



27 באפריל 2011, כג' בניסן תשע"א

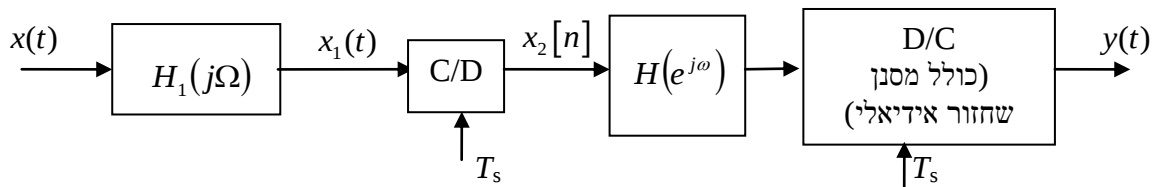
בוזון בעיבוד ספרתי של אותות 1 – 83-320

פתרון

שאלה 1: סינון ודגימה: נתונה מערכת בזמן רציף המוגדרת לפי

$$H_1(j\Omega) = \begin{cases} 1 - \frac{T_s}{5\pi}|\Omega| & |\Omega| \leq \frac{5\pi}{T_s} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

האות במוצא המסנן נדגם בקצב דגימה של T_s כמתואר בשרטוט הבא:



נתון כי אות הכניסה הינו $x(t) = a \cos(\Omega_0 t)$ כאשר $0 \leq \Omega_0 \leq \frac{5\pi}{T_s}$.

א. חשב וצייר את התמרת הפורייה של האות הדגום $X_2(e^{j\omega})$.

חישוב

$$X(j\Omega) = a\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

$$X_1(j\Omega) = a\pi[H_1(j\Omega_0)\delta(\Omega - \Omega_0) + H_1(-j\Omega_0)\delta(\Omega + \Omega_0)]$$

$$= \left(1 - \frac{T_s}{5\pi}|\Omega_0|\right) a\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T_s}\right)$$

$$= \frac{1}{T_s} \left(1 - \frac{T_s}{5\pi}|\Omega_0|\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a\pi \left[\delta\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T_s} - \Omega_0\right) + \delta\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T_s} + \Omega_0\right) \right]$$

ב. עבור $H(e^{j\omega}) = 1$, חשב וצייר את מוצא המערכת $y(j\Omega)$.

מוצא המערכת:

$$Y(j\Omega) = \left(1 - \frac{T_s}{5\pi}|\Omega_0|\right) a\pi \left[\delta\left(\Omega - (\Omega_0 \bmod \frac{2\pi}{T_s})\right) + \delta\left(\Omega + (\Omega_0 \bmod \frac{2\pi}{T_s})\right) \right]$$

כעת נתון כי אות הכניסה הינו $x(t) = \frac{\sin(\Omega_1 t)}{\pi t}$

ג. לאלו ערכי Ω_1 יתקבל כי $x_2[n] = b\delta[n]$, כאשר b הוא קבוע כלשהו (שתלוי ב Ω_1)? מהו b עבור כל אחד מהמקרים הנ"ל?



$$X(j\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X_1(j\Omega) = H_1(j\Omega)X(j\Omega) = \begin{cases} 1 - \frac{T_s}{5\pi}|\Omega| & |\Omega| < \min\left\{\Omega_1, \frac{5\pi}{T_s}\right\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1\left(j \frac{\omega - 2\pi k}{T_s}\right)$$

על מנת לקבל הלים נדרש שתחום $-\pi < \omega \leq \pi$ נקבל התמרה קבועה. זה יקרה רק עבור $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_s}$

במקרה הראשון עבור $0 \leq \omega \leq \pi$ נקבל:

$$X_1(j\Omega) = H_1(j\Omega)X(j\Omega) = \begin{cases} 1 - \frac{T_s}{5\pi}|\Omega| & |\Omega| < \frac{2\pi}{T_s} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X_2(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T_s} \left[\left(1 - \frac{T_s}{5\pi} \frac{\omega}{T_s}\right) + \left(1 - \frac{T_s}{5\pi} \frac{2\pi - \omega}{T_s}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \left[\left(1 - \frac{\omega}{5\pi}\right) + \left(1 - \frac{2\pi - \omega}{5\pi}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \left[1 + 1 - \frac{2}{5} \right] = \frac{8}{5} \frac{1}{T_s} \end{aligned}$$

ולתדריים שליליים אותו דבר. במקרה השני נקבל בתדריים $0 \leq \omega \leq \pi$:

$$X_1(j\Omega) = H_1(j\Omega)X(j\Omega) = \begin{cases} 1 - \frac{T_s}{5\pi}|\Omega| & |\Omega| < \frac{4\pi}{T_s} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X_2(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T_s} \left[\left(1 - \frac{T_s}{5\pi} \frac{\omega}{T_s}\right) + \left(1 - \frac{T_s}{5\pi} \frac{\omega + 2\pi}{T_s}\right) + \left(1 - \frac{T_s}{5\pi} \frac{2\pi - \omega}{T_s}\right) + \left(1 - \frac{T_s}{5\pi} \frac{4\pi - \omega}{T_s}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \left[\left(1 - \frac{\omega}{5\pi}\right) + \left(1 - \frac{\omega + 2\pi}{5\pi}\right) + \left(1 - \frac{2\pi - \omega}{5\pi}\right) + \left(1 - \frac{4\pi - \omega}{5\pi}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \left[1 + \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \right] \\ &= \frac{12}{5} \frac{1}{T_s} \end{aligned}$$



שאלה 2: זיהוי אות קוסינוסי: נתון האות:

$$x(t) = A \cos(m \Delta_\omega t)$$

ונתון ש A מספר מרוכב, ו m מספר שלם המקיים: $0 \leq m \leq 2^M - 1$ (M מספר שלם וידוע למערכת מראש). מהאות $x(t)$ נדגמות N דגימות במרווח דגימה T_s שמעובדות במערכת עיבוד ספרתי במטרה לחשב את A ואת m .

* מערכת העיבוד הספרתי בשאלה זו אינה יודעת לבצע את הפעולה ההופכית ל $\cos$ או $\sin$. הציעו מערכת לחישוב פרמטרי האות המבוססת על ביצוע FFT על N הדגימות, ומחשבת את פרמטרי האות תוך שימוש לכל היותר ב $(M+1) \cdot 2^M$ פעולות כפל:

- קבעו מהו מרווח הדגימה וכמה דגימות נדרשות (בתלות ב Δ_ω)
- כתבו תיאור מדויק לחישוב A, m מתוך הדגימות.
- כמה פעולות כפל וכמה פעולות חיבור נדרשות לביצוע החישוב?

האות הדגום יהיה:

$$x_d[n] = A \cos(m(\Delta_\omega T_s)n)$$

תחילה נשים לב שעל מנת לקיים את תנאי נייקויסט נדרש:

$$T_s \leq \frac{\pi}{B} = \frac{\pi}{(2^M - 1)\Delta_\omega}$$

בנוסף ידוע ש DFT דוגם את ה DTFT בתדרים $\frac{2\pi}{N}k$, ונרצה שתדרים אלו יתלכדו עם התדרים האפשריים של האות הדגום, כלומר:

$$\Delta_\omega T_s = \frac{2\pi}{N}$$

משילוב שתי הדרישות נקבל:

$$N = \frac{2\pi}{\Delta_\omega T_s} \geq 2(2^M - 1)$$

על מנת להשתמש ב FFT יעיל, נרצה גם ש N יהיה חזקה של 2 ולכן ניקח $N = 2 \cdot 2^M$ דגימות במרווח דגימה: $T_s = \frac{2\pi}{N\Delta_\omega}$. כל שנותר לעשות הוא למצוא את התדר השונה מאפס ולקבל את האמפליטודה שלו.

$$m = \arg \max_{0 \leq m \leq 2^M - 1} (|X[k]|)$$

$$A = \frac{2}{N} X[m]$$

$$\text{מספר המכפלות הנדרש הוא: } \frac{N}{2} \log_2 N = \frac{2 \cdot 2^M}{2} \log_2 (2 \cdot 2^M) = 2^M (M+1)$$

$$\text{מספר החיבורים הנדרש הוא: } 2 \cdot 2^M (M+1)$$

ב. כעת נתון כי m משתנה אקראי היכול לקבל כל אחד מהערכים $m \in \{0, 1, \dots, 2^M - 1\}$ בהסתברות שווה.

תכננו מערכת המחשבת את פרמטרי האות ומשתמשת בממוצע לכל היותר ב $(M+1) \cdot 2^{M-1}$ פעולות כפל:

- מהו מרווח הדגימה וכמה דגימות נדרשות (בתלות ב Δ_ω)
- כתבו תיאור מדויק לחישוב A, m מתוך הדגימות.



- הוכיחו כי כמות המכפלות במערכת המתוארת קטנה מ $(M+1) \cdot 2^{M-1}$
 - כמה פעולות חיבור נדרשות בממוצע לביצוע החישוב?
- נפעל בשיטה דומה עם אותם פרמטרים, אך נחפש מימוש יותר יעיל ל FFT. מהשאלה ברור שיש לממש מערכת עם מספר חישובים אקראי התלוי ב m . לכן נממש מערכת שמנסה למצוא את m בשלב מוקדם ככל האפשר ולהפסיק. מהתיאור בסעיף קודם קל לדעת אם מצאנו את m או לא, פשוט על ידי בחינה אם קיבלנו דגימת FFT שונה מאפס. לכן נשתמש ב FFT בשיטת דצימציה בתדר: מימוש FFT באורך N יבוצע כך: סיכום החצי הראשון והחצי השני של הסדרה. חישוב ה FFT של התדרים הזוגיים. בדיקה אם מצאנו את m . אם כן, סיום. אם לא: הכפלה במקדמי פורייה, חיבור וביצוע FFT למציאת התדרים האי זוגיים.
- נסמן את מספר הפעולות הממוצע הדרוש לביצוע ה FFT באורך N על ידי $F_{mult}(N), F_{add}(N)$ ונקבל:

$$F_{mult}(N) = \underbrace{F_{mult}\left(\frac{N}{2}\right)}_{\text{even frequencies}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[F_{mult}\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2}\right]}_{\text{odd frequencies}} = 1.5F_{mult}\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{N}{4}$$

$$F_{add}(N) = \underbrace{F_{add}\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2}}_{\text{even frequencies}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[F_{add}\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2}\right]}_{\text{odd frequencies}} = 1.5F_{add}\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{3 \cdot N}{4}$$

קל לחסום את מספר הכפלים והחיבורים:

$$F_{mult}(N) \leq 2F_{mult}\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{N}{4}$$

$$F_{add}(N) \leq 2F_{add}\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{3 \cdot N}{4}$$

כלומר התוספת בכל שלב קטנה פי $\frac{1}{2}$ ו- $\frac{3}{4}$ לכפל וחיבור בהתאמה יחסית ל FFT רגיל, ולכן בסה"כ:

$$F_{mult}(N) \leq \frac{N}{4} \log_2 N = 2^{M-1}(M+1)$$

$$F_{add}(N) \leq \frac{3N}{8} \log_2 N = 3 \cdot 2^{M-2}(M+1)$$

קל גם לחשב במדויק (למרות שלא נדרש בבוחן) נשתמש במשוואת הפרש פשוטה מסדר 1:

$$y[n] = 1.5y[n-1] + b \cdot 2^n$$

$$y[n] = q(1.5^n - 1) + w(2^n - 1)$$

$$y[1] = b \cdot 2 = q/2 + w$$

$$q = 4b - 2w$$

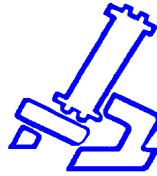
$$y[n] = (4b - 2w)(1.5^n - 1) + w(2^n - 1)$$

$$y[2] = 1.5y[1] + b \cdot 2^2 = 7b = (4b - 2w) \frac{5}{4} + 3w = 5b - \frac{5}{2}w + 3w$$

$$2b = \frac{1}{2}w$$

$$w = 4b$$

$$y[n] = -4b(1.5^n - 1) + 4b(2^n - 1)$$



נסמן $y[n] = F_{mult}(2^n)$ ונקבל:

$$y[n] = 1.5y[n-1] + \frac{N}{4}$$

כמובן גם שעבור $n=0$ אין צורך בחישובים ולכן $F_{mult}(1) = F_{add}(1) = 0$ ונקבל:

$$\begin{aligned} F_{mult}(N) = y[\log_2 N] &= \frac{N}{4} \frac{1 - (1.5)^{\log_2 N}}{1 - 1.5} = \frac{N}{2} \left((1.5)^{\log_2 N} - 1 \right) \\ &= 2^M \left((1.5)^{M+1} - 1 \right) \end{aligned}$$