תרגיל בית - 1

שאלה מספר 1:

נתון ערוץ BSC חסר זכרון עם הסתברות שגיאה לסימבול $p = 0.4$.

א. חשבו את ההסתברויות המותנות הבאות $P(0|1), P(1|0)$

ב. נגדיר $p(x|y,z)$ כהסתברות שיתקבל x בהינתן ששודר y בשידור הנוכחי z בשידור שקדם לו. חשבו את ההסתברויות המותנות $P(0|1,0), P(1|1,1), P(0|1), P(1|0)$

פתרון תרגיל 1:

א. $P(0|1) = P(1|0) = 0.4$

ב. $P(0|1,0) = P(0|1) = P(1|0) = 0.4$

$*P(1|1,1) = 0.6$

*הערוץ חסר זיכרון ולכן המידע על השידור הקודם לא רלוונטי.

שאלה מספר 2:

נתון ערוץ **Symmetric DMC** עם $q = 3, p = 0.1$. שודר הסימבול x ונקלט הסימבול y.

חשבו את כל ההסתברויות המותנות $x, y \in \{0,1,2\}$, $p(x|y)$

פתרון תרגיל 2:

$$p(x|y) = \begin{cases} 0.8 & x = y \\ 0.1 & x \neq y \end{cases}$$

שאלה מספר 3:

נתון הקוד הבא:

מילת האינפורמציה:		מילת הקוד:
0	$\rightarrow$	000000
1	$\rightarrow$	111111

א. מהו אורך הקוד?

ב. מהו מימד הקוד (אורך מילת האינפורמציה)?

Document Produced by deskPDF Unregistered :: http://www.docudesk.com

ג. מה מספר מילות הקוד?

ד. האם הקוד ליניארי? באם לא, הוסיפו את המילים החסרות.

ה. מהו המרחק המינימאלי של הקוד?

ו. מהי יכולת גילוי השגיאות של הקוד?

ז. מהי יכולת תיקון השגיאות של הקוד?

פתרון תרגיל 3:

א. $n = 6$

ב. $k = 2$

ג. $q^k = 2^1 = 2$

ד. הקוד ליניארי. כל קומבינציה ליניארית של שתי המילים תניב את אחת מהן בחזרה וכנ"ל כפל בסקלר(0 או 1).

ה. יש רק זוג מילים אחד. המרחק ביניהם הוא 6 לכן זהו גם המרחק המינימאלי כלומר $d = 6$.

ו. יכולת גילוי השגיאות היא 5. המרחק בין שתי המילים הוא 6 ולכן אם יקרו 6 שגיאות במילה ששודרה נקבל מילה השייכת לאוסף מילות הקוד ולא נחשוב שקרתה שגיאה. לעומת זאת אם יקרו רק 5 שגיאות, נקבל מילה שאינה שייכת לאוסף המילים המקורי ולכן נדע שחלה שגיאה. באופן כללי ניתן להסיק מכך שיכולת גילוי השגיאות היא $d-1$

ז. יכולת תיקון השגיאות של הקוד היא 2. אם תקרינה 3 שגיאות, למשל שודרה מילת האפס והתקבלה המילה 001011, לא נוכל להכריע מה שודר. לעומת זאת אם שידרנו 000000 וחלו 2 שגיאות והתקבלה המילה 010010 נחליט 000000 (כיוון שרוב הסימבולים הם 0).

באופן כללי יכולת התיקון t ניתנת לחישוב לפי הנוסחא: $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$

שאלה מספר 4

הוכיחו או הפריכו

א. המרחק בין שתי מילות קוד בינארי בעלות משקל אי זוגי, הוא אי זוגי

ב. משקל Hamming של סכום וקטורים B, A מקיים $wt(A+B) = wt(A) + wt(B)$.

פתרון:

דוגמא נגדית עבור שני הסעיפים $A = (1,0,1,1), B = (0,1,1,1)$

שאלה מספר 5:

קוד Odd parity באורך 8 מוגדר באופן הבא, 7 הביטים הראשונים הם ביטי אינפורמציה והביט הנוסף דואג לכך שמספר האחדים במילת הקוד יהיה אי זוגי.

האם זהו קוד ליניארי? מהם הפרמטרים של הקוד (אורך, מימד ומרחק מינימאלי)?

פתרון:

הקוד הנתון אינו ליניארי. נראה כי צירוף ליניארי של שתי מילות קוד אינו נותן מילת קוד:

Document Produced by deskPDF Unregistered :: http://www.docudesk.com

$$(01110000)+(00001110)=(01111110)$$

קיבלנו מילה בעלת מספר זוגי של אחדים ולכן אינה מילת קוד. כמו כן מילת האפס אינה חלק מהקוד.

פרמטרי הקוד: $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{M},\boldsymbol{d})=(8,2^7,2)$ כאשר $\boldsymbol{M}$ מייצג את מספר מילות הקוד.

<u>שאלה מספר 6:</u>

$$(0,0,0,0,0,0)$$
$$(2,2,1,2,0,1)$$
$$(1,1,2,1,0,2)$$
$$(1,2,0,1,2,1)$$
$$(0,1,1,0,2,2)$$

א. האם אוסף המילים שלפנינו הוא קוד ליניארי מעל $\boldsymbol{GF}(3)$ המקיים $\boldsymbol{n}=6,\boldsymbol{k}=2$.

ב. במידה ולא, אילו מילים עלינו להוסיף על מנת שיהפוך לקוד ליניארי?

ג. מהו המרחק המינימאלי של הקוד?

ד .מהי יכולת גילוי השגיאות של הקוד?

ה. מהי יכולת תיקון השגיאות של הקוד?

ו. האם הקוד ציקלי?

ז. מה מספר המילים המינימאלי שבאמצעותן ניתן ליצור את כל מילות הקוד? תן דוגמא לסט כזה.

ח. האם סט זה הוא יחיד ?

ט. מה מספר הסטים השונים?

<u>פתרון:</u>

<u>תזכורות:</u>

1. קוד לינארי הוא קוד המקיים את התנאים הבאים:

   א.כל קומבינציה לינארית של מילות קוד היא מילת קוד

   ב. כל כפל של סקלר במילת קוד היא מילת קוד

2. קוד ציקלי הוא קוד לינארי המקיים תנאי נוסף: הזזה של מילת קוד גם היא מילת קוד.

   א. לא, תנאי ב' של הגדרת קוד ליניארי אינו מתקיים למשל, חסרה המילה $2\cdot(0,1,1,0,2,2)=(0,2,2,0,1,1)$.

   ב. על מנת שהקוד יהפוך לקוד ליניארי עלינו להוסיף את המילים הבאות:

$$(2,0,2,2,2,0)=(1,2,0,1,2,1)+2(2,2,1,2,0,1)$$
$$(2,1,0,2,1,2)=2(1,2,0,1,2,1)$$
$$(1,0,1,1,1,0)=2(1,2,0,1,2,1)+(2,2,1,2,0,1)$$
$$(0,2,2,0,1,1)=2(1,2,0,1,2,1)+2(2,2,1,2,0,1)$$

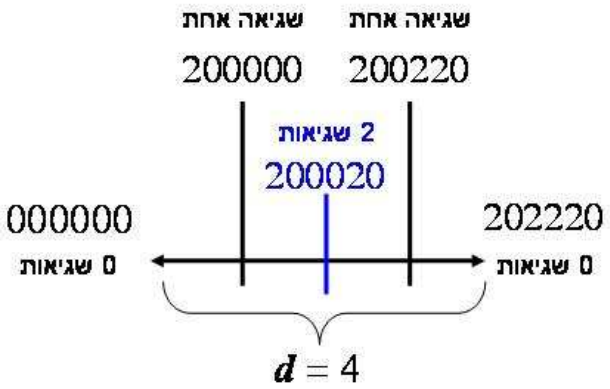
<u>הערה</u>: מספר המילים באוסף בקוד ליניארי מחושב על ידי $\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{k}}$. במקרה שלנו $3^2=9$.

Document Produced by deskPDF Unregistered :: http://www.docudesk.com

ג. מרחק מינימאלי ניתן לחשב על ידי מציאת מספר הסימבולים השונים בין כל זוג מילים ולאחר מכן לבחור את המספר המינימאלי מביניהם. אצלנו המרחק המינימאלי הוא $\boldsymbol{d} = 4$. ניתן היה להסתמך על תכונת הליניאריות, לשקול (המינג) את המילים ולבחור את המשקל המינימאלי (4).

ד. המרחק המינימאלי הוא 4, ז"א קיים זוג מילים השונים ב-4 מקומות. אם יחולו 4 שגיאות באחת המילים, לדוגמא: $(2,0,2,2,2,0) \overset{4\ Errors}{\leftrightarrow} (0,0,0,0,0,0)$, תיתכן התחזות של מילה אחת למילה השנייה בזוג ולא נוכל לגלות אותה (יכולת הגילוי < 4). לכן, יכולת גילוי השגיאות של הקוד היא 3.

ה. יכולת תיקון השגיאות של הקוד היא 1



במידה ותחולנה שתי שגיאות ומעלה לא נוכל להכריע מהי המילה ששודרה.

ו. לא, אם נבצע הזזה אחת ימינה של המילה $(2,2,1,2,0,1)$ נקבל $(1,2,2,1,2,0)$ אשר אינה נמצא בקוד.

ז. מספר המילים המינימאלי שבאמצעותן ניתן ליצור את כל מילות הקוד הוא למעשה מספר ווקטורי הבסיס הפורשים את מרחב המילים שהצגנו. יש לבחור את אחת המילים (לא את מילת האפס) כווקטור בסיס ראשון. לאחר מכן יש לבחור מילה נוספת כווקטור בסיס אך כעת לא נוכל לבחור מילה שהיא קומבינציה ליניארית של ווקטורי הבסיס הקודמים שבחרנו. ממשיכים בתהליך זה עד שלא יוותרו עוד מילים שניתן לבחור.

<u>לדוגמא</u>: $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,0,1,2,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2.2.1.2.0.1)$

דרך נוספת למציאת מספר ווקטורי הבסיס היא לרשום את כל שמונה המילים (כולם חוץ ממילת האפס) כשורות במטריצה. לאחר מכן יש לדרג את המטריצה. המספר המבוקש יהיה מספר השורות שלא יתאפסו במטריצה המדורגת.

ח. לא, כפל בסקלר של אחד מווקטורי הבסיס ישמור על אי התלות ויפרוש אף הוא את המרחב. כנ"ל לגבי החלפת אחד הוקטורים בקומבינציה לינארית שלו עם השני.

Document Produced by deskPDF Unregistered :: http://www.docudesk.com

ט. מספר הסטים השונים הוא מספר זוגות הווקטורים הבלתי תלויים שניתן למצוא מתוך 8 מילות הקוד (מילת ה"אפס" לא תוכל לשמש כווקטור בסיס). ישנן 8 אפשרויות לבחירת ווקטור הבסיס הראשון(כל המילים מלבד מילת האפס). עבור הווקטור השני ישנן 6 אפשרויות (כל המילים מלבד מכפלות בסקלר של הווקטור הראשון שבחרנו). המספר המדויק הוא $\frac{(9-1)(9-3)}{2}$ חילקנו ב-2 כיוון שבסעיף זה לא נתבקשנו לתת חשיבות לסדר בחירת הווקטורים.

<u>שאלה מספר 7:</u>

נתון כי אוסף המילים הבאות פורש קוד ליניארי מעל $\boldsymbol{GF}(3)$:

$$(2,1,0,1)$$
$$(1,2,0,2)$$
$$(0,1,1,2)$$

1. מהו אורך הקוד?
2. מהו מימד הקוד? מה מספר מילות הקוד?

<u>פתרון:</u>

1. $\boldsymbol{n}=4$
2. נציב את מילות הקוד במטריצה, נדרג אותה ונבדוק מה מספר השורות השונות מאפס בתום הדירוג:

$$\begin{pmatrix}2101\\1202\\0112\end{pmatrix}\overset{\text{I+II->II}}{\sim}\begin{pmatrix}2101\\0000\\0112\end{pmatrix}\overset{\text{II<->III}}{\sim}\begin{pmatrix}2101\\0112\\0000\end{pmatrix}$$

בתום הדירוג קיבלנו שתי שורות השונות מאפס ולכן $\boldsymbol{k}=2$.

<u>הערה:</u> ניתן היה מראש לראות כי שתי המילים הראשונות תלויות אחת בשנייה.

מספר מילות הקוד בקוד ליניארי $\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{k}}=3^2=9$.

Document Produced by deskPDF Unregistered :: http://www.docudesk.com