פתרון תרגיל בית - 5

שאלות 1-3 קודים ציקליים:

שאלה מספר 1

נתון פולינום יוצר $g(x)=1+x+x^4+x^5$ של קוד ציקלי בינארי $(8,3)$.

א. קודד את מילת המידע $m(x)=1+x$.

ב. האם הפולינומים הבאים שייכים לקוד

$$v(x)=1+x+x^2+x^5+x^6, \qquad u(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8$$

ג. מצא את פולינום הבדיקה $h(x)$.

ד. בדוק בעזרת $h(x)$ האם הפולינומים בסעיף ב' שייכים לקוד.

ה. רשום מטריצה יוצרת ומטריצה בודקת לקוד.

ו. רשום מטריצה יוצרת סיסטמטית לקוד.

פתרון:

א.
$$\begin{aligned} c(x)&=m(x)g(x)=(1+x)(1+x+x^4+x^5)\\ &=1+x+x^4+x^5+x+x^2+x^5+x^6\\ &=1+x^2+x^4+x^6 \end{aligned}$$

ב. בקוד ציקלי, בכדי שמילה $y(x)$ תהיה מילת קוד צריך להתקיים $y(x)\bmod g(x)=0$

נבדוק עבור המילים הנתונות בשאלה. את פעולת החילוק נבצע בדרך לא שגרתית:

$$\begin{aligned} v(x)\bmod g(x)&=(1+x+x^2+x^5+x^6)\bmod(1+x+x^4+x^5)\\ &=1+x+x^2+x^5+x\cdot x^5=1+x+x^2+1+x+x^4+x(1+x+x^4)\\ &=x^2+x^4+x+x^2+x^5=x^2+x^4+x+x^2+1+x+x^4=1 \end{aligned}$$

ולכן $v(x)$ אינה מילת קוד (בדקו גם בעזרת חילוק ארוך).

דרגת הפולינום $u(x)$ היא 8 ולכן אינו יכול להיות מילת קוד.

PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com

ג. לפי הגדרה: $h(x)=\dfrac{x^8-1}{g(x)}$

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^3+x^2+x+1 \\
\hline
x^8+1 & x^5+x^4+x+1 \\
 & \underline{x^8+x^7+x^4+x^3} \\
 & x^7+x^4+x^3+1 \\
 & \underline{x^7+x^6+x^3+x^2} \\
 & x^6+x^4+x^2+1 \\
 & \underline{x^6+x^5+x^2+x} \\
 & x^5+x^4+x+1 \\
 & \underline{x^5+x^4+x+1} \\
 & \boxed{0}
\end{array}
$$

לכן $h(x)=x^3+x^2+x+1$

ד. בקוד ציקלי, בכדי שמילה $y(x)$ תהיה מלת קוד צריך להתקיים

$$y(x)h(x)\equiv 0 \bmod (x^n-1)$$

נבדוק עבור $v(x)$ בלבד:

$$
\begin{array}{rl}
 & v(x)h(x)\bmod(x^n-1)= \\
 & x^6+x^5+x^2+x+1 \\
\times & \underline{x^3+x^2+x+1} \\
 & x^6+x^5+x^2+x+1 \\
 & x^7+x^6+x^3+x^2+x \\
 & x^8+x^7+x^4+x^3+x^2 \\
 & \underline{x^9+x^8+x^5+x^4+x^3} \\
 & x^9+x^3+x^2+1
\end{array}
$$

נשים לב כי $\begin{array}{l} x^8=1 \\ x^9=x \end{array}$ ולכן $(x^9+x^3+x^2+1)\bmod(x^8-1)=x^3+x^2+x+1\neq 0$

ולכן $v(x)$ אינה מילת קוד.

PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com

ה. $$H=\begin{array}{c} \begin{matrix} & & & & & & h_k & h_0 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0 \\ 0&0&1&1&1&1&0&0 \\ 0&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \end{array} \quad ; \quad G=\begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & \cdots & g_r & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & g_0 & g_1 & \cdots & g_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&1&0&0&1&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0&1&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

ו. בכדי למצוא מטריצה יוצרת סיסטמטית, ראשית נרשום אותה בצורה $G=\left(A \mid I_{k*k}\right)$ את I_{k*k} אין קושי למלא.

את A נמצא באופן הבא:

כל שורה i במטריצה A $(i=0...k-1)$ תמולא לפי תוצאת הביטוי הבא:

$$x^r \cdot x^i \bmod g(x)$$

התוצאה תכתב כך שה LSB נמצא מצד שמאל של השורה.

עבור השורה הראשונה נקבל:

$$x^0 x^5 \bmod g(x)=x^4+x+1$$

עבור השורה השנייה נקבל:

$$x^1 x^5 \bmod g(x)=x^5+x^2+x=x^4+x+1+x^2+x=x^4+x^2+1$$

עבור השורה השלישית נקבל:

$$x^2 x^5 \bmod g(x)=x^5+x^3+x=x^4+x+1+x^3+x=x^4+x^3+1$$

נציב ונקבל:

$$G_{systematic}\begin{pmatrix} 1&1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה מספר 2</u>

נתון קוד ציקלי (7,3) הנוצר ע"י הפולינום היוצר $g(x)=1+x+x^2+x^4$.

א. רשום את כל מילות הקוד בשני הייצוגים (כווקטור בינארי וכפולינום).

ב. מהו המרחק המינימאלי של הקוד ?

ג. מצא את הפולינום היוצר של הקוד הדואלי.

ד. בדוק בשתי דרכים שונות האם המילים הבאות הנן מילות קוד

$$y_1(x)=1+x^2+x^5+x^6,\quad y_2(x)=x+x^3+x^6,\quad y_3(x)=1+x^3$$

ה. חזור על סעיף א' אך הפעם קודד את האינפורמציה בצורה סיסטמטית.

ו. האם התקבל אותו הקוד ? הסבר

ז. מצא את H ו- G בצורתן הסיסטמטית.

PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com

פתרון:

א.

מילת אינפורמציה וקטור בינארי	פולינום אינפורמציה $m(x)$	מילת קוד פולינום $c(x)=m(x)\cdot g(x)$	מילת קוד וקטור בינארי
000	0	0	0000000
100	1	$1+x+x^2+x^4$	1110100
010	x	$x+x^2+x^3+x^5$	0111010
001	x^2	$x^2+x^3+x^4+x^6$	0011101
110	$1+x$	$1+x^3+x^4+x^5$	1001110
011	$x+x^2$	$x+x^4+x^5+x^6$	0100111
101	$1+x^2$	$1+x+x^3+x^6$	1101001
111	$1+x+x^2$	$1+x^2+x^5+x^6$	1010011

ב. המרחק המינימאלי הוא גם המשקל המינימאלי של כל אוסף מילות הקוד(מלבד מילת האפס) ולכן המשקל המינימאלי הוא 4. פרמטרי הקוד הם: $[7,3,4]_2$.

ג. הפולינום היוצר של הקוד הדואלי הוא הפולינום הבודק של הקוד הנוכחי, כלומר $h(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^3+x+1 \\
\hline
x^7+1 & x^4+x^2+x+1 \\
\underline{x^7+x^5+x^4+x^3} & \\
x^5+x^4+x^3+1 & \\
\underline{x^5+x^3+x^2+x} & \\
x^4+x^2+x+1 & \\
\underline{x^4+x^2+x+1} & \\
\boxed{0} &
\end{array}
$$

כלומר $h(x)=x^3+x+1$.

ד. עבור $y_1(x)=1+x^2+x^5+x^6$ בדיקה לפי $g(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^2+x+1 \\
\hline
x^6+x^5+x^2+1 & x^4+x^2+x+1 \\
\underline{x^6+x^4+x^3+x^2} & \\
x^5+x^4+x^3+1 & \\
\underline{x^5+x^3+x^2+x} & \\
x^4+x^2+x+1 & \\
\underline{x^4+x^2+x+1} & \\
\boxed{0} &
\end{array}
$$

PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com

לכן $y_1(x)=1+x^2+x^5+x^6$ מילת קוד.

עבור $y_1(x)=1+x^2+x^5+x^6$ בדיקה לפי $h(x)$:

$$y_1(x)h(x)=\left(1+x^2+x^5+x^6\right)\left(1+x+x^3\right)=$$
$$1+x^2+x^5+x^6+x+x^3+x^6+x^7+x^3+x^5+x^8+x^9=0\bmod\left(x^7-1\right)$$

לכן $y_1(x)=1+x^2+x^5+x^6$ מילת קוד.

עבור $y_2(x)=x+x^3+x^6$ בדיקה לפי $g(x)$:

$$\begin{array}{l|l}
 & x^2+1 \\
\hline
x^6+x^3+x & x^4+x^2+x+1 \\
 & \underline{x^6+x^4+x^3+x^2} \\
 & x^4+x^2+x \\
 & \underline{x^4+x^2+x+1} \\
 & \boxed{1}
\end{array}$$

לכן $y_2(x)=x+x^3+x^6$ אינה מילת קוד.

עבור $y_2(x)=x+x^3+x^6$ בדיקה לפי $h(x)$:

$$y_2(x)h(x)=\left(x+x^3+x^6\right)\left(1+x+x^3\right)=$$
$$x+x^2+x^4+x^3+x^4+x^6+x^6+x^7+x^9=\left(1+x+x^3\right)\bmod\left(x^7-1\right)$$

לכן $y_2(x)=x+x^3+x^6$ אינה מילת קוד.

הערה: כיוון ושארית החלוקה $\frac{y_2(x)}{g(x)}=1$ נדע ש $y_2(x)-1$ היא מילת קוד ובאמת

$$\left(y_2(x)-1\right)h(x)=y_2(x)h(x)-h(x)=$$
$$\left(1+x+x^3\right)-\left(1+x+x^3\right)=0\bmod\left(x^7-1\right)$$

עבור $y_3(x)=1+x^3$ מייד רואים כי אינה מילת קוד כיוון שדרגת הפולינום קטנה מדרגת הפולינום היוצר. כזכור, הפולינום היוצר הוא הפולינום המוני בעל המעלה הקטנה ביותר.

PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com

ה.

מילת קוד ווקטור בינארי	מילת קוד סיסטמטי $c(x)=x^{n-k}m(x)-r(x)$	שארית החלוקה בפולינום היוצר $r(x)=x^4m(x)\bmod g(x)$	פולינום אינפורמציה $m(x)$	מילת אינפורמציה ווקטור בינארי
0000000	0	0	0	000
1110100	$(x^4)+(x^2+x+1)$	$x^4\to x^2+x+1$	1	100
0111010	$(x^5)+(x^3+x^2+x)$	$x^5\to x^3+x^2+x$	x	010
1101001	$(x^6)+(x^3+x+1)$	$x^6\to x^3+x+1$	x^2	001
1001110	$(x^4+x^5)+(x^3+1)$	$x^4+x^5\to x^3+1$	$1+x$	110
1010011	$(x^5+x^6)+(x^2+1)$	$x^5+x^6\to x^2+1$	$x+x^2$	011
0011101	$(x^4+x^6)+(x^3+x^2)$	$x^4+x^6\to x^3+x^2$	$1+x^2$	101
0100111	$(x^4+x^5+x^6)+(x)$	$x^4+x^5+x^6\to x$	$1+x+x^2$	111

ו. כצפוי, התקבל אותו קוד (המיפוי שונה) – כל הפולינומים של הקוד מחלקים את $g(x)$ וכולם קומבינציה ליניארית של שלוש הזזות אפשריות.

ז. לבניית G סיסטמטית ניתן לבחור שלוש מילות קוד אשר שלושת הסימבולים האחרונים (הראשונים) שלהן יוצרים את מטריצת היחידה.

$$G_{systematic}=\begin{pmatrix}1110100\\0111010\\\underbrace{1101}_{A}\underbrace{001}_{I_3}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad H_{systematic}=\begin{pmatrix}1000101\\0100111\\0010110\\\underbrace{0001}_{I_4}\underbrace{011}_{-A^T}\end{pmatrix}$$

<u>שאלה מספר 3</u>

נתון קוד ציקלי (7,3) הנוצר ע"י הפולינום היוצר $g(x)=1+x+x^2+x^4$.

א. תכנן מקודד לא סיסטמטי לקוד.

ב. תכנן מקודדים סיסטמטים לקוד המוגדרים ע"י $g(x)$ וע"י $h(x)$.

ג. תכנן מעגל לחישוב הסינדרום.

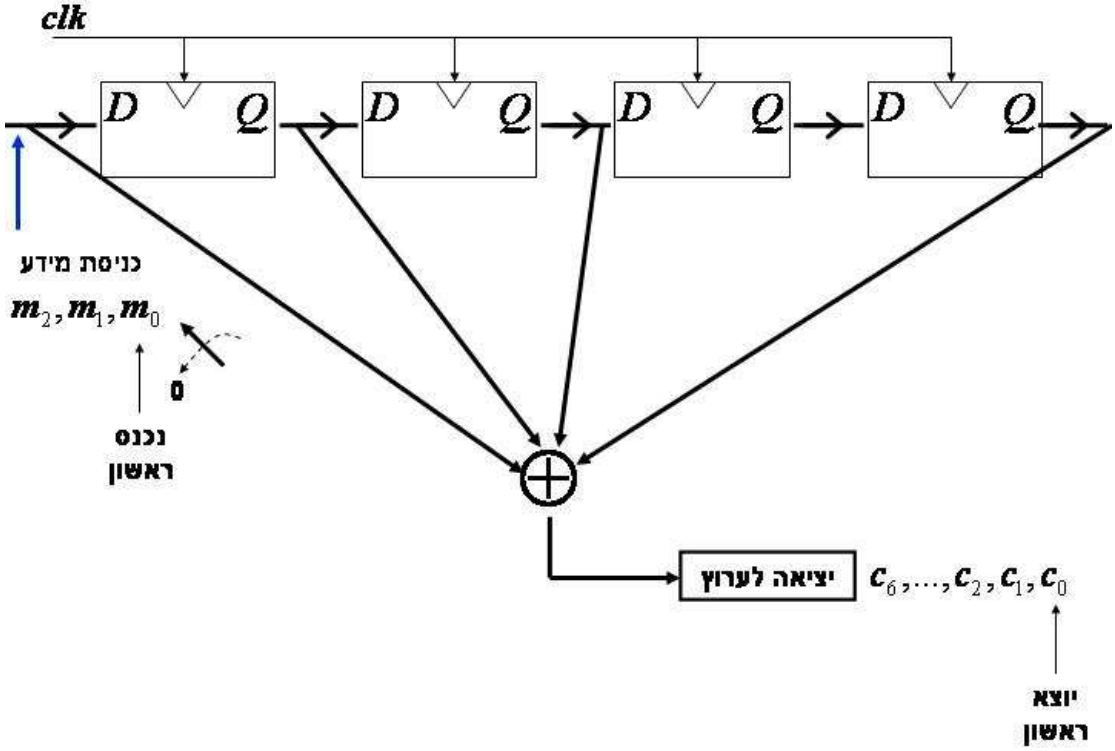
PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com

פתרון:

א. לצורך קידוד לא סיסטמטי נבנה מעגל כפל ב $g(x)$:

נחבר בטור r (4) רכיבי D-FF מאותחלים לאפס. במשך k השלבים הראשונים נכניס את מילת האינפורמציה כאשר ה LSB יכנס ראשון. במשך r השעונים הבאים נכניס אפסים. בכל שעון מתוך סה"כ n השעונים ייצא סימבול מתוך מילת הקוד כאשר ה LSB יוצא ראשון.

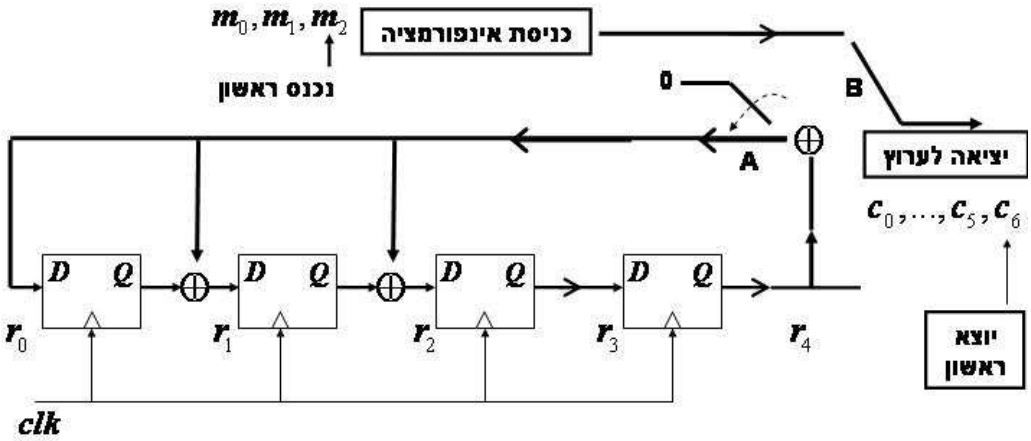
הקידוד המתקבל הוא תוצאת המכפלה בפולינום היוצר $g(x)$. להלן שרטוט המערכת:



ב. נתכנן מעגל קידוד סיסטמטי לפי $g(x)$:

לצורך כך נממש מעגל חלוקה (המחשב שארית מחלוקה בפולינום היוצר). רכיבי המעגל מאותחלים לאפס בתחילת הפעולה. נזין את מילת אינפורמציה למעגל החלוקה מצד ימין. פעולה זו שקולה להכנסת $x^4 m(x)$ למעגל החלוקה. פעולה זו מתקבלת על ידי הזזת המילה ארבעה מקומות ימינה. (הזנה מימין חוסכת $r = 4$ שעונים ביחס להזנה משמאל). להלן שרטוט המעגל:

PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com



<u>במשך $k = 3$ מחזורי שעון ראשונים:</u>

מתג A סוגר את המשוב ומאפשר ביצוע חילוק $\bmod g(x)$.

מתג B מאפשר זרימת $k = 3$ סימבולי האינפורמציה לערוץ (מכאן מושגת הסיסטמטיות).

בתום $k = 3$ מחזורים אלו השארית מוכנה ונמצאת בתוך האוגרים.

<u>במשך $r = 4$ מחזורי שעון הבאים:</u>

מתג A פותח את המשוב ומפסיק את פעולת החילוק. כעת המתג מאפשר כניסת אפסים.

מתג B מאפשר יציאת השארית לערוץ (אלו סימבולי היתירות)

בתום $r = 4$ מחזורים אלו מסתיים תהליך הקידוד.

סה"כ פעולת הקידוד נמשכת $n = k + r$ שעונים.

<u>נתכנן מעגל קידוד סיסטמטי לפי $h(x)$:</u>

פולינום הבדיקה מקיים:

$$h(x) \cdot c(x) = 0$$
$$\Rightarrow \left[\sum_{s=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} h_i c_{s-i} \right) x^s \right] \bmod \left(x^n - 1 \right) = 0$$

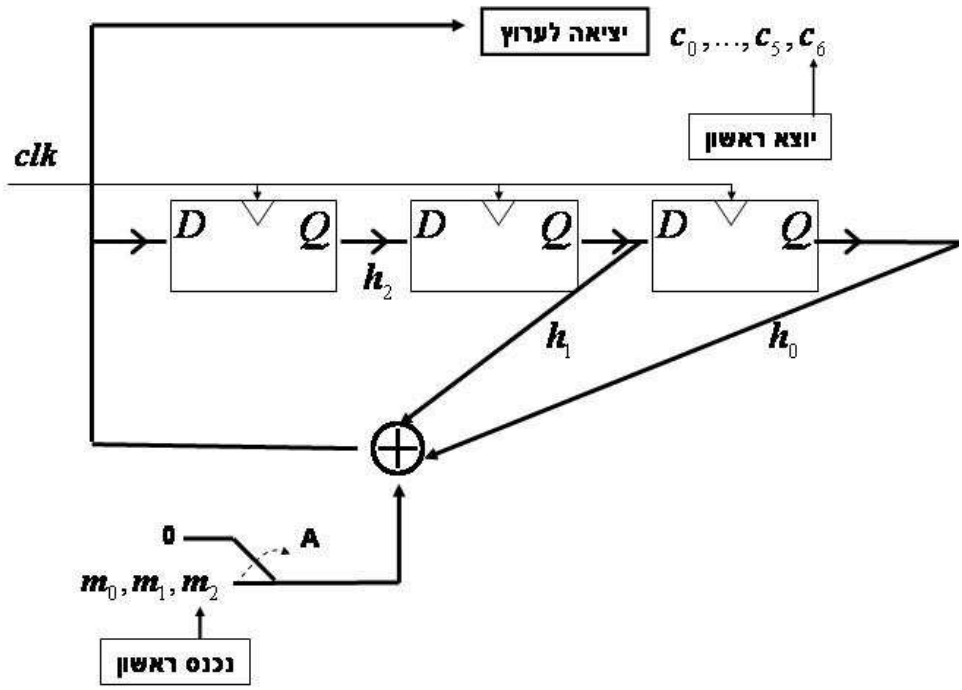
נשים לב כי $h_k = 1$ כיוון ש $h(x)$ הוא פולינום מוני. אם כך מתקיים $c_{s-k} = \sum_{i=0}^{k-1} h_i c_{s-i}$.

נציב $c_4 = m_0$, $c_5 = m_1$, $c_6 = m_2$ ונקבל קוד סיסטמטי.

עבור $c_0 \ldots c_3$ נחשב באופן רקורסיבי על ידי $h(x)$ באופן הבא:

$c_{s-3} = h_0 c_s + h_1 c_{s-1} + h_2 c_{s-2} = c_s + c_{s-1}$ להלן שרטוט המעגל:

PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com



בתחילת תהליך הקידוד הShift-Register מאותחל לאפס.

<u>במשך $k=3$ מחזורי שעון ראשונים:</u>

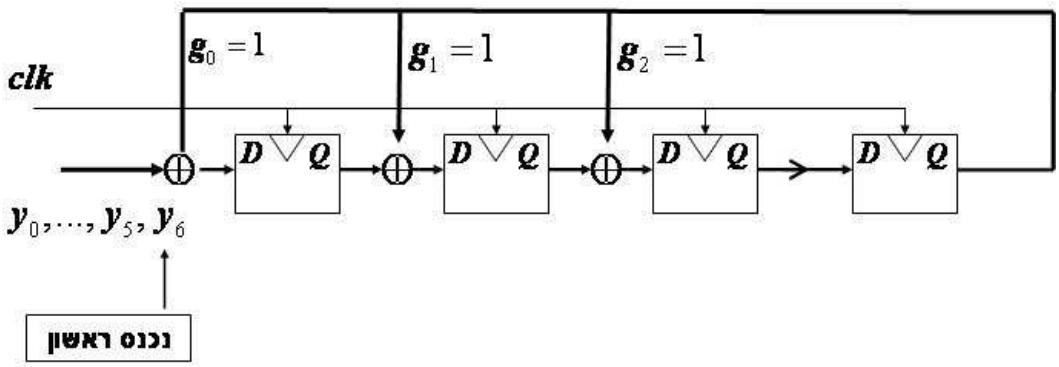
מתג A מאפשר כניסת סימבולי האינפורמציה למערכת. במקביל גם משודרים סימבולי האינפורמציה לערוץ ומכאן מושגת הסיסטמטיות.

<u>במשך $r=4$ מחזורי שעון הבאים:</u>

מתג A מאפשר כניסת אפסים למערכת ומאפשר המשך תהליך החישוב הרקורסיבי של $c_0\ldots c_3$.

סה"כ פעולת הקידוד נמשכת $n=k+r$ שעונים.

ג. <u>מעגל חישוב סינדרום על ידי חלוקה ב $g(x)$:</u>



הסינדרום הוא השארית מהחלוקה $\frac{y(x)}{g(x)}$. בתחילת התהליך הShift-Register מאותחל לאפס.

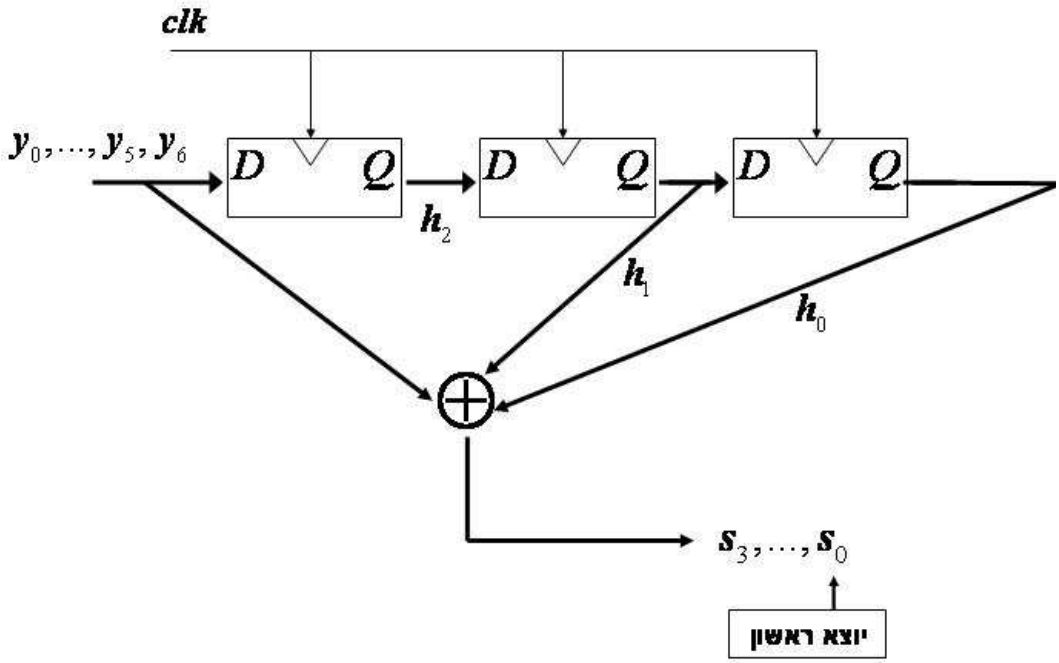
בתום שבעת מחזורי שעון השארית תמצא בShift-Register .

PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com

ניתן לקצר את תהליך החילוק אם מאתחלים את הShift-Register ב (y_3, y_4, y_5, y_6) ומתחילים את ההזנה מ $y_0 \leftarrow y_2$. במקרה זה השארית מוכנה אחרי שלושה מחזורי שעון.

מעגל חישוב סינדרום לפי פולינום בודק $h(x)$:

נסמן ב s_i את הבדיקה $\sum_{i=0}^{k} h_i c_{s-i}$ (ראה מעגל קידוד). להלן שרטוט המעגל:



בתחילת התהליך הShift-Register מאותחל לאפס.

במשך שלושת המחזורים הראשונים הShift-Register מאותחל ורק במחזור הרביעי נקבל את s_0 . כלומר בתום שבעת מחזורי שעון השארית תמצא בShift-Register .

ניתן לקצר את תהליך החילוק אם מאתחלים את הShift-Register ב (y_4, y_5, y_6) ומתחילים את ההזנה מ $y_0 \leftarrow y_2$. במקרה זה נקבל מייד את סימבול הסינדרום הראשון (s_0). הסינדרום מוכן אחרי שלושה מחזורי שעון.

שאלות 4-7 קודים ליניאריים:

שאלה מספר 4

נתון קוד ליניארי C , נגדיר קוד חדש C' באופן הבא

$$C' = \{c' | c' = c_i + y, \forall c_i \in C, y \notin C\}$$

א. הוכח כי לשני הקודים אותו מרחק מינימאלי.

ב. הוכח כי הקוד C' אינו ליניארי.

ג. מה ניתן להגיד על C' כאשר y הוא מילת קוד, כלומר $y \in C$.

PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com

פתרון:

א.

$$\min\left[\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{c}_1^{'},\boldsymbol{c}_2^{'}\right)\right]=\min\left[\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_2+\boldsymbol{y}\right)\right]=\min\left[\boldsymbol{wt}\left(\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{y}-\left(\boldsymbol{c}_2+\boldsymbol{y}\right)\right)\right]$$
$$=\min\left[\boldsymbol{wt}\left(\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{y}-\left(\boldsymbol{c}_2+\boldsymbol{y}\right)\right)\right]=\min\left[\boldsymbol{wt}\left(\boldsymbol{c}_1-\boldsymbol{c}_2\right)\right]=\boldsymbol{d}_{\min}$$

ב. אם $\boldsymbol{y}$ אינו מילת קוד $\boldsymbol{c}_i+\boldsymbol{y}\neq 0$. כלומר מילת האפס אינה בקוד ולכן הקוד C' אינו ליניארי.

ג. כאשר $\boldsymbol{y}$ הוא מילת קוד אזי $C=C'$.

שאלה מספר 5

הגדרה: עבור קוד ליניארי C נגדיר קוד דואלי $C^{\perp}$ באופן הבא:

$$C^{\perp}=\left\{x\in GF\left(q\right)\,|\,x\cdot y=0,\,\forall y\in C\right\}$$

יהיו C ו D קודים ליניאריים מעל $GF\left(q\right)$ באותו אורך. נגדיר

$$C+D=\left\{c+d\,|\,c\in C,d\in D\right\}$$

הוכיחו או הפריכו:

א. $C+D$ הוא קוד ליניארי

ב. $\left(C+D\right)^{\perp}=C^{\perp}\cap D^{\perp}$

פתרון:

א. נוכיח כי $C+D$ הוא קוד ליניארי :

בכדי להראות כי הקוד ליניארי מספיק להראות כי:

$$x\in C+D,y\in C+D\;\Rightarrow\left(\;\alpha x+\beta y\right)\in C+D$$

$$x\in C+D\;\;\Rightarrow\;\;x=c_1+d_1$$
$$y\in C+D\;\;\Rightarrow\;\;y=c_2+d_2$$
$$\alpha x+\beta y=\alpha c_1+\alpha d_1+\beta c_2+\beta d_2=$$
$$\left(\underbrace{\alpha c_1+\beta c_2}_{\in C}\right)+\left(\underbrace{\alpha d_1+\beta d_2}_{\in D}\right)\in C+D$$

ב. נוכיח כי $\left(C+D\right)^{\perp}=C^{\perp}\cap D^{\perp}$:

בכדי להוכיח שוויון קבוצות ניתן להראות כי מתקיימת הכלה דו כיוונית.

ראשית נראה כי $\left(C+D\right)^{\perp}\subseteq C^{\perp}\cap D^{\perp}$ (כלומר נראה כי כל איבר, ששייך לאגף שמאל, שייך גם לאגף ימין).

לפי הגדרת קוד דואלי נקבל:

PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com

$$\forall v \in (C+D)^{\perp}, \forall s \in C+D:\ v \cdot s = 0$$
$$\overset{(s=c+d)}{\Rightarrow}\ v(c+d)=0$$
$$\Rightarrow v \cdot c + v \cdot d = 0$$
$$\Leftrightarrow v \cdot c = 0 \quad and \quad v \cdot d = 0$$
$$\Rightarrow v \in C^{\perp} \cap D^{\perp}$$

שנית נראה כי $C^{\perp} \cap D^{\perp} \subseteq (C+D)^{\perp}$ (כלומר נראה כי כל איבר, ששייך לאגף שמאל, שייך גם לאגף ימין).

לפי הגדרת קוד דואלי נקבל:

$$\forall v \in C^{\perp} \cap D^{\perp}, \forall c \in C, \forall d \in D: v \cdot c = 0 \quad and \quad v \cdot d = 0$$
$$\Rightarrow v(c+d)=0$$
$$\Rightarrow v \in (C+D)^{\perp}$$

הראינו הכלה דו כיוונית ולכן השוויון מתקיים.

<u>שאלה מספר 6</u>

מצא מטריצה יוצרת G ומטריצה בודקת H לקוד הליניארי הנפרש על ידי $S=\{(1000),(0110),(0010),(0001),(1001)\}$, מעל $GF(2)$ ורשום את הפרמטרים $[n,k,d]_q$

<u>פתרון:</u>

אם נבנה מטריצה מחמש מילות הקוד ונדרג אותה, נקבל כי $G=I_4$.

כיוון ו $n=k=4$ נקבל כי $h=(0,0,0,0)$.

פרמטרי הקוד הם: $[4,4,1]_2$.

<u>שאלה מספר 7</u>

יהיו $c_1=(1101001), c_2=(1100100)$

א. חשב את $\boldsymbol{wt}(\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2), \boldsymbol{wt}(\boldsymbol{c}_1), \boldsymbol{wt}(\boldsymbol{c}_2)$

ב. עבור שני ווקטורים בינאריים, $\hat{\boldsymbol{c}}_1, \hat{\boldsymbol{c}}_2$ בעלי אותו אורך, מצאו את הקשר בין המשקלים $\boldsymbol{wt}(\hat{\boldsymbol{c}}_1+\hat{\boldsymbol{c}}_2), \boldsymbol{wt}(\hat{\boldsymbol{c}}_1), \boldsymbol{wt}(\hat{\boldsymbol{c}}_2)$

<u>רמז</u>: $\boldsymbol{wt}(\hat{\boldsymbol{c}}_1+\hat{\boldsymbol{c}}_2)=\boldsymbol{wt}(\hat{\boldsymbol{c}}_1)+\boldsymbol{wt}(\hat{\boldsymbol{c}}_2)-\boldsymbol{X}$ כלומר, מצאו את X.

ג. הראו כי בקוד ליניארי בינארי, לכל המילים יש משקל Hamming זוגי <u>או</u> שלחצי מהמילים יש משקל זוגי ולחצי השני יש משקל אי זוגי.

PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com

פתרון:

א.

$$wt(c_1)=4$$
$$wt(c_2)=3$$
$$wt(c_1+c_2)=wt(0001101)=3$$

ב. $wt(\hat{c}_1+\hat{c}_2)=wt(\hat{c}_1)+wt(\hat{c}_2)-2\alpha$ כאשר α הוא מספר הפעמים שיש 1 באותם מיקומים בשתי המילים.

ג. נתבונן בקוד ליניארי בינארי C כלשהו. אם משקל כל מילות הקוד זוגי, סיימנו.

אחרת, קיימת לפחות מילה אחת במשקל אי זוגי ונסמנה c_{odd}.

נסמן ב C_0 את אוסף כל המילים במשקל זוגי בקוד C.

<u>הערה:</u> C_0 אינו יכול להיות קבוצה ריקה כיוון שלפחות מילת האפס שייכת אליו.

1. אם נחבר את c_{odd} עם מילת קוד מתוך C_0 נקבל מילת קוד חדשה עם משקל אי זוגי(ראה סעיף ב'). כלומר מספר המילים במשקל אי זוגי הוא לפחות כמו מספר המילים במשקל זוגי.

2. אם נחבר את c_{odd} עם מילת קוד במשקל אי זוגי נקבל מילת קוד חדשה עם משקל זוגי(ראה סעיף ב'). כלומר מספר המילים במשקל זוגי הוא לפחות כמו מספר המילים במשקל אי זוגי

מ-1 ו-2 נקבל כי בדיוק חצי מהמילים הן במשקל זוגי והחצי השני במשקל אי זוגי.

PDF Created with deskPDF PDF Writer - Trial :: http://www.docudesk.com