימה מ s ל t במספרים שלמים. קבע את כיווני וקיבולי הקשתות.



מוסיפים קשתות בנות קיבולת $c(s, u_i) = 1$ המחברות את צומת החברה ההנדסית s לצמתי המשור u_i , $1 \leq i \leq n$. זרימה $f(s, u_i) = 1$ משמעותה שהמשרה אוישה וזרימה $f(s, u_i) = 0$ משמעותה שהמשרה הנדונה לא אוישה.

מוסיפים קשתות בנות קיבולת $c(v_i, t) = 1$ המחברות את צומתי המועמדים $1 \leq i \leq n$ לצומת חברת משאבי האנוש t . זרימה $f(v_i, t) = 1$ משמעותה שהמועמד הנדון שובץ לאיזושהיא משרה וזרימה $f(v_i, t) = 0$ משמעותה שהמועמד הנדון לא שובץ לעבודה.

קיבולי הקשתות $c(u_i, v_j) = 1$. זרימה $f(u_i, v_j) = 1$ משמעותה שהמשרה u_i אויישה ע"י מועמד v_j ו $f(u_i, v_j) = 0$ אחרת. מתוך אילוצי הקיבול ברור שהזרימה בקשתות היא 0 או 1. זרימה 1 פירושה שנמצא זוג מתאים של משרה-מועמד, וזרימה 0 אומרת שהזוג המסויים לא קרה.

(f) (15 נקודות) הוכח שהזרימה ברשת מקסימלית מגדירה התאמת מקסימום.

נניח שהזרימה ברשת מקסימלית ושווה ל $m \leq n$.

נתבונן בקשתות שבחתך $[s \cup_{i=1}^n u_i, t \cup_{i=1}^n v_i]$ שהזרימה בהן 1. מתוך חוק שימור הזרימה חייבות כולן להיות זרות בקדקדים. אחרת איזושהי זרימה $f(s, u_i) > 1$ ו/או $f(v_j, t) > 1$, בלתי אפשרי בגלל אילוצי קיבול הקשתות.

תהי M התאמת מקסימום (כלשהי). אם $|M| = m$ סיימנו.

נניח $|M| < m$. הדבר בלתי אפשרי כי ע"פ הנ"ל הקשתות שבחתך $[s \cup_{i=1}^n u_i, t \cup_{i=1}^n v_i]$ שהזרימה דרכן 1 זרות ולכן מהוות התאמה גדולה יותר מהתאמת מקסימום.

נניח $|M| > m$. הדבר בלתי אפשרי כי ע"י לקיחת הקשתות $e(u_i, v_j)$ של M וקביעת הזרימה דרכן 1, נבנה $|M|$ מסלולים זרים $s \rightarrow u_i \rightarrow v_j \rightarrow t$ שהזרימה בהן 1. וסך כל הזרימה ברשת תהיה $|M|$ ותקיים את כל ההגדרות של זרימה. סתירה לזה ש m היא זרימה מקסימלית.

שאלה 2 (40 נק')

בחברת הזנק פיתחו מכשיר מהפכני שבין שאר תכונותיו המופלאות יש לו יכולת לבדוק תקינות של מכשיר אחר שזהה לו. נתבונן בשני מכשירים זהים A ו B הבודקים הדדית זה את זה. נניח ש A בודק את B . אם A תקין תוצאות הבדיקה של B תמיד נכונה, ואם A תקול לא ניתן לסמוך על תוצאות הבדיקה של B . וכנ"ל כאשר B בודק את A . הטבלה שלהלן מסכמת את האפשרויות לתוצאות בדיקה הדדית ואת המסקנות הנובעות ממנה.

מסקנה	החיווי של A	החיווי של B
A וגם B תקינים, או A וגם B תקולים	B תקין	A תקין
לפחות אחד מבין A ו B תקול	B תקין	A תקול
לפחות אחד מבין A ו B תקול	B תקול	A תקין

A תקול	B תקול	לפחות אחד מבין A ו B תקול
--------	--------	---------------------------

החברה ייצרה n מכשירים ובודקת אותם ע"י חלוקתם ל $n/2$ זוגות (A, B) באופן מקרי ושימוש בטבלה הנ"ל. אפשר להניח ש n הוא חזקה שלמה 2.

(a) (10 נקודות) הוכיחו שבמדה ו יותר מ $n/2$ מהמכשירים תקולים לא ניתן להסיק דבר על תקינות המכשירים בעזרת כל אלגוריתם המבוסס על שיטת הבדיקה הנ"ל.

אלגוריתם נכון חייב לפעול על כל קלט שהוא. מספיק אם כן למצוא instance בודד שמאשש את הטענה הנ"ל.

נניח מצב שבו כל מכשיר תקול תמיד נותן חייווי הפוך מהמצב האמיתי של המכשיר הנבדק, שזו תמונת הראי של מכשיר תקין שתמיד נותן חייווי נכון. נניח כעת מקרה שבו כל המכשירים תקולים. החיווי של כל $n/2$ הזוגות יהיה (תקין, תקין) ואי אפשר יהיה להסיק דבר.

גם אם נגריל עוד ועוד $n/2$ זוגות נקבל תמיד אותה תוצאה ולא נוכל להצליב שום מידע.

(b) (15 נקודות) כעת ידוע מראש ש שלכל היותר $n/4$ מהמכשירים תקולים. הראו שעל ידי $n/2$ בדיקות של זוגות ניתן להקטין את הבעיה לגודל שאינו עולה על $n/2$.

הדרכה לפתרון ע"י דוגמה מספרית. נניח $n = 4 \times 2^k$ מכשירים. 3×2^k תקינים ו 2^k תקולים. נתבונן בשני מקרים קיצוניים של זיווגי מכשירים.

בראשון כל התקולים מזווגים אקראית לתקינים. נקבל 2^k זוגות חייווי (תקול, תקין) או (תקין, תקול) ו 2^k זוגות (תקין, תקין). מה יקרה אם מבין כל זוגות החיווי (תקין, תקין) מגרילים אחד מכל זוג?

בשני השידוך האקראי הינו של תקינים עם עצמם ותקולים עם עצמם. במקרה זה נקבל $\frac{3}{2} \times 2^k$ חייוויים (תקין, תקין) כתוצאה של זוגות מכשירים תקינים ו $\frac{1}{2} \times 2^k$ חייוויים (תקין, תקין) כתוצאה מזוגות תקולים. מה יקרה אם מבין כל זוגות החיווי (תקין, תקין) מגרילים אחד מכל זוג?

נתעניין רק בזוגות (A, B) שהחיווי עבורם (תקין, תקין). ראשית, ברור שמספרם אינו עולה על $n/2$. מאחר ומספר התקולים אינו עולה על $n/4$ אזי לכל היותר $n/8$ מהחיוויים של (תקין, תקין) מתקבלים כתוצאה של שני מכשירים תקולים.

נבנה תת קבוצה ע"י בחירה שרירותית של אחד מתוך הזוגות (תקין, תקין). גודל הקבוצה שהתקבלה איננו עולה על $n/2$ ולכל היותר $n/8$ מהמכשירים תקולים.

שתי הדוגמאות המובאות הן מקרים קיצוניים של זיווג מכשירים. המקרה הראשון הוא "הטוב ביותר" כי בו מסולקים כל התקולים (יחד עם תקינים) והבעיה שנותרת הינה של תקינים בלבד. המקרה השני הוא "הגרוע ביותר" משום שבו נשארים בבעיה מחצית מהתקולים, אולם בכל מקרה מספרם מתוך סה"כ הנשארים אינו עולה על $\frac{1}{4}$. כל זיווג אחר מבטיח שמספר התקולים הנשארים קטן ממש מ $\frac{1}{4}$ כי זיווג של תקין עם תקול מסלק שני מכשירים והדבר מגדיל את יחס התקינים/תקולים בבעיה הנותרת.

להלן דוגמה מספרית. נניח 64 מכשירים, 48 תקינים ו 16 תקולים. נתבונן בשני זיווגי מכשירים אקראיים קיצוניים.

בראשון כל התקולים זווגו לתקינים. נקבל אם כן 16 זוגות עם חיווי (תקול, תקין) או (תקין, תקול) ו 16 זוגות (תקין, תקין). מבין 16 הזוגות (תקין, תקין) מגרילים מכל זוג אחד ונותרים עם בעיה של 16 מכשירים לבדיקה (שבמקרה זה כולם תקינים). נותרנו עם בעיה בגודל קטן מחצי כאשר התקולים הם פחות מרבע מהבעייה שנותרה (בעצם 0).

בשני הזיווג הינו של תקינים עם עצמם ותקולים עם עצמם. במקרה זה נקבל במקרה הגרוע ביותר 32 חיוויים (תקין, תקין), כאשר 24 מתוכם כתוצאה של זוגות מכשירים תקינים ו 8 כתוצאה מזוגות תקולים. שוב נבחר אקראית מכשיר מכל זוג (תקין, תקין), שזה בעצם כל הזוגות. נותרנו עם בעיה של 32 מכשירים כאשר 24 מתוכם תקינים ו 8 תקולים, ושוב בעיה בגודל חצי כאשר התקולים התקולים הם בדיוק רבע מהבעייה שנותרה.

(c) (10 נקודות) הוכיחו ע"י שמוש בתוצאת הסעיף הקודם שניתן למצוא לפחות מכשיר אחד תקין. תארו pseudo code של אלגוריתם שפותר את הבעיה. מהו זמן הריצה של האלגוריתם?

אפשר להשתמש בעובדה שגודל הקבוצה שהתקבלה אינו עולה על $n/2$ ולכל היותר $n/8$ מהמכשירים תקולים באופן רקורסיבי. לבסוף ישאר זוג אחד של מכשירים שיתנו חיווי (תקין, תקין) והללו אמורים להיות תקינים. מספר האיטרציות $\Theta(\log_2 n)$ וזמן הריצה הכולל $\Theta(n)$ משום

$$\sum_{k=1}^{\log_2 n} O\left(\frac{n}{2^k}\right) = O(n)$$

(d) (5 נקודות) בהינתן מכשיר אחד שידוע מראש שהוא תקין, כיצד ניתן לבדוק את כל שאר המכשירים. מהו זמן הריצה של האלגוריתם?

המכשיר התקין נותן חיווי נכון תמיד, לכן הוא יבדוק את כל השאר בזמן $\Theta(n)$.

שאלה 3 (40 נק')

לשתי חברות תקשורת ישנן רשתות X ו Y שהן עצים פורשים המחברים n תחנות (קודקודים בגרף), ו $X \neq Y$. ידוע שהקשתות ב $X \cap Y$ אף פעם אינן מתקלקלות ואילו הקשתות שאינן

משותפות, כלומר $E_Y = E(Y) \setminus E(X)$ ו $E_X = E(X) \setminus E(Y)$ עשויות להתקלקל, מקרה שבו הרשתות מאבדות את קשירותן. נתון $0 < |E_X| = |E_Y| = k < n$.

על מנת לגבות את הרשתות ולהבטיח חיבוריות מתמדת, שתי החברות הסכימו לשתף פעולה באופן הבא: בכל פעם שבו מתקלקלת קשת מסויימת ב E_X תשמש קשת מוגדרת מראש של E_Y כתחליף כך שהקישוריות של X תישמר עד שתתוקן התקלה. וכנ"ל במקרה ההפוך.

(a (20 נק') הוכיחו שהקשתות של E_Y ו E_X ניתנות לסימון $\{e_1^X, \dots, e_k^X\}$ ו $\{e_1^Y, \dots, e_k^Y\}$, בהתאמה, כך שלכל זוג תואם של קשתות (e_i^X, e_i^Y) , $1 \leq i \leq k$, מתקיים:

$$X \setminus e_i^X \cup e_i^Y \text{ וגם } Y \setminus e_i^Y \cup e_i^X \text{ עצים פורשים.}$$

הערה: מאחר והמצב סימטרי אז מספיק להוכיח את המקרה $X \setminus e_i^X \cup e_i^Y$ עץ פורש.

הדרכה לפתרון אפשרי: הוכיחו שקיים זוג קשתות להחלפה, ואז הבעיה קטנה ב 1.

הדרכה לפתרון אפשרי נוסף: הוכיחו שאם לא קיימת התאמה מלאה $\{e_1^X, \dots, e_k^X\}$ ו $\{e_1^Y, \dots, e_k^Y\}$ אזי קיים ברשתות מעגל.

פתרון א'

יהי $e_i^Y(u, v) \in E^Y$. מאחר E^X ו E^Y זרים, מתקיים $e_i^Y(u, v) \notin E^X$.

מאחר ו X קשיר, קיים מסלול $X \ni P(u, v)$.

חייב להתקיים $P(u, v) \cap E^X \neq \emptyset$, כלומר קיימת קשת $e \in P(u, v)$ וגם $e \in E^X$. כי לו כל הקשתות של המסלול היו גם ב Y , כלומר $P(u, v) \subset Y$, אזי $P(u, v) \cup e_i^Y(u, v)$ היה מעגל ב Y וזה בלתי אפשרי.

לכן $X \setminus e \cup e_i^Y(u, v)$ גם הוא עץ קשיר, ואפשר לבחור את e בתור e_i^X .

כעת ע"י החלפת e_i^X ב X ע"י e_i^Y אפשר להקטין את הבעיה ב 1 ולהמשיך באופן דומה.

פתרון ב'

נניח בשלילה שלא קיימת ההתאמה המלאה, ויהי $l < k$ ו $\{e_1^X, \dots, e_l^X\}$ ו $\{e_1^Y, \dots, e_l^Y\}$ התאמה מקסימלית.

לכל $e^X \in F^X = E^X \setminus \{e_1^X, \dots, e_l^X\}$, $Y \cup e^X$ מכיל איזשהו מעגל C .

C אינו יכול להכיל אף קשת $e^Y \in F^Y = E^Y \setminus \{e_1^Y, \dots, e_l^Y\}$. אחרת $Y \cup e^X \setminus e^Y$ הוא עץ פורש, ולכן מצאנו זוג נוסף של קשתות חלופיות (e_{l+1}^X, e_{l+1}^Y) בסתירה למקסימליות של l . על כן $C \subseteq Y \setminus F^Y \cup e^X$.

מאחר ו $X \cap Y = X \setminus E^X = Y \setminus E^Y$, אזי $X \setminus F^X = X \cap Y \cup \{e_1^X, \dots, e_l^X\} = C \setminus e^X$. כמובן $e^X \in F^X$.

כמסקנה, $C = C \setminus e^X \cup e^X \subseteq X$, בסתירה לזה ש X עץ.

(b) (20 נק') בהנחה ששהתאמה מהסעיף הקודם אכן קיימת, תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר למציאת ההתאמה $\{e_1^X, \dots, e_k^X\}$ ו $\{e_1^Y, \dots, e_k^Y\}$. תארו בפירוט את כל השלבים באלגוריתם, ציינו את זמן החישוב של כל שלב וציינו לבסוף את זמן החישוב הכולל.

השתמשו במבני נתונים מתאימים, אבל אין צורך לקחת בחשבון את זמני ההקצאה והאתחול שלהם, אלא רק את הזמנים הנדרשים לפעולות במהלך האלגוריתם.

הערה: ניתן לפתור סעיף זה גם מבלי לפתור את הסעיף הקודם.

1. ראשית מוצאים את E_X ו E_Y . הדבר ניתן לבצוע ע"י מיון הקשתות ב X וב Y בסדר לקסיקוגרפי של האינדקסים של הקדקדים שלהן. הפעולה לוקחת $\Theta(n \log n)$. מעבר ליניארי על שתי הרשימות הממוינות ימצא את E_X ו E_Y . סה"כ $\Theta(n \log n)$.
 2. כעת בוחרים קשת מ E_X , $e^X \in E_X$, מצרפים וקבלים את $Y \cup e^X$ ובעזרת DFS או BFS מוצאים בו מעגל C . ע"פ הסעיף הקודם על C חייבת להמצא לפחות קשת אחת של $e^Y \in E_Y$. זה מגדיר זוג קשתות תואמות. כל הפעולה הזאת היא $\Theta(n)$.
 3. קובעים $Y = Y \cup e^X$ ו $X = X \cup e^Y$, $E_X = E_X \setminus e^X$ ו $E_Y = E_Y \setminus e^Y$, פעולות שבעזרת מבני נתונים מתאימים דורשות $\Theta(1)$.
 4. חוזרים על 2 ו 3 $k = O(n)$ פעמים.
- הזמן הדומיננטי נתרם מ 2-4 , סה"כ $O(n^2)$.