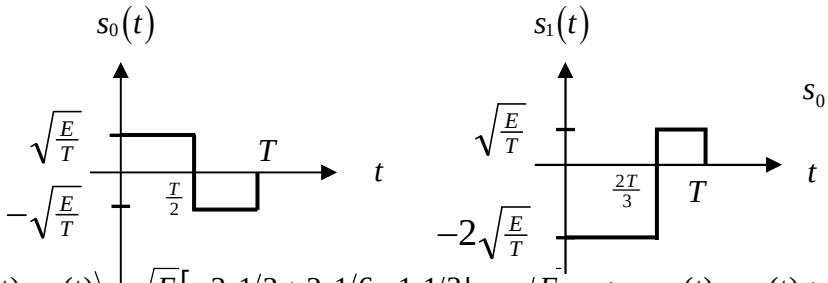
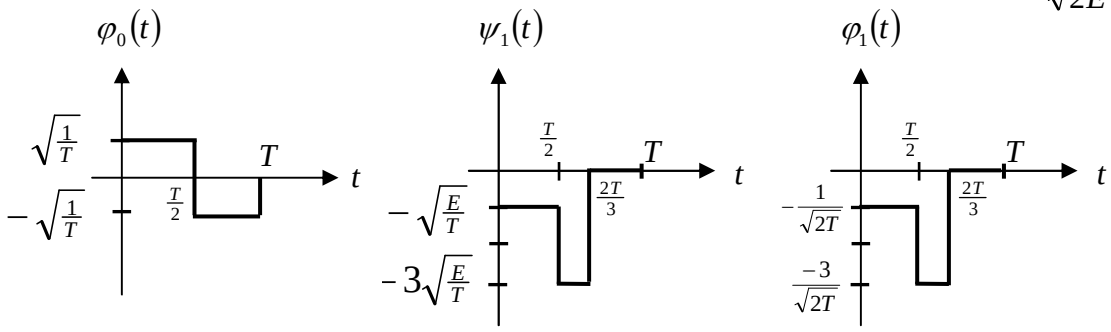
1. א.

$$s_0(t) = \psi_0(t) = \sqrt{E}\varphi_0(t)$$

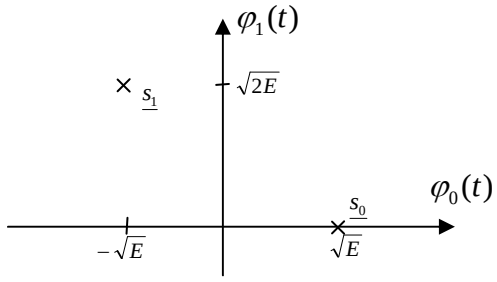


$$\langle s_1(t), \varphi_0(t)\rangle = \sqrt{E}\left[-2\cdot 1/2 + 2\cdot 1/6 - 1\cdot 1/3\right] = -\sqrt{E} \quad \Rightarrow \quad \psi_1(t) = s_1(t) + \sqrt{E}\varphi_0(t) = s_1(t) + s_0(t)$$

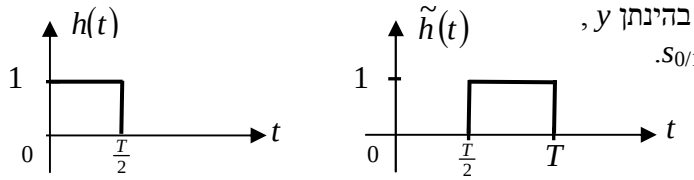
$$\|\psi_1(t)\|^2 = E(1/2 + 9/6 + 0) = 2E \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(t) = \frac{\psi_1(t)}{\sqrt{2E}}$$



לכן במרחב האותות האותות שלנו ייראו כך:



ב. העברת האותות דרך $h(t)$ ודגימה בזמן $t=T$ שקולה למכפלה באות $\tilde{h}(t) = h(T-t)$ ואינטגרציה:
על מנת למצוא את המקלט האופטימלי בהינתן y,
נמצא את הפילוג המותנה של y ב- $s_{0/1}(t)$.



$$y|s_0 \sim N(\mu_0, \sigma^2)$$
$$y|s_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$$

$$\mu_0 = \int_0^T s_0(t)\cdot\tilde{h}(t)dt = \sqrt{\frac{E}{T}}\cdot\left(-\frac{T}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{ET}$$

$$\mu_1 = \int_0^T s_1(t)\cdot\tilde{h}(t)dt = \sqrt{\frac{E}{T}}\cdot\left(-2\cdot\frac{T}{6} + \frac{T}{3}\right) = 0$$

$$\sigma^2 = E\{n^2\} = E\left\{\left[\int_0^T n(t)\cdot\tilde{h}(t)dt\right]^2\right\} = E\left\{\int_{t=0}^{T}\int_{\tau=0}^{T} n(t)\tilde{h}(t)\cdot n(\tau)\tilde{h}(\tau)dtd\tau\right\}$$
$$= \int_{t=0}^{T}\int_{\tau=0}^{T} E\{n(t)\cdot n(\tau)\}\cdot\tilde{h}(t)\cdot\tilde{h}(\tau)dtd\tau =$$
$$= \int_{t=0}^{T}\int_{\tau=0}^{T} \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\cdot\tilde{h}(t)\cdot\tilde{h}(\tau)dtd\tau = \frac{N_0}{2}\int_{\tau=0}^{T}\tilde{h}^2(t)dt = \frac{N_0}{2}\left\|\tilde{h}(t)\right\|^2 = \frac{N_0 T}{4}$$

כלומר לפנינו בעיה של פענוח מתוך y במודל עם רעש גאוסי חיבורי בעל שונות ידועה. מכאן שהפענוח מתבצע ע"י השוואת הערך הנקלט לסף שנקבע באמצע, כלומר:

$$y \underset{s_0}{\overset{s_1}{\gtrless}} Th = -\frac{1}{4}\sqrt{ET}$$

לכן ההסתברות לשגיאה נתונה ע"י: $P\{\varepsilon\} = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{ET}/2}{2\sqrt{N_0 T/4}}\right) = Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$

ג. מהתיאור בסעיף: y_0, y_1 הם ההטלה של האות הנקלט על מרחב האותות שמצאנו בסעיף א'.
נמצא תחילה את הפילוגים המותנים של y_0, y_1, q_0 בהינתן שידור של $s_{0/1}(t)$:

$$y_0|s_0 \sim N(\sqrt{E},\frac{N_0}{2}) \qquad y_0|s_1 \sim N(-\sqrt{E},\frac{N_0}{2})$$
$$y_1|s_0 \sim N(0,\frac{N_0}{2}) \qquad y_1|s_1 \sim N(\sqrt{2E},\frac{N_0}{2}) \qquad Q \overset{\Delta}{=} Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$
$$q_0|s_0 \sim \begin{cases} 1 & w.p. \quad 1-Q \\ -1 & w.p. \quad Q \end{cases} \qquad q_0|s_1 \sim \begin{cases} 1 & w.p. \quad Q \\ -1 & w.p. \quad 1-Q \end{cases}$$

בהינתן ששודר אות מסוים y_0, y_1 הם בת"ס, ולכן גם y_1, q_0 בת"ס. לכן הפילוג המשותף המותנה שלהם הוא:

$$f(y_1, q_0 = 1|s_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{y_1^2}{N_0}}\cdot(1-Q) \qquad f(y_1, q_0 = 1|s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y_1-\sqrt{2E})^2}{N_0}}\cdot Q$$
$$f(y_1, q_0 = -1|s_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{y_1^2}{N_0}}\cdot Q \qquad f(y_1, q_0 = -1|s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y_1-\sqrt{2E})^2}{N_0}}\cdot(1-Q)$$

כעת נוכל לנסח את כלל ההחלטה של MAP: $\text{MAP}: \quad \frac{f(y_1, q_0|s_0)}{f(y_1, q_0|s_1)} \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} \frac{P_1}{P_0} = 1$

נפצל תחילה לשני מקרים (ואח"כ נאחד) – עבור $q_0=\pm 1$:

$$q_0=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{f\left(y_1,q_0=1|s_0\right)}{f\left(y_1,q_0=1|s_1\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-\frac{y_1^2}{N_0}}\cdot(1-Q)}{\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-\frac{(y_1-\sqrt{2E})^2}{N_0}}\cdot Q}$$

$$q_0=-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{f\left(y_1,q_0=-1|s_0\right)}{f\left(y_1,q_0=-1|s_1\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-\frac{y_1^2}{N_0}}\cdot Q}{\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-\frac{(y_1-\sqrt{2E})^2}{N_0}}\cdot(1-Q)}$$

<u>הערה</u>: במקום צורת הפתרון הישירה ("עם הראש בקיר") שמופיעה בהמשך, ניתן לעשות קיצור דרך משמעותי אם נשים לב שבהינתן q_0 מסוים בעיית השערוך מתוך y_1 שקולה לבעיה חד מימדית עם פילוג אפריורי $\{Q,1\text{-}Q\}$, ומכאן ניתן לחשב בקלות (כפי שראינו בהרצאה בפרק 7.1) את קריטריון ההחלטה: $y_1 \underset{<}{>} \Delta$, ואת הסתברות השגיאה של המקלט (כאמור, בהינתן q_0):

$$P\{\varepsilon\}=P_0\cdot Q\left(\frac{d+2\Delta}{\sqrt{2N_0}}\right)+P_1\cdot Q\left(\frac{d-2\Delta}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad ; \quad \Delta \overset{def}{=} \frac{N_0}{2d}\ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right)$$

כאשר $P_0=P\{s_0(t)|q_0\}, \quad P_1=P\{s_!(t)|q_0\}$

כאמור, למי שלא רואה זאת נמשיך את הפיתוח הישיר:

$$\frac{f\left(y_1,q_0=-1|s_0\right)}{f\left(y_1,q_0=-1|s_1\right)}=\frac{e^{-\frac{y_1^2}{N_0}}}{e^{-\frac{(y_1-\sqrt{2E})^2}{N_0}}}\cdot\left[\frac{(1-Q)}{Q}\right]^{q_0} \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{y_1^2-(y_1-\sqrt{2E})^2}{N_0}} \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} \left[\frac{Q}{1-Q}\right]^{q_0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y_1^2-(y_1-\sqrt{2E})^2}{N_0} \underset{s_0}{\overset{s_1}{\gtrless}} \ln\left(\left[\frac{1-Q}{Q}\right]^{q_0}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2y_1\sqrt{2E}-2E \underset{s_0}{\overset{s_1}{\gtrless}} N_0\cdot q_0\ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right)$$

$\Leftarrow$ כלל ההחלטה האופטימלי הוא:

$$\boxed{y_1 \underset{s_0}{\overset{s_1}{\gtrless}} \frac{N_0 q_0}{2\sqrt{2E}}\cdot\ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right)+\sqrt{\frac{E}{2}}}$$

נחשב כעת את הסתברות השגיאה של המקלט. נבחין בין המקרים $q_0=\pm1$ (המשנים את סף ההחלטה):

$$P\{\varepsilon\} = P\{s_0(t)\}\cdot P\{\varepsilon|s_0(t)\} + P\{s_1(t)\}\cdot P\{\varepsilon|s_1(t)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(P\{q_0 = 1|s_0(t)\} P\left\{ y_1 > \frac{N_0}{2\sqrt{2E}}\cdot \ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right) + \sqrt{\frac{E}{2}} \,\middle|\, s_0(t)\right\}\right.$$

$$\left. + P\{q_0 = -1|s_0(t)\} P\left\{ y_1 > \frac{N_0}{2\sqrt{2E}}\cdot \ln\left(\frac{Q}{1-Q}\right) + \sqrt{\frac{E}{2}} \,\middle|\, s_0(t)\right\}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(P\{q_0 = 1|s_1(t)\} P\left\{ y_1 < \frac{N_0}{2\sqrt{2E}}\cdot \ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right) + \sqrt{\frac{E}{2}} \,\middle|\, s_1(t)\right\}\right.$$

$$\left. + P\{q_0 = -1|s_1(t)\} P\left\{ y_1 < \frac{N_0}{2\sqrt{2E}}\cdot \ln\left(\frac{Q}{1-Q}\right) + \sqrt{\frac{E}{2}} \,\middle|\, s_1(t)\right\}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1-Q)\cdot Q\left(\frac{\frac{N_0}{2\sqrt{2E}}\cdot \ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right) + \sqrt{\frac{E}{2}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) + Q\cdot Q\left(\frac{\frac{N_0\cdot(-1)}{2\sqrt{2E}}\cdot \ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right) + \sqrt{\frac{E}{2}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{ Q\cdot\left[1 - Q\left(\frac{\frac{N_0}{2\sqrt{2E}}\cdot \ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right) + \sqrt{\frac{E}{2}} - \sqrt{2E}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)\right]\right.$$

$$\left. + (1-Q)\cdot\left[1 - Q\left(\frac{\frac{N_0\cdot(-1)}{2\sqrt{2E}}\cdot \ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right) + \sqrt{\frac{E}{2}} - \sqrt{2E}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)\right]\right\}$$

במעבר הבא נשתמש בעובדות הבאות:

$$\ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right) = -\ln\left(\frac{Q}{1-Q}\right) \quad ; \quad Q(-x) = 1 - Q(x) \quad ; \quad \sqrt{\frac{E}{2}} - \sqrt{2E} = \sqrt{\frac{E}{2}} - 2\sqrt{\frac{E}{2}} = -\sqrt{\frac{E}{2}}$$

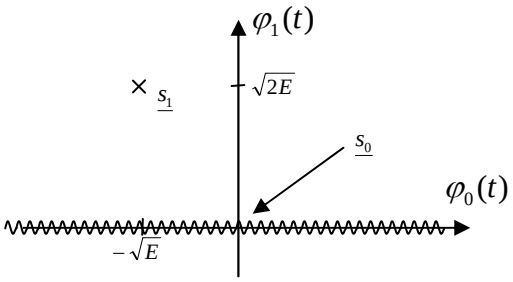
$$P\{\varepsilon\}=\frac{1}{2}\left[(1-Q)\cdot Q\left(\frac{\frac{N_0}{2\sqrt{2E}}\cdot\ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right)+\sqrt{\frac{E}{2}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)+Q\cdot Q\left(\frac{\sqrt{\frac{E}{2}}-\frac{N_0}{2\sqrt{2E}}\cdot\ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right)}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[Q\cdot Q\left(\frac{\sqrt{\frac{E}{2}}-\frac{N_0}{2\sqrt{2E}}\cdot\ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right)}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)+(1-Q)\cdot Q\left(\frac{\sqrt{\frac{E}{2}}+\frac{N_0}{2\sqrt{2E}}\cdot\ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right)}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)\right]$$

$$=(1-Q)\cdot Q\left(\frac{\frac{N_0}{2\sqrt{2E}}\cdot\ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right)+\sqrt{\frac{E}{2}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)+Q\cdot Q\left(\frac{\sqrt{\frac{E}{2}}-\frac{N_0}{2\sqrt{2E}}\cdot\ln\left(\frac{1-Q}{Q}\right)}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)$$

ד. <u>תחילה נטיל את האות הנקלט $r(t)$ על מרחב האותות כפי שהגדרנו בסעיף א'</u>. חשוב לציין בהקשר זה שדרוש נימוק מדוע הפעולה הזאת אופטימלית. הנקודה העדינה היא שבהרצאות דנו במקרה שבו הודעות **דטרמיניסטיות** משודרות בערוץ עם רעש גאוסי אדיטיבי לבן (ובמקרה כזה המקלט האופטימלי מסתפק בהמרת האות הנקלט [הרציף] בוקטור [בדיד] המייצג את האות במרחב האותות). במקרה שלנו אחד האותות המשודרים הוא **אקראי,** כלומר לא ידוע מראש ומשתנה משידור לשידור עם הגרלת a. לכן יש לנמק את אופטימליות הפעולה בכך שכל המידע המוכל באות המשודר (ללא רעש) עדיין נמצא כולו במרחב האותות המוגדר, כלומר ההטלה על מרחב האותות נותנת לנו מידע סטטיסטי מספיק להחלטה אופטימלית (עבור כל ערך a שהוא).

כעת נתבונן באותות החדשים במרחב האותות: מהתרשים ניתן לראות שבהינתן ששודר $s_0(t)$ האות (ללא הרעש) מתפלג גאוסית (סביב אפס) על הציר האופקי.



כעת נרשום את ההתפלגות של רכיבי האות במרחב האותות (שנסמנם כמו בהתחלת השאלה y_0, y_1) בהינתן שידור של $s_{0/1}(t)$:

$$y_0|s_0\sim N\left(0,\frac{N_0}{2}+\sigma^2E\right)\quad y_0|s_1\sim N\left(-\sqrt{E},\frac{N_0}{2}\right)\quad y_1|s_0\sim N\left(0,\frac{N_0}{2}\right)\quad y_1|s_1\sim N\left(\sqrt{2E},\frac{N_0}{2}\right)$$

(נשים לב שכל הפילוגים זהים לסעיף ג' פרט לפילוג של $y_0/s_0(t)$).

מה שנשאר לעשות כעת זה להציב את פ' צפיפות הפילוג של הרכיבים בכלל ההחלטה לפי MAP:

$$\text{MAP}: \quad \frac{f\left(y_0, y_1 | s_0\right)}{f\left(y_0, y_1 | s_1\right)} \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} \frac{P_1}{P_0} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi N_0} \cdot \sqrt{2\pi\left(\frac{N_0}{2} + \sigma^2 E\right)}} e^{-\frac{y_1^2}{N_0} - \frac{y_0^2}{2\left(\frac{N_0}{2} + \sigma^2 E\right)}} \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{(y_0+\sqrt{E})^2 + (y_1 - \sqrt{2E})^2}{N_0}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y_1^2}{N_0} + \frac{y_0^2}{2\left(\frac{N_0}{2} + \sigma^2 E\right)}\right) - \frac{(y_0 + \sqrt{E})^2 + (y_1 - \sqrt{2E})^2}{N_0} \underset{s_0}{\overset{s_1}{\gtrless}} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{N_0}{N_0 + 2\sigma^2 E}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y_0^2}{N_0 + 2\sigma^2 E} - \frac{y_0^2 + 2\sqrt{E} y_0 + E}{N_0}\right) + \frac{2\sqrt{2E} y_1 - 2E}{N_0} \underset{s_0}{\overset{s_1}{\gtrless}} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{N_0}{N_0 + 2\sigma^2 E}\right)$$

.2 א.

$$p\left(\underline{r}|\underline{s}^{(\alpha)},A\right)=\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\underline{r}|\underline{s}^{(\alpha)},A\right)p_A(A)dA=$$

הערה: α בסימון מלא ו (לא מופיע שם)

הכוונה $\gamma(\underline{r},A|\underline{s}^{(\alpha)})-\delta$

$$\propto\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left|r(t)-s^{(\alpha)}(t)-A\right|^2dt\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}A^2\right\}dA$$

$$\propto\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T r(t)\left(s^{(\alpha)}(t)+A\right)dt-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left(s^{(\alpha)}(t)+A\right)^2-\frac{1}{2\sigma^2}A^2dt\right\}dA$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T r(t)s^{(\alpha)}(t)dt-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left(s^{(\alpha)}(t)\right)^2dt+2A\cdot\left[\frac{1}{N_0}\int_0^T r(t)dt-\frac{1}{N_0}\int_0^T s^{(\alpha)}(t)dt\right]\right.$$

$$\left.\left\{-A^2\cdot\left[\frac{T}{N_0}+\frac{1}{2\sigma^2}\right]\right\}dA\right.$$

$$\propto\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T r(t)s^{(\alpha)}(t)dt-\frac{\varepsilon_\alpha}{N_0}+\frac{\left[\frac{1}{N_0}\int_0^T r(t)dt-\frac{1}{N_0}\int_0^T s^{(\alpha)}(t)dt\right]^2}{\left[\frac{T}{N_0}+\frac{1}{2\sigma^2}\right]}\right\}$$

כאשר בצעד האחרון השתמשנו בקשר הנזכר בשאלה.

כעת, נסמן:

$$M_\alpha=\int_o^T s^{(\alpha)}(t)dt$$

המקלט האופטימלי נתון ע"י:

$$\hat{\alpha}=\arg\max_\alpha 2\int_0^T r(t)s^{(\alpha)}(t)dt-\varepsilon_\alpha+\frac{\left[\int_0^T r(t)dt-\int_0^T s^{(\alpha)}(t)dt\right]^2}{N_0\left[\frac{T}{N_0}+\frac{1}{2\sigma^2}\right]}=$$

$$=\arg\max_\alpha\int_0^T r(t)s^{(\alpha)}(t)dt-\frac{\varepsilon_\alpha}{2}+\frac{\left[\int_0^T r(t)dt-M_\alpha\right]^2}{2N_0\left[\frac{T}{N_0}+\frac{1}{2\sigma^2}\right]}=$$

$$=\arg\max_\alpha\int_0^T r(t)s^{(\alpha)}(t)dt-\frac{\varepsilon_\alpha}{2}+\frac{\sigma^2}{2T\sigma^2+N_0}\left[-2M_\alpha\int_0^T r(t)dt+M_\alpha{}^2\right]$$

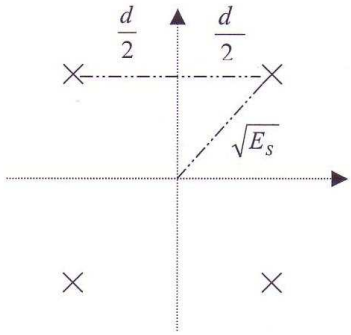
ב.

נסמן:

$$X_\alpha=\int_0^T r(t)s^{(\alpha)}(t)dt+\frac{\sigma^2}{2T\sigma^2+N_0}\left[-2M_\alpha\int_0^T r(t)dt+M_\alpha{}^2\right]$$

$$\rho_{\alpha,\beta}=\int_0^T s^{(\alpha)}(t)s^{(\beta)}(t)dt$$

3. א. אזורי ההחלטה יקבעו כמובן עפ"י MED. אזור ההחלטה של כל אות הוא רביע במרחב האותות.



$$\frac{d}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{E_S}$$

$$P(\varepsilon)=1-(1-Q)^2=2Q-Q^2$$

כאשר: $Q\equiv Q\left(\sqrt{\frac{E_S/2}{N_0/2}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right)$

ב. החלטה נכונה מתבצעת כאשר $n_1^2+n_2^2\le\frac{E_S}{2}$. n_1 ו- n_2 הם רכיבי הרעש בשני הצירים:

$n_1,n_2\sim N\left(0,\frac{N_0}{2}\right)$.

$$P(C)=\iint\limits_{u^2+v^2\le\frac{E_S}{2}} f_{n_1n_2}(u,v)dudv=\frac{1}{\pi N_0}\iint\limits_{u^2+v^2\le\frac{E_S}{2}} e^{-(u^2+v^2)/N_0}dudv$$

נבצע החלפת משתנים $u=\sqrt{\rho}\sin\theta$ $v=\sqrt{\rho}\cos\theta$. נזכור ש: $dudv=\rho d\rho d\theta$

(המקדם ρ נובע מחישוב היעקוביאן). מכאן ש-

$$P(C)=\frac{1}{\pi N_0}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{E_S/2}}e^{-\rho^2/N_0}\underbrace{\rho d\rho}_{=\frac{1}{2}d(\rho^2)}\right)d\theta\underset{\mu\equiv\rho^2}{=}\frac{2\pi}{\pi N_0}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{E_S/2}e^{-\mu/N_0}d\mu=1-e^{-E_S/2N_0}.$$

4. א. אבר איטרווח בראמטרווח $[0,\frac{T}{2}]$ (כלומר, כאשר מסתכלים רק על יצא מן כך)

מיקום הוולטיג' בין

$$\int_0^{T/2}A_1 r(t)s(t)dt \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \lambda_1$$

$$P_{FA}^{(1)}=Q\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\frac{N_0}{2}E_1}}\right)\ ;\ P_0^{(1)}=Q\left(\frac{\lambda_1-E_1}{\sqrt{\frac{N_0}{2}E_1}}\right)=Q\left(Q^{-1}(P_{FA}^{(1)})-\sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}\right)$$

כאשר $E_1=A_1^2E$

אבר בראמטרווח $[\frac{T}{2},T]$ מיקום בין:

$$\int_{T/2}^{T}A_2 r(t)s(t-\tfrac{T}{2})dt \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \lambda_2$$

$$P_{FA}^{(2)}=Q\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\frac{N_0}{2}E_2}}\right)\ ;\ P_0^{(2)}=Q\left(Q^{-1}(P_{FA}^{(2)})-\sqrt{\frac{2E_2}{N_0}}\right)$$

$E_2=A_2^2E$

נניח כי שודר האות $s^{(0)}(t)$.

$$X_\alpha = \int_0^T \left[s^{(0)}(t) + A + n(t)\right] s^{(\alpha)}(t)dt + \frac{\sigma^2}{2T\sigma^2 + N_0}\left[-2M_\alpha \int_0^T \left[s^{(0)}(t) + A + n(t)\right]dt + M_\alpha{}^2\right]$$

$$= \rho_{\alpha,0} + AM_\alpha + \int_0^T n(t)s^{(\alpha)}(t)dt + \frac{\sigma^2}{2T\sigma^2 + N_0}\left[-2M_\alpha\left(M_0 + AT + \int_0^T n(t)dt\right) + M_\alpha{}^2\right]$$

$$X_0 - X_1 = \varepsilon(1-\rho) + A(M_0 - M_1) + \int_0^T n(t)\left(s^{(0)}(t) - s^{(1)}(t)\right)dt +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2T\sigma^2 + N_0}\left[-2(M_0 - M_1)\left(M_0 + AT + \int_0^T n(t)dt\right) + M_0{}^2 - M_1{}^2\right]$$

$$= \varepsilon(1-\rho) - \frac{\sigma^2(M_0 - M_1)^2}{2T\sigma^2 + N_0} + A\left[(M_0 - M_1)\left(1 - \frac{2T\sigma^2}{2T\sigma^2 + N_0}\right)\right] +$$

$$+ \int_0^T n(t)\left[\left(s^{(0)}(t) - s^{(1)}(t)\right) - \frac{\sigma^2}{2T\sigma^2 + N_0}2(M_0 - M_1)\right]dt$$

$$P_e = \Pr\left\{X_0 - X_1 < 0 \middle| s^{(0)}(t)\right\} =$$

$$= Q\left(\frac{\varepsilon(1-\rho) - \frac{\sigma^2\Delta^2}{2T\sigma^2 + N_0}}{\sqrt{\sigma^2\left[\Delta\left(1 - \frac{2T\sigma^2}{2T\sigma^2 + N_0}\right)\right]^2 + \frac{N_0}{2}\left\|\left(s^{(0)}(t) - s^{(1)}(t)\right) - \frac{2\Delta\sigma^2}{2T\sigma^2 + N_0}\right\|^2}}\right)$$

$$= Q\left(\frac{\varepsilon(1-\rho) - \frac{\sigma^2\Delta^2}{2T\sigma^2 + N_0}}{\sqrt{\sigma^2\Delta^2\left(1 - \frac{2T\sigma^2}{2T\sigma^2 + N_0}\right)^2 + \frac{N_0}{2}\left(2\varepsilon(1-\rho) - \frac{4\Delta^2\sigma^2}{2T\sigma^2 + N_0} + \frac{4\Delta^2\sigma^4 T}{(2T\sigma^2 + N_0)^2}\right)}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{\varepsilon(1-\rho)(2T\sigma^2 + N_0) - \sigma^2\Delta^2}{N_0(2T\sigma^2 + N_0)}}\right)$$

שימו לב שכאשר $\sigma^2 = 0$ או כאשר $\Delta = 0$ הסתברות השגיאה שווה ל:

$$Q\left(\sqrt{\frac{\varepsilon(1-\rho)}{N_0}}\right)$$

כלומר, במקרה זה התוצאה מתלכדת עם המקרה הקוהרנטי (מדוע?).

ב. בשיטה המשולבת הסתברות אי־שגיאה בשלב הראשון מוכפלת

$$P_{FA} = P(\hat{H}=H_1|H_0) = P(\hat{H}^{(1)}=H_1 \text{ ו־} \hat{H}^{(2)}=H_1|H_0) = P_{FA}^{(1)} \cdot P_{FA}^{(2)}$$

$$P_D = P(\hat{H}=H_1|H_1) = P(\hat{H}^{(1)}=H_1 \text{ ו־} \hat{H}^{(2)}=H_1|H_1) = P_D^{(1)} \cdot P_D^{(2)}$$

אי־תלות בין שני הניסויים ובין שני הביטויים

בשיטה הרגילה

$$P_{FA} = P(\hat{H}^{(1)}=H_1 \text{ או } \hat{H}^{(2)}=H_1|H_0) = P_{FA}^{(1)} + P_{FA}^{(2)} - P_{FA}^{(1)} \cdot P_{FA}^{(2)}$$

$$P_D = P_D^{(1)} + P_D^{(2)} - P_D^{(1)} P_D^{(2)}$$

5 א.

$$\Lambda(\underline{r}) = \frac{f(\underline{r}|H_1)}{f(\underline{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2+2E}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2+2E}}}{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}} =$$

$$= e^{-(x^2+y^2)\left(\frac{1}{2\sigma^2+2E} - \frac{1}{2\sigma^2}\right)} \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \gamma$$

$$x^2+y^2 \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \lambda$$

ברישום H_0:
$x,y \sim N(0,\sigma^2)$
ברישום H_1:
$x,y \sim N(0,E+\sigma^2)$
בשני המקרים x,y בלתי תלויים
ברישום H

כלומר בעזרת הווקטור מעלה אם נישלח x לשיטה בשלב שני בנוסף גם
מרחק $x^2+y^2=\lambda$, ומעליו H_1 ומתחתיו H_0 בהתאם
(הערה בשלב זה: $\lambda = 2\sigma^2\left(1+\frac{\sigma^2}{E}\right)\ln\gamma$, אולם זה אינו חלוטי)

ב.

$$P_{FA} = P(\hat{H}=H_1|H_0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint_{x^2+y^2>\lambda} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\,r\,dr\,d\theta = \frac{1}{\sigma^2}\left[-\sigma^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right]_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} = e^{-\frac{\lambda}{2\sigma^2}}$$

כלומר $\lambda = -2\sigma^2 \ln P_{FA}$

ב.

$$P_D = P(\hat{H}=H_1 | H_1) = \frac{1}{2\pi(\sigma^2+E)} \iint_{x^2+y^2>\lambda} e^{-\frac{x^2+y^2}{2E+2\sigma^2}} dx\,dy =$$

$$= \dots = \frac{1}{\sigma^2+E}\left[-(\sigma^2+E)\, e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2+2E}}\right]_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} = \cdot e^{-\frac{\lambda}{2\sigma^2+2E}}$$

$$P_D = \cdot P_{FA}^{\sigma^2/(\sigma^2+E)}$$

ג.

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(w_0 t) \qquad 0 \le t \le T$$

$$w_0 = \frac{2\pi k}{T}$$

מקבלים בהלוגוטור:

$$\langle s(t), r(t) \rangle \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \lambda$$

$$P_{FA} = Q\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\frac{N_0 E}{2}}}\right) \; ; \; P_D = Q\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\frac{N_0 E}{2}}} - \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

ד.

$$\Lambda(r) = \frac{f(r|H_1)}{f(r|H_2)} = \frac{\int_0^\infty f(A) \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [r(t)-A s(t)]^2 dt\right\} dA}{\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [r(t)]^2 dt\right\}}$$

$$= C_1 \int_0^\infty f(A)\, e^{-\frac{EA^2}{N_0}}\, e^{2\frac{A\langle r,s\rangle}{N_0}}\, dA =$$

קבוע

$$= C_2 \int_0^\infty A\, e^{-\left(\frac{E}{N_0}+\frac{1}{2A_0^2}\right)A^2 + \frac{2}{N_0}\langle r,s\rangle A}\, dA \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \theta$$

C_2 קבוע (אמר)

θ נקבע

נשים לב שמקבלים $\langle r,s\rangle$ בהכפלת הקבל של הפונקציה כלומר לכל ערך A (שמתקבל אי-שלילי) לקח את הפונקציה כלומר

$\theta \ge g(\langle r,s\rangle)$ כאשר g מונוטונית עולה

אפשר לכתוב:

$$\langle r,s\rangle \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \lambda$$

$$P_{FA} = P_r\{\langle r,s\rangle > \lambda \,|\, H_0\} = P_r\{\langle n,s\rangle > \lambda\} = Q\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\frac{N_0 E}{2}}}\right)$$

$$P_D = P_r\{\langle r,s\rangle > \lambda \,|\, H_1\} = P_r\{\langle As+n,s\rangle > \lambda\} = P_r\{\langle n,s\rangle > \lambda - EA\}$$

$$= E_A\left\{Q\left(\frac{\lambda-AE}{\sqrt{\frac{N_0 E}{2}}}\right)\right\} = \int_0^\infty \frac{A}{A_0} \exp\left\{-\frac{A^2}{2A_0^2}\right\} \cdot Q\left(\frac{\lambda-AE}{\sqrt{\frac{N_0 E}{2}}}\right) dA$$

תוחלת לפי A

ג.

$$f(r \mid A, H_1) = C \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\underbrace{\int_0^T r^2(t)\,dt}\right\} \exp\left\{-\frac{EA^2}{N_0}\right\}$$

$$E_\phi \quad C \exp -\frac{1}{N_0}\int_0^T \left(r - A\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_0 t+\phi)\right)^2 dt$$

$$C \exp\left[-\frac{1}{N_0}\int r^2 dt\right] \cdot \exp\left[\frac{2}{N_0}\int r\, A\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_0 t+\phi)\,dt\right] \exp\left[-\frac{EA^2}{N_0}\right]$$

$$E_\phi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{C\int_0^T r(t)\cos(\omega_0 t+\phi)\,dt}\, d\phi$$