1. א',ב' – נפתח תחילה באופן כללי (עבור סעיף א' נציב $\phi = 0$).

$$s_0(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(2\pi f_0 t) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad s_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(2\pi f_1 t + \phi) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\langle s_0(t), s_1(t) \rangle = \frac{2E}{T}\int_0^T \cos(2\pi f_0 t)\cdot\cos(2\pi f_1 t + \phi)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2E}{T}\int_0^T \{\cos[2\pi(f_0 + f_1)t + \phi] + \cos[2\pi(f_0 - f_1)t - \phi]\}dt =$$

$$= E\left[\underbrace{\frac{\sin[2\pi(f_0 + f_1)t + \phi]}{2\pi(f_0 + f_1)T}}_{\approx 0 \text{ because } f_i T >> 1} + \frac{\sin[2\pi(f_0 - f_1)t - \phi]}{2\pi(f_0 - f_1)T}\right]_0^T$$

$$\approx E\cdot\frac{\sin[2\pi(f_0 - f_1)t - \phi]}{2\pi(f_0 - f_1)T}\Bigg|_0^T \underbrace{= 0}_{demand}$$

נעבור למקרים הפרטיים:

א. $\phi = 0$:

$$\langle s_0(t), s_1(t) \rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad \sin[2\pi(f_0 - f_1)t]_0^T = 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \sin[2\pi(f_0 - f_1)T] = 0 \quad\Rightarrow\quad 2\pi(f_0 - f_1)T = n\cdot\pi$$

כאשר n מספר טבעי כלשהו. לכן:

$$\underline{\underline{|f_0 - f_1|_{\min} = \frac{1}{2T}}}$$

ב. ϕ לא ידוע:

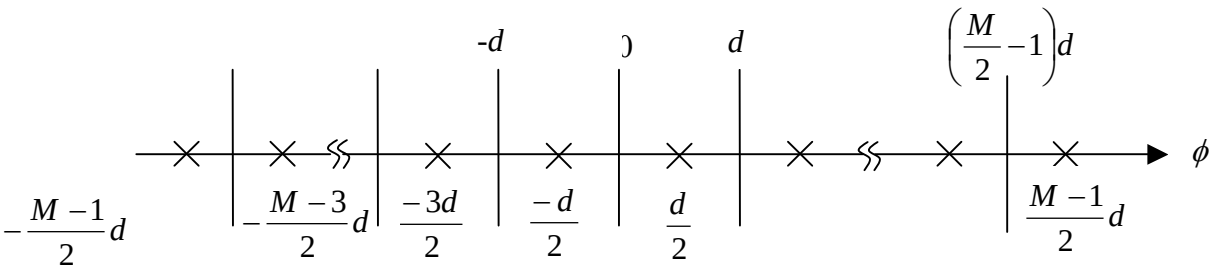
$$\langle s_0(t), s_1(t) \rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad \sin[2\pi(f_0 - f_1)t - \phi]_0^T = 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \sin[2\pi(f_0 - f_1)T - \phi] - \sin(-\phi) = 0 \quad\Rightarrow\quad (2\pi(f_0 - f_1)T - \phi) - (-\phi) = n\cdot 2\pi$$

המעבר האחרון נכון כי על-מנת שהביטוי יתאפס לכל ϕ נדרוש הפרש של כפולה שלמה של 2π (מחזורים) בין $(2\pi(f_0 - f_1)T - \phi)$ לבין $(-\phi)$.

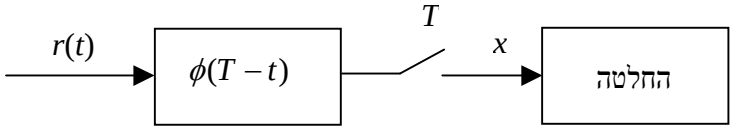
$$\Rightarrow\quad 2\pi(f_0 - f_1)T = n\cdot 2\pi \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{|f_0 - f_1|_{\min} = \frac{1}{T}}}$$

ומכאן שבמקרה הלא קוהרנטי נדרש הפרש כפול בין התדרים (רוחב פס כפול) מהמקרה הקוהרנטי.

2. א.



מקלט אופטימלי:



הערך x הוא ההיטל של $r(t)$ על $\phi(t)$, וכלל ההחלטה לפי ערכו של x מתואר באיור העליון.

ב. $P(\varepsilon)=1-P(C)=\frac{2(M-1)}{M}Q$ $\quad P(C)=\frac{1}{M}\left[(M-2)(1-2Q)+\underbrace{2(1-Q)}\right]$

לשני האותות הקיצוניים יש "שכן"
אחד בלבד, ולכל היתר יש שניים.

כאשר: $Q\equiv Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$.

ג.

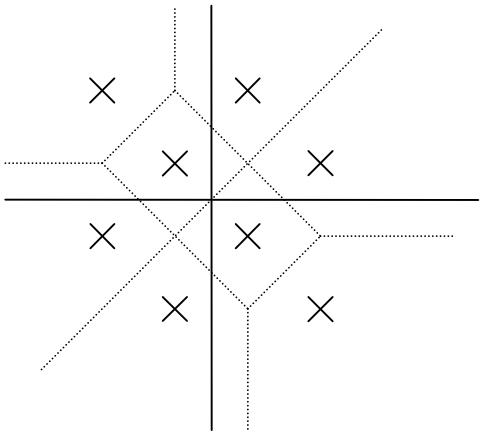
$$E_S=E_{AV}=\frac{1}{M}2\cdot\frac{d^2}{4}\sum_{i=1}^{M/2}(2i-1)^2=\frac{d^2}{2M}\left(\sum_{i=1}^{M}i^2-\sum_{i=1}^{M/2}(2i)^2\right)$$

$$=\frac{d^2}{2M}\left(\frac{M(M+1)(2M+1)}{6}-\frac{4\cdot\frac{M}{2}\left(\frac{M}{2}+1\right)(M+1)}{6}\right)$$

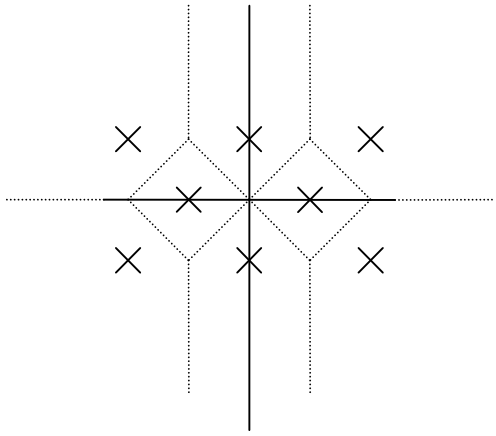
$$=\frac{d^2}{12M}\left[M(M+1)(2M+1)-M(M+2)(M+1)\right]$$

$$=\frac{(M^2-1)\cdot d^2}{12}$$

3. א. הגבולות של אזורי ההחלטה (באיורים שלהלן) נקבעים ע"י קווים, המהווים את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, המרוחקות מרחק זהה משתי נקודות קונסטלציה סמוכות.



קונסטלציה ב'



קונסטלציה א'

ב. קונסטלציה א':
$$E_{AV} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}5a^2 = 3a^2$$

קונסטלציה ב':
$$E_{AV} = \frac{1}{4}\cdot 2b^2 + \frac{1}{2}\cdot 10b^2 + \frac{1}{4}\cdot 18b^2 = 10b^2$$

ג. קונסטלציה א':
$$d^2{}_{\min} = 2\cdot a^2 = \frac{2}{3}E_{AV}$$

קונסטלציה ב':
$$d^2{}_{\min} = 8\cdot b^2 = \frac{4}{5}E_{AV}$$

וכיוון שביצועי המערכת נקבעים בקירוב (כשהמערכת עובדת בהסתברויות שגיאה נמוכות) ע"י $d_{\min}$, הרי שמערכת ב' עדיפה כי בה $d_{\min}$ גדול יותר (עבור אותו ערך של E_S בשתי המערכות).

4. א. נסמן ב-Y את מוצא h(t) ברגע הדגימה T ונסמן ב- n(t) את הרעש במבוא המקלט.
כאשר נשלח בערוץ $Y, s_1(t)$ נתון ע"י

$$Y \mid s_1(t) = \left(h(t) * \left[s_1(t) + n(t)\right]\right)\Big|_T = \underbrace{h(t) * S_1(t)\big|_T}_{\equiv S_1} + \underbrace{h(t) * n(t)\big|_T}_{\equiv N}$$

$$S_1 = \int_0^T \sqrt{E/T}\, e^{-a(T-t)}dt = \frac{\sqrt{E/T}}{a}\left(1 - e^{-aT}\right)$$

N הוא משתנה אקראי. מאחר שהוא התקבל מפעולה לינארית על תהליך אקראי גאוסי, הרי שהוא גאוסי. נמצא את השונות ואת התוחלת שלו:

$$N = \int_0^\infty e^{-a\tau} n(T-\tau)d\tau$$

אנו מניחים כאן כי המסנן החל לפעול ב- $t = -\infty$.

$$E\{N\}=0$$

$$E\{N^2\}=E\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a(\tau_1+\tau_2)}n(T-\tau_1)n(T-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right\}$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a(\tau_1+\tau_2)}\cdot\overbrace{\left[R_n(\tau_1-\tau_2)\right]}^{N_0/2\,\delta(\tau_1-\tau_2)}d\tau_1 d\tau_2=\frac{N_0}{2}\int_0^\infty e^{-2a\tau}d\tau=\frac{N_0}{4a}$$

כאשר $R_n(u)$ - פונקציית האוטוקורלציה של $n(t)$.

לכן, בהינתן ששודר $s_1(t)$ מתקיים $Y\mid s_1(t)\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ כש-
$\mu=S_1=\frac{\sqrt{E/T}}{a}(1-e^{-aT})$ ו- $\sigma^2=\frac{N_0}{4a}$. בנוסף, בהינתן ששודר $s_0(t)$, מתקיים
$Y\mid s_0(t)\sim N\left(0,\sigma^2\right)$. נפעיל כעת את קריטריון ה-MAP:

$$\frac{f(Y\mid S_1)}{f(Y\mid S_0)}\underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}}1\Rightarrow\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-S_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}Y^2}}\underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}}1\Leftrightarrow Y^2-\left(Y-S_1\right)^2\underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}}0\Leftrightarrow Y\underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}}\frac{S_1}{2}$$

כלומר כלל ההחלטה הוא: $Y\underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}}\frac{\sqrt{E/T}}{2a}(1-e^{-aT})$.

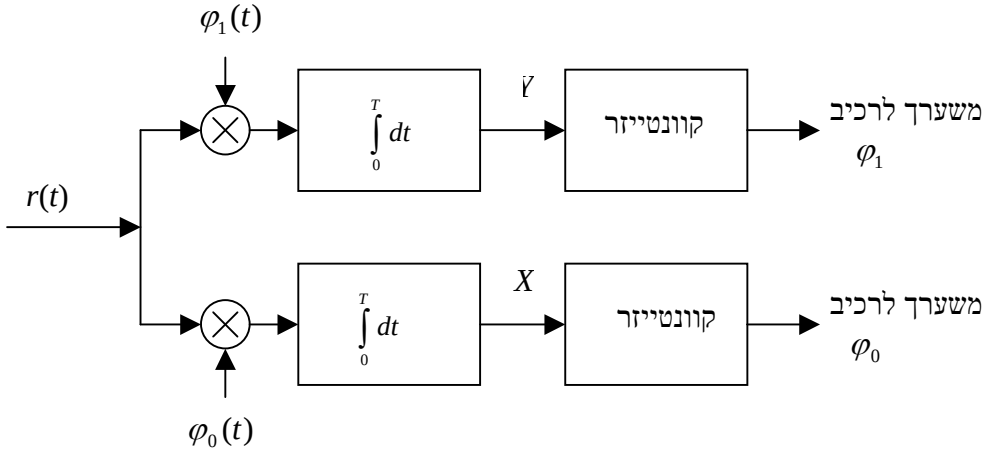
ב. $P(\varepsilon)=Q\left(\frac{S_1}{2\sigma}\right)\left[=Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0aT}}\left(1-e^{-aT}\right)\right)\right]$

כאשר משודר $s_1(t)$, הספק האות הוא $S_1^{\,2}$ ושונות הרעש היא σ^2. מכאן ש- $SNR\big|_T=\frac{S_1^{\,2}}{\sigma^2}$,
כלומר $P(\varepsilon)=Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{SNR\big|_T}\right)$.

ג. מתוך הביטוי להסתברות השגיאה מקבלים שזו מינימלית כאשר $\frac{\left(1-e^{-aT}\right)^2}{aT}$ מקסימלי. הפתרון לבעיית מקסימיזציה זו הוא, לרוע המזל, נומרי. למשל, ע"י גזירה (אנליטית) ואחר השוואה ל-0 (שבלית ברירה נפתרת נומרית) או ע"י שרטוט הפונקציה ומציאת המקסימום. בכל אופן התשובה שיוצאת היא $a^{opt}\cdot T=1.2564$.

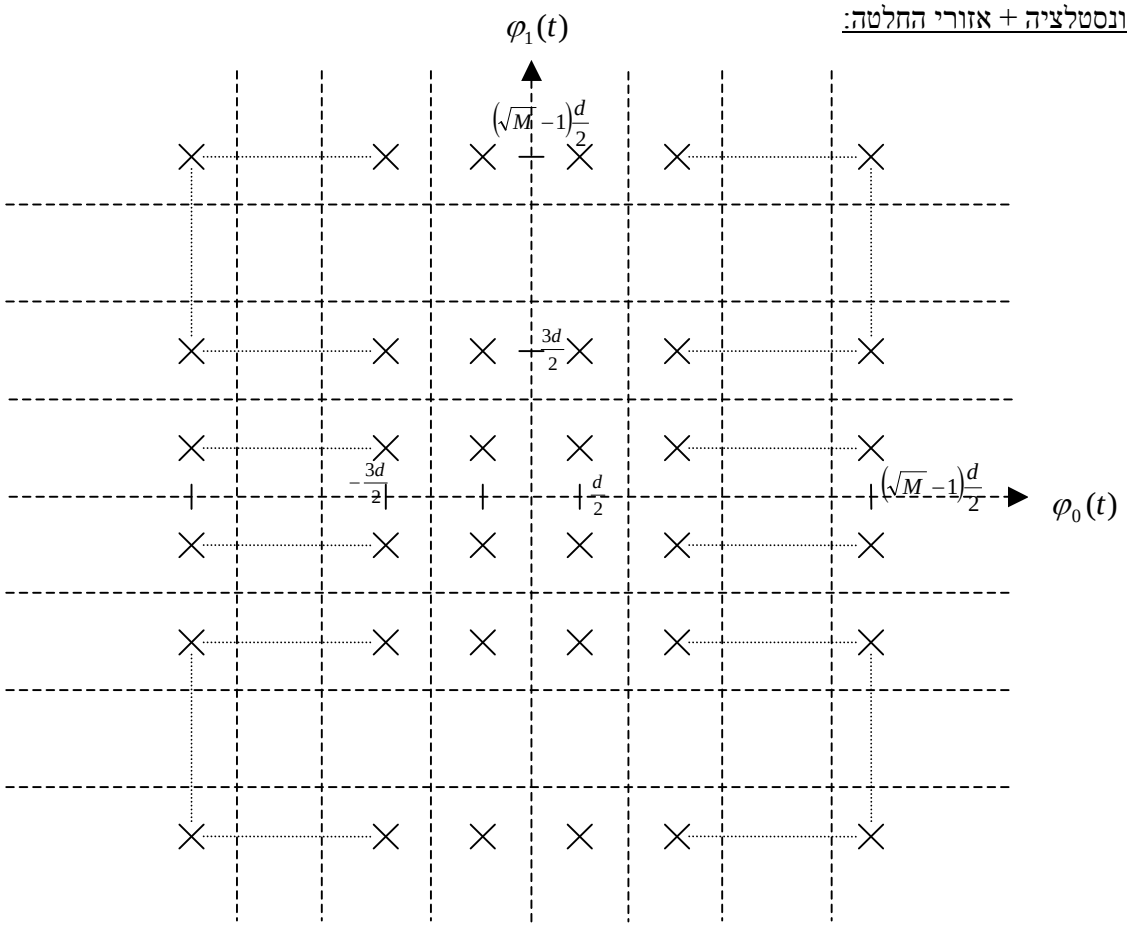
ד. במקלט האופטימלי $P(\varepsilon)=Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$, כיוון שבמקרה זה $d=\sqrt{E}$. מכאן, שהמקלט התת-אופטימלי מציג ביצועים נחותים ביחס של $\frac{Ta}{2\left(1-e^{-aT}\right)^2}$ בהשוואה למקלט האופטימלי. עבור $a^{opt}\cdot T$ הדגרדציה היא של 0.89dB

5. א. מקלט אופטימלי:

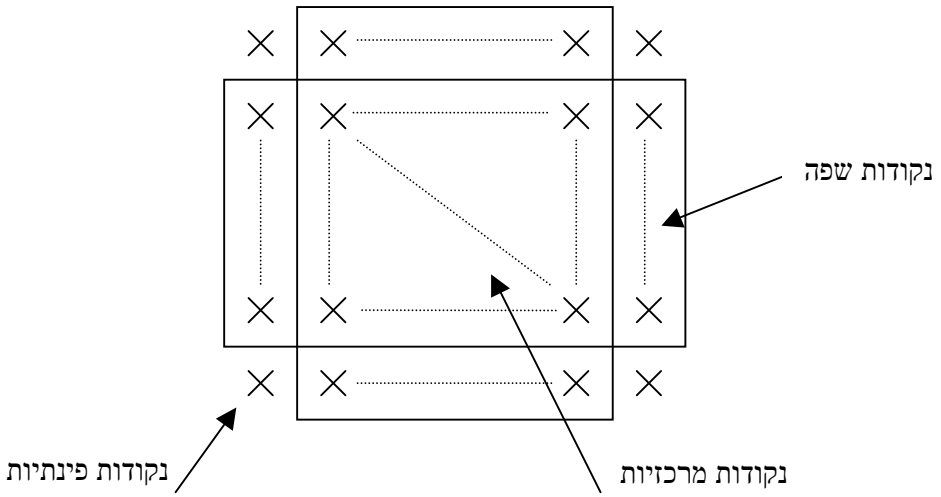


אם נסמן את כניסת הקוונטייזר ב-u ואת מוצאו ב-v, אז- $v = \frac{d}{2} \cdot z$, כאשר z הוא השלם האי זוגי הקרוב ביותר ל- $\frac{2}{d}u$ בקטע- $\left[-(\sqrt{M}-1),(\sqrt{M}-1)\right]$.

קונסטלציה + אזורי החלטה:



ב.



נחלק את הנקודות בקונסטלציה לשלושה סוגים:

- נקודות פינתיות (4 נקודות). הסתברות השגיאה בהינתן שהאות המשודר מתאים לנקודה פינתית היא $1-(1-Q)^2 = 2Q-Q^2$ כאשר $Q \equiv Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$.
- "נקודות שפה" (סה"כ $4\left(\sqrt{M}-2\right)$). הסתברות השגיאה בהינתן שהאות ששודר מתאים לנקודת שפה (3 שכנים קרובים) היא $1-(1-Q)(1-2Q) = 3Q-2Q^2$.
- נקודות מרכזיות (סה"כ $\left(\sqrt{M}-2\right)^2$). הסתברות השגיאה בהינתן ששודר אות כזה היא $1-(1-2Q)^2 = 4Q-4Q^2$.

לכן, הסתברות השגיאה הכוללת היא:

$$P(\varepsilon) = \frac{4}{M}(2Q-Q^2) + \frac{4(\sqrt{M}-2)}{M}(3Q-2Q^2) + \frac{(\sqrt{M}-2)^2}{M}(4Q-4Q^2)$$

$$= \frac{1}{M}\left[\left(8+12(\sqrt{M}-2)+4(\sqrt{M}-2)^2\right)Q - \left(4+8(\sqrt{M}-2)+4(\sqrt{M}-2)^2\right)Q^2\right]$$

$$= 4\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q - \left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 Q^2\right], \qquad Q \equiv Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

ג.

$$E_S=\frac{1}{M}\frac{d^2}{4}\sum_{x\in A}\sum_{y\in A}\left(x^2+y^2\right)=\frac{1}{M}\frac{d^2}{4}\left(\sum_{x\in A}\overbrace{\sqrt{M}}^{\substack{number\ of\\ items\ in\ A}}\ x^2+\sum_{y\in A}\sqrt{M}\,y^2\right)$$

$$=2\cdot\underbrace{\left(\frac{d^2/4}{\sqrt{M}}\sum_{x\in A}x^2\right)}_{\substack{E_s\ \text{for a PAM system}\\ \text{was descibed in Problem 1}}}=2\cdot\frac{\left(\left(\sqrt{M}\right)^2-1\right)d^2}{12}$$

קיבלנו $E_S=\frac{d^2}{6}(M-1)$, $d^2=\frac{6\cdot E_S}{M-1}$

ולכן $Q=Q\left(\sqrt{\frac{6E_S}{2N_0(M-1)}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M\cdot E_b}{N_0(M-1)}}\right)$, והביטוי ל-$P(\varepsilon)$ כפונקציה של Q נשאר כמקודם.

ד. עבור $\frac{E_S}{N_0}$ גבוה, Q^2 זניח ביחס ל-Q (וכפי שמיד נראה – נתון לנו $\frac{E_S}{N_0}$ גבוה). לכן,

(בכל מקרה $P(\varepsilon)$ אינו גדול מביטוי זה) $P(\varepsilon)\approx 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3E_S}{(M-1)N_0}}\right)$.

אם נדאג לכך ש $4Q\left(\sqrt{\frac{3E_S}{(M-1)N_0}}\right)<10^{-6}$, אז ודאי ש- $P(\varepsilon)<10^{-6}$ (ואם M המתאים לא קטן – גם לא החמרנו מדי בדרישתנו, כי $1-\frac{1}{\sqrt{M}}$ לא קטן בהרבה מ-1). מפתרון נומרי עולה, כי

$$Q(x)<2.5\cdot10^{-7}\ \Leftrightarrow\ x\ge5.03\ \Rightarrow\ M-1\le\frac{3}{(5.03)^2}\cdot\frac{E_S}{N_0}.$$

כעת, $\frac{E_S}{N_0}=\frac{P\cdot T_S}{N_0}=\frac{4\cdot10^{-8}\cdot10^{-7}}{2\cdot10^{-17}}=200\ (\approx 23dB)$ ומכאן ש-

$M-1\le\frac{3\cdot200}{5.03^2}=23.72$. מאחר שבשאלה זו M חייב להיות ריבועי וחזקה של 2, הרי ש-M המקסימלי האפשרי הוא **<u>16</u>**. כעת, $T_b^{-1}=\log_2 M\cdot T_S^{-1}=4\cdot10^{-7}=40\text{Mbps}$.

ה. כדי שקצב שידור הסיביות יהיה 60 Mbps עבור קצב שידור סימבולים קבוע של 10Msym/sec, כל סימבול צריך לייצג 6 ביטים, דהיינו, צריך ש-M יהיה $2^6 = 64$. הדרישה $P(\varepsilon) \le 10^{-6}$ עדיין שקולה ל-

$$\frac{E_S}{N_0} \ge \frac{5.03^2}{3} \cdot 63 = \underbrace{531.32}_{27.25dB} \Leftarrow \quad \frac{3E_S}{(M-1)N_0} \ge 5.03^2$$

מכאן <u>שיש צורך בתוספת של 4.25dB</u> (27.25-23) להספק השידור (T_S ו-N_0 קבועים, ולכן הגדלת $\frac{E_S}{N_0}$ נעשית ע"י הגדלת הספק המשודר).

ו. ראינו שמתקיים (עבור $\frac{E_S}{N_0}$ מספיק גבוה)

$$P(\varepsilon) \approx 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3E_b \log_2 M}{(M-1)N_0}}\right).$$

נזכור ש- $\frac{E_b}{N_0} = \frac{T_b \cdot P}{N_0}$ וש-N_0 ו-P שניהם קבועים. מכאן ש-$P(\varepsilon)$ היא פונקציה מונוטונית יורדת של המשתנה $T_b \cdot (M-1)^{-1} \cdot \log_2 M \equiv T_b \cdot f(M)$ כאשר $f(M) \equiv (M-1)^{-1} \cdot \log_2 M$. במילים אחרות, קיים ערך y כך שהדרישה $P(\varepsilon) \le 10^{-6}$ תתקיים אמ"מ $T_b \cdot f(M) \ge y$. כדי לקיים דרישה אחרונה זו עם T_b קטן ככל האפשר (קצב ביטים מקסימלי), נדרוש $f(M)$ מקסימלי. אבל $f(M)$ היא מונוטונית יורדת עבור $M>1$!
מכאן שכדי להשיג קצב מקסימלי, <u>רוצים M קטן ככל האפשר</u>. כמובן – הקטנת M ביחד עם הגדלת קצב הביטים T_b^{-1} <u>תגדיל</u> את קצב העברת הסימבולים: $T_S^{-1} = T_b^{-1} \cdot (\log M)^{-1}$.
בסעיפים הקודמים, כאשר קצב הסימבולים היה קבוע, הדרך היחידה לנסות להגדיל את קצב הביטים הייתה להגדיל את M ככל האפשר מבלי לחרוג מהסתברות השגיאה המותרת. לעומת זאת, אם מותר לשנות את קצב הסימבולים, עדיף להגדיל אותו ולהקטין את M – זה יגדיל את קצב הביטים האפשרי תחת אילוץ $P(\varepsilon)$.
נסכם, אם כן, שבסעיף זה נבחר M=4 (הערך המינימלי המותר)

$$4\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3E_S}{(4-1)N_0}}\right) \le 10^{-6} \Rightarrow \sqrt{\frac{E_S}{N_0}} \ge Q^{-1}(5\cdot 10^{-7}) \underset{numeric\ .cal}{\approx} 4.9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E_S}{N_0} \ge 24$$

$$\frac{E_S/N_0 \cdot (\text{from ו})}{E_S/N_0 \cdot (\text{from ד})} = \frac{\frac{P}{N_0}\cdot(T_S(\text{from ו}))}{\frac{P}{N_0}\cdot(T_S(\text{from ד}))} = \frac{24}{200} = 8.33$$

$$\Rightarrow T_S^{-1}(\text{from ו}) = 8.33 \cdot T_S^{-1}(\text{from ד})$$

וקצב שידור הביטים שניתן להשיג הוא $2 \cdot 8.33 \cdot 10M = 166.7\text{Mbps}$ (<- ביטים לסימבול).