אותות אקראיים ורעש - סמסטר א' תשע"א- פתרון תרגיל 1

מושגים בסיסיים בתורת ההסתברות

שאלה 1

א. $\int_0^{10} cx^2(10-x)dx = c\int_0^{10} 10x^2 - x^3 dx = c\left(\frac{10x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^{10}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2500}$

ב. $\frac{3}{2500}\int_0^{10} x^3(10-x)dx = 6$

ג. $V(x) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{3}{2500}\int_0^{10} x^4(10-x)dx - 36 = 4$

ד. $p(x \ge 9 \mid x \ge 7) = \frac{p(x \ge 7 \mid x \ge 9)p(x \ge 9)}{p(x \ge 7)} = \frac{p(x \ge 9)}{p(x \ge 7)} = 0.15$ לפי בייס.

שאלה 2

(i) ל- N=0 ול- N=1 המאורעות בת"ס כי P(A)=0 ו- P(A∩B)=0.

(ii) ל- N≥2:

P(A)=1-P{(only boys)U(only girls)}=1-P{only boys}-P{only girls}=

$1-0.5^N - 0.5^N = 1-0.5^{N-1}$

P(B)=P{(only boys)}U(check for one girl)}=P{only boys}+P{check for one girl}=

$= 0.5^N + N*0.5*0.5^{N-1} = (N+1)*0.5^N$

$P(A \cap B) = P(Check\ \ for\ \ one\ girl) = N*0.5^N$

B,A בת"ס אמ"ם:

$(1-0.5^{N-1})((N+1)0.5^N) = N*0.5^N \Leftrightarrow 1 = (N+1)0.5^{N-1}$

קל לבדוק ש:

- N =2 אינו מקיים שויון.
- N = 3 מקיים שויון.
- N ≥ 4 לא מקיים שויון כי $1 > (4+1)/2^3$ ו- $(N+1)/2^{N-1}$ פונקציה יורדת ב- N.

לכן המסקנה היא B,A בת"ס אמ"ם N = 3,1,0.

שאלה 3

נגדיר α_n – הסתברות לכך שבשלב ה- n רוני יוציא פרי מסיר א'.

α_n = P{פרי n-1 מסיר א' ואגס} + P{פרי n-1 מסיר ב' ותפוח}=

$= \alpha_{n-1}\cdot P + (1-\alpha_{n-1})(1-q) = \alpha_{n-1}(P+q-1)+1-q$

$\alpha = \frac{1-q}{2-P-q} \Leftarrow \alpha = \alpha(P+q-1)+(1-q) \Leftarrow \exists \lim_{n\to\infty}\alpha_n \Leftarrow |P+q-1| \le 1$

<u>שאלה 4</u>

ניתן להוכיח בשני הכיוונים:

א. $E\{I_A\}=P(A)$ - נסתכל על הפונקציה שהגדרנו. ניתן לראות שההסתברות שנקבל $I_A(\xi)=1$ היא ההסתברות שיקרה המאורע A, ולכן ניתן לרשום את הפונקציה באופן הבא:

$$I_A=\begin{cases}1 & w.p.\ P(A)\\ 0 & w.p.\ 1-P(A)=P(\overline{A})\end{cases}$$

ולכן חישוב תוחלת לפי הגדרה נותן את התוצאה הבאה:

$$E\{I_A\}=1\cdot P(A)+0\cdot P(\overline{A})=P(A)$$

ב. $P(A)=E\{I_A\}$ - נסתכל על הגדרת ההסתברות:

$$P(A)=\int_{\xi\in A}dP(\xi)=\int_{\xi\in\Omega}I_A(\xi)dP(\xi)=E\{I_A\}$$

<u>שאלה 5</u>

א. תוחלת:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)\cdot dx=\int_0^{\infty}x\cdot\frac{x}{\sigma^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot dx=-\left[x\cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot dx=$$

$$=0+\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}}\cdot\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot dx=\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma$$

כדי לחשב שונות, נחשב ראשית את המומנט השני:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f_X(x)\cdot dx=\int_0^{\infty}x^2\cdot\frac{x}{\sigma^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot dx=-\left[x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}2\cdot x\cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot dx=$$

$$=0+2\cdot\sigma^2\cdot\int_0^{\infty}\frac{x}{\sigma^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot dx=2\cdot\sigma^2\cdot\left[-e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}}\right]_0^{\infty}=2\cdot\sigma^2$$

לפיכך:

$$VAR\{X\}=E\{X^2\}-E^2\{X\}=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sigma^2$$

ב. נרשום ראשית טור טיילור ונגזור אותו:

$$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\Rightarrow e^{\lambda}=\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{k!}=\frac{1}{\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\lambda}=\frac{d^2}{d\lambda^2}e^{\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(k-1)\cdot\frac{\lambda^{k-2}}{k!}=\frac{1}{\lambda^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}-\frac{1}{\lambda^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

עתה התוחלת היא:

$$E\{X\}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

שוב, נחשב קודם מומנט שני:

$$E\{X^{2}\}=\sum_{k=1}^{\infty}k^{2}\cdot P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}k^{2}\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda^{2}\cdot\frac{1}{\lambda^{2}}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k^{2}\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!}=$$

$$=e^{-\lambda}\cdot\lambda^{2}\cdot\left(e^{\lambda}+\frac{1}{\lambda^{2}}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!}\right)=e^{-\lambda}\cdot\lambda^{2}\cdot\left(e^{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\cdot e^{\lambda}\right)=\lambda^{2}+\lambda$$

והשונות היא: $VAR\{X\}=E\{X^{2}\}-E^{2}\{X\}=\lambda^{2}+\lambda-\lambda^{2}=\lambda$.