21/02/2011
י"ז אדר א'

בס"ד

עיבוד ספרתי של אותות

מייל לעזרה ושאלות למרצה.

bergeli@eng.biu.ac.il

biu eng → biueng7222
engbilid → engbilid7222
user → password

• עיבוד אותות:
אינפורמציה (נתונים כמותיים שמהם) מקום, ישנו אינ. תוך שהאותות עוברים דרכם, וכו' כו'
משמעות (ברעש לדוג') ואנו נרצה להוציא את המידע ממה שהגיע אלינו.
• מקור של אינפורמציה: אותות של תמונה והדמיה, כגון אות אלקטרומגנטי. גלים סייסמיים - ארקיול,
• הרעש: מעוות את האות, לא יוצא בצורה שהוא נוצר (האות). הרעש יכול להיות לינארי
או לא. יש לחבר כמה אותות. נרצה להפיק משהו מהאינפורמציה.
• סוגים של עיבוד: מפקחים לאות דיבור (למשל לשמור על צורה והאות) מזהה דובר/מילה דוברו ומיקומו.
עיבוד תמונה: דטקטן למשל. אות אק"ג. הפקת מידע משמעותי. מכה. וכו' וכו'.

בעיות:
ניבוי של אותות (לדוג' דיבור סינטטי). נרצה לגלות אם שינוי אנו אותו לזהות פרמטרים של האות.
ניבוי אחר של האות. שחזור של אותות: תיאור: prediction נוכל לנחש מה יקרה בזמן קדימה לאות.
אינטרפולציה - יש לנו נקודות מסויימות וננסה לנחש מה קרה ביניהם. סינון.
שינויים וזה: מקור של מידע ספרתי שמודדן דגימ. זה עובר ברעש - מוגדל סינון שמשנה את האות משמעותית, שגם
אם הרעש כך יותר קשה לנו לזהות. נרצה מסנן מתאים - המסנן של האות הרצוי והפרמטרים של האות
כמו שינוי ונסה להפיק משהו מכך שהאות נמשך זמן ארוך שלם והרעש משתנה כל הזמן.

הגדרות:

0. סימון: Ω: תדר של אות בזמן רציף
ω תדר של אות בזמן בדיד.

1. התמרת פורייה בזמן רציף:

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\cdot e^{j\Omega t}d\Omega$$

2. (לאות מחזורי) טור פורייה מחזורי בזמן רציף: עבור $x(t)$ מחזורי במחזור T נוכל לפתח בטור:

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cdot e^{-jk\Omega_0 t}dt \qquad -\infty<k<\infty$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} \qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

3. פונקציית הלם של דירק:
לכל פונקציה $f(t)$ רציפה מסביב ל $t=0$. פונקציית ההלם של דירק מקיימת:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt=f(0)$$

פונ' ההלם של דירק היא לא פונקציה.
התכונות החשובות שצריך לדעת לגבי דירק:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot a\delta(t-t_0)dt=a\cdot f(t_0)$$

הזזה בזמן והכפלה בקבוע.

שיעור 2 הרצאה 1

נסתכל על $\delta(at)$ במובן ההגדרה:

$$\delta(at) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta(at)\,dt \xrightarrow{t'=at}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t'}{a}\right)\cdot\delta(t')\cdot\frac{1}{|a|}\,dt' = \frac{f(0)}{|a|} \Rightarrow \boxed{\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)}$$

קונבולוציה עם הלם:

$$\boxed{f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)}$$

4 <u>התמרת פורייה של הלם:</u>

$$\mathcal{F}(\delta(t-t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\cdot e^{-j\omega t}\,dt = e^{-j\omega t_0}$$

5 <u>התמרת פורייה של אות מחזורי:</u>

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$$

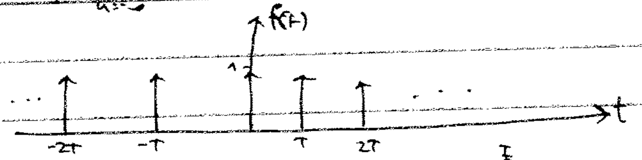
(שימוש בתכונת הלינאריות)

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathcal{F}\{e^{jk\Omega_0 t}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\cdot 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

וקיבלנו רכבת הלמים שהעוצמה של כל הלם זה מקדם טור הפורייה.
המרחק של כל הלם זה התדירות המתאימה בתדר הבסיס.

6 <u>רכבת הלמים</u> (מסרק הלמים)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$



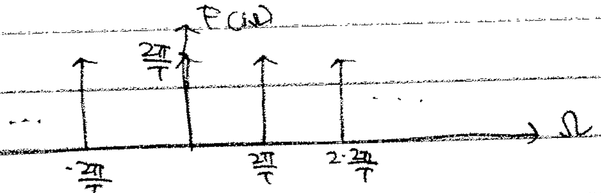
זהו אות מחזורי, ולכן ניתן לייצג אותו ע"י טור פורייה. נחשב את המקדמים
טור פורייה הבא:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot e^{-jk\Omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)\cdot e^{-jk\Omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T} \rightarrow$$ נכון לכל k

התמרת פורייה של רכבת הלמים: גם כן רכבת הלמים

$$F(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}\delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

נשים ♥:
מרווח בזמן של T נותן לנו מרווח
בתדר של $\frac{2\pi}{T}$



7 <u>התמרת פורייה בזמן בדיד:</u> 3.32:

בגלל ההסכם 'שאינטגרל' - ראה הגדרה בדף 93:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega n}\,d\omega$$

פונקציה מחזורית של המשתנה הממשי ω (2π)

8 <u>התמרת Z כהכללה של DTFT</u>

אם נסתכל על $G(z)$ התמרה של האות g:

נגדיר $z = re^{j\omega}$

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]\cdot z^{-n}$$

ופה נבדוק התמרת פורייה באמצעות 2.22:

$$G(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(g[n]\cdot r^{-n}\right)e^{-j\omega n}$$

ולכן ניתן להסתכל על התמרת Z כ: DTFT של האות $g[n]\cdot r^{-n}$ (r ממשי)
התמרת Z מאפשרת לנו לבחון מגוון יותר של מקרים.
התמרת פורייה מייצגת אותות, Z מייצגת טוב גם מערכות.

עמוד (3) הרצאה 1

משפט הדגימה:

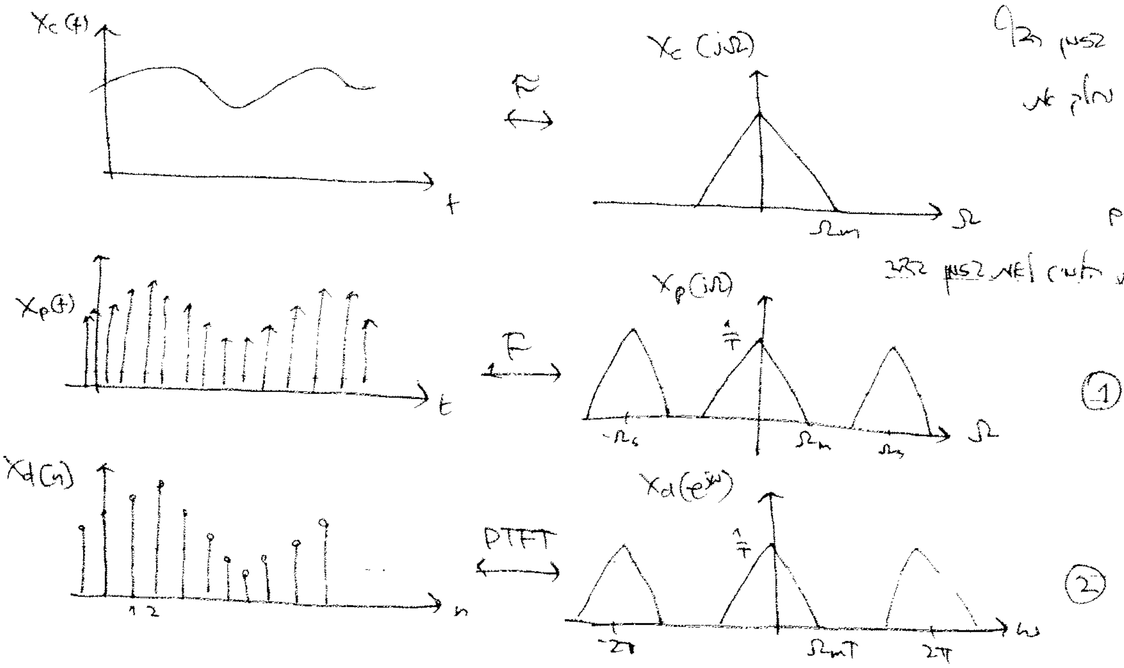
יש לנו אות $X_c(t)$ בזמן רציף

שרוצים לדגום אותו, נחלק את

הדגימה ל-2:

1. נכפיל ברכבת הלמים

2. נהפוך את הרכבת הלמים לאות בזמן בדיד



ונדאג שהשכפולים לא יעלו אחד על השני. $\Omega_s > 2\Omega_m$.

$$X_p(t) = X_c(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n(nT)\cdot\delta(t-nT)$$ (1)

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega) * P(j\Omega) = \frac{1}{T}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega-k\Omega_s)) \qquad \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$X_d(n) = x_c(nT)$$

$$X_d(e^{j\omega}) = X_p\left(j\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\,\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$ (2)

← הוכחה למשפט הדגימה: (ללא רכבת הלמים):

$$X_c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega$$

$$X_c(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega)\cdot e^{j\Omega nT}\,d\Omega \longrightarrow \omega = \Omega T$$ נציב:

$$X_c(nT) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{T}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega'}{T}\right)\cdot e^{j\omega' n}\,d\omega'$$

$$I_k = [(2k-1)\pi,\ (2k+1)\pi]$$

נפרק את תחום האינטגרציה לחלקים

$$X_c(nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} X\left(j\frac{\omega'}{T}\right)\cdot e^{j\omega' n}\,d\omega' \longrightarrow \omega = \omega' - 2\pi k$$ נציב:

$$X_c(nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} X_c\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)e^{j\omega n}\,d\omega \longrightarrow k = -k$$ נהפך נציב:

$$X_d(n) = X_c(nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_c\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$X_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{T}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)\right]e^{j\omega n}\,d\omega$$

כלומר התמרת הפורייה ההפוכה

של כל מה שבסוגריים [] זה $X_d[n]$.

אם כך מה שבסוגריים [] זה התמרת פורייה של $X_d[n]$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

התמרת פורייה של אות בדיד, מחזורית

1 הרצאה ④ 3 מאי

שחזור:

נזכור ש-$X_p(j\Omega)$ זה הספקטרום:

$$X_p(j\Omega) = X_d(e^{j\Omega T})$$

לכן נקבל:

$$X_c(j\Omega) = X_p(j\Omega)\cdot H_{opt}(j\Omega)$$

כאשר המסנן חד לקוי:

$$H_{opt} = \begin{cases} T & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$x_c(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\cdot \delta(t-nT)\right] * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

נוכיח, אך ללא שימוש בזמן.

$$\boxed{\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}}$$

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega) e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

ידוע ש:

$$X_c(j\Omega) = 0 \quad \forall\ |\Omega| > \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2}$$

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_c(j\Omega) e^{j\Omega t}\, d\Omega = \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_d(e^{j\Omega T})\cdot e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

$$x_c(t) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega T n}\right]}_{X_d(e^{j\Omega T})} e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

נחליף סדר סכימה ואינטגרציה:

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\,\underbrace{\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\Omega(t-nT)}\, d\Omega}_{\text{התמרת פוריה של אות}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\ \mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

משפט הדגימה לפי שנון

יהי $x(t)$ אות מוגבל סרט המקיים $X(j\Omega)=0$ לכל $|\Omega| > \frac{\pi}{T}$ אזי מתקיים:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\ \mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

דוגמה

Aliasing

דוגמא: נדגום את 2 האותות בקצב של 50Hz:

$x_0(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

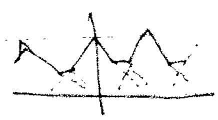
$x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$

$f_0 = 40Hz \quad f_1 = 90Hz$

והדגימות (של) האות מקוריות, ולא נוכל להפריד ולדעת איזה מהאותות הגיע.

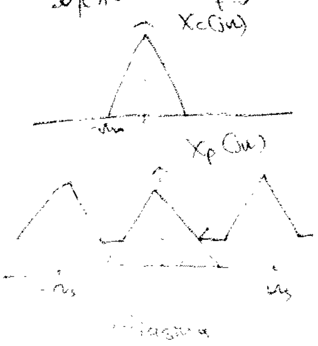
Alaising - כינוי: הוא האות של 40Hz קיבל לבוש של האות של 20Hz.

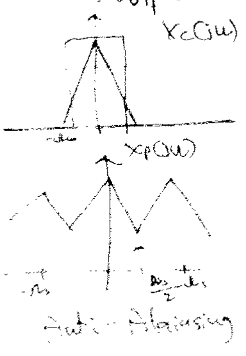
בתדר:



← כאן זה נובע משום שדגמנו לא בתדר של ניקויסט

והולך שהתדר גבוה מדי (הולך) ל-2 ניקויסט - אות מתנהג





ולכן נרצה לחתוך במסנן לפני ניקויסט.

שאלה (5) הרצאה 1

[illegible]

$$\Omega_N = \frac{\Omega_s}{2}$$

אין קיפול [illegible] אם $\Omega_m \leq \Omega_N$

אם התנאי לא מתקיים נקבל אליאסינג.

בעקבות כך נרצה לסנן אותו ע"י מסנן נגד קיפול, מסנן aa אידאלי:

$$H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

28/02

תרגול 1

kobi.cohen10@gmail.com

נושאי הקורס:

* התמרת Z - בצורה ישירה
* דצימציה, אינטרפולציה
* התמרת פוריה בדידה (DFT)
* מימוש של DFT (התמרה מהירה) FFT + אלגוריתמים
* מסננים FIR, IIR

תרגילים: חובת הגשה.
בוחן: אין.
ציון מגן.

התמרת Z:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot z^{-n}$$

$$\boxed{x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)\cdot z^{n-1}\,dz}$$

הטור מתכנס בהחלט אם הוא מתכנס, ROC: $\sum |x(n)\cdot z^{-n}|<\infty$

DTFT: $z=1e^{j\omega}$

דוגמה 1:
חשב התמרת Z של הסדרה $x(n)=a^n\cdot u(n)$ ומה ה-ROC.
פתרון: נציב לפי ההגדרה:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)\cdot z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n (z^{-1})^n$$

$$\Rightarrow=\sum_{n=0}^{\infty}(a\cdot z^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad \underline{ROC}:\ |az^{-1}|<1\Rightarrow |z|>|a|$$

דוגמה 2: חשב התמרת Z ל: $x(n)=\delta(n-r)$ ומה ה-ROC
פתרון:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-r)\cdot z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-r)\cdot z^{-r}=z^{-r}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-r)=z^{-r}$$

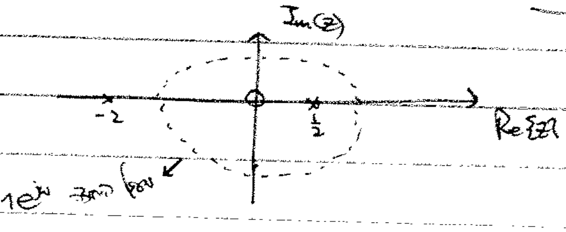
ROC: תמיד מתכנס, לא 0 במישור.

דוגמה 3:
חשב התמרת Z לזוג סדרות: $x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)+(-\frac{1}{3})^n u(n)$.
פתרון: משתמשים עבור $(a)^n$ ולכן צריך לחשב 2 סכומים ולחבר התכונות של לינאריות
צריך להתכנס בשניהם

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

ROC ולכן: $|z|>\frac{1}{3}$ וגם $|z|>\frac{1}{2}$ ולכן $\underline{|z|>\frac{1}{2}}$

דוגמה 4:
נתונה מפת קטבים ואפסים של מערכת לינארית:



(א) המערכת יציבה, מה ה-ROC?
(ב) המערכת סיבתית, מה ה-ROC?

פתרון (א): מערכת יציבה נדרש שהתמרת פוריה תתכנס. כלומר: שמעגל היחידה $z=1e^{j\omega}$
יהיה בתוך ה-ROC. לכן עבור מערכת יציבה $\frac{1}{2}<|z|<2$ (המערכת לא סיבתית כי
יש קוטב ב-2).

פתרון (ב): המערכת סיבתית ולכן צריך $|z|>\frac{1}{2}$ וגם $|z|>2 \Leftarrow |z|>2$ מעגל היחידה
לא נמצא ב-ROC ולכן המערכת לא יציבה.

מסקנה: אם נתונה מערכת גם יציבה וגם סיבתית כל הקטבים צריכים להיות בתוך מעגל היחידה

שיטות התמרה הפוכה:

① ע"י טבלאות. (ROC +)

② פירוק לשברים חלקיים. לוקחים את התמרה הפוכה מקום מערכת ליניאריות

דוגמה:
$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}\qquad ROC: |z|>1$$

אפס כפול ב: -1.

קטבים ב: 1 וב: $\frac{1}{2}$ צריך למצוא את $x(n)$

אם יש חזקה שווה במונה ובמכנה יהיה לנו חילוק. (שארית של מנה)

כמו כן:

$$X(z)=B+\frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

מנה מחלק ארוך

$B=2$ נמצא את A_1 ו- A_2

נחשב B:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \frac{1}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-1}+1 \,\big)\, z^{-2}+2z^{-1}+1 \\ \underline{z^{-2}-3z^{-1}+2} \\ 5z^{-1}-1 \end{array}$$

$$\Rightarrow X(z)=2+\frac{5z^{-1}-1}{\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-1}+1}$$

נחשב A_1, A_2:

נכפיל את 2 אגפי המשוואה ב: $1-\frac{1}{2}z^{-1}$ ונציב $z=\frac{1}{2}$, נקבל:

$$A_1=X(z)\cdot(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})=\left[2+\frac{5z^{-1}-1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}\right]\cdot(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})=\left.\frac{5z^{-1}-1}{1-z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{2}}=-9$$

$$A_2=X(z)\cdot(1-z^{-1})=\left.\frac{5z^{-1}-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=1}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$$

$$\Rightarrow X(z)=2+\frac{-9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{8}{1-z^{-1}}$$

נבחר ש ROC $|z|>1$ וכל הסדרות ימניות

נקבל מטבלאות התמרה:

$$2\xrightarrow{z^{-1}}2\delta(n)$$
$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\xrightarrow{z^{-1}}(\tfrac{1}{2})^n\cdot u(n)\qquad\Rightarrow\quad x(n)=2\delta(n)-9(\tfrac{1}{2})^n u(n)+8u(n)$$
$$\frac{1}{1-z^{-1}}\xrightarrow{z^{-1}}u(n)$$

② ע"י פיתוח לטור.

דוגמה: נרצה למצוא התמרה הפוכה ל: $F(z)=e^z$ נפתח לטור טיילור

$$F(z)=e^z=\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\dots$$

אבל ידוע ש:

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\cdot z^{-n}=\dots+f(-2)z^2+f(-1)\cdot z^1+f(0)\cdot z^0+f(1)(z^{-1})+\dots$$

זה מתאפס

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(-n)!}\cdot u(-n)\,z^{-n}\Rightarrow f(n)=\frac{1}{(-n)!}u(-n)$$

③ ע"י חילוק ארוך

דוגמה: צריך למצוא את $x(n)$ של:

$$X(z)=\frac{z}{z^2-2z+1}$$

נבצע חילוק ארוך:

$$\begin{array}{r} z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+\dots \\ z^2-2z+1 \,\big)\, z \\ \underline{z-2+z^{-1}} \\ 2-z^{-1} \\ \underline{2-4z^{-1}+2z^{-2}} \\ 3z^{-1}-2z^{-2} \\ \underline{3z^{-1}-6z^{-2}+3z^{-3}} \\ 4z^{-2}-3z^{-3} \end{array}$$

ניתן לזהות לתמורת Z:

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot z^{-n}$$

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\cdot u(n-1)z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n)=n\,u(n-1)$$

תרגול ③ תרגיל 1

ג) אם התשובה הפוכה - אז (כמו בתרגיל). בשאלות הבאות זה.

בעיית השחזור:

תזכורת: הקשר בין $x(n)$ המתקבל ע״י דגימה של $x(t)$:

$$x(n) = x_c(t = nT)$$

מרחיקים את ציר התדר ומשכפלים כל 2π:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_s} - k\frac{2\pi}{T_s}\right)\right)$$

$$x_c(t) \xrightarrow{FT} X_c(j\Omega)$$

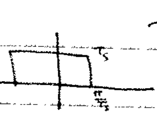
$$x(n) \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$$

שלבים: 1 נרמול אמפליטודה פי $\frac{1}{T_s}$

2 נרמול ציר התדר פי T_s.

3 שכפולים כל 2π

שחזור: * מכפילים ציר התדר פי T_s



* מסננים ע״י: LPF

אז $h(t)$ הוא אינטרפולציה (כי זה מסנן אידיאלי):

$$h(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_s}t\right)}{\frac{\pi t}{T_s}}$$

נוסחת השחזור: (קונבולוציה עם מסנן)

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x_c(n(T_s))}_{x(n)} \cdot \underbrace{h(t-nT_s)}_{\text{מסנן לשחזור}}$$

והוא מסנן אידאלי:

$$= \sum x(n) \cdot \frac{\sin(\pi(t-nT_s)/T_s)}{\pi(t-nT_s)/T_s}$$

תרגיל:

נתון $x(t)$ אות מוגבל סרט Ω_m $\qquad X_c(j\Omega) = 0 \quad \forall \Omega > \Omega_m$

מגדירים $y(t)$:

$$y(t) = x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cos(k\Omega_0 t) \qquad |\alpha| < 1$$

① מה הקשר בין הספקטרום של $x(t)$ ו $y(t)$

② מה התנאי על ω_0 כך שניתן יהיה לשחזר את $x(t)$ מתוך $y(t)$

③ האם $y(t)$ (ניתן) לדגום בתדר $f_s = \frac{3\Omega_0}{2\pi}$ כאשר Ω_0 הוא המינימלי הנדרש

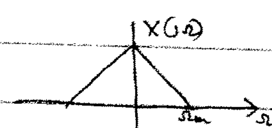
את התנאי שמצאנו ②

③ מה $y(n)$? האם ניתן לשחזר את $x(t)$ מתוך $y(n)$?

מה $y(e^{j\omega})$?

פתרון:

① נניח ספקטרום



$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot \cos(k\Omega_0 t) \quad \text{כאשר:} \quad y(t) = x(t)\cdot z(t)$$

ידוע כי $x(t)$ מוגבל סרט ונקבל:

$$x(t)\cdot z(t) \xrightarrow{FT} \underbrace{\tfrac{1}{2\pi}X(j\omega) * Z(j\omega)}_{\text{כפל בזמן}}$$

נחשב את $Z(j\Omega)$

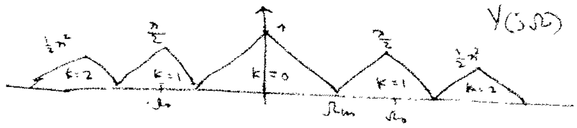
$$Z(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k \cdot \cos(k\Omega_0 t)e^{-j\Omega t}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\int_{-\infty}^{\infty}\cos(k\Omega_0 t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k \cdot \pi\left[\delta(\omega + k\Omega_0) + \delta(\omega - k\Omega_0)\right]$$

התמרת פורייה של סכום אקספוננטים ולכן:

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\Omega) * Z(j\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\left[X(j(\Omega - k\Omega_0)) + X(j(\Omega + k\Omega_0))\right]$$

② נצייר את $Y(j\Omega)$



תנאי: שלא יהיו חפיפות

$$\Omega_0 - \Omega_m \geq \Omega_m$$

$$\Rightarrow \Omega_0 \geq 2\Omega_m$$

התנאי שקיבלנו, הוא לא תנאי ניקויסט (למרות הדמיון) כיון שלא עשינו שום דגימה.

(2) נחשב את $y(n)$:

$$T_s=\frac{1}{f_s}=\frac{2\pi}{3\omega_0}$$

וניתן לקבל ע"י הדגימה:

$$y(t)=x(t)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\cos(k\omega_0 t)\Rightarrow y(n)=y(t=nT_s)$$

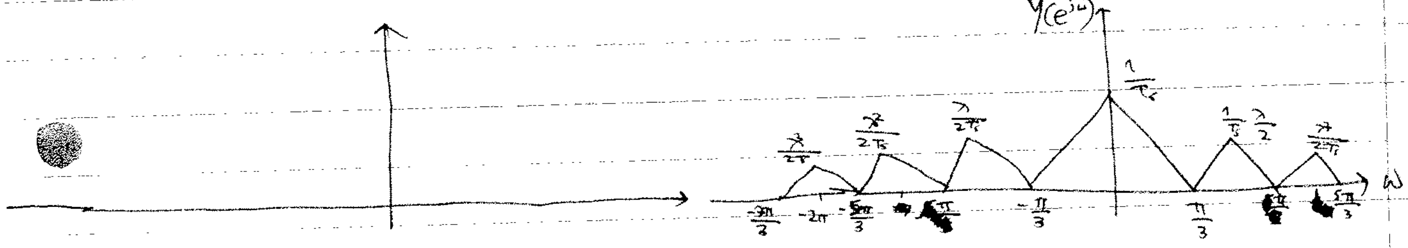
(3) נחשב $Y(e^{j\omega})$

נעיר כאן מעבר ציר: $\Omega_m\to\omega_m=\Omega_m\cdot T_s$

$$\frac{\omega_0}{2}\cdot\frac{2\pi}{3\omega_0}=\frac{\pi}{3}$$

$3\Omega_m\to\pi$, $5\Omega_m\to\frac{5\pi}{3}$ > הקדקוד של המשולשים

$Y(e^{j\omega})$ לפי ההרכבה: עם מחזוריות של 2π. אחרי משולש מרכזי.



מבחינה סימטריה, בהספה תמיד משולש יפול על משולש, אבל יהיה בדיוק משולש.

$$\frac{1}{T_s}\alpha^0+\frac{1}{T_s}\cdot\frac{1}{2}\cdot\alpha^3\cdot 2+\frac{1}{T_s}\cdot\frac{1}{2}\cdot\alpha^6\cdot 2+\dots=\frac{1}{T_s}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^3)^k=\frac{1}{T_s}\cdot\frac{1}{1-\alpha^3}\triangleq A$$

2 - מהמשולשים

עבור משולש 33 ימין שווה מבחינה סימטריה לזה שמאל.

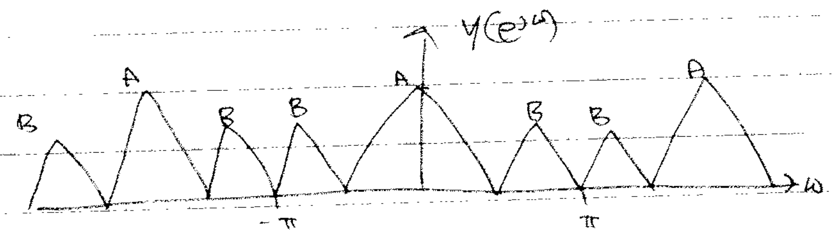
(שמאלה) $\frac{1}{T_s}\cdot\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{T_s}\cdot\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{T_s}\cdot\frac{1}{2}\alpha^5+\frac{1}{2}\alpha^8+\dots$

(ימינה) $+\frac{1}{T_s}\cdot\frac{1}{2}\alpha^4+\frac{1}{T_s}\cdot\frac{1}{2}\alpha^7+\dots$

$$=\frac{1}{2T_s}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{3k+1}+\alpha^{3k+2}$$

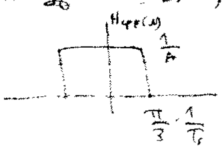
$$\Rightarrow=\frac{\alpha}{2T_s}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^3)^k+\frac{\alpha^2}{2T_s}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^3)^k=\frac{\alpha}{2T_s}\cdot\frac{1}{1-\alpha^3}+\frac{\alpha^2}{2T_s}\cdot\frac{1}{1-\alpha^3}\triangleq B$$

קיבלנו:



איך נשחזר? (עזרה של LPF על האות ונדאג לבסוף על ההגבר.)

(ו) תהיה $\frac{1}{T_s}$ ונוסיף בסוף.



28/02

כ"ב אדר ב'

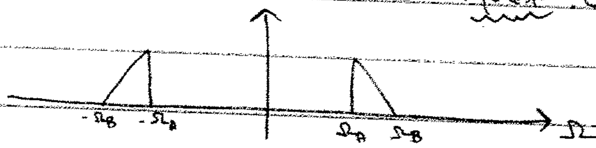
בס"ד

הרצאה 2

משפט נייקוויסט - אומר כי לא תמיד צריך. אם יש לנו אות שהוא סינוסואידלי בתדר מסוים זה היה

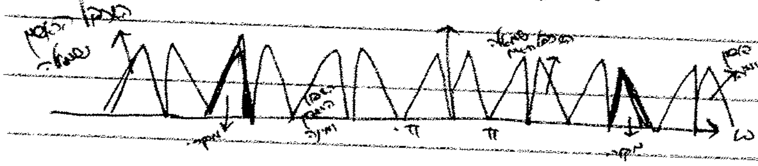
על סמך ידיעה מוקדמת שמסתמכת על התדר הזה. (סימטרי)

בצורת אות ממשי בתדר:



יש ל-X את התדר המקיים:

$X_c(j\Omega)\neq 0$ עבור $\Omega_A<|\Omega|<\Omega_B$



אות זה נקרא אות פס מוגבל.

(אפשר לומר תחום תדר Ω_B) אבל יש

פה קטע שבו נרצה להשתמש בשכפולים לדגום בקצב יותר קטן מ-2 פעמים ולשחזר את האות

נניח תחילה שקיים l שלם: $\Omega_B=l(\Omega_B-\Omega_A)$ (Ω_B זה מספר שלם כפול הרוחב)

נדגום את האות בתדר $\Omega_s=2(\Omega_B-\Omega_A)$ כלומר פעמיים הרוחב כלומר: $T=\frac{2\pi}{\omega_s}$

בתחום $(-\pi,\pi)$ אנחנו מקבלים לאות את האות ללא כפילות אלא מרכזים שמיוצגים נמצא שם.

אם ניקח מהדגימה הכל כי הם דומים אחד לשני. והם ממלאים ללא ...

← שמספיק מקום ביניהם. ← שהשכפולים ישבו במקום הנכון

התנאי ש-Ω_B הוא מכפלה שלמה של ההפרש מבטיח את זה.

$$X_d(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

DTFT של האות הדגום

עבור $l=2M+1$. נסתכל על מרכז אחד בין π ל-$-\pi$. מתי פה יהיה Ω_A ($\omega=0$)

$$\Omega_A=\frac{0-2\pi k}{T}=\frac{-2\pi k}{\frac{2\pi}{\Omega_s}}=-2k(\Omega_B-\Omega_A)=-2k(\Omega_B-\Omega_B)=\frac{-2k}{l-1}\Omega_A=\frac{-2k}{2M}\Omega_A\Rightarrow\boxed{k=M}$$

$$\Omega_B-\Omega_A=l(\Omega_B-\Omega_A)-\Omega_A$$

$$\Omega_A=(l-1)(\Omega_B-\Omega_A)$$

k כשאומרים עוקבים, ויהיו שווים ל-M (עבור l אי-זוגי תמיד שלם)

בגלל M.

עבור $l=2M+1$ רק השכפולים נמצאים את התחום $[-\pi,\pi]$

אם התנאי מתקיים יהיה שלם רק תחום פס לאחר הדגימה.

אם $\Omega_B\neq l(\Omega_B-\Omega_A)$ עבור l שלם. נקטין את Ω_A. כי בכל מקרה אין תדרים בין 0

על ידי $\Omega'_A<\Omega_A$ שיקיים. $\Omega_B=l(\Omega_B-\Omega'_A)$ (אפשר לומר שהאות בתדר בין Ω_B ל-Ω'_A)

עכשיו אם שומרים את T נדגום את ב-$\Omega_s=2(\Omega_B-\Omega'_A)$

המקרה הגרוע זה לדגום לפי נייקוויסט, כי (נניח) $\Omega'_A=0$ אז $l=1$ והתדר $2\Omega_B$.

איך נבחר את l הכי טוב?

נרצה קצב דגימה הכי איטי שאפשר ← כלומר: l יותר גדול $\Omega_B-\Omega'_A$ יותר קטן וכו'

דורשים פה התנאים.

$$\frac{\Omega_B}{l}=\Omega_B-\Omega'_A\geq\Omega_B-\Omega_A$$

$$\Rightarrow\frac{\Omega_B}{\Omega_B-\Omega_A}\geq l$$

ונבחר l השלם הגדול שהוא קטן מזה:

$$l=\left\lfloor\frac{\Omega_B}{\Omega_B-\Omega_A}\right\rfloor$$

עמוד 2 הרצאה 2

נרצה לשמור את מה שעשינו הרגע.

אין צורך לשמור את האמצע בין $-\pi$ ל π והלאה, ניתן פשוט לסנן את מה שמעבר בין π ל
אבל הוא כבר שם.

ולכן צריך אותות מוגבלי סרט. מסנן אנטי אליאסינג בהכרח כלול.

עיבוד ספרתי של אותות בזמן רציף

יהי $X(t)$ אות מוגבל סרט המקיים $X_c(j\Omega)=0$ לכל $|\Omega|\geq\frac{\pi}{T}$

נרצה לעשות לאות הזה עיבוד להפעיל עליו את $H(j\Omega)$.

תהי $H(j\Omega)$ תגובת תדר של מסנן המקיימת גם היא $H(j\Omega)=0$ לכל $|\Omega|\geq\frac{\pi}{T}$

(הפילטר לא משנה מה יש במסנן מעבר ל $\frac{\pi}{T}$ כי בכל מקרה האות שם הוא אפס, ואנחנו לא הרגשנו)

$$x_c(t)\longrightarrow\boxed{H(j\Omega)}\longrightarrow y_c(t)$$

$$x_c(t)\longrightarrow\boxed{C/D}\xrightarrow{x_d[n]}\boxed{H_d(e^{j\omega})}\xrightarrow{y_d[n]}\boxed{D/C}\longrightarrow\boxed{H_r(j\Omega)}\longrightarrow y_c(t)$$

מסנן שחזור שבפועל

כאשר המסנן $H_r(j\Omega)$ הוא מסנן השחזור האידאלי:

$$H_r(j\Omega)=\begin{cases}T & |\Omega|\leq\Omega_c\\ 0 & else\end{cases}$$

כיצד נתכנן את המסנן הספרתי כך שהמערכת הספרתית תתן את התגובה הרצויה?

המסנן הספרתי צריך לקיים:

$$\boxed{H_d(e^{j\Omega T})=H(j\Omega)\quad\forall\,|\Omega|\leq\frac{\pi}{T}}$$

הדרישה היא רק לגבי $|\Omega|\leq\frac{\pi}{T}$ כי $H(j\Omega)$ מחוץ לתחום הזה הוא כלום. H_d מחזורי

כי הוא ספרתי ולכן מחזורי בהגדרה. לכן מספיק להגדיר בתחום הזה בלבד.

DTFT של האות הדגום:

$$X_d(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

המסנן הספרתי $H_d(e^{j\omega})$ שווה ל:

$$H_d(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}H\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

$$Y_d(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)\cdot H\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

נשים לב שצריך 2 סיגמות!

במקרה הזה לא נשאר מהסכום רק אחד...

ורק עבור איבר k האמצעי לא מתאפס.

שמאפשר במקרה של $Y(j\Omega)$ ניתן ב-T.

ללא המסנן

$\Omega=\frac{\omega}{T},\ \omega=\Omega T,\ k=0$

$$Y(j\Omega)=X_c(j\Omega)\cdot H(j\Omega)$$

דוגמה:

נרצה לממש בעזרת ספרתית מסנן LPF עם תדר קטעון $\Omega_c\ (<\frac{\pi}{T})$

תגובת התדר של המסנן האנלוגי:

$$H(j\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|\leq\Omega_c\\ 0 & else\end{cases}$$

תגובת התדר של המסנן הספרתי:

$$H_d(e^{j\omega})=H\left(j\frac{\omega}{T}\right)=\begin{cases}1 & |\omega|\leq\Omega_c T\\ 0 & else\end{cases}$$

וכמובן מחזורית במחזור 2π

עמוד ③ הרצאה 2

אם נסתכל על הדוגמה, ההתמרה ההפוכה של זה:
$$h[n]=\frac{\Omega_c T}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_c T}{\pi}n\right)$$

שימור התגובה להלם:

זה מזכיר לנו התמרת פורייה של אות דגום:
$$H_d(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}H\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

אז מזה נסיק:
$$h_d[n]=T\cdot h(nT)$$

שאם נדגום את התגובה להלם של המסנן שנרצה לממש בזמן רציף, בזמן בדיד הוא יהיה לקיים

אם המסנן $H(j\Omega)$ אינו מוגבל סרט בתחום $\left[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}\right]$

המסקנה על הדגימה היא לא נכונה.

נגדיר:
$$H_{eff}(j\Omega)=\begin{cases}H(j\Omega) & |\Omega|\le\frac{\pi}{T}\\ 0 & else\end{cases}$$

H_{eff} מקיים את ההנחה.

במקרה זה התגובה להלם של המסנן הספרתי תהיה:
$$h_d[n]=T\cdot h_{eff}(nT)$$

H_{eff} נכון גם לגבי מוגבל סרט גם לגבי לא מוגבל סרט (H)

לא יהיה שום שוני במערכת אם נחליף את H ונשים במקומו H_{eff} כי X חסום.

במקרה ש H לא היה מוגבל סרט $h_d[n]\ne T\cdot h(nT)$ לכן צריך לזכור קודם לחשב את המסנן H_{eff} האפקטיבי.

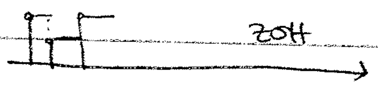
שחזור לא אידיאלי:

כאשר ניתן לבחון את השחזור בשני שלבים

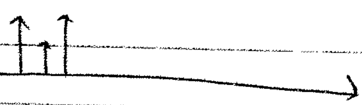
1. הפיכת האות הספרתי לרכבת הלמים:
$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot\delta(t-nT)\xrightarrow{F}X(j\Omega)=X(e^{j\Omega T})$$

2. סינון:
$$x_c(t)=x_p(t)*h_{opt}(t)\xleftrightarrow{F}X_c(j\Omega)=H_{opt}(j\Omega)\cdot X_p(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_d[n]\cdot\operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

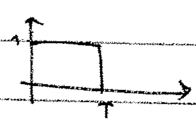
מסנן אידיאלי סינק לא סיבתי, אבל לא יציב כי סינק הוא אינסופי. לכן אין לא שחזור אידיאלי.



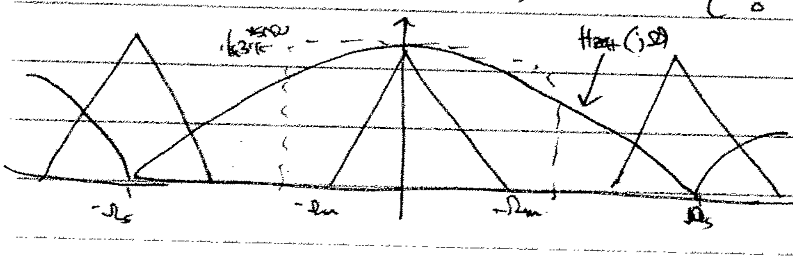
DAC הוא מסנן ידוע של המעגל הזה את הדבר הקודם:



$$h_{zoh}=\begin{cases}1 & 0\le t\le T\\ 0 & else\end{cases}$$



תכונות (22): ובתדר הוא sinc.



לא מוריד טוב את השכפולים

בדרך כלל לא מסנן את השכפולים,

כי זה מעוותי בתדר. את העיוות של האות אפשר לתקן בצורה דיגיטלית. הספרתי הדיגיטלי.

נעשה מסנן, כפול אותו מסנן ב: $\frac{1}{T}$ ספרתי מסנן שמתקן את העיוות לפני המרה.

האות נוצר מהכפלה של sinc בהפוך ומתקבל: ⊓ כפול אותו מסנן ב: ח חלק החלק הזה של הסינק.

שאלה 3 הרצאה (4) תרגול 3

תרגיל: 2 אותות. נתון: $x_c(t) = x_a(t) + x_i(t)$

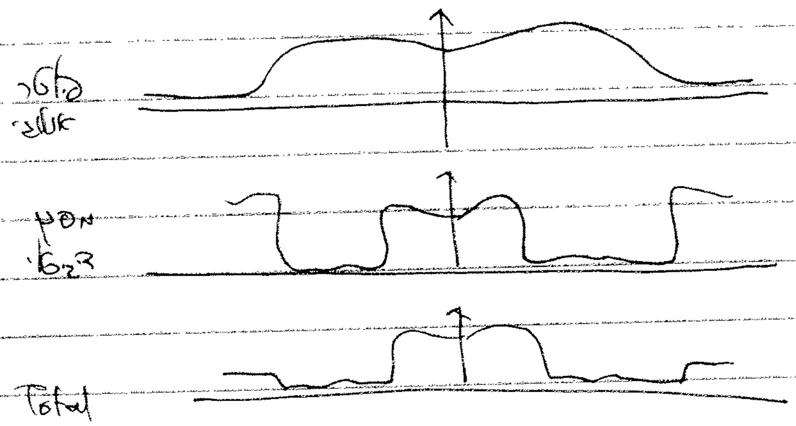
האחד $x_a(t)$: אות מוגבל סרט ע״י Ω_N ומייצג את האות הרצוי.

והשני $x_i(t)$: $x_i(t) = \cos(\Omega_i t)$ אות בו סרט ומפריע, ונתון: $\Omega_N < \Omega_i$

האם ניתן לתכנן מערכת ספרתית שתפריד בין האות למפריע ב-60dB

$$x_c(t) \rightarrow \boxed{H_a(j\Omega)} \rightarrow \boxed{C/D} \xrightarrow{x_d[n]} \boxed{H_d(e^{j\omega})} \xrightarrow{y_d[n]} \boxed{D/C} \rightarrow \boxed{H_r(j\Omega)} \rightarrow y_c(t)$$

למה צריך מסנן באנלוג המערכת?
(אנטי-אליאסינג) כדי שהאות cos לא
יעשה אליאסינג על האות



$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} 0 \pm \varepsilon & |\Omega| \le \Omega_N \\ -a \ \text{dB} & |\Omega| = \Omega_i \end{cases}$$

מנחית a dB
על Ω_i

כל ש Ω_N ו Ω_i יותר
קרובים המסנן צריך להיות יותר חד.

(2) היות ולפחות חלק מהאות המפריע עבר את המסנן, הוא נדגם ובהחלט יכול להיות גם קיפול
(לא יכול לדעת על התדר שלו)

$$X_i(j\Omega) = \pi \cdot \left[\delta(\Omega - \Omega_i) + \delta(\Omega + \Omega_i)\right]$$

מה קורה לאות שעבר במסנן:

$$X_{ia}(j\Omega) = \pi \left[H_a(j\Omega_i) \cdot \delta(\Omega - \Omega_i) + H_a(-j\Omega_i)\delta(\Omega + \Omega_i)\right]$$

$$X_{id}(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{T} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \left[H_a(j\Omega_i) \cdot \delta\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T} - \Omega_i\right) + H_a(-j\Omega_i) \cdot \delta\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T} + \Omega_i\right)\right]$$

אם נבחן את האות בתחום התדרים $(-\pi, \pi)$ התדרים של המפריע יהיו:

$\Omega_i T \mod 2\pi$, $-\Omega_i T \mod 2\pi$ של האות הרצוי

אם הם בתוך התחום - לא עזר מסנן להפריד בתחום המסנן האנלוגי. צריך לתקן את זה.

אם הם מחוץ לתחום הרצוי אפשר ע״י המסנן הספרתי.

ובעצם השאלה הקריטית: האם התדרים האלו נופלים בתחום $[-\Omega_N T, \Omega_N T]$

צריך לבדוק מה התדר המינימלי שבו לא נוסף באנלוגי כך שיהיה לו בתוך סינון ספרתי.
ל מה שמעבר לתדר ניקוויסט אפשר לקבל. אבל זה יכול להיות מיותר, ואפשר לדעת תדר דגימה
יותר.

7/3/11
א' אדר ב'

הרצאה 3

המסנן הדיגיטלי בדרך כלל יותר מדויק. אם אופטימיזציה או גזירה נכפל את האנלוגי במשהו מחזורי,
ונרצה לסנן כמה שיותר. בגלל השכפולים לא תמיד ניתן לסנן. ואז המסנן האנלוגי יכול לסנן.
רק בסוף הערוץ המחשבי. פה מה נרצה שהמסנן האנלוגי יעשה.

שינוי קצב דגימה בזמן בדיד

<u>שינוי הקצב של אות בזמן בדיד</u>

נתון האות בזמן רציף הנדגם במרווח T:

$$x[n] = x_c(nT)$$

אנו מעוניינים באות בדגימה בקצב אחר, בקצב T'. $T' \neq T$

$$x'[n] = x_c(nT')$$

<u>הקטנת קצב דגימה בכפל שלם</u>

נניח כי $mT = T'$ ו-m הוא מספר שלם, נוכל לבצע דגימות מיותרות:

$$x'[n] = x[nm] = x_c(nmT) = x_c(nT')$$

על פי משפט הדגימה:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

$$X'(e^{j\omega}) = \frac{1}{T'}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega-2\pi k}{T'}\right)$$

עבור $T' = mT$:

נמצא את הקשר בין x ו-x': מתוך 2 ⟵ r עובר על כל המספרים, וכל מספר פעם 1.

נסמן $r = l + mk$ כך ש: $-\infty < k < \infty$ ו-l: $0 \le l \le m-1$

$$X'(e^{j\omega}) = \frac{1}{T'}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega-2\pi r}{T'}\right)$$

ונקבל:

$$X'(e^{j\omega}) = \frac{1}{mT}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega-2\pi l-2\pi k m}{mT}\right)$$

$$X'(e^{j\omega}) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\underbrace{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\frac{\omega}{m}-2\pi\frac{l}{m}-2\pi k}{T}\right)}$$

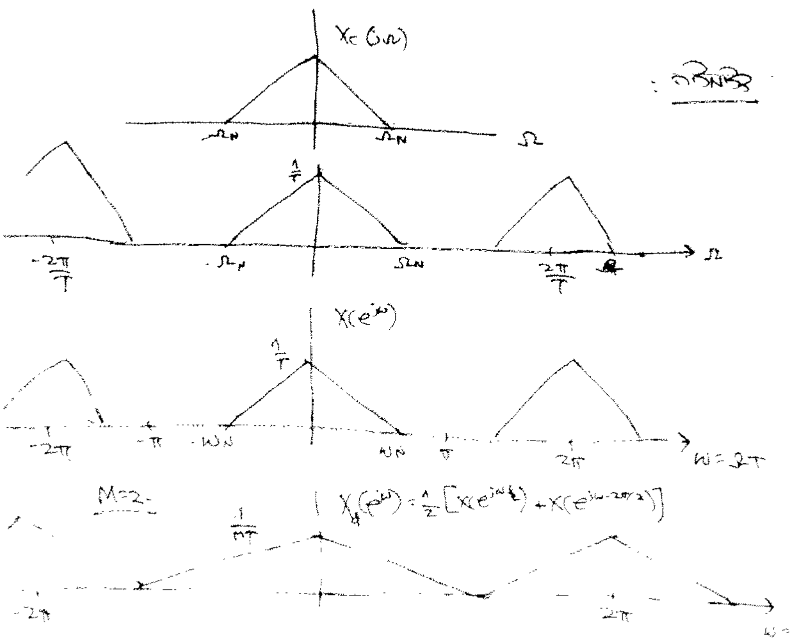
נשווה את הביטוי הזה
למה שקיבלנו במשפט הדגימה:

$$\Rightarrow = \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{m-1} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{m}}\right)$$

וזה הקשר בין x ו-x' וזה מאוד מזכיר
את משפט הדגימה.

<u>דוגמה</u>:

ו-X עצמו יש שכפולים בעצם.



⟵ נראה באופן כללי:

שאלות נניח פי 2,
נמלא את החורים בצורה מחזורית
כי אחרת החורים הם נשארים,
וזה כי יכול להיות בגלל המחזוריות 2π,
ובעצם $\sum_{l=0}^{m-1}$ - התוספת הזאת של
הם נכנסים וממלאים את החורים.

עמוד ② הרצאה 3

לא יהיה אובדן מידע אם האות בזמן בדיד $X(e^{j\omega})=0$ לכל $|\omega| \ge \frac{\pi}{M}$

רוחב המחזור של האות $2\omega_N$ אני מכווץ. לכן רוחב האות יהיה $2\cdot M\cdot\omega_N$ ושצריך יהיה קטן

מ-2π כדי שלא יהיו חפיפות. אז נדרוש: $2M\omega \le 2\pi$ שם האות היה.

נדרוש רק עבור המחצית המרכזית: $\frac{\pi}{M} \le |\omega| \le \pi$ שיהיה שם לאפס.

הסבר במצגת על: Aliasing in decimation

אינטרפולציה: העלאת קצב דגימה בזמן בדיד בקצב שלם:

בניגוד לדצימציה צריך לשחזר את כל הדגימות שבין הדגימות.

נניח כי נתונות לנו דגימות $X[n]=X_c(nT)$ של אות בזמן רציף המקיים את תנאי נייקוויסט.

ונרצה לקבל דגימות $X_i[n]=X_c(nT')$ כאשר $T'=\frac{T}{L}$ ו-L שלם.

זה דומה לשחזור אנלוגי - רכבת הלמים ומסנן.

נגדיל את קצב הדגימה ע"י רכבת הלמים. בכל הדגימות שנוספו נשים אפס. נקבל:

יצירת רכבת הלמים:
$$X_p[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\cdot\delta[n-kL]=\begin{cases} X\left[\frac{n}{L}\right] & n=0,\pm L,\pm 2L \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

מה התמרת פורייה שלו:
$$X_p(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_p[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\cdot\delta[n-kL]\,e^{-j\omega n}$$

נחליף את הסדר של הסכימה:

כלל של הזזה
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\cdot\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-kL]\cdot e^{-j\omega n}}_{\text{התמרת פורייה של הלם}}=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\cdot e^{-j\omega kL}}_{\text{התמרת פורייה}}=X(e^{j\omega L})$$

- התמרת פורייה של הלם
- מוזז בציר הזמן

בספקטרום: Interpolation

בהתחלה זה היה מחזורי, וכיווצנו בכפל שלם אז זה עדיין יהיה מחזורי 2π.

אם בזמן יש לנו אות עם הרבה אפסים באמצע, ונצטרך לסנן

מסנן השחזור האידיאלי (מסנן בזמן בדיד)

$H(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases} L & |\omega|<\frac{\pi}{L} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

ומחזורי 2π.

ההגבר של L כי $\frac{1}{T'}=\frac{L}{T}$ וזה מה שנרצה לקבל ע"י אוילר. בדגימה שדגמנו קיבלנו

רק $\frac{1}{T}$ מה שנתן לנו יותר L זה המסנן הזה. ננסה לכוון לתוצאה שהייתה יוצאת מהאות

אם היינו דוגמים בקצב הזה

ובזמן, המסנן: $h[n]=\mathrm{sinc}\left[\frac{n}{L}\right]$

המוצא של המסנן מורכב מקונבולוציה של הרכבת הלמים עם המסנן הזה:

$$\boxed{X_i[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{n-kL}{L}\right)}$$

בגישה ש~~...~~ שהאות המקורי קיים את תנאי נייקוויסט

למרות שאין איבוד מידע, כיוון שיש אינסוף דגימות

אפשרי רק נקודה לנקודה. ואז בדגימה לא איבדנו מידע ואפשר להשתמש רק במידע שנדגם באות

כדי לשחזר את העלאת הקצב.

אם נרצה להגיע ליחס של $\frac{M}{L}$ יחסית ל-T המקורי.

קודם נעשה אינטרפולציה כמו $\boxed{\uparrow L}$ ואז נוריד כמו של $\boxed{\downarrow M}$

והמסנן שנצטרך פה יהיה ברוחב $\frac{\pi}{M}$ ונצטרך לדאוג שקצב הדגימה הסופי מקיים את נייקוויסט.

שאלה למה: האם אפשר להפך את הסדר? קודם דצימציה ואז אינטרפולציה (גם שומרים על המידע)

3 הרצאה (3) שבוע

איך נעשה חישובים בפועל?

Digital Signal processing 1 - DFT

התמרת פוריה:

$$\boxed{DTFT}: \quad \bar{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$ אנליזה

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \bar{X}(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$ סינתזה

כמות מקדמי סופית N

DFS מחזיק לנו n דגימות מהתדרים n דגימות (בדר"כ וכו', אבל זה מחזורי 2π)

למקרה של אות מחזורי. בזמן מעבר לאות

$$\boxed{DFS}: \quad d_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}$$ אנליזה

למרבה המזל התמרה ניתנת לביצוע ב-n דגימות

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} d_k \cdot e^{jkn\frac{2\pi}{N}}$$ סינתזה

השתמש בפורה n מקדמי - זה אחד

← תחום לאות סופי ולא מחזורי (כמו DFS)

$$\boxed{DFT}: \quad \bar{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}$$

אות מוגדר בזמן ל-N דגימות

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}[k]\, e^{jkn\frac{2\pi}{N}}$$

ניתן לחשב את DFT בצורה מהירה

באות הסופי התמרת פוריה לא מוגדרת כי ...

בחרנו, X_k קשור להתמרת פוריה אך לא זהה לה.

נוכיח שבה הזמן מייצג את האות. שההתמרה ההפוכה מחזירה:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[n-\ell N]$$

הוכחה: נשתמש בזמן להתמרת DFS ונבנה אות מחזורי.

נפעיל את ה-DFS:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n]\, e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N}\bar{X}(k)$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jkn\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

בתחום $n=0,\dots,N-1$ $\tilde{x}[n] = x[n]$

ומכאן:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}[k]\cdot e^{jkn\frac{2\pi}{N}}$$ עבור $n=0,1,\dots,N-1$

נוסח בדרך נוספת, לפי הגדרה:

נגדיר את מרחב הסיגנלים באורך N למרחב הוקטורי $\mathbb{C}^N$ כלומר הוקטור x יהיה מורכב

מהדגימות: $\underline{X} = [x(0), x(1), \dots x(N-1)]^T \in \mathbb{C}^N$ הבסיס האורתוגונלי שנבחר

$$\underline{U}_k = \left[1, e^{jk\frac{2\pi}{N}}, e^{j2k\frac{2\pi}{N}}, \dots, e^{j(N-1)k\frac{2\pi}{N}}\right]^T \qquad k=0,1,\dots,N-1$$

נראה שזה בסיס והוא אורתוגונלי (כך שגם לנורמה 1)

1 כל ... בסיס. מימד המרחב הוא N, ולכן מספר הוקטורים בבסיס זה N.

2 אורתוגונליים: נוכיח -

גרמים ... ↑

$$\underline{U}_k^* \underline{U}_\ell = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-\ell)} = \begin{cases} N & k=\ell \\ 0 & k\neq\ell \end{cases}$$ → הנורמה של k

לפי הנוסחה לבסיס אורתוגונלי יש לנו:

$$\underline{X} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\underline{U}_k^*\underline{X}}{\|\underline{U}_k\|}\, \underline{U}_k$$

נגדיר: $X[k] = \underline{U}_k^* \underline{X}_k$

$$X(k) = \underline{U}_k^* \underline{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

הסינתזה

$$x[n]=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\,e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \xrightarrow[\text{הפוך}]{DFT}$$ ממשי

אם נסתכל רק על הסכום ה-n ית.

נגדיר סימון: $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ (שורש n של 1) שורש של 1 מסדר N

ש' הבדל בין DFT ל- DFS אין בנוסחאות רק בהגדרות (הוא אותו דבר).

דוגמאות:

$\boxed{1}$ הלם. $x[n]=\delta[n]$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot W_N^{n}=W_N^{0}=1$$

$\boxed{2}$ אקספוננט. $x[n]=e^{jr\frac{2\pi}{N}n}$ כאשר r שלם.

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}e^{jr\frac{2\pi}{N}n}\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(r-k)n}=\begin{cases}N & r=k,\ (r-k)\bmod N=0\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

$\boxed{\text{סימון: } \langle r\rangle_k=r \bmod k}$

$\boxed{3}$ קוסינוס $x[n]=\cos\left(r\frac{2\pi}{N}n\right)$

$0\le r\le\frac{N}{2}$

$$\Rightarrow x[n]=\frac{1}{2}e^{jr\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}e^{jr\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\Rightarrow X[k]=\frac{N}{2}\cdot\delta[k-r]+\frac{N}{2}\delta[k+r]\Rightarrow\frac{N}{2}\delta[k-r]+\frac{N}{2}\delta[k+r-N]$$

בk כי הוא מוגדר רק ב $0\div N-1$

סיכום:

$$\delta[n]\xleftrightarrow{DFT}1 \qquad e^{jr\frac{2\pi}{N}n}\xleftrightarrow{DFT}\delta[k-r] \quad 0\le r\le N-1$$

$$\delta[n-m]\xleftrightarrow{DFT}W_N^{km} \qquad \cos\left(r\frac{2\pi}{N}n\right)\xleftrightarrow{DFT}\frac{N}{2}\delta[k-r]+\frac{N}{2}\delta[k+r-N]$$

תכונות:

1 לינאריות:

$$\alpha x[n]+\beta y[n]\xleftrightarrow{DFT}\alpha\cdot X[k]+\beta\cdot Y[k]$$

2 הזזה בזמן: זוהי הזזה ציקלית בזמן. (אין משמעות להזזה מחזורית לפי הגדרה)

$$y[n]=x[\langle n-m\rangle_N]=\begin{cases}x[n-m] & 0\le n-m\le N-1\\ x[N+n-m] & N-1\le n-m\le 0\end{cases}$$

$$Y[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[\langle n-m\rangle_N]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{n'=0}^{N-1}x[n']\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n'+m)}=\sum_{n'=0}^{N-1}x[n']\cdot W_N^{n'k}\cdot W_N^{mk}=X[k]\,W_N^{mk}$$

$n'=\langle n-m\rangle_N$ הסכום על n' אותו דבר.   לפי

ההבדל העיקרי בין ההתמרות

2. DFS נותן את מקדמי הטור בזמן ← הזזה רגילה.

אבל לא משנה כי הזמן היה מחזורי ציקלי בגלל המחזוריות.

2. DFT חייב לחשוב על ההזזה ציקלית ← בגלל ההגדרה של הסיגנל בזמן סופי.

14/03/11

ז' אדר ב

DSP1- תרגיל כיתה 2.

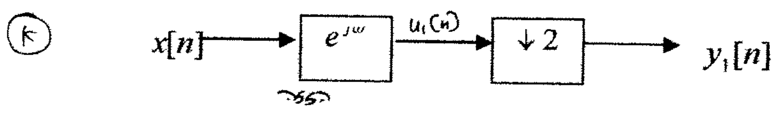
נושאים:

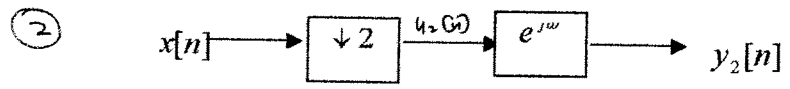
שינויי קצב דגימה.

דצימציה ואינטרפולציה.

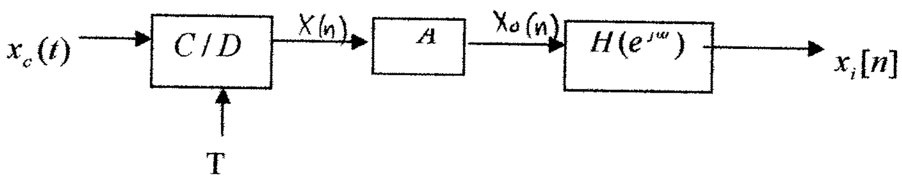
שאלות:

1. האם $y_1[n] = y_2[n]$? הוכח תשובתך. (האם המערכות הפוכות שקולות):





2. נתונה המערכת הבאה:



הבלוק A מבצע את הפעולה הבאה: $L > 1$, $x_0[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_0[n-kL]$. (*)

קונבולוציה עם מסנן מתאים.

א. חשב את $x_i(e^{j\omega})$.

ב. באילו תנאים על $H_0(e^{j\omega})$ ניתן לתכנן את $H(e^{j\omega})$ כך שיתקבל: $x_i[n] = x_c[n\frac{T}{L}]$. מצא את $H(e^{j\omega})$.

3. ראינו כי נוסחת האינטרפולציה לשחזור אידיאלי היא:

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-kL] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin(\frac{\pi}{L}(n-kL))}{\frac{\pi}{L}(n-kL)}$$

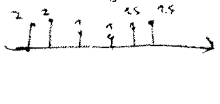
כאשר $h[n] = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{L}n)}{\frac{\pi}{L}n}$ זהו מסנן LPF אידיאלי עם הגבר L בתגובת התדר, ותדר קטעון $\omega = \pi / L$.

בתרגיל זה נבחן שתי שיטות לקירוב המסנן האידיאלי.

א. אינטרפולציה בשיטת zoh:

$$x_i[n] = \begin{cases} x_e[0]\ ,\ n = 0,1,\ldots,L-1 \\ x_e[L]\ ,\ n = L, L+1,\ldots,2L-1 \\ x_e[2L]\ ,\ n = 2L, 2L+1,\ldots,3L-1 \\ \vdots \end{cases}$$

מהי תגובת ההלם של המסנן ומהי תגובת התדר?



ב. אינטרפולציה ליניארית- נתונה תגובת ההלם של מסנן האינטרפולטור הליניארי הבא:

מסנן שמבצע את:
FOH

$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - \dfrac{|n|}{L} , & |n| \le L \\ 0 , & o.w \end{cases}$$

מהי תגובת התדר של מסנן האינטרפולטור הליניארי? צייר במפורש עבור L=3.

ג. צייר את האמפליטודה של תגובת התדר של שני המסננים (zoh וליניארי). איזה מסנן לדעתך מקרב טוב יותר את המסנן האידיאלי?

ד. נתון האות הבא : $x[n] = [\ldots 0\ 0\ 2\ 1\ 3\ 0\ 0 \ldots]$ ששונה מאפס עבור n=0,1,2 בלבד.
רוצים לבצע אינטרפולציה בפקטור 3. חשב את האות לאחר אינטרפולציה zoh ולאחר אינטרפולציה ליניארית.

4. נתון אות רציף $x_c(t)$ שנדגם בתדר $f_s = 1/T_s$ (הנח כי תדר הדגימה עומד בתנאי נייקוויסט) התקבל האות הדגום $x[n]$.

$\boxed{\text{מסנן ספרתי}}$ $\boxed{\downarrow M}$ $\boxed{\uparrow L}$

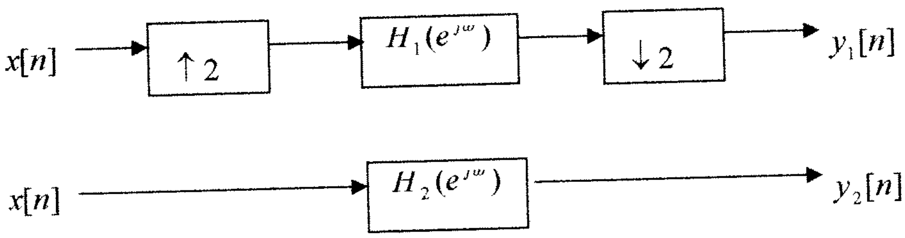
מעוניינים לשנות את קצב הדגימה ל- $f = f_s \dfrac{P}{K}$.
לרשותנו הרכיבים הבאים: מעלה קצב ב-L (L מספר שלם כלשהו), מוריד קצב ב-M (M מספר שלם כלשהו) ומסנן ספרתי יחיד.

א. תכנן מערכת לשינוי קצב הדגימה הדרוש.

ב. האם בהכרח ניתן לשחזר את $x_c(t)$ מתוך האות הדגום החדש? מהם התנאים לכך?

ג. האם ניתן להחליף את הסדר בין מוריד הקצב ומעלה הקצב? מהם התנאים לכך?

5. נתונות המערכות הבאות:



$H_1(e^{j\omega})$ ידוע. עוד ידוע כי $y_2[n] = y_1[n]$.

א. חשב את $H_2(e^{j\omega})$.

ב. נתון כי: $H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2 , & |w| \le \pi/2 \\ 0 , & o.w \end{cases}$. מהו $H_2(e^{j\omega})$?

ג. נתון כי: $H_1(e^{j\omega}) = 1 , \ \forall \omega$. מהו $H_2(e^{j\omega})$?

ד. נתון כי: $H_1(e^{j\omega}) = H_{zoh}(e^{j\omega})$ כאשר מסנן האינטרפולטור zoh הוא כפי שחישבנו בשאלה 3 עבור L=2. מהו $H_2(e^{j\omega})$?

ה. נתון כי: $H_1(e^{j\omega}) = H_{lin}(e^{j\omega})$ כאשר מסנן האינטרפולטור הליניארי הוא כפי שחישבנו בשאלה 3 עבור L=2. מהו $H_2(e^{j\omega})$?

עבור סעיף הבא $H_1(e^{j\omega})$ אינו ידוע.

ו. המסנן בסעיף ה' אינו סיבתי. כעת רוצים ש- $h_1[n]$ יהיה מסנן מסנן אינטרפולטור ליניארי סיבתי. נתון כי $H_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}$. מהו $h_1[n]$?

14/03/01

ב אדר ה

302

תרגול 2

- שינוי קצב דגימה
- דצימציה ואינטרפולציה

$x_c(t) \xrightarrow{T} x(n) = x_c(t = nT)$ דגימה בקצב: $\frac{1}{T}$:

$x_c(t) \xrightarrow{T} x_d(n) = x_c(t = n\cdot MT)$ דגימה בקצב: $\frac{1}{MT}$:

הורדת קצב בסיגנל בדיד:

$x(n) \to \boxed{\downarrow M} \to x_d(n) = x(n = n\cdot M)$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi n}{M}}\right)$$

שלבים:

1. נרמול עוצמה פי $\frac{1}{M}$
2. נרמול ציר התדר פי M (המחזור הוא $2\pi\cdot M$)
3. נשכפל M-1 פעמים (הספקטרום ← חזרה למחזור 2π) ונסכם את הספקטרום כל 2π.

דרך השניה יותר (פשוטה):

1. נסתכל על הספקטרום בין $-\pi$ ל- π (המחזור הבסיסי)
2. נרמול עוצמה פי $\frac{1}{M}$
3. נרמול התדר פי M
4. נשכפל אינסוף פעמים כל 2π.

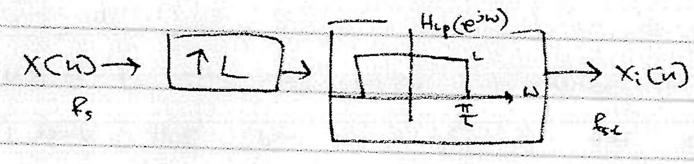
העלאת קצב

$$x(n) \to \boxed{\uparrow L} \to x_e(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{L}) & n=0;\pm L;\pm 2L.. \\ 0 & o.w \end{cases}$$

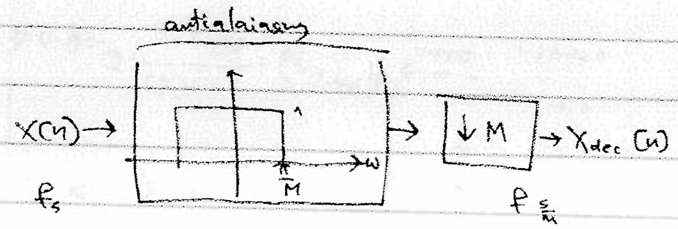
כעת לוקחים את האות $x(n)$ ומשלימים L-1 אפסים בין כל 2 דגימות.

$X_e(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$ פה אנחנו אין אובדן מידע. (בהורדת קצב - שחזור יכול להיות בעייתי)

אינטרפולציה:



דצימציה:



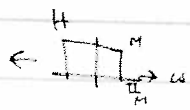
נוכל לשמור את התוכן של הדגימות

נוסיף לפני מסנן LP.

שחזור: נשים את עותק הספקטר:

$$x_i(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kM)\cdot h(n-mk)$$

נעביר במסנן הלואו (אינטרפולציה אידיאלי):



$$h(n) = \frac{\sin(\frac{\pi}{M}n)}{\pi n/M}$$

נקבל:

$$x_i(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d(k)\cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{M}(n-kM)\right)}{\pi(n-MK)/M}$$

פתרון שאלה 1:

נחשב את y_1: הדצימציה היא אחרונה:

$y_1(n) = u_1(2n)$

$u_1(n) = x(n+1)$ $\Rightarrow y_1(n) = x(2n+1)$

נחשב את y_2: הדצימציה ראשונה:

$y_2(n) = u_2[n+1]$ $\Rightarrow y_2(n) = x(2(n+1)) = x(2n+2)$

$u_2(n) = x[2n]$

← המערכות לא שקולות. כלומר הורדת קצב אינה קבועה בזמן.

פתרון שאלה 2:

(א) נשים לב שב־(*) זוהי קונבולוציה ספרתית אולם עם מקדם מוזז L.

נחשב את $X_i(e^{j\omega})$:

$$X_i(e^{j\omega}) = X_0(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

נחשב את $X_0(e^{j\omega})$:

$$X_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_0[n-kL]\right] e^{-j\omega n}$$

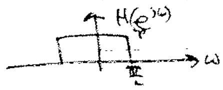
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\omega k \cdot L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0[n-kL] \cdot e^{-j\omega(n-kL)} \underset{m=n-kL}{=} X(e^{j\omega L}) \cdot H_0(e^{j\omega})$$

נציב בחזרה ב־X_i:

$$X_i(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \cdot H_0(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

(ב) נרצה כי כדי להשלים קצב צריך לכמת הדגימות את $x(n)$ - כלומר לסנן דרך - ולסנן במסנן אינטרפולציה.

$$x_i(n) = x_c(t = n \cdot \tfrac{T}{L}) \xrightarrow{DTFT} X_i(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$



לכן נדרוש:

$$H_0(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) = \begin{cases} L & |\omega| \le \frac{\pi}{L} \\ 0 & o.w \end{cases} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{L}{H_0(e^{j\omega})} & |\omega| \le \frac{\pi}{L} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

תנאי על $H_0(e^{j\omega})$:

$$H_0(e^{j\omega}) \neq 0 \quad \forall\, |\omega| \le \frac{\pi}{L}$$

פתרון שאלה 3:

נכתב על 2 שיטות שחזור שמקרבות את השחזור עם ה־sinc.

(א) שיטת ZOH: נשים ♥ כי מוגדר ה־ZOH הוא הקצב קונבולוציה עם חלון מלבני.

1 0 2 0 3 0

1 1 →

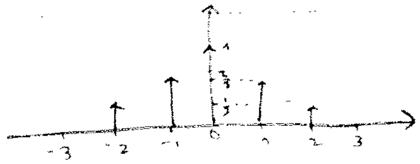
ציור L

1 1 2 2 3 3

$$h_{ZOH}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & o.w \end{cases} \xrightarrow{DTFT} H_{ZOH}(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\frac{\omega L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \cdot e^{-j(L-1)\cdot\frac{\omega}{2}}$$

(ב) עבור $L=3$:

(מחצית מוכפלת - קצב ליניארי)

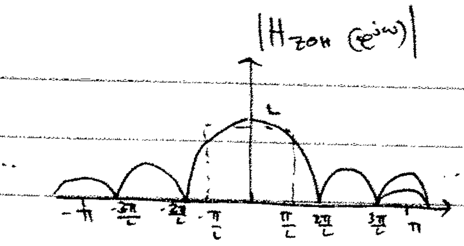


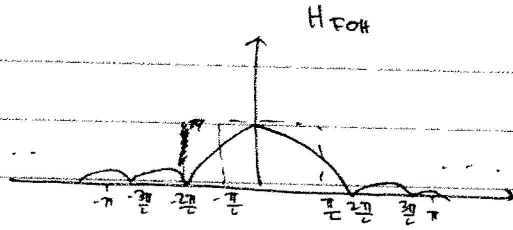
$$h_{lin}(n) = \frac{1}{L} \cdot h_{ZOH}(n) * h_{ZOH}(-n) \Rightarrow H_{FOH}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \cdot |H_{ZOH}(e^{j\omega})|^2$$

$$H_{lin}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L}\left(\frac{\sin(\frac{\omega L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}\right)^2$$

(ג) הסבר הבא.

השוואה בין המסננים:





ZOH דועך מהר, והעיוות יותר מהיר ↑

1. FOH עקומות גבוה יותר מ- ZOH אבל הדעיכה קטנה יותר (דועך מהר יותר)

③ אם ZOH:

(העתק מספר של הדגימות)

200 100 300

111 →

③22①11③33

אם FOH:

~~200 100 300~~

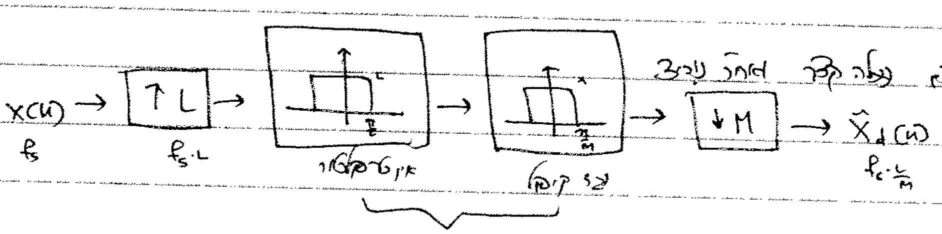
$\frac{1}{3}\frac{2}{3}1\frac{2}{3}\frac{1}{3}$ →

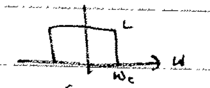
$\frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\ ②\ \frac{5}{3}\ \frac{4}{3}\ ①\ \frac{5}{3}\ \frac{2}{3}\ ③\ 2\ 1$

משמע אינטרפולציה חייב לשמור על הדגימות המקוריות

פתרון שאלה 4:

א) כדי לא לאבד מידע קודם נעלה קצב ואחר נוריד





$$w_c = \min\left(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right)$$

ב) נבחר $L \geq M$ כדי שתנאי מספק לשמור. אחרת ← אין שמירה (כדי לא לאבד מידע)

ג) אם הצורה מסוף פס: $\frac{\pi}{M}$ מותר לדגום אין לאבד מידע.

14/3/11

ח' אדר ב'

הרצאה 4

DFT לוקחת n דגימות בזמן ומייצרת אותם ע"י n דגימות בתדר.

משפט DFT של אות מוצמד בזמן.

$x^*(n) \xleftrightarrow{DFT} x^*[\langle -k\rangle_N] =$ ~~[illegible]~~

3. סימטריה:

הוכחה:

$y(n)=x^*(n) \Rightarrow Y(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right]^*$

$X(k)=X^*(\langle -k\rangle_N)$

בפרט אם $x(n)$ ממשי $x^*(n)=x(n)$, כלומר:

$X(0)=X^*(0) \to$ תמיד יהיה ממשי

$X(k)=X^*(N-k)$ עבור $k\neq 0$ $k>0$ (זהו את הסימטריה מסביב ל- $\frac{N}{2}$)

$|X(k)| = X(n-k)$

$\measuredangle X(k) = -\measuredangle X(n-k)$

$Re[X(k)] = Re[X(n-k)]$; $Im[X(k)] = -Im[X(n-k)]$

אם N זוגי, אז: $X(\frac{N}{2})$ ממשי.

4. דואליות: נתון $x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$ ניקח את $X(n)$ לציר הזמן, מתקבלת הדואליות של פורייה:

$X(n) \xleftrightarrow{DFT} N\,x[\langle -k\rangle_N]$

5. קונבולוציה מעגלית:

$z(n)$ $x(n) \circledast y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, y[\langle n-m\rangle_N] \xleftrightarrow{DFT} Z(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) y[\langle n-m\rangle_N]\right]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

נרשום בקיצור את המספר של אורך הקונבולוציה.

גם ההפרש וגם ההזזה מעגלית.

$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y[\langle n-m\rangle_N]\cdot e^{-jk(n-m)\frac{2\pi}{N}}$

$\langle n-m\rangle_N = n'$

$\Rightarrow \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\cdot e^{-jkm\frac{2\pi}{N}} \cdot \sum_{n'=0}^{N-1} y(n')\cdot e^{-jn'k\frac{2\pi}{N}} = X(k)\cdot Y(k)$ (ע"י ציור מחזורי e) $n' = n-m+N\cdot\mathbb{I}$

וקיבלנו שהכפלה בתדר זה

קונבולוציה מעגלית בזמן.

ההפוך: $\left(z(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Z(k)\, W_N^{-nk}\right)$

ניתן להציג את הקונבולוציה המעגלית בעזרת קונבולוציה לינארית עם אליאסינג

$z_c(n) = x(n) \circledN y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, y[\langle n-m\rangle_N] = \sum_{m=0}^{n} x(m)\, y(n-m) + \sum_{m=n+1}^{N-1} x(m)\, y(N+n-m)$

סכום של 2 קונבולוציות לינאריות:

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, y(n-m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\cdot y(N+n-m)$

עבור $m<0$ x מתאפס; עבור $n<m$ y מתאפס; עבור $m\geq N$ x מתאפס; עבור $m\leq n$ y מתאפס

אם נרצה להשתמש דווקא בקונבולוציה לינארית ולא מעגלית.

נשתמש בקונבולוציה לינארית ע"י קונבולוציה מעגלית: נתונים 2 אותות: $x(n)$ באורך N ו- $y(n)$ באורך M

$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\cdot y(n-m)$

רוצה לחשב את הקונבולוציה הלינארית:

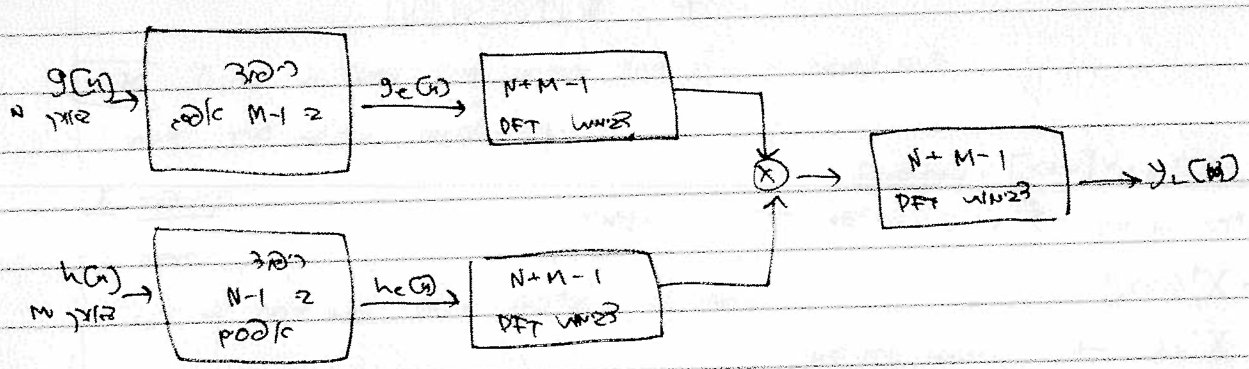
נשים ♥ שאורך הקונבולוציה הלינארית הוא $N+M-1$. נרפד את 2 האותות באפסים לאורך $N+M-1$.

והסכומים יתחילו להיות רק מ- $N+M-1$ ולא יפריעו.

הריפוד באפסים מרחיק את הסכומים כך שלא נגרם אחד על השני ואז הקונבולוציה המעגלית זהה ללינארית

4 הרצאה ③ 3

$y(n) = g(n) * h(n) = g(n) \circledast h(n)$ $\qquad L = N+M-1$ $\qquad$ המימוש:



6. התמרת DTFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = X\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)$$

הנחנו שאות אפס מחוץ לתחום $\qquad \omega = \frac{2\pi}{N}k \qquad$ DTFT

וקבלנו דגימה של DTFT ברזולוציה של $\frac{2\pi}{N}$

N דגימות מכסות תחום של 2π - מחזוריות כבר.

$k > \frac{N}{2}$ מייצגים תדרים בין π ל-2π (תדרים שליליים ב DTFT כביכול)

* אם רוצים לדגום את ה DTFT בתדרים: $0, \frac{2\pi}{M}, 2\cdot\frac{2\pi}{M}, \dots, (M-1)\cdot\frac{2\pi}{M}$ כאשר $M>N$

נרפד ב $(N-M)$ אפסים. ונבצע DFT באורך M.

* אם נתון לנו DTFT בתדר שלא בדגימה, איך נוכל לחשב אותו בעזרת הדגימות, הרי יש אינסוף ערכים אפשריים?

יש תדרים שלא כפולה שלמה של 2π חלקי N, לא ניתן לקבלם בעזרת ריפוד אפסים.

נוכל לחשב $X(e^{j\omega})$ עבור כל ω בעזרת נוסחת DTFT של אות באורך סופי:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jkn\frac{2\pi}{N}}\right] e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega - k\frac{2\pi}{N})n}}_{\text{סכום הנדסי}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot \left(\frac{1-e^{-j(\omega-k\frac{2\pi}{N})N}}{1-e^{-j(\omega-\frac{k2\pi}{N})}}\right)$$

סכום הנדסי

התמרת DTFT של חלון מלבני

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega-k\frac{2\pi}{N})n} = \frac{1-e^{-j(\omega-k\frac{2\pi}{N})N}}{1-e^{-j(\omega-\frac{2\pi k}{N})}} = e^{-j\frac{\omega N-2\pi k}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega N-2\pi k}{2N}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega N-2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega N-2\pi k}{2N}\right)}$$

נוסחת אינטרפולציה:

$$\boxed{\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega N-2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega N-2\pi k}{2N}\right)} \cdot e^{-j\frac{\omega N-2\pi k}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega N-2\pi k}{2N}}}$$

למשל עבור $\omega = \frac{2\pi}{N}\cdot i$ $\qquad = 0$ אלא אם $i=k$ ואז נקבל בחלוקה N שמצטמצם עם $\frac{1}{N}$

האקספוננטים שווים ל-1 ונקבל: $\qquad X(e^{j\omega}) = X(i)$

נוסחה שמשווה לי את הערך איפה שהוא בין כל הדגימות שנתונות לי, וזה נקרא אינטרפולציה.

7. שוויון פרסבל (הוכחנו עבור DFS - המחשה אותו:)

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

עמוד 3 הרצאה 4

8. ייצוג DFT ע"י מטריצה:

ניתן להפוך את וקטור ולהסתכל על פעולת DFT כעל הכפלה במטריצה

פעולת DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

וקטור $\underline{x}$ יסמן דגימות: $\underline{x} = [x(0), x(1), \ldots x(N-1)]^T$

וקטור $\underline{X}$ יסמן את ההתמרה: $\underline{X} = [X(0), X(1), \ldots X(N-1)]^T$

$$\underline{X} = F_N \underline{x}$$

$$F_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

סימטרית

ההתמרה ההפוכה: $x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$

ולכן המטריצה ההפוכה נדרשת להשיג מינוס בחזקה של האקספוננט שזה צמוד ולהכפיל ב: $\frac{1}{N}$

נסמן F_N^H ← H מסמל צמוד וטרנספוז - הרמיטי. ולכן:

$$\boxed{F_N^{-1} = \frac{1}{N} F_N^H}$$

כפל של מטריצה בוקטור זה $O(n^2)$. N^2 כפלים ו- $N(N-1)$ חיבורים.

אפשר לחשב את ההתמרה הזאת ב: $\frac{N}{2}\log_2 N$. $O(n \log n)$

H - צמוד קומפלקסי וטרנספוז

קונבולוציה ציקלית מתקבלת מקיפול אחד של הקונבולוציה
הלינארית (ההוכחה של תמר צמט מתקבלת משימוש
בהכרות המספר אם ניתן להפריש בין האישור [illegible]
שיר של הקונבולוציה הציקלית נקבל אותה תוצאה)

הפעלת DFT על וקטור שקול
להכפלה במטריצת ה DFT משמאל

28/3/11

כ"ב אדר ב'

הרצאה 5

נזכר בהתמרת DFT:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W_N^{nk}$$

וההתמרה ההפוכה:

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

וציין שאפשר לייצג ע"י מטריצה DFT.

כלומר לקחת את האות כוקטור ולהכפיל במטריצה ולקבל את ההתמרה.

הכפלה של מטריצת DFT בוקטור דורשת N^2 פעולות כפל. נראה שניתן לעשות זאת ב: $N\log_2\frac{N}{2}$ כפלים.

ייצוג של קונבולוציה ציקלית ע"י מטריצה:

יהיו 2 אותות: $\underline{X}$ ו-$\underline{A}$ ונחשב קונבולוציה ציקלית ביניהם.

$\underline{A}=(a(0),a(1)\ \ldots\ a(n-1))^T$

$\underline{X}=[x(0),x(1)\ \ldots\ x(n-1)]^T$

$$z(n)=a(n)\overset{N}{\circledast}x(n)=\sum_{m=0}^{N-1}a[\langle n-m\rangle_N]\cdot x(m)$$

$$=a[\langle n\rangle_N]\cdot x(0)+a[\langle n-1\rangle_N]\cdot x(1)+\ldots+a[\langle n-m+1\rangle_N]\cdot x(N-1)$$

נבנה מהאות $\underline{A}$ מטריצה.

$$z=\begin{bmatrix} a[0] & a[n-1] & \ldots & a[1]\\ a(1) & a(0) & a(n-1)\ldots & a[n-2]\\ a[2] & a(1) & a[0]\ldots & a[3]\\ a(3) & a(2) & \ldots & a[4]\\ \vdots & & \ddots & \\ a(N-1) & \ldots & & a(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x[0]\\x(1)\\ \vdots\\ \vdots\\ x(N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z[0]\\z(1)\\ \vdots\\ \vdots\\ z(N-1)\end{bmatrix}$$

המטריצה הציקלית שנבנתה מהוקטור $\underline{A}$ - C_a

$$\underline{A}\overset{N}{\circledast}\underline{X}=C_{\underline{a}}\cdot\underline{X}$$

מטריצה ציקלית. כל האיברים שלה קבועים

וכל שורה הזזה ציקלית של השורה קודמת

וכל עמודה היא הזזה ציקלית של העמודה הקודמת

DFT שלכסון של מטריצה ציקלית.

מכפלה של איבר k - באיבר k.

$$\underline{A}\circledast\underline{X}\xleftrightarrow{DFT}(F_N\underline{A})_k(F_N\underline{X})_k$$

אם נעשה התמרה DFT לקונבולוציה הזאת:

$$F_N(\underline{a}\circledast\underline{x})=F_NC_{\underline{a}}\cdot\underline{X}=\begin{bmatrix}(F_N\underline{a})_0 & & 0\\ & (F_N\underline{a})_1 & \\ 0 & & (F_N\underline{a})_{N-1}\end{bmatrix}\cdot F_N\underline{X}$$

כך ניתן בצורה מטריציאלית את הכפל שהוא איבר איבר:

בעיקרון זה נכון עבור כל $\underline{X}$.

ואם במקום $\underline{X}$ ניקח מטריצה V: $V[\underline{x}_0\ \underline{x}_1\ \ldots\ \underline{x}_{N-1}]$ נקבל שכאשר של הכפלה של המטריצה.

כל אחת בוקטור המתאים

$$F_N\cdot C_{\underline{a}}\cdot V=\begin{bmatrix}(F_N\underline{a})_0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (F_N\underline{a})_{N-1}\end{bmatrix}F_NV$$

ועל לבחור מטריצה ההפכית שלה

$$X=F_N^{-1}=\frac{1}{N}F_N^H$$

$$F_N\cdot C_a\cdot\frac{1}{N}\cdot F_N^H=\begin{bmatrix}(F_N\underline{a})_0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (F_N(\underline{a}))_{N-1}\end{bmatrix}$$

וכך לכסנו את המטריצה C_a וקיבלנו משפט:

$\boxed{\text{משפט}}$ מטריצת DFT מלכסנת כל מטריצה ציקלית

ערכים העצמיים של C_a: הם איברי DFT של $\underline{a}$

ע"פ: התמרת פוריה של העמ' הר'

דוגמא!

נחשב את DFT של $\underline{a}$:

$$\underline{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{\underline{a}}=\begin{bmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{bmatrix}$$

עמוד (2) הרצאה 5

נחשב ω_3:

$$\omega_3 = e^{-\frac{2\pi}{3}j} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega_3^2 = e^{-\frac{2\pi}{3}2j} = e^{\frac{2\pi}{3}j} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ההתמרה:

$$A[0] = 1+2+3 = 6$$

$$A[1] = 1+2e^{-\frac{2\pi}{3}j}+3e^{\frac{2\pi}{3}j} = -1.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$A[2] = 1+2e^{+\frac{2\pi}{3}j}+3e^{-\frac{2\pi}{3}j} = -1.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

וזה הערכים העצמיים:

נבדוק שאלו הערכים העצמיים: ניקח את הדטרמיננטה של המטריצה פחות λI:

$$|C_a-\lambda I| = \left|\begin{bmatrix}-5 & 3 & 2\\ 2 & -5 & 3\\ 3 & 2 & -5\end{bmatrix}\right| = 0$$

(סכום של השורה אפס אם נציב אותה λ
דהיינו לא נקבל אפס וזה סימן שיש שורה תלויה)

בשביל הערכים העצמיים האחרים צריך לחשב ממש את הדטרמיננטה

דוגמה נוספת:

נחשב את DFT של $\underline{a}$

נרשום את $\underline{a}$ בצורה שונה:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix}1\\ \rho\\ \vdots\\ \vdots\\ \rho\end{bmatrix} \qquad C_a = \begin{bmatrix}1 & \rho & \cdots & \rho\\ \rho & 1 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \rho\\ \rho & \rho & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$$\underline{a} = (1-\rho)\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}}_{\delta[n]} + \rho\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}}_{1}$$

$$\delta[n] \xleftrightarrow{DFT} 1$$

$$1 \xleftrightarrow{DFT} N\cdot\delta[\langle -k\rangle_N] = N\cdot\delta[k]$$

ולכן ההתמרה:

$$A[k] = \rho N\delta[k] + (1-\rho)$$

מספר ערכים עצמיים: אורך הוקטור וקטור באורך $N \leftarrow N$ ערכים עצמיים:

ערכים עצמיים ב-2 עד N: $(1-\rho)$ ערך עצמי ב-1: $\rho N + (1-\rho)$

הדטרמיננטה, מכפלת הערכים העצמיים:

$$(1-\rho)^{N-1}(\rho N + (1-\rho))$$

עבור $N=2$: $C_a = \begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix} \rightarrow \det = 1-\rho^2$ ומספר נקבל

$$(1-\rho)^1(2\rho+1-\rho) = 1-\rho^2$$

שימוש אחר של DFT הוא לעשות קונבולוציה עם אות אינסופי.

קונבולוציה עם אות אינסופי

בהרצאה הקודמת ראינו כי עיבוד סיגנלים באמצעות DFT. המעבדים יודעים לעבד הרבה יותר מהר, לומר לבצע קונבולוציה של אות כניסה אינסופי בזמן עם תגובה להלם סופית.

לצורך מימוש של המעבד נצטרך מספר סופי ממספר הקצוב של התגובה להלם.

DFT עובד על אות סופי. יש כמה שיטות לעשות את זה:

(1) overlap and add - נחלק את האות למקטעים כל מקטע באורך N. נסמן את המקטע ה-m ב-$x_m[n]$

עכשיו צריך לעשות קונבולוציה נבצע עבור כל
חלקים בנפרד.

$$x_m[n] = \begin{cases} x[n+Nm] & 0 < n < N-1\\ 0 & o.w\end{cases} \qquad x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m[n-mN]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m[n-mN] * h[n] \Rightarrow y_m[n] = x_m[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m[n-mN]$$

אורך קונבולוציה (לינארית) וקטור יהיה $N+M-1$ (M זה אורך התגובה להלם)

ולכן נוסיף אפסים לאורך הבא: $L = N+M-1$

נבדוק ונסכם את הקטעים y_m ותהיה חפיפה ב-$M-1$ דגימות האחרונות/ראשונות של y_m.

עמוד 3 הרצאה 3 5

הבעיה של המערכת: השהיה של N דגימות.

אם היינו משתמשים בדרך ישירה - למשל (a) אורך קונבולוציה היה צריך M מכפלות + M-1

חיבורים לכל דגימה. עבור חישוב ב- overlap and add - (בערך):

DFT באורך $L = N + M - 1$ של מקטע באורך N.

(DFT של תגובת הלם: נעשה רק פעם 1 ולא פר דגימה)

הכפלה איבר איבר - $(N+M-1)$ הכפלות למקטע. ואז צריך להחזיר למישור הזמן IDFT באורך $L = N+M-1$

M-1 חיבורים למקטע. ובסוף נקבל N דגימות בבת אחת. ↑ IDFT ← מימוש ע"י הכפלה במטריצה

עבור DFT בדרך ישירה (בערך): הפעולות הן: $\underbrace{\frac{2(N+M-1)^2+(N+M-1)}{N}}_{\text{לדגימה}} > \frac{2NM}{N} > M$ (לא!)

המצב. אבל אם נממש את DFT בדרך יעילה נקבל:

$$\frac{(N+M-1)(\frac{1}{2}\log_2(N+M-1))}{N} = \frac{2\cdot\frac{L}{2}\log_2 L + L}{N}$$

דוגמא: $N=925$, $M=100$

יוצא 12.18 פעולות לדגימה

(2) overlap and save - נחתוך את האות מראש במקטעים יותר גדולים: $L = N+M-1$

אם הכפלה (זה עושה קונבולוציה מעגלית) כמו קונבולוציה לינארית עם דריכת חלק מהדגימות. יתרון:

לא צריך ולא יתפספס מהדגימות. (שאנו רוצה)

$$z_c(n) = x(n) \circledast h(n) = \sum_{m=0}^{n} x(m)\, h[n-m] + \sum_{m=n+1}^{L-1} x(m)\cdot h[L+n-m]$$

ריבוע אורך מהקדמות

אין אחר הגבלה

$$\boxed{n \geq M} = \sum_{m=0}^{n} x(m)\cdot h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\cdot h(n-m) = z(n)$$ → קונבולוציה לינארית

רצוי שנקבל

N- ו- M-1 הדגימות הראשונות עם קונבולוציה לינארית.

נחתוך את האות למקטעים באורך L עם חפיפה באורך M-1 נעשה קונבולוציה מעגלית

עם תגובת הלם של הפילטר ~~ונ~~ ונזרוק M-1 דגימות. (ההשהיה אחרת L-1)

ונסיר M-1 דגימות הראשונות [וכך לא נאבד שום דגימות במקטע - שאנו לא צריכים כי נזרוק אותן]

כל פעם N ונקבל כמות הדגימות הקודמת.

במטלב: DFT: fft, IDFT: ifft, overlap & add: fftfilt

תרגיל: overlap and save תחשבו לנו את התוכנית.

FFT - FAST FORURE TRASFORM

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\omega_N^{kn}$$

FFT (מימוש ע"י):

$$= \sum_{n \text{ זוגי}} x[n]\,\omega_N^{kn} + \sum_{n \text{ אי-זוגי}} x[n]\,\omega_N^{kn}$$

כדי לחשב בדרך יעילה נפריד ל- n זוגי ו- n אי-זוגי:

(נניח ש- N זוגי ונסמן $N=2L$ ונחליף: n זוגי: $n=2l$, n אי-זוגי: $n=2l+1$.

$$X[k] = \sum_{l=0}^{L-1} x(2l)\,\omega_N^{2kl} + \sum_{l=0}^{L-1} x[2l+1]\,\omega_N^{2kl+k} = \sum_{l=0}^{L-1} x(2l)\,(\omega_N^2)^{kl} + \omega_N^k \cdot \sum_{l=0}^{L-1} x(2l+1)\,(\omega_N^2)^{kl}$$

$$(\omega_N)^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}2} = e^{-j\frac{2\pi}{L}} = \omega_L$$

נסמן:

$$g(n) = x[2n], \quad h[n] = x[2n+1]$$

נקבל:

$$X[k] = \sum_{l=0}^{L} g(l)\cdot\omega_L^{kl} + \omega_N^k \sum_{l=0}^{L} h(l)\cdot\omega_L^{kl} \Rightarrow$$

קיבלנו:

עמוד 3 הרצאה (4) 5

זה מחזורי, ω יותר. אבל זה חוזר על עצמו:

$\omega_L^L = 1 \;,\; \omega_L^{(k+L)L} = \omega_L^{kL}$

אם נפרק את המקרים, נכתוב בצורה מפורשת:

$\Rightarrow = G\left[\langle k\rangle_L\right] + \omega_N^k H\left[\langle k\rangle_L\right]$

$X(k) = G(k) + \omega_N^k H(k)$

$X(k+L) = G(k) + \omega_N^{k+L} H(k)$

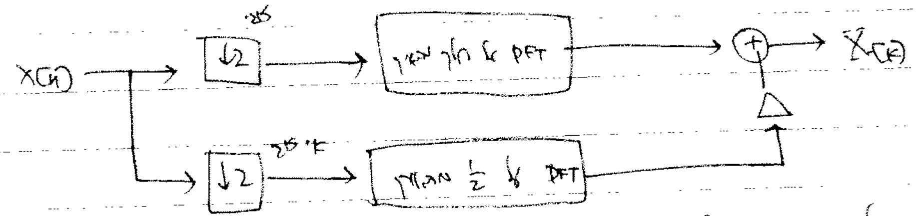
← כמות חישובים:

בצורה ישירה N^2.

אם DFT באורך L יבוצע בצורה ישירה: $2L^2 + N = \frac{N^2}{2} + N$ ← פעמיים DFT

עבור כל איבר מכפלה

מה שעשינו עכשיו:



ב FFT יש שני:

N. פעמים Σ בצורה בגלל שאר. כל פעם עושים דצימציה בזמן: ניקח זוגיים (למשל (0,2,4,8 ומחלקים את הזוגיים שנוצרים - (0,4) וכן. (מזה) דצימציות בסקלפיות.

(נבדל את אלמנט "בינתיים" |: $N = 2^v$ (N חזקה של 2)

ונבצע ב: $\log_2 N$ שלבים: N כפלים לשלב, N חיבורים לשלב — סה"כ: $N\log_2 N$ כפלים, $N\log_2 N$ חיבורים

נשפר את הכפלה ב ω_N

$\omega_N^L = e^{-j\frac{2\pi}{N}L} = e^{-j\pi} = 1$

לפני הפיצול וכבר נכפל פעם 1!

$\omega_N^{k+L} = -\omega_N^k$

ובמקום (נשה חיבור/חיסור בהתאמה):

$X(k) = G(k) + \omega_N^k H(k) \qquad 0 \le k \le L-1$

$X(k) = G(k) - \omega_N^k \cdot H(k)$

וככה נחסוך ½ מהכפלים.

סה"כ חישובים: $\frac{N}{2}\log_2 N$ כפלים ו- $N\log_2 N$ חיבורים.

מה קורה אם N הוא לא חזקה שלמה של 2?

אפשרות (1): לרפד. אפשרות (2): לעשות בסיס אחר (חלוקה ל-3 במקום ל-2 קבוצות למשל)

לפרק את N לגורמים ראשוניים ולחשב אלגוריתם דומה לפי הגורמים שהתקבלו.

דוגמא: N=129 - 129 מתחלק ב 3. אם נשה בחישוב ישיר יהיה: כפלים $129^2 = 16{,}641$

ריפוד באפסים: נרפד עד 256. נקבל: $\frac{256}{2}\log_2 256 = 128\cdot 8 = 1024$ כפלים

אם אנחנו מחשבים FFT עבור אורך אחר ממה שחושב. זו התמרה שונה.

DFT בעצם את התמרת פורייה, אנחנו נקבל יותר דגימות של DTFT כזה.

וזה משנה משהו במיקום של הדגימות המקוריות ← זה כבר לא באותו מיקום!

הקשר בין המיון וכניסה - זה 'bit reversal' - ראו. אם נצטרך לסדר את הכניסות. כך

שנוכל לעשות FFT בצורה ישירה:

input			output
0	000	000	0
4	100	001	1
2	010	010	2
6	110	011	3
1	001	100	4

עמוד 3 (5) הרצאה 5

$$X[n] \xleftrightarrow{DFT} N x[\langle -k\rangle_N]$$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{DFT} X^*[\langle -k\rangle_N]$$

$$X^*[n] \xleftrightarrow{DFT} \cancel{[illegible]}\ N x^*[k]$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\left(DFT\{X^*(k)\}\right)^*$$

איך עושים IDFT?

נשים לב שההתמרה ההפוכה (...) דומה!

אפשר לעשות IDFT ע"י DFT.

נשתמש בתכונות הבאות:

צריך להוסיף הצמדה בכניסה ובמוצא!

ונקבל אותה סיבוכיות כמו ב- FFT.

תרגיל 3 יום שני כל עזרב תמטם
עבוס עוקרין

1/2

תרגיל 3

פתרון:

1. א.

$$A = \hat{X}(0) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n) W_N^{0n} = \sum_{n=0}^{9} x(n) = 22$$

ב.

$$B = \sum_{k=0}^{9} \hat{X}(k) = N\, x(k)\Big|_{k=0} = N \cdot x(0) = 10 \cdot 2 = 20.$$

$$C = \sum_{k=0}^{9} e^{-j\frac{4\pi k}{5}} \hat{X}(k) = \sum_{n=0}^{9} e^{-j\frac{2\pi}{10}(k\cdot 4)} \hat{X}(k) = \sum_{k=0}^{9} e^{-j\frac{2\pi}{10}(k4)} \quad \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{10}k10}}_{1} \hat{X}(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{9} e^{j\frac{2\pi}{10}k6} \cdot \hat{X}(k) = N\, x(k)\Big|_{k=6} = 10 \cdot 0 = 0$$

ד.

$$D = \sum_{k=0}^{9} |\hat{X}(k)|^2 \overset{\text{פרסבל}}{=} N \sum_{n=0}^{9} |x(n)|^2 = 10(4+\dots+36) = 800$$

2. אם נעשה DFT, נקבל דגימות של ה DTFT בנקודות $k=0,\dots,N-1$ $\frac{2\pi k}{N}$.
עכשיו רוצים להסיט ב W_0.
נבנה את ה DTFT של הסדרה המקורית ב W_0 שמוזזת, ונעשה DFT של הסדרה החדשה.
לכן נגדיר $\tilde{x}(n) = e^{-jw_0 n} x(n)$. וידוע שהוספת פקטור $e^{-jw_0 n}$ בזמן
מזיזה את ה DTFT ב w_0 שמאלה.
נעשה DFT של $\tilde{x}(n)$ ונקבל:

$$\hat{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jw_0 n} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn\left(\frac{2\pi}{N}k + w_0\right)} = X(e^{jw})\Big|_{w=\frac{2\pi k}{N}+w_0}$$

$k=0,\dots,N-1$

3. ~~נעשה DFT ל-x(n)~~ רק 5 ערכים.

$$\hat{X}_{new}(k) = \hat{X}(4k)$$

דרך I:

$$\hat{X}_5(k) = X(e^{jw})\Big|_{w=\frac{2\pi k}{5}} = \sum_{n=0}^{19} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{5}kn} = \sum_{n=0}^{19} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{20}(4k)n}$$

$$= \hat{X}(4k)$$

כאמור - לחשב מפורשות 5 מקדמי DFT.
... כל ... בגודל 20 ... מכפלות מרוכבות.

מספר

דרך II (השלמה)

$$\hat{X}_5(k) = X(e^{jw})\Big|_{w=\frac{2\pi k}{5}} = \sum_{n=0}^{19} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{5}kn}$$

חילוק משתנים: יש 20 איברים בסדרה, נחלק אותם ל-5 קבוצות של 4.

$\sum_{m=0}^{4}\sum_{l=0}^{3}$, $n = 5l+m$ $\quad 0 \le l \le 3 \quad 0 \le m \le 4$

נציב במשוואה:

$$\hat{X}_5(k) = \sum_{m=0}^{4}\sum_{l=0}^{3} x(m+5l)e^{-j\frac{2\pi}{5}k(m+5l)}$$

$$= \sum_{m=0}^{4}\sum_{l=0}^{3} x(m+5l)e^{-j\frac{2\pi}{5}km}\cdot \underbrace{e^{-j2\pi kl}}_{1} = \sum_{m=0}^{4}\underbrace{\left[\sum_{l=0}^{3} x(m+5l)\right]}_{y(m)}e^{-\frac{2\pi k}{5}m}$$

$$= \sum_{m=0}^{4} y(m)e^{-j\frac{2\pi}{5}km}$$

כלומר, מקפלים את $x(n)$ ואז עושים DFT.

+	x(0)	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)
+	x(5)	x(6)	x(7)	x(8)	x(9)
+	x(10)	x(11)	x(12)	x(13)	x(14)
	x(15)	x(16)	x(17)	x(18)	x(19)
	y(0)	y(1)	y(2)	y(3)	y(4)

קיבלנו סדרה באורך 5 (בעזרת אוקטו של חיבורים) ועכשיו במקום לקבל 8 מקבם DFT צריך רק 5 מכפלות מרוכבות.

למדנו בהרצאה ובתרגול:

$$X(e^{jw})\Big|_{w=\frac{2\pi}{K}\cdot N} \xrightarrow{IDFS} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-kN)$$

(דגימה בתדר = קיפול בזמן)

ב. נפתור לפי מקרה כללי: רזולוציה $\frac{2\pi}{L}$, $L \ge N$.

$$\hat{X}(e^{jw})\Big|_{w=\frac{2\pi k}{L}}, \; 0 \le k \le L-1 \quad = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}kn}$$

נגדיר:

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & N \le n \le L-1 \end{cases}$$

$$= \sum_{n=0}^{L-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}kn}$$

על $y(n)$ נוכל להפעיל fft ולקבל L דגימות בתדר. (או DFT)

תרגיל 3 עמוד אחרון 2/2

למשל, אם יש סדרה [3 7 4] ורוצים 5 דגימות בתדר

אז נחשב DFT של הסדרה [3 7 4 0 0 0 0 0]

חלק ב:

א. בד"כ א"א לשחזר כי קיפלנו בזמן.

ב. אם מניחים $x(19)=0$, $x(5)$ אפשר לשחזר, או אם הסדרה

מחזורית 5 - נקבל את הסדרה עם הגבר פי 4.

ג. תוספת האפסים משנה את ה DFT ולא את ה DTFT

(מושג רזולוציה ב~~DFT~~DFT)

4. (y הוא זה בו מופיעים קודם האיברים מאינדקס זוגי ב x, ואחר מהאינדקס האי זוגי -> y הוא סדרה הפוכה של איברי x).

סה"כ בדרך הישירה N^2 מכפלות ממשיות.

בדרך היעילה (לאחר שנוכיח את סעיף ב')

- סידור איברים (אין מכפלות)
- הפעלת fft לקבל $Y(k)$ ($N\log N$ מכפלות מרוכבות)
- N מכפלות מרוכבות לכפול $Y(k)e^{\frac{-j\pi k}{2N}}$

(הערה - מכפלה מרוכבת = 4 מכפלות ממשיות. $(a+jb)(c+jd)=ac-bd+j(bc+ad)$)

סה"כ קודם ישירה N^2 מכפלות ממשיות.

ביעילה: $4(N\log N+N)$ מכפלות ממשיות.

א. $$\hat{X}_{ct}(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\left(\frac{k\pi}{2N}(2n+1)\right)$$

נפריד לזוגיים ואי זוגיים:

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{x(2n)}_{y(n)}\cos\left(\frac{k\pi}{2N}(4n+1)\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\underbrace{x(2n+1)}_{y(N-1-n)}\cos\left(\frac{k\pi}{2N}(4n+3)\right)$$

נבצע החלפת משתנים: $n=N-1-n' \Rightarrow N-1-n=n'$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} y(n)\cos\left(\frac{k\pi}{2N}(4n+1)\right) + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} y(n)\cos\left(\underbrace{\frac{k\pi}{2N}(4(N-1-n)+3)}_{=\,-\frac{k\pi}{2N}(4n+1)}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cos\left(\frac{k\pi}{2N}(4n+1)\right)$$

$$\hat{Y}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_P^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)\left[\cos\frac{2\pi}{N}kn - j\sin\frac{2\pi}{N}kn\right]$$

צריך להכפיל ב $e^{-j\frac{k\pi}{2N}}$ נשים לב:

$$A = \mathrm{Re}\left\{\left(\cos\frac{k\pi}{2N} - j\sin\frac{k\pi}{2N}\right) \times \left(\cos\frac{2\pi}{N}kn - j\sin\frac{2\pi}{N}kn\right)\right\}$$

$$= \cdots = \cos\left(\frac{\pi k}{2N}(1+4n)\right)$$

מכיוון ש $y(n)$ ממשי נקבל:

$$\mathrm{Re}\left\{e^{-j\frac{k\pi}{2N}} Y[k]\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Re}\left\{y(n) A(n)\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cos\left(\frac{\pi k}{2N}(1+4n)\right) = \hat{X}_{CT}(k)$$

שעור 6 יום שני 5/3 אייר ב' תשס"ח
עקיבא סלוצקי

1/3 הרצאה 6

fft - DIf
(דצימציה בתדר)

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn}.$$

נבחר את דגימות התדר הזוגיות

$$X[2k]=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n]\, W_N^{2kn}+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x[n]\, W_N^{2kn}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n]\, W_N^{2kn}+\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n+\tfrac{N}{2}]\, W_N^{2kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x[n]+x[n+\tfrac{N}{2}]\right) W_{\frac{N}{2}}^{kn} \qquad W_N^2=e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}}=W_{\frac{N}{2}}.$$

עבור דגימות התדר האי זוגיות:

$$X[2k+1]=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n]\, W_N^{n(2k+1)}+\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n+\tfrac{N}{2}]\, W_N^{(n+\frac{N}{2})(2k+1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n]\, W_N^{2kn}\, W_N^{n}+\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n+\tfrac{N}{2}]\, W_N^{2kn}\, \underbrace{W_N^{\frac{N}{2}}}_{-1} W_N^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} W_N^{n}\left(x[n]-x[n+\tfrac{N}{2}]\right) W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

(להמשך)

המשך

DFT לאותות סינוסיים

$$s_c(t) \rightarrow \boxed{\text{anti alising } H_{aa}(j\Omega)} \xrightarrow{x_c(t)} \boxed{A/D} \xrightarrow{x[n]} \otimes \xrightarrow{v[n]} \boxed{DFT} \rightarrow V[k]$$

$$\uparrow w[n]$$

נניח $w[n] =$ חלון.

$$v[n]=x[n]w[n]$$

$$w[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

$$W(e^{jw})=\frac{\sin(\frac{wN}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}e^{-jw\frac{1}{2}(N-1)} \qquad D(w,N)=\frac{\sin(\frac{wN}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}$$

גרעין "דריכלה" מוזז בזמן.

$$V(e^{jw})=\frac{1}{2\pi}X(e^{jw})\circledast_{2\pi} W(e^{jw})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\theta})W(e^{j(w-\theta)})d\theta$$

תכונות גרעין דריכלה $|w|\le\pi$

1. מקסימום ב $w=0$ $\quad D(0,N)=N$
2. אפס ב $w=\frac{2\pi}{N}m$ $\quad m=\pm1,\pm2,\ldots$
3. רוחב אונה ראשית: $2\cdot\frac{2\pi}{N}=\frac{4\pi}{N}$
4. מקסימום של אונות צד. $|w|\cong\frac{3\pi}{N}$ וערכו שם $\frac{2N}{3\pi}$

אם נחלק במקסימום של האונה הראשית נקבל 13.5dB $\quad 20\log_{10}\left(\frac{2N/3\pi}{N}\right)\cong 13.5dB$

דוג (2 אותות סינוסים)

$$x(t)=A_0\cos(\Omega_0 t+\phi_0)+A_1\cos(\Omega_1 t+\phi_1)$$

$$x(n)=A_0\cos(w_0 n+\phi_0)+A_1\cos(w_1 n+\phi_1)$$

$F_s=10kH$ על הדגמה

$w(n)$ חלון באורך 64. $\quad \phi_0=\phi_1=0,\ A_1=\frac{3}{4},\ A_0=1$

אם האותות מספיק קרובים, בגלל הרוחב של הדריכלה הם יערבו אחד על השני.

בנוסף, אם האמפליטודה של אחד גדולה משמעותית משל השני - הקטן יבלע ע"י

בס"ד

שעה 6 עוד? אתגע — 2/3

כ"ט אדר ב' תשע"ו

אונות הצד של הסינוס הגבול.

פתרון: להגדיל את החלון. - ככל שהחלון יותר ארוך, האונה הראשית יותר צרה, ואונות הצד גם יותר צרות - מתקרבות לאונה הראשית.

פתרון לאונות צד - לקחת פי שניים דרך ההפרש בפאזה, כך שאונות הצד שלהם יבטלו אחת את השניה. מחיר - אונה ראשית גדולה

(יותר נוח לקחת 3 חלונות - אחד מרכזי, ו2 מוזזים ב$\frac{1}{2}$ אמפליטודה)

התוצאה נקראת חלון הנינג (hann).

ניקח חלונות ריבועיים באורך N ונזיז אותם בתדר $\pm\frac{2\pi}{N-1}$.

$$W(e^{jw}) = \left(\frac{1}{2}D(w,N) + \frac{1}{4}D\left(w-\frac{2\pi}{N-1}, N\right) + \frac{1}{4}D\left(w+\frac{2\pi}{N-1}, N\right)\right) e^{-jw\frac{1}{2}(N-1)}$$

ובציר הזמן:

$$W[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{N-1}\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{N-1}\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$W[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

חלון Hamming

$$W[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

לא מתאפס בנקודות האחרונות.

לעומת hann - אונת צד ראשונה נמוכה בהרבה, אבל האחרות גבוהות יותר משל hann.

$$W(e^{jw}) = 0.54\,D(w,N) + 0.23\,D\left(w-\frac{2\pi}{N-1}, N\right) + 0.23\,D\left(w+\frac{2\pi}{N-1}, N\right) e^{-j\frac{w}{2}(N-1)}$$

גובה אונות הצד $-41dB$ ורוחב אונה ראשית כמו של hann $\frac{8\pi}{N-1}$

ספ

חלון Blackman:

$$W[n]=\begin{cases} 0.42-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi}{N-1}n\right) & 0\le n\le N-1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

5 חלונות מחוברים.

אונה ראשית רחבה מאוד: $\frac{12\pi}{N-1}$ אך אונות צד נמוכות -57 dB ודועך מהר.

חלון Bartlet: חלון משולש בציר הזמן
אונה ראשית $\frac{8\pi}{N-1}$ (כמו האן והמינג) אונות צד -25 dB
הרווחנו בשטוח

חלון Kaiser-Bessel

$$W[n]=\begin{cases} \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{2n}{N-1}-1\right)^2}\right)}{I_0(\beta)} & 0\le n\le N-1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

כאשר $I_0(x)$ פונ' בסל משונה (modified) מסדר 0.

$$I_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{2^k k!}\right)^2$$

β הינו פרמטר לבחירה: β קטן - אונה ראשית צרה ואונות צד גבוהות.
β גדול - אונה ראשית רחבה, אונות צד נמוכות.
$\beta=0$ = חלון ריבועי.

לסיכום: מדידת ספקטרום ע"י DFT מלווה ע"י 3 תופעות:
1. מקבלים דגימות תדר במרווחים $\frac{2\pi}{N}$
2. תופעת זליגה מורחבת ע"פ רוחב האונה הראשית של החלון
3. תופעת חלשות באות מוסתרות ע"י אונות הצד של החלון
(4. מגבלה במדידת תחום סרט ע"פ תנאי ניקוויסט)

שאלה 6 עיבוד אותות 3/3

לאותות מהצורה $x[n]=\sum_{m=1}^{M} A_m\cos(\omega_m n-\phi_m)$

כמות הקוסינוסים ותדריהם ושונים לפי המקסימום המקומיים של $|X(\omega)|$

השערוך יהיה סביר. אם:

1. התדרים ω_l, ω_m צריכים להיות מופרדים לפחות פי 2. האונה הראשית לכל $m\neq l$

2. $20\log_{10}\left(\frac{A_l}{A_m}\right)$ חייב להיות גדול מגובה אונות הצד לכל $m\neq l$