אינפורמציה סטטיסטית
פתרון אינפ 1

1. נתון: $\mu_{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Lambda_{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\underline{y} = A\underline{x} + \underline{b} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{\underline{y}} = E\underline{y} = A \cdot E\underline{x} + \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\underline{y}} = A \Lambda_{\underline{x}} A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|\Lambda_{\underline{y}}| = 16 \qquad \Lambda_{\underline{y}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{1}{8\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_1 - 3 & y_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - 3 \\ y_2 - 1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{4}(y_1 - 3)^2 + \frac{3}{4}(y_1 - 3)(y_2 - 1) - \frac{5}{8}(y_2 - 1)^2 \right\}$$

2. א.

$$\mu_{\underline{y}} = A \cdot \mu_{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\underline{y}} = A \cdot \Lambda_{\underline{x}} \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 56 \end{pmatrix}$$

ב. מאחר $\Lambda_{\underline{y}}$ מראה כי $\sigma_{12} = 0$ כלומר y_1, y_2 בת"ס

לכן $f_{Y_1|Y_2} = f_{Y_1}$. $\quad Y_1 \sim N(1, 1)$

מאחר $\mu_{\underline{y}}$; מאחר $\Lambda_{\underline{Y}}$

$$f_{Y_1|Y_2}(y_1|y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y_1 - 1)^2}$$

$$E_{Y_1|Y_2} = EY_1 = 1$$

ג. גם $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$, כלומר y_2 בת"ס ב-y_1 וב-y_3

(שימו לב כי y_1, y_3 בן תלויים סטטיסטית כפי כפה)

לכן $Y_2|Y_1,Y_3 = Y_2 \sim N(2,4)$; $f_{Y_2|Y_1,Y_3} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2} \exp -\frac{1}{8}(y_2 - 2)^2$

$$EY_2|Y_1,Y_3 = EY_2 = 2$$

4. א. θ רבוע מתלבר בכיוון לוחות של זו ואלו שלאחר זו ואלו נלפ!

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim N\left(\underline{0}, \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{pmatrix}\right)$$

בגלל שהוא 0: $E\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \underline{0}$

$$\operatorname{cov}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_x^2\cos\theta & -\sigma_y^2\sin\theta \\ \sigma_x^2\sin\theta & \sigma_y^2\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & '' & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_x^2\cos^2\theta + \sigma_y^2\sin^2\theta & (\sigma_x^2-\sigma_y^2)\cos\theta\sin\theta \\ (\sigma_x^2-\sigma_y^2)\cos\theta\sin\theta & \sigma_x^2\sin^2\theta + \sigma_y^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

ב. לשם כך יש לגרום לאיבר $\cos\theta\sin\theta$ שבלו ברצה $\frac{1}{2}\sin 2\theta$

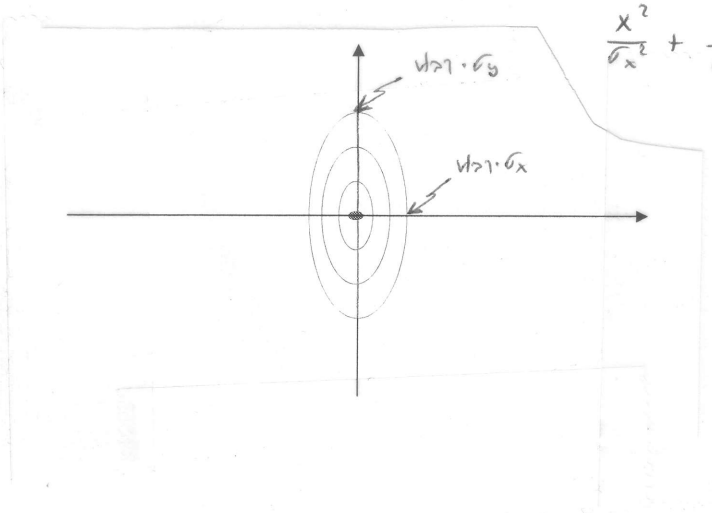
באיבר מאבדים רבע כל כפולה של $\frac{\pi}{2}$, כלומר: $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

ג. בשביל xy בשאלות בן אלפסות שגיבן מרבעים לגרים:

$$\text{רבוע} = \left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right) \right\} \exp \cdot \text{רבוע}$$

(מאמן)

כלומר: $\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = \text{רבוע}$ (מאמן)



בשביל שזה בכל אחת
דבר לאחר סיבוב בזוית θ.
כל נקודה (x, y) נסמן
כ: $(r\cos\phi, r\sin\phi)$
ונקבל:

$$z = r(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta)$$
$$= r\cos(\phi+\theta)$$
$$w = r(\cos\phi\sin\theta + \cos\theta\sin\phi) =$$
$$= r\sin(\phi+\theta)$$

לכן בשאלות בשביל שזה אבינו, שבו, אלפסות סבב בלפסו, אלו
גיבן יכון בזוית θ מן בגרים.

מקדם הסיבוב
בארגון אינטל 1

ד. ביעקביאן הוא 1 (הדטרמינטה $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$)

לכן ניתן כעת לרשום:

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_x\sigma_y}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(w\sin\theta + z\cos\theta)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(w\cos\theta - z\sin\theta)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}$$

השתמשנו ב:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

בדרך: ניתן לראות (אחרי חישוב רב) שהדטרמינטה של $\mathrm{cov}\left(\begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix}\right)$
הוא $\sigma_x^2\sigma_y^2$, אותו כמו
הדטרמינטה של $\mathrm{cov}\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right)$

ג. כלומר
$$Y|X \sim N\left(\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x),\ \sigma_y^2(1-\rho^2)\right)$$

בניסוח אחר:
$$Y|X \sim N\left(ka + \rho(x-a),\ 1-\rho^2\right)$$

רק לראות ש-a מתבטל אם $k=\rho$

ואז יקבל
$$Y|X \sim N(\rho x, 1-\rho^2)$$

בלי שאנחנו צריכים ל-a

5. א.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_2)^2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2\mu_1 x + \mu_1^2 + x^2 - 2\mu_2 x + \mu_2^2\right)} \right]^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}\cdot 2\left(x^2 - (\mu_1+\mu_2)x + \frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{2}\right)} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{2} - \left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)^2\right)} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\mu_1^2}{4} + \frac{\mu_2^2}{4} - \frac{\mu_1\mu_2}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\text{ממוצע})^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{4}\right)} \cdot \sqrt{2\pi}\sigma \Rightarrow m=2;\ C = \frac{1}{8\sigma^2}$$

ב. נשים לב כי: $\Lambda_{\underline{x}_2} = \Lambda_{\underline{x}_1} = \sigma^2 I_k$

מטריצת יחידה $k\times k$ I_k

$$\Lambda_{\underline{x}_2}^{-1} = \Lambda_{\underline{x}_1}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} I_k$$

$$|\Lambda_{\underline{x}_2}| = |\Lambda_{\underline{x}_1}| = \sigma^{2k}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \sigma^{2k}}} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(\underline{x}-\underline{\mu}_1)^T(\underline{x}-\underline{\mu}_1) - \frac{1}{4\sigma^2}(\underline{x}-\underline{\mu}_2)^T(\underline{x}-\underline{\mu}_2)} d\underline{x} =$$

Λ נעלם כי הלך כמו מטריצת יחידה...

Λ בחזקת מינוס בשורש

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^k \int e^{-\frac{1}{4\sigma^2}\left((x_1-\mu_{1_1})^2 + (x_1-\mu_{2_1})^2 + (x_2-\mu_{1_2})^2 + (x_2-\mu_{2_2})^2 + \dots\right)} d\underline{x} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^k \cdot \int e^{-\frac{1}{4\sigma^2}\left((x_1-\mu_{1_1})^2 + (x_1-\mu_{2_1})^2\right)} dx_1 \cdot \int \dots dx_2 \cdot \dots =$$

$$= e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(\mu_{1_1}-\mu_{2_1})^2} \cdot \dots \cdot e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(\mu_{1_k}-\mu_{2_k})} = e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(\underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2)^T(\underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2)}$$

מהסעיף א'

$$e^{-\frac{1}{8\sigma^2}\|\underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2\|^2}$$

ג.

6. ראשית נשים-לב כי N_i הינו גאוסי (בעצם לינארי על רעש גאוסי) ולכן כל הקומבינציה לינארית של $\{N_i\}$ גם כן הינו גאוסי $\Leftarrow$ לכן N גאוס.

אחוחלת של N_i כן 0 $\quad EN_i = \int_0^T (E\,n(t))\, s_i(t)\,dt = 0$

נשאל אותו לחשוב את מטריצת הקוואריאנס:

$$\mathrm{cov}(N_i, N_j) \underset{\text{כי האחוחלת 0}}{=} E\{N_i N_j\} = \int_0^T\int_0^T s_i(t_1)\, s_j(t_2)\, \underbrace{E\{n(t_1)\,n(t_2)\}}_{\frac{N_0}{2}\cdot\delta(t_1-t_2)}\,dt_1\,dt_2 =$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T s_j(t_2)\int_0^T s_i(t_1)\,\delta(t_1-t_2)\,dt_1\,dt_2 =$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T s_j(t_2)\, s_i(t_2)\,dt_2 = \frac{N_0}{2}\langle s_i, s_j\rangle = \frac{N_0}{2}\rho_{ij}\sqrt{E_i}\sqrt{E_j}$$

משים לב שגם t_1 וגם t_2 נמצאים בתחום $[0,T]$ לכן בברכה הלפלס נכון

מקרה פרטי: $\mathrm{VAR}(N_i) = \mathrm{cov}(N_i, N_i) = \frac{N_0}{2}\cdot E_i$

$$\Lambda_N = [\Lambda_{ij}]$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{N_0}{2}\rho_{ij}\sqrt{E_i}\sqrt{E_j}$$

הפונקציה האופיינית היא: $\varphi_N(\underline{w}) = e^{-\frac{1}{2}\underline{w}^T\Lambda_N\underline{w}}$

אם Λ_N הפיכה, יש לו פונ' צפיפות

$$f_N(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^k|\Lambda_N|}\exp\left\{-\frac{1}{2}\underline{x}^T\Lambda_N^{-1}\underline{x}\right\}$$

(אחרת אם Λ_N אינה הפיכה $|\Lambda_N| = 0$)

במקרה הנ"ל-גאוסי, אי-אפשר לחשוב על אוסיפיקציה וקטור צפיפות, נצטרך לחשוב את כל הפרמטרים (אינסוף) של N. (במקרה הגאוסי, שני הפרמטרים הראשונים משלימים את כל ההתפלגות)

8. א. נתון: עבור $t=1_{hr}$: $P(X\neq 0) = 0.5$

$$1-\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = 0.5 \Rightarrow \lambda = \ln 2$$

$$P(X=1) = \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = (\ln 2)\cdot\frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{2} \cong 0.347$$

ב. עבור $t=8_{hr}$ $\quad Y \sim P(\lambda = 8\ln 2)$

$$E\{Y\} = V\{Y\} = \lambda = 5.545$$

תרגילים סדרתיים
פתרון תרגיל 1

7.

$$X(n) = A\cos\phi\cos(w_0 n) + A\sin\phi\sin(w_0 n)$$

כאשר $w_0 = 2\pi f_0$

נסמן $\alpha = A\cos\phi$, $\beta = A\sin\phi$

ונמצא את פונקציית הצפיפות של הוקטור $\binom{\alpha}{\beta}$ (שאותו יעקוב עכשיו)

$$f_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{1}{a}\cdot f_A(a)\cdot f_\phi(\varphi) = \frac{1}{a}\,\frac{a}{\sigma^2}\,e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{2\pi} =$$

מכיוון שלפי A, ϕ בתנאי

$$\frac{\partial\binom{\alpha}{\beta}}{\partial(A,\phi)} \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -a\sin\varphi & a\cos\varphi \end{vmatrix} = a$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}a^2} = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}$$

$\alpha^2+\beta^2 = A^2$

$x, y \in (-\infty, \infty)$ כלומר $a \in (0,\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ בתחום כאן

ולכן יש: $\binom{\alpha}{\beta} \sim N\left(\binom{0}{0}, \sigma^2 I_2\right)$

לכן גם $X(n) = \alpha\cdot\cos(w_0 n) + \beta\sin(w_0 n)$ תהליך גאוסי.

לכן שאלת הסטציונריות בתנאי בקר ובתנאי חריגה שקולה.

כיוון שתוחלת של α, β בהגדרה: $E\,X(n) = 0$

$$E\,X(n)\,X(n+k) =$$

$$= E\left\{\left[\alpha\cos(w_0 n) + \beta\sin(w_0 n)\right]\left[\alpha\cos(w_0(n+k)) + \beta\sin(w_0(n+k))\right]\right\} =$$

$$= E\{\alpha^2\}\cdot\cos(w_0 n)\cos(w_0(n+k)) + E\{\beta^2\}\sin(w_0 n)\sin(w_0(n+k)) =$$

α, β בהגדרה עם תוחלת 0 לכן פונקציות המתאם המשותפות

$$= \sigma^2\left[\cos(w_0 n)\cos(w_0(n+k)) + \sin(w_0 n)\sin(w_0(n+k))\right] =$$

שונות α, β הינו σ^2

$$= \sigma^2\cdot\cos\left[w_0(n+k) - w_0 n\right] = \sigma^2\cos w_0 k$$

גם לא תלוי ב-n אלא רק ב-k (הפרש הזמנים)

לכן, כיוון שגם התוחלת וגם פונקציית שונות תלויות בזמן

$X(n)$ סטציונרי בתנאי בקר (WSS)

כיוון שגם גאוסי, הרי שגם בתנאי בקר (SSS)