

## מבוא לתורת הקודים 83-356

מבחן מועד ב' תש"ע

מותר להשתמש בכל חומר עזר.  
מותר להשתמש במחשבון מדעי התואם לתקנות האוניברסיטה.  
משך המבחן 3 שעות.

יש לנמק ולהסביר כל תשובה, תשובה לא מנומקת לא תזכה בנקודות.

בהצלחה

### שאלה 1 (30 נקודות)

נתונים שני קודים לינאריים  $C_1, C_2$  מעל  $GF(3)$ .

הקוד  $C_1$  נפרש ע"י שלוש המילים:

$$c_1 = (100112), \quad c_2 = (010022), \quad c_3 = (012121)$$

הקוד  $C_2$  מוגדר ע"י המטריצה היוצרת

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- רשום את פרמטרי הקודים (אורך מימד ומרחק מינימלי)
- האם ישנן מילות קוד המשותפות לשני הקודים? אם לא הסבר מדוע. במידה וכן – מה מספרן?
- בונים קוד חדש  $C$  המוגדר באופן הבא  $C = \{c_i + c_j \mid c_i \in C_1, c_j \in C_2\}$ .  
תן דוגמא לשלוש מילות קוד השייכות ל- $C$ .
- האם הקוד החדש לינארי?
- רשום את פרמטרי הקוד החדש (אורך, מרחק מינימלי ומספר מילים)
- מהנדס הציע מפענח לקוד החדש. המפענח שהציע מתבסס על שימוש במפענחים הקיימים של הקודים  $C_1, C_2$ . הפענוח מתבצע באופן הבא:
  - מחשבים שני סינדרומים: סינדרום אחד לפי מטריצת הבדיקה של  $C_1$  וסינדרום שני לפי מטריצת הבדיקה של  $C_2$ .
  - אם שני הסינדרומים שווים ל-0 – המילה שהתקבלה הינה מילת קוד.
  - במידה ולפחות אחד מהסינדרומים אינו אפס – יש למצוא לכל אחד משני הסינדרומים את ה- coset leader המתאים לו ע"י שימוש בטבלת Syndrom-CosetLeader של הקוד המתאים.
  - וקטור השגיאה הינו סכום שני ה- coset leaders.
  - יש להחסיר את וקטור השגיאה מהמילה שהתקבלה.

מפענח זה אינו מפענח נכון!

הוכח כי אלגוריתם הפענוח הזה אינו עובד, לחלופין, תן דוגמא המראה כי תוצאת הפענוח שתקבל אינה נכונה.

## שאלה 2 (35 נקודות)

נתון קוד ציקלי באורך 15 מעל השדה  $GF(4)$  המוגדר ע"י הפולינום היוצר ששורשיו הם

$$\alpha^0, \alpha^7, \alpha^{10}, \alpha^{11}, \alpha^{14}$$

והצמודים שלהם, כאשר  $\alpha$  הוא שורש הפולינום האי-פריק  $\pi(x) = x^2 + x + 2$  המגדיר את שדה השורשים של הקוד.

- א. רשום את הפולינום היוצר  $g(x)$  כמכפלת פולינומים מינימליים (אין צורך לחשב) מהם פרמטרי הקוד (אורך ומימד)! מה מספר מילות הקוד?  
 ב. מה ניתן להגיד על המרחק המינימלי של הקוד לפי שורשי הפולינום היוצר?  
 ג. נקלטה מילה

$$y(x) = M_{\alpha^7}(x) \left( (x-1)M_{\alpha^8}(x) + M_{\alpha^{11}}(x) \left( M_{\alpha^{10}}(x) \right)^3 \right)$$

האם זו מילת קוד?

- ד. נקלטה המילה  $y(x) = x^{12} + 2x^7 + 2x^2 + 2$ , האם זו מילת קוד?

- ה. מהנדס יצר קוד חדש על בסיס הקוד הנתון. הקוד כולל את כל מילות הקוד המקורי  $c = (c_0, c_1, \dots, c_{14})$  המקיימות  $c(\alpha^i) = 0$   ~~$i = 0, 1, \dots, 14$~~   <sup>$i = 0, 1, \dots, 14$</sup> . האם הקוד החדש הוא קוד לינארי?  
 15 נקודות

- ו. האם הקוד החדש שהוגדר בסעיף ה' הוא קוד ציקלי? אם כן, מהו הפולינום היוצר שלו ומה פרמטרי הקוד? אם לא, נמק ותן דוגמא למילה שאינה שייכת לקוד.

### שאלה 3: (35 נקודות)

הערה: אין משמעות לסדר הסעיפים.  
עבור כל טענה קבע האם היא נכונה או לא.

1. H1 ו-H2 מטריצות בודקות שונות של אותו הקוד. מוחקים את העמודה הראשונה בכל מטריצה בודקת. הקוד המתקבל הוא בהכרח אותו הקוד.
2. ישנם קדים בהם הורדת עמודה מ-G יכולה להגדיל את המרחק המינימלי.
3. תמיד קיים לפחות  $\cos et - leader$  אחד שמשקלו גדול מיכולת התיקון של הקוד  $(t)$ .
4. נתון כי האלמנט הפרימיטיבי  $\alpha$  הוא שורש הפולינום  $\pi(x) = x^4 + x + 1$  המגדיר את השדה  $GF(2^4)$ . יהא C קוד BCH בינארי פשוט בעל יכולת תיקון של שתי שגיאות. תן דוגמא לוקטור שגיאה (שאינו מילת קוד) עבורו פולינום הסינדרום  $S(x) = \sum_{i=0}^3 s_i x^i$  מקיים  $s_i \neq 0$  לכל  $i \neq 3$ .
5. נתון כי האלמנט הפרימיטיבי  $\alpha$  הוא שורש הפולינום  $\pi(x)$  המגדיר את השדה  $GF(3^3)$ . יהא C קוד BCH טרנרי  $(GF(3))$ . מה מספר וקטורי השגיאה שפולינום מיקום השגיאה שלהם הוא  $\Lambda(x) = (1 - \alpha^5 x)(1 - \alpha^{18} x)$ ?
6. נתון קוד בינארי ציקלי באורך 14, ונתון כי  $c(x) = (1 + x + x^2)(1 + x + x^3)(1 + x + x^4)$  היא מילת קוד המיוצגת כמכפלת פולינומים אי פריקים. האם ניתן לדעת מהו הפולינום היוצר של הקוד אם נתון כי  $r > 1$ ?
7. בקוד Reed-Solomon, משקל הפולינום היוצר (ז.א. מספר המחוברים בו) שווה תמיד למרחק המינימלי של הקוד.
8. הראה כי המילה  $(1, 1, 1, \dots, 1)$  היא מילת קוד בקוד ציקלי (לאו דוקא בינארי) אם ורק אם  $g(1) \neq 0$ . (רמז: מהו הסינדרום המתקבל ממילה זו?)