

שאלה 1 (מבני נתונים וסיבוכיות) – 40 נק'

ברשת החברתית "שכנים טובים" נדרש לייצג את היכריות החברים ע"י גרף $G(V, E)$ שבו כל חבר הינו קדקד וכל היכירות הינה קשת. המשימה הוטלה על שלשה מהנדסים צעירים שבחרו במבני הנתונים הבאים:

1. מהנדס א' בוגר בן-גוריון בחר בייצוג ע"י מטריצה.
 2. מהנדס ב' בוגר הטכניון בחר בייצוג ע"י רשימות מקושרות. רשימה ראשית לקדקדים, ולכל קדקד רשימה מקושרת משנית של שכנויות.
 3. מהנדס ג' בוגר בר-אילן בחר בייצוג הקדקדים ע"י עץ AVL ראשי כאשר בכל קדקד $v \in V$ מאוכסן עץ AVL משני שבו מאוכסנים הקדקדים השכנים $N(v) \subset V$.
- הזכרון הנדרש לייצוג קדקד בודד וקשת בודדת ב-2 ו-3 הינו $\Theta(1)$. זמן הגישה לכתובת בזכרון הוא $\Theta(1)$. מניחים שכל החברים וההיכריות ידועים מראש. נתונים שני התרחישים שלהלן:

- א. (10 נק') מספר ההיכריות של כל חבר איננו מוגבל ויכול להגיע עד ל- $|V|$.
- ב. (10 נק') מספר ההיכריות של כל חבר מוגבל ע"י $\log|V|$.

לכל אחד מהתרחישים ולכל אחד ממבני הנתונים הנ"ל נדרש למצוא למקרה הגרוע ביותר את:

- (1) סיבוכיות גודל הזכרון,
- (2) סיבוכיות זמן הבניה של מבנה הנתונים,
- (3) סיבוכיות זמן שאילתא לדווח האם החברים $v \in V$ ו- $u \in V$ מכירים זה את זה. זמן השאילתא כולל את חיפוש v ו- u .

הצעתו של מהנדס 1 התבררה כבעייתית משום שמבנה הנתונים הינו סטטי ומגביל מראש את מספר חברי הרשת. מהנדס צעיר בוגר מכללת אורט בראודה הציע את התהליך (אלגוריתם) האיטרטיבי הבא העוקב אחרי גודל הרשת ומאפשר שימוש במטריצה סטטית לכל גודל רשת:

1. יהא $n = 1$
2. הקצה בזכרון מטריצה D בגודל $n \times n$ מאותחלת ל-0.
3. אם מספר המנויים איננו עולה על n קפץ ל-7, אחרת המשך ל-4.
4. $n = 2n$
5. הקצה בזכרון מטריצה D' בגודל $n \times n$ מאותחלת ל 0.
6. העתק את D לתוך D'
7. חזור ל-3.

הרשת החברתית "שכנים טובים" הפכה ללהיט היסטרי ומספר חבריה הרקיע לשחקים והגיע לגודל M . יש לענות על שתי השאלות הבאות:

- ג. (10 נק') מהו סך כל הקצאות הזכרון הנדרשות בצעדים 2 ו-5?
- ד. (10 נק') מהו סך כל הזמן הנדרש לבצוע ההעתקות בצעד 6?

פתרון שאלה 1

מאחר ו $G(V, E)$ ידוע מראש, במבני הנתונים הדינאמיים ב' וג' ניתן לבנות את $N(v)$ תוך כדי הכנסת v עצמו. יהא $|V| = n$.

א. מספר ההיכירויות של כל חבר איננו מוגבל.

1. גודל המטריצה $\Theta(n^2)$.

הזמן למלאה $\Theta(n^2)$.

זמן שאילתא $\Theta(1)$.

2. גודל רשימת הקדקים הראשית $\Theta(n)$ ובכל קדקד רשימה מקושרת משנית בגודל $\Theta(n)$ ולכן סה"כ זכרון $\Theta(n^2)$.

הזמן הנדרש לבנית רשימה מקושרת ראשית ליצוג V הוא $\Theta(n)$. בניית $N(v)$ דורשת $\Theta(n)$ זמן. זה קורה לכל קדקד ולכן בסה"כ זמן הבניה $\Theta(n^2)$.

זמן שאילתא מרכב מ $\Theta(n)$ גישה ל $v \in V$ ו $\Theta(n)$ למציאה האם $u \in N(v)$, וסה"כ $\Theta(n)$.

3. גודל עץ AVL הראשי לאכסון קדקים הינו $\Theta(n)$ ובכל קדקד עץ AVL משני לאכסון $N(v)$ בגודל $\Theta(n)$ ולכן סה"כ זכרון $\Theta(n^2)$.

הכנסת קדקד לעץ AVL דורשת $\Theta(\log n)$ ולכן בניית העץ הראשי דורשת $\Theta(n \log n)$. כנ"ל כל אחד מ $\Theta(n)$ העצים המשניים, ובסה"כ זמן בנייה $\Theta(n^2 \log n)$.

זמן שאילתא מרכב מ $\Theta(\log n)$ גישה ל $v \in V$ ו $\Theta(\log n)$ למציאה האם $u \in N(v)$, וסה"כ $\Theta(\log n)$.

נסכם בטבלה

זמן שאילתא	זמן בניה	גודל זכרון	
$\Theta(1)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	א. מטריצה
$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	ב. רשימות מקושרות
$\Theta(\log n)$	$\Theta(n^2 \log n)$	$\Theta(n^2)$	ג. עצי AVL

ב. מספר ההיכירויות של כל חבר מוגבל ע"י $\log |V|$.

1. אין שנוי מ'א'.

2. גודל רשימת הקדקים הראשית $\Theta(n)$ ובכל קדקד רשימה מקושרת משנית בגודל $\Theta(\log n)$ ולכן סה"כ זכרון $\Theta(n \log n)$.

הזמן הנדרש לבנית רשימה מקושרת ראשית ליצוג V הוא $\Theta(n)$. הזמן הנדרש לבנית רשימה מקושרת משנית ליצוג $N(v)$ הוא $\Theta(\log n)$ ובסה"כ זמן הבניה $\Theta(n \log n)$.

זמן שאילתא מרכב מ $\Theta(n)$ גישה ל $v \in V$ ו $\Theta(\log n)$ למציאה האם $u \in N(v)$, וסה"כ $\Theta(n)$.

3. גודל עץ AVL הראשי לאכסון קדקים $\Theta(n)$ ובכל קדקד עץ AVL משני לאכסון $N(v)$ בגודל $\Theta(\log n)$ ולכן סה"כ זכרון $\Theta(n \log n)$.

הכנסת קדקד לעץ AVL דורשת $\Theta(\log n)$ ולכן בניית העץ הראשי דורשת $\Theta(n \log n)$. כל אחד מ- $\Theta(n)$ העצים המשניים בגודל $\Theta(\log n)$ ובניתו דורשת $\Theta(\log n \log \log n)$ ובסה"כ זמן בנייה $\Theta(n \log n \log \log n)$.
 זמן שאילתא מרכב מ $\Theta(\log n)$ גישה ל $v \in V$ ו $\Theta(\log \log n)$ למציאה האם $u \in N(v)$, וסה"כ $\Theta(\log n)$.
 נסכם בטבלה

זמן שאילתא	זמן בניה	גודל זכרון	
$\Theta(1)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	א. מטריצה
$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	ד. רשימות מקושרות
$\Theta(\log n)$	$\Theta(n \log n \log \log n)$	$\Theta(n \log n)$	ה. עצי AVL

ג. שימו לב שהמטריצה גדלה בחזקות של 2. ולכן במדה וישנם M קדקדים ב $G(V, E)$, גודל המטריצה D הנדרש הינו $2^k \times 2^k$, $k = \lceil \log_2 M \rceil$. D מתקבלת אחרי k איטרציות וסה"כ הקצאות זכרון

$$\sum_{j=0}^k 2^j \times 2^j = \sum_{j=1}^k 4^j = \frac{4^{k+1}-1}{4-1} = \Theta(M^2)$$

ד. כל מטריצה חדשה מכילה פי 4 איברים מקודמתה, ולכן סה"כ כמות פעולות ההעתקה של איברים ממטריצה ישמה לחדשה הוא רבע מסה"כ גודל המטריצות ולכן גם כן $\Theta(M^2)$.

שאלה 2 – 40 נק'

ברשת רמי לוי יש n סניפים. עבור כל סניף k נתון מספר שלם w_k , כאשר נתון שמספר זה נמצא בטווח:

$$1 \leq w_k \leq n^2$$

מספר זה, הנקרא גם המשקל של הסניף, מגדיר את השווי של אותו סניף במאות-אלפי שקלים.

על פי הנחיית הרגולטור, הרשת נדרשת לפצל את עצמה לשתי חברות בת נפרדות, נסמן אותן R, L . בתהליך הפיצול כל אחד מהסניפים ישוייך בשלמותו לאחת מחברות הבת (כלומר בלתי אפשרי לחלק סניף מסוים בין שתי חברות הבת). למען ההגינות, הרגולטור דורש שהשווי הכולל של כל אחת מחברות הבת יהיה זהה, כלומר:

$$\sum_{k \in R} w_k = \sum_{k \in L} w_k$$

א. (30 נק') הציגו אלגוריתם יעיל שקובע האם דבר זה אפשרי (האלגוריתם עונה "כן"/"לא"). מה זמן הריצה של האלגוריתם ומהי סיבוכיות המקום? לצורך הפשטות מותר להניח שפעולות אריתמטיות (חיבור/חיסור/השוואה) מתבצעות בזמן קבוע $O(1)$.

ב. (10 נק') כעת משנים את הטווח בו נמצא w_k באופן הבא:

$$1 \leq w_k$$

כלומר, הערך של כל סניף (w_k) הוא מספר שלם חיובי ללא חסם עליון. האם הפתרון מהסעיף הקודם תקף? במידה וכן – הסבירו מדוע, כתבו האם יש צורך לשנות אותו והאם זמן הריצה השתנה. במידה ולא – הסבירו מדוע, והציעו במספר שורות רעיון לאלגוריתם חלופי, לאו דווקא היעיל ביותר (כולל חישוב זמן הריצה).

פתרון שאלה 1

א. נשתמש בתכנון דינמי. הערך הכולל של הסניפים הוא:

$$W = \sum_{k=1}^n w_k$$

ואנחנו מחפשים למעשה תת קבוצה של סניפים שהערך הכולל שלהם הוא בדיוק $\frac{W}{2}$. לשם כך נתייחס לבעיה כבעיית תרמיל הגב עם שינוי קטן. כזכור, בעיית תרמיל הגב מוגדרת כך: נתונה קבוצת עצמים שלכל אחד מהם משקל ומחיר, ובנוסף נתון חסם על המשקל. המטרה היא למצוא אוסף של העצמים הנתונים שסכום משקליהם אינו עולה על החסם הנתון, ומחירו מרבי. במקרה שלנו העצמים הם הסניפים, והחסם על המשקל הוא $\frac{W}{2}$. לאחר שנמצא את אוסף העצמים שסכומם מקסימלי, יישאר לנו רק לבדוק אם סכום זה שווה בדיוק ל- $\frac{W}{2}$ (ואז האלגוריתם יחזיר "כן") או שהסכום קטן מ- $\frac{W}{2}$ (ואז האלגוריתם יחזיר "לא"). ננסח בעיה שקולה לבעיית תרמיל הגב ונפתור אותה (שימו לב שניתן לפתור את הבעיה באמצעות תכנות דינמי בזכות הנתון שמשקלי הסניפים חסומים!):

לשם כך נגדיר מטריצה $S \in \mathbb{R}^{n \times W}$, כאשר הכניסה ה- $S[i, w]$ במטריצה הינה מחיר הפתרון המיטבי שניתן להשיג באמצעות הסניפים הסידורי שלהם אינו עולה על i ושסכום משקלם אינו עולה על w . כעת נוכל לפתח נוסחת נסיגה עבור $S[i, w]$:

$$S[i, w] = \begin{cases} S[i-1, w], & w_i > w \\ \max(S[i-1, w], S[i-1, w-w_i] + w_i), & w_i \leq w \end{cases}$$

כלומר: אם לא ניתן לקחת את הסניף i , אז $S[i, w]$ שווה ל- $S[i-1, w]$. אחרת, ניקח את המקסימום מבין שתי אפשרויות – לכלול את w_i או לא לכלול אותו.

כעת נוכל לאתחל את השורה הראשון $S[0, w] = 0 \forall w$ (כיוון שבלי אף סניף המחיר הוא 0), ולאחר מכן להריץ את נוסחת הנסיגה ולמלא את המטריצה S . כעת כל שנותר זה לבדוק את התא במטריצה $S[n, W]$ ולבדוק אם $S[n, W] = \frac{W}{2}$ או $S[n, W] < \frac{W}{2}$, ובהתאם לכך להכריע אם האלגוריתם יחזיר "כן" או "לא".

זמן ריצה: $O(nW)$. לפי הנתון נוכל להסיק:

$$W = \sum_{k=1}^n w_k \leq \sum_{k=1}^n n^2 = n^3$$

$$\rightarrow O(nW) = O(n^4)$$

סיבוכיות מקום: $O(nW) = O(n^4)$.

ב. בסעיף הקודם יכלנו להשתמש בתכנון דינמי ולבנות את המטריצה S רק אודות העובדה שהסכום W היה חסום. כעת הוא לא חסום והמטריצה יכולה להיות אינסופית, לכן התשובה היא לא!

אלגוריתם חלופי יכול להיות אלגוריתם רקורסיבי המחשב את כל הקומבינציות האפשריות. אלגוריתם זה רץ בסיבוכיות של $O(2^n)$.

שאלה 3 (זרימה ברשתות) – 40 נק'

נתונה רשת זרימה $G(V, E)$ המקיימת את כל הנדרש, פרט לעובדה שישנו צומת $u \in V$ כך שלא קיים אף מסלול $P(s, t)$ שעבורו $u \in P(s, t)$. נתון שהקיבולות והזרימות הינם מספרים שלמים. יש להוכיח שישנה זרימה מקסימלית f המקיימת $f(u, v) = f(v, u) = 0 \forall v \in V$.

פתרון שאלה 3

תהי f זרימה מקסימלית.

נתבונן בצומת u ובכל הקשתות הנכנסות והיוצאות $e(v, u)$ ו $e(u, v)$, בהתאמה. ראשית, ברור שאם ישנן רק קשתות נכנסות או רק קשתות יוצאות אזי מתוך חוק השימור הזרימה דרכן חייבת להיות אפס.

אחרת, נניח שקיימות גם קשתות נכנסות וגם קשתות יוצאות. נניח שקיימת זרימה חיובית $f(p_0, u) > 0$ דרך איזושהי קשת נכנסת $e(p_0, u) \Leftrightarrow$ קיימת זרימה חיובית $f(u, q_0) > 0$ דרך קשת יוצאת $e(u, q_0)$. מאחר ונתון $\nexists P(s, t)$ כך ש $u \in P(s, t) \Leftrightarrow$ מתקיים לפחות אחד מבין $\nexists P(s, u)$ או $\nexists P(u, t)$.

א. נניח ש $\nexists P(s, u)$

מאחר ו $f(p_0, u) > 0$ שימור הזרימה $\Leftrightarrow \exists p_1 \in V$ כך ש $f(p_1, p_0) > 0$ ולכן $\exists p_2 \in V$ כך ש $f(p_2, p_1) > 0$ וכן הלאה. מאחר ו $\nexists P(s, u)$ ו G סופי יוצר מעגל $e(p_0, u), e(p_{k-1}, p_{k-2}), \dots, e(p_1, p_0)$ בעל k קשתות שהזרימה דרכן חיובית, והמעגל אינו עובר דרך s . נתבונן בקשת במעגל שבה הזרימה $m > 0$ מינימלית ונחסיר את m מכל קשתות המעגל. חוקיות הזרימה נשמרת משום ש:

1. ההחסרה בכל צומת במעגל היא לקשת נכנסת ויוצאת ולכן חוק שימור הזרימה מתקיים.
 2. אף זרימה לא חורגת מקיבולת של הקשת דרכה היא עוברת. בנוסף
 3. מאחר המעגל אינו עובר דרך s הזרימה f דרך s איננה משתנה.
 4. לו $t \in V$ (sink) חלק מהמעגל הזרימה דרכו נשמרת כי $f = \sum_{v \in V} f(v, t) - \sum_{v \in V} f(t, v)$. בפרט הזרימה דרך הקשת הנכנסת $e(p_0, u)$ והיוצאת $e(u, p_{k-1})$ קטנה ב m . כל עוד קיימת איזושהי זרימה חיובית דרך u נחזור על התהליך הנ"ל, ומאחר והזרימות הינן מספרים שלמים, מספר סופי של חזרות יאפס את הזרימה דרך u מבלי לשנות את f .
- ב. נניח ש $\nexists P(u, t)$ פתרון סימטרי לקודם ע"י הפיכת כווני הקשתות ותפקידי s ו t .