

פתרון תרגיל בית – 9 חלק ב'

(פתרון תרגילים 1,2,5 בקובץ פתרון תרגיל בית 9 חלק א'. תרגיל 6 נפתר בכיתה)

תרגיל 3:

רשום את הפרמטרים (אורך, מימד, ומרחק מתוכנן) של כל קודי ה-BCH בינאריים, פרימיטיביים ופשוטים האפשריים באורך 31 ובאורך 63.

פתרון:

ע"מ למצוא את כל הקודים יש לפרוש את קבוצות הצמודים וע"פ יכולת התיקון לבחור $2t$ שורשים צמודים. עבור הקוד באורך 31 השדה הוא $GF(2^5)$ ועבור קוד באורך 63 השדה הוא $GF(2^6)$. שאר אופן הפתרון זהה לפתרון תרגיל 2.

תרגיל 4:

תכנן קוד Reed-Solomon באורך 31 ויכולת תיקון של 3 שגיאות. רשום פרמטרי הקוד, פולינום יוצר ותן דוגמא לשלוש מילות קוד.

פתרון:

הקוד מוגדר מעל $GF(2^5) \leftarrow GF(32)$.

$$g(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^3)(x - \alpha^4)(x - \alpha^5)(x - \alpha^6) = \dots$$

המשך חישוב הפולינום היוצר נעשה לפי טבלת לוג של השדה.

$$[31, 31-6, 31-(31-6)+1] = [31, 25, 7]$$

דוגמאות למילות קוד: $g(x), \alpha g(x), \alpha^2 g(x)$.

תרגיל 7:

תכנן קוד BCH לא פשוט עם $b = 3$ באורך 15 ויכולת תיקון 2. מצא מטריצה בודקת, פולינום יוצר ורשום את פרמטרי הקוד.

פתרון:

קוד BCH בינארי $t = 2, b = 3, n = 15 \Leftarrow$ נסמן ב- α את שורש הפולינום

$$x^4 + x + 1 \text{ המגדיר את } GF(16).$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \dots & \alpha^{12} \\ 1 & \alpha^4 & \alpha^8 & \dots & \alpha^{11} \\ 1 & \alpha^5 & \alpha^{10} & \dots & \alpha^{10} \\ 1 & \alpha^6 & \alpha^{12} & \dots & \alpha^9 \end{pmatrix} \Rightarrow g(x) = M_{\alpha^3}(x) \cdot M_{\alpha^4}(x) \cdot M_{\alpha^5}(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 + x + 1)(x^2 + x + 1)$$

פרמטרי הקוד $[15, 5, 7]$.

שימו לב שנכללים כל השורשים $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^6$ (6 שורשים) וצמודיהם.

תרגיל 8:

חזור על תרגיל 7 עבור $t = 3$ ו- $b = 11$.

פתרון:

קוד BCH בינארי אורך 15 $t = 3, b = 11$.

הפולינום היוצר כולל את השורשים $\alpha^{11}, \alpha^{12}, \alpha^{13}, \alpha^{14}, (\alpha^{15} = 1), \alpha$ ולכן

$$g(x) = M_{\alpha^0}(x) \cdot M_{\alpha^1}(x) \cdot M_{\alpha^3}(x) \cdot M_{\alpha^7}(x) = (x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4+x^3+1)$$

למעשה קיים רצף של 9 שורשים $\alpha^{11}, \dots, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ מכאן שפרמטרי הקוד

$$[15, 2, 9]$$

תרגיל 9:

צופן BCH בינארי פשוט ($b=1$) בעל הפרמטרים $t = 3, n = 15$, מוגדר ע"י $\alpha \in GF(16)$

השורש של $x^4 + x + 1$.

חשב את הפולינום היוצר של הקוד, מה מימד הקוד?

פתרון:

$$g(x) = M_{\alpha^1}(x) \cdot M_{\alpha^3}(x) \cdot M_{\alpha^5}(x) \Leftarrow \text{פרמטרי הקוד } [15, 5, 7]$$

תרגיל 10:

לפולינום היוצר של קוד ציקלי האפסים הבאים $1, \alpha^{14}, \alpha^{21}$ וכל הצמודים שלהם. כאשר α הוא

אלמנט פרימיטיבי השייך ל- $GF(64)$.

מצא את אורך ומימד הקוד כאשר:

א. הקוד הוא בינארי (מוגדר מעל $GF(2)$).

ב. הקוד מוגדר מעל $GF(8)$.

ג. הקוד מוגדר מעל $GF(64)$.

שים לב: אין צורך לחשב את $g(x)$, מספיק לרשום את כל שורשיו.

פתרון:

א. אורך הקוד בשדה $GF(2^6)$ הוא 63. דרגת הפולינום היוצר נקבעת לפי מספר

שורשיו. נתון כי $1, \alpha^{14}, \alpha^{21}$ וכל הצמודים שלהם, הם שורשיו לכן כדי למצוא את

דרגתו יש למצוא את קבוצות הצמודים הרלוונטיות.

$$\{1\}, \{\alpha^7, \alpha^{14}, \alpha^{28}, \alpha^{56}, \alpha^{44}, \alpha^{35}\}, \{\alpha^{21}, \alpha^{42}\}$$

סה"כ דרגת הפולינום היוצר היא $r = 9$

לסיכום קיבלנו $[63, 63-9]$.

ב. אורך הקוד בשדה $GF(8^2)$ הוא 63. כעת קבוצות הצמודים המכילות את השורשים

$$1, \alpha^{14}, \alpha^{21} \text{ הן: } \{1\}, \{\alpha^{14}, \alpha^{49}\}, \{\alpha^{21}, \alpha^{42}\} \text{ סה"כ דרגת הפולינום היוצר היא } r = 5$$

לסיכום קיבלנו [5-63,63].

ג. אורך הקוד בשדה $GF(64)$ הוא 63. כעת קבוצות הצמודים המכילות את השורשים

$$1, \alpha^{14}, \alpha^{21} \text{ הן: } \{1\}, \{\alpha^{14}\}, \{\alpha^{21}\}. \text{ סה"כ דרגת הפולינום היוצר היא } r = 3$$

לסיכום קיבלנו [3-63,63].

תרגיל 11:

לפולינום היוצר של קוד ציקלי (לא בהכרח BCH) האפסים הבאים $1, \alpha^8, \alpha^{15}, \alpha^{21}$ וכל

הצמודים שלהם. כאשר α הוא אלמנט פרימיטיבי השייך ל- $GF(64)$.

מצא את אורך ומימד הקוד ותן חסם תחתון למרחק המינימאלי עבור המקרים הבאים:

א. הקוד הוא בינארי (מוגדר מעל $GF(2)$).

ב. הקוד מוגדר מעל $GF(64)$.

שים לב: אין צורך לחשב את $g(x)$, מספיק לרשום את כל שורשיו.

פתרון:

א. אורך הקוד בשדה $GF(2^6)$ הוא 63. דרגת הפולינום היוצר נקבעת לפי מספר

שורשיו. נתון כי $1, \alpha^8, \alpha^{15}, \alpha^{21}$ וכל הצמודים שלהם, הם שורשיו לכן כדי למצוא את

דרגתו יש למצוא את קבוצות הצמודים הרלוונטיות.

$$\{1\}, \{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \alpha^{16}, \alpha^{32}\}, \{\alpha^{15}, \alpha^{30}, \alpha^{60}, \alpha^{57}, \alpha^{51}, \alpha^{39}\}, \{\alpha^{21}, \alpha^{42}\}$$

הפולינום היוצר היא $r = 15$

לסיכום קיבלנו [15-63,63].

למציאת חסם תחתון עליכם לפרוש את כל השורשים בשדה ולראות מהו הרצף הגדול ביותר של שורשים צמודים שניתן לבחור ולשלם באותה יתירות (אותה דרגה של הפולינום היוצר).

ב. אורך הקוד בשדה $GF(64)$ הוא 63. דרגת הפולינום היוצר נקבעת לפי מספר

שורשיו. נתון כי $1, \alpha^8, \alpha^{15}, \alpha^{21}$ וכל הצמודים שלהם, הם שורשיו לכן כדי למצוא את

דרגתו יש למצוא את קבוצות הצמודים הרלוונטיות. $\{1\}, \{\alpha^8\}, \{\alpha^{15}\}, \{\alpha^{21}\}$ סה"כ

דרגת הפולינום היוצר היא $r = 4$

לסיכום קיבלנו [4-63,63].

קוד זה אינו קוד RS לכן החסם הוא $d \geq 2$ כמו בכל קוד.