תקשורת ספרתית
פתרון תרגיל 2

1. א.

$$P(A|a) = P(A|\alpha)\cdot P(\alpha|a) + P(A|\beta)\cdot P(\beta|a)$$

הסבר: α הוא אירוע בינארי בעיורה, β - המשלים

לעומת זאת ניתן לכתוב לפי חוק השלם:

$P(A|\alpha,a)\cdot P(\alpha|a) + \dots$

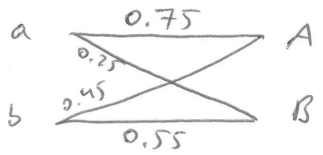
אבל בגלל שאירוע בינארי המקבל A/B תלוי
בנתיב a/b (מי שאבר: מלבד בשרשרת מרקובית)

$$P(A|a) = 0.9\cdot 0.8 + 0.1\cdot 0.3 = 0.75$$

$$P(B|a) = 0.9\cdot 0.2 + 0.1\cdot 0.7 = 0.25$$ (יכולנו לדלג מהלש:)

$$P(A|b) = 0.3\cdot 0.8 + 0.7\cdot 0.3 = 0.45$$

$$P(B|b) = 1 - P(A|b) = 0.55$$ (הפרש לא נשרם:)



ב. עקרון A:

$$P(a)\cdot P(A|a) \underset{b}{\overset{a}{\gtrless}} P(b)\,P(A|b)$$

$$\frac{1}{4}\cdot 0.75 \gtrless \frac{3}{4}\cdot 0.45$$

מעדיף b $\quad 0.1875 < 0.3375$

עקרון B:

$$\frac{1}{4}\cdot 0.25 \gtrless \frac{3}{4}\cdot 0.55$$

$>$ מעדיף b

הלק הטעות האלטרנטיבי: מעדיף תמיד b

לכן הסתברות השגיאה הוא: $P(\varepsilon) = P(a) = \frac{1}{4}$

3. $R = a\cdot s$

$$a \sim N(1,1)$$

$$R|s=-2 \sim N(-2,4)$$

$$R|s=1 \sim N(1,1)$$

א.

$$\frac{f(r|s=-2)}{f(r|s=1)} \triangleq \frac{f_{-2}(r)}{f_1(r)} \underset{1}{\overset{-2}{\gtrless}} \frac{P(1)}{P(-2)}$$

$$\frac{\frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{4}}\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(r+2)^2}{4}\right\}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(r-1)^2}{1}\right\}} \underset{1}{\overset{-2}{\gtrless}} \frac{1/3}{2/3}$$

$$-\frac{(r+2)^2}{8} + \frac{(r-1)^2}{2} \underset{1}{\overset{-2}{\gtrless}} 0$$

$$r(r-4) \gtrless 0$$

$$\hat{s} = \begin{cases} -2 & r<0 \text{ או } r>4 \\ 1 & 0<r<4 \end{cases}$$

הקשרים ספרמאן
פתרון בחינה 2

3. ב.

$$P(\varepsilon) = P(s=-2)\cdot P(0\le r<4 \mid s=-2) + P(s=1)\cdot P(r>4 \text{ או } r<0 \mid s=1) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left[Q\left(\frac{0-(-2)}{2}\right) - Q\left(\frac{4-(-2)}{2}\right)\right] + \frac{1}{3}\cdot\left[Q\left(\frac{4-1}{1}\right) + \underbrace{1-Q\left(\frac{0-1}{1}\right)}_{Q(1)}\right] =$$

$$= Q(1) - \frac{1}{3}Q(3) \approx 0.158$$

5. כלל ההחלטה האופטימלי:

$$\frac{f_{R|M}(r\mid m_0)}{f_{R|M}(r\mid m_1)} \underset{m_1}{\overset{m_0}{\gtrless}} \eta \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{1}{2}r^2-|r|} \underset{m_1}{\overset{m_0}{\gtrless}} \eta \Leftrightarrow \frac{[|r|-1]^2}{2} \underset{m_1}{\overset{m_0}{\gtrless}} \frac{1}{2}+\ln\left(\eta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$$

לכן חוק ההחלטה הוא: נחליט כי שודר m_0 עבור $|r| > 1+\sqrt{1+2\ln\left(\eta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)}$ וכן עבור

$|r| < 1-\sqrt{1+2\ln\left(\eta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)}$,

ונחליט כי שודר m_1 עבור $1-\sqrt{1+2\ln\left(\eta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)} < |r| < 1+\sqrt{1+2\ln\left(\eta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)}$.

עבור $\eta < \sqrt{\frac{\pi}{2e}}$ כלל ההחלטה הוא תמיד m_0 .

6. א.

עבור קליטת $r=$"0"

$$p(m=\text{"0"})\cdot p(r=\text{"0"}\mid m=\text{"0"}) = \frac{1}{3}(1-p)$$

$$p(m=\text{"1"})\cdot p(r=\text{"0"}\mid m=\text{"1"}) = \frac{2}{3}\cdot 0 = 0$$

ולכן עבור קליטת $r=$"0" אנו נחליט $\hat{m}=$"0".

עבור קליטת $r=$"1"

$$p(m=\text{"0"})\cdot p(r=\text{"1"}\mid m=\text{"0"}) = \frac{1}{3}p$$

$$p(m=\text{"1"})\cdot p(r=\text{"1"}\mid m=\text{"1"}) = \frac{2}{3}$$

ולכן כאן ההחלטה תהיה $\hat{m}=$"1" .

$$p\{Error\} = p\{m=\text{"0"}\}\cdot p\{r=\text{"1"}\mid m=\text{"0"}\} = \frac{1}{3}p$$

ב. באופן די דומה לסעיף א' עבור קליטת "1" ההחלטה תהיה $\hat{m}=$"1".

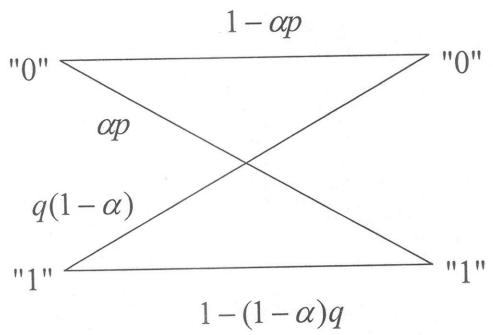
$$p(m=\text{"0"})\cdot p(r=\text{"0"}\,|\,m=\text{"0"})=\frac{1}{3}$$

$$p(m=\text{"1"})\cdot p(r=\text{"0"}\,|\,m=\text{"1"})=\frac{2}{3}q$$

ומכאן שההחלטה $\hat{m}=\text{"0"}$ עבור קליטת $r=\text{"0"}$:

$$p\{Error\}=\frac{2}{3}q$$

ג. הערוץ השקול הוא:



$r=\text{"0"}$

$$\begin{cases} p(m=\text{"0"})\cdot p(r=\text{"0"}\,|\,m=\text{"0"})=\frac{1}{3}(1-\alpha p) \\ p(m=\text{"1"})\cdot p(r=\text{"0"}\,|\,m=\text{"1"})=\frac{2}{3}q(1-\alpha) \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}(1-\alpha p)>\frac{2}{3}q(1-\alpha)\Rightarrow m=\text{"0"}$$

$r=\text{"1"}$

$$\begin{cases} p(m=\text{"0"})\cdot p(r=\text{"1"}\,|\,m=\text{"0"})=\frac{1}{3}\alpha p \\ p(m=\text{"1"})\cdot p(r=\text{"1"}\,|\,m=\text{"1"})=\frac{2}{3}[1-q(1-\alpha)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow m=\text{"1"}$$

$$p\{Error\}=\frac{1}{3}\alpha p+\frac{2}{3}q(1-\alpha)=\frac{2}{3}q+\frac{\alpha}{3}(p-2q)$$

ד. כיוון ש-p{Error} לינארית ב- α, ערך המינימום מתקבל בנקודת קצה.

אם $p\geq 2q$ הסתברות השגיאה המינימלית, ששווה ל- $\frac{2}{3}q$, מתקבלת עבור $\alpha=0$,

ואם $p\leq 2q$ הסתברות השגיאה המינימלית, ששווה ל- $\frac{1}{3}p$, מתקבלת עבור $\alpha=1$.

4/ 12

הקשרת סמרבות
פתרון תרגיל 2

7. א.

$$E\{r \mid B=+1\}=3 \qquad \sigma^2\{r \mid B=+1\}=B^2\sigma_x^{\ 2}+\sigma_n^{\ 2}=\sigma_x^{\ 2}+\sigma_n^{\ 2}$$

$$E\{r \mid B=-3\}=-9 \qquad \sigma^2\{r \mid B=-3\}=9\sigma_x^{\ 2}+\sigma_n^{\ 2}$$

ובשני המקרים r גאוסי, כלל ההחלטה:

$$\sqrt{\frac{9\sigma_x^{\ 2}+\sigma_n^{\ 2}}{\sigma_x^{\ 2}+\sigma_n^{\ 2}}}\,e^{\frac{(r+9)^2}{2\left(9\sigma_x^{\ 2}+\sigma_n^{\ 2}\right)}-\frac{(r-3)^2}{2\left(\sigma_x^{\ 2}+\sigma_n^{\ 2}\right)}} \underset{-3}{\overset{+1}{\gtrless}} 3$$

ב.

$$\sqrt{\frac{11}{3}}\,e^{\frac{(r+9)^2}{22}-\frac{(r-3)^2}{6}} \underset{-3}{\overset{+1}{\gtrless}} 3 \Leftrightarrow \frac{(r+9)^2}{22}-\frac{(r-3)^2}{6} \underset{-3}{\overset{+1}{\gtrless}} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{27}{11}\right)$$

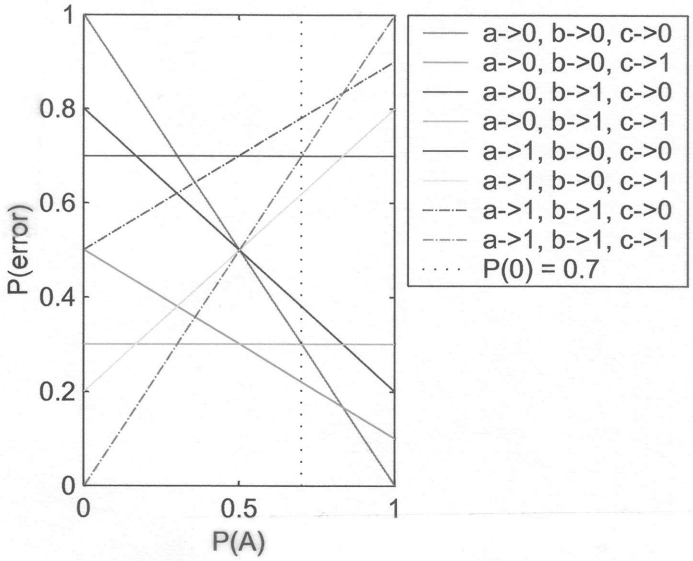
$$\Leftrightarrow -8r^2+120r+144-33\ln\left(\frac{27}{11}\right) \underset{-3}{\overset{+1}{\gtrless}} 0$$

$$\hat{B}(r)=\begin{cases} +1 & -0.899166<r<15.8992 \\ -3 & r<-0.899166,\ r>15.8992 \end{cases}$$

ג. נסמן: $\eta_2 \equiv 15.8992$ $\eta_1 \equiv -0.899166$ לאחר הצבה בביטוי הכללי ביותר (ללא גבולות האינטגרלים) נקבל:

$$p\{Error\}=\frac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{\eta_1} f(r \mid B=+1)dr+\int_{\eta_2}^{\infty} f(r \mid B=+1)dr\right]+\frac{3}{4}\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(r \mid B=-3)dr$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-Q\left(\frac{\eta_1-3}{\sqrt{\sigma_x^{\ 2}+\sigma_n^{\ 2}}}\right)+Q\left(\frac{\eta_2-3}{\sqrt{\sigma_x^{\ 2}+\sigma_n^{\ 2}}}\right)\right]+\frac{3}{4}\left[Q\left(\frac{\eta_1+9}{\sqrt{9\sigma_x^{\ 2}+\sigma_n^{\ 2}}}\right)-Q\left(\frac{\eta_2+9}{\sqrt{9\sigma_x^{\ 2}+\sigma_n^{\ 2}}}\right)\right]$$



2. ב. ר' מהשאלון

ג. עבור $P(0)$, אלף ההחלטה הסובייקטיבי הוא כך שסמרב' הטעות אם נמצא בולמה:
פולף:
$a \to 0$
$b \to 0$
$c \to 1$

הסתברות הטעות הכולל 0.22

ד. נבחר את כל שבקלפה הקיצונים אם כבר נמצא.
כאן כל ההחלטות:
$a \to 0$
$b \to 1$
$c \to 1$

שאלו הסתברות הטעות עדיין תלוי ב-$P(0)$ ואם עדיין עד 0.3

מקבלת סטטיסטית
פתרון תרגיל 2

8. א. מסמן בהתאמה שמקבל כאן n :

$$P(n|H_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} P(n|H_1)$$

$$\frac{\lambda_0^n e^{-\lambda_0}}{n!} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{(\lambda_0+\lambda_1)^n e^{-\lambda_0} e^{-\lambda_1}}{n!}$$

$$e^{+\lambda_1} \gtrless \left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n$$

$$\lambda_1 \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} n \ln\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)$$

$$n \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\lambda_1}{\ln\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)}$$

$$\hat{H} = \begin{cases} H_0 & n \le \frac{\lambda_1}{\ln\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)} \\ H_1 & n > \frac{\lambda_1}{\ln\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)} \end{cases}$$

ב.

$$P(\varepsilon) = P(H_0)\cdot P(n>T|H_0) + P(H_1)\cdot P(n\le T|H_1)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=\lfloor T\rfloor+1}^{\infty} \frac{\lambda_0^n e^{-\lambda_0}}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\lfloor T\rfloor} \frac{(\lambda_0+\lambda_1)^n e^{-\lambda_0-\lambda_1}}{n!}$$

כאשר $T \triangleq \frac{\lambda_1}{\ln\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)}$ לכן $\lfloor T\rfloor$ כאן כמה כאלם (מעלה לשלם) של T

4. א. נחשב את $P(\text{מבוא}|\text{מלכו})\cdot P(\text{מבוא})$!

a	b	c	מלכו / מבוא
$0.3\cdot0.6=0.18$	$0.5\cdot0.1=0.05$	$0.2\cdot0.1=0.02$	"1"
$0.3\cdot0.3=0.09$	$0.5\cdot0.5=0.25$	$0.2\cdot0.1=0.02$	"2"
$0.3\cdot0.1=0.03$	$0.5\cdot0.4=0.20$	$0.2\cdot0.8=0.16$	"3"

לכן בהתאמה אם "1" מלכו "a"
אם "2" או "3" מלכו "b"

הסתברות השגיאה בכל מקרה כל הערכים שאינו ברקע באלכסון
כלומר, כל הערכים שאינם בתחום!

$P(\varepsilon) = 0.05+0.02+0.09+0.02+0.03+0.16 = 0.37$

(או, לחלופין, 1 פחות כולם שבתחום: $1-0.18-0.25-0.20 = 0.37$)

6/12

9. א.

$$f_{\underline{N}}(\underline{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n_0^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|n_1|}$$

$$f_{R|S}(\underline{r} \mid \underline{s_0}) = f_{\underline{N}}(\underline{r} - \underline{s_0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_0-1)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|r_1-1|}$$

$$f_{R|S}(\underline{r} \mid \underline{s_1}) = f_{\underline{N}}(\underline{r} - \underline{s_1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_0+1)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|r_1+1|}$$

ב.

$$\ln \frac{f_{R|S}(\underline{r} \mid \underline{s_1})}{f_{R|S}(\underline{r} \mid \underline{s_0})} = \frac{1}{2\sigma^2}[(r_0-1)^2 - (r_0+1)^2] - \lambda[|r_1+1| - |r_1-1|] =$$

$$= -\frac{2r_0}{\sigma^2} - \lambda[|r_1+1| - |r_1-1|]$$

ג. עבור $P(\underline{s_0}) = P(\underline{s_1}) = 1/2$ ו- $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$, כלל החלטה הוא:

$$-\frac{2r_0}{\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}[|r_1+1| - |r_1-1|] \underset{\underline{s_0}}{\overset{\underline{s_1}}{\gtrless}} 0 \Rightarrow -|r_1+1| + |r_1-1| - 4r_0 \underset{\underline{s_0}}{\overset{\underline{s_1}}{\gtrless}} 0$$

עבור $r_1 \le -1$

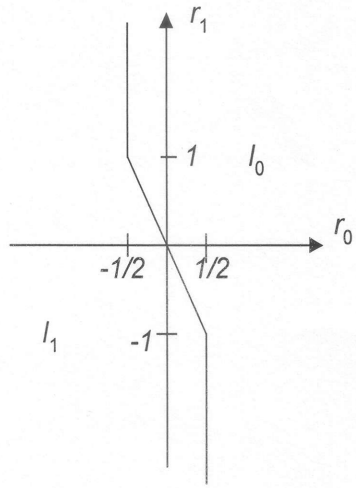
$$r_1 + 1 - r_1 + 1 - 4r_0 \underset{\underline{s_0}}{\overset{\underline{s_1}}{\gtrless}} 0 \Rightarrow 2r_0 - 1 \underset{\underline{s_1}}{\overset{\underline{s_0}}{\gtrless}} 0$$

עבור $-1 \le r_1 \le 1$

$$-(r_1+1) - r_1 + 1 - 4r_0 \underset{\underline{s_0}}{\overset{\underline{s_1}}{\gtrless}} 0 \Rightarrow 2r_0 + r_1 \underset{\underline{s_1}}{\overset{\underline{s_0}}{\gtrless}} 0$$

עבור $r_1 \ge 1$

$$-(r_1+1) + r_1 - 1 - 4r_0 \underset{\underline{s_0}}{\overset{\underline{s_1}}{\gtrless}} 0 \Rightarrow 2r_0 + 1 \underset{\underline{s_1}}{\overset{\underline{s_0}}{\gtrless}} 0$$

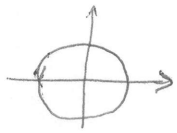


7/12

תקשורת ספרתית
פתרון אבחון 2

10. גל.

$$\cancel{p(H_0)} \cdot f_0(x,y) \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} \cancel{p(H_1)}\, f_1(x,y)$$



$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \gtrless \begin{cases} 1/\pi & x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

מעגל ברדיוס 1
שטחו: $\pi \cdot 1^2 = \pi$

בלי שום $x^2+y^2>1$ נחליט H_0

אבל $x^2+y^2 \le 1$:

$$e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \underset{1}{\overset{0}{\gtrless}} 2\sigma^2$$

(שימו לב: כפלנו במספר שלילי, לכן הפכנו סימן)

$$x^2+y^2 \underset{1}{\overset{0}{\lessgtr}} -2\sigma^2 \ln(2\sigma^2)$$

אם $\sigma^2 > \frac{1}{2}$ אזי $\ln(2\sigma^2) > 0$ לכן אגף ימין שלילי
ונחליט H_1

אם $\sigma^2 < \frac{1}{2}$ בינתיים נבדוק.

לסיכום: אבל $\sigma^2 > \frac{1}{2}$: בתוך המעגל $x^2+y^2 \le 1$ נחליט H_1
ומחוצה לו $x^2+y^2 > 1$ נחליט H_0

אבל $\sigma^2 < \frac{1}{2}$:

$$\hat{H} = \begin{cases} H_0 & 0 \le x^2+y^2 < -2\sigma^2 \ln(2\sigma^2) \\ H_1 & -2\sigma^2 \ln(2\sigma^2) < x^2+y^2 < 1 \\ H_0 & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

<u>הסתברות שגיאה</u>

אבל $\sigma^2 > \frac{1}{2}$: מחוץ למעגל אין טעות לשגיאה בכל מקרה

$$p(\varepsilon) = p(H_0) \cdot p(\varepsilon | H_0) = \frac{1}{2} \cdot \iint_{x^2+y^2<1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \underset{\text{יעקוביאן}}{r} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr\,d\theta = \frac{1}{2} \left[-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}\right)$$

אבל $\sigma^2 < \frac{1}{2}$

$$p(\varepsilon | H_1) = p\left(x^2+y^2 < -2\sigma^2 \ln(2\sigma^2) \,\middle|\, H_1\right) = \left[-2\sigma^2 \ln(2\sigma^2)\right]^2$$

$$p(\varepsilon | H_0) = \iint_{-2\sigma^2\ln(2\sigma^2) < x^2+y^2 < 1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right\} dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_{r=\sqrt{-2\sigma^2 \ln 2\sigma^2}}^{1} \cdots \, dr\,d\theta =$$

$$= e^{\frac{2\sigma^2 \ln(2\sigma^2)}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} = 2\sigma^2 - e^{-1/2\sigma^2}$$

8/12

תקשורת ספרתית
פתרון תרגיל 2

(המשך ש.ב. 10)

$$\gamma(\varepsilon) = \frac{1}{2}\gamma(\varepsilon|H_1) + \frac{1}{2}\gamma(\varepsilon|H_0) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-2\sigma^2 \ln(2\sigma^2)\right)^2 + \sigma^2 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$$

ב. ההסתברות לקבל (x,y) על מעגל היחידה (כלומר בתוך היחידה שמתבטא אצל ל-0) כאן אפשר בעיקרון בשלושה, בעוד כאן אחד בעיקרון בפלוס המעגל, לכן אין הבחנה יכול: H_1 אבל $x^2+y^2=1$
H_0 אבל $x^2+y^2\neq 1$

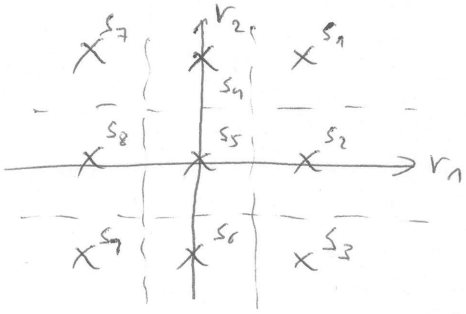
ההסתברות בשניהם אצל ל-0, כי ההסתברות לפגוע בתוך היחידה דומה בהינתן בעיקרון בשלושה כן אפס, וההסתברות לפגוע מחוצה לה בהינתן H_1 גם כאן אפס.

$\underline{s}_1 = (1,1)$ $\quad \underline{s}_4 = (0,1)$ $\quad \underline{s}_7 = (-1,1)$
$\underline{s}_2 = (1,0)$ $\quad \underline{s}_5 = (0,0)$ $\quad \underline{s}_8 = (-1,0)$
$\underline{s}_3 = (1,-1)$ $\quad \underline{s}_6 = (0,-1)$ $\quad \underline{s}_9 = (-1,-1)$

13.

ג. במבחן ML: $\arg\max_i \langle \underline{r}, \underline{s}_i\rangle - \frac{\|\underline{s}_i\|^2}{2}$

במבחן MD: $\arg\min_i \|\underline{r}-\underline{s}_i\|$



ד. אזורי ההחלטה:

לכל: מחליט s_3
אבל $\frac{1}{2}<r_1$, $r_2<-\frac{1}{2}$

מחליט s_5
אבל $-\frac{1}{2}<r_1<\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<r_2<\frac{1}{2}$ וכו'...

ה. נגדיר $Q \triangleq Q\left(\frac{1}{2\sigma}\right)$, אז ההסתברות לטעות בשלב הראשון שבו ל-1 יותר מ-$\frac{1}{2}$. אבל ש-$2Q$ כמו ההסתברות לטעות בשלב הראשון מגדר ל-$\frac{1}{2}$ אז מגדר ל-$-\frac{1}{2}$.

$$\gamma(\varepsilon|s_i) = \begin{cases} 1-(1-Q)(1-Q) = 2Q-Q^2 & s_1, s_3, s_7, s_9 \\ 1-(1-Q)(1-2Q) = 3Q-2Q^2 & s_2, s_4, s_6, s_8 \\ 1-(1-2Q)(1-2Q) = 4Q-4Q^2 & s_5 \end{cases}$$

$$\gamma(\varepsilon) = \frac{4}{9}(2Q-Q^2) + \frac{4}{9}(3Q-2Q^2) + \frac{1}{9}(4Q-4Q^2)$$

$$= \frac{24Q-16Q^2}{9}$$

9/12

11 . א. בהינתן $\underline{s_0}$ $\quad (r_0, r_1) \sim N(\underline{\eta_0}, \Lambda_r)$

ועבור שידור $\underline{s_1}$ $\quad (r_0, r_1) \sim N(\underline{\eta_1}, \Lambda_r)$

$$\underline{\eta_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\eta_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Lambda_r = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$f_{R|S}(\underline{r} \mid \underline{s_0}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(r_0-1)^2+(r_1-1)^2]}$$

$$f_{R|S}(\underline{r} \mid \underline{s_1}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(r_0+1)^2+(r_1+1)^2]}$$

$$\ln \frac{f_{R|S}(\underline{r} \mid \underline{s_1})}{f_{R|S}(\underline{r} \mid \underline{s_0})} = \frac{1}{2\sigma^2}[(r_0-1)^2 + (r_1-1)^2 - (r_0+1)^2 - (r_1+1)^2] =$$

$$= \frac{-2r_0 - 2r_1}{\sigma^2}$$

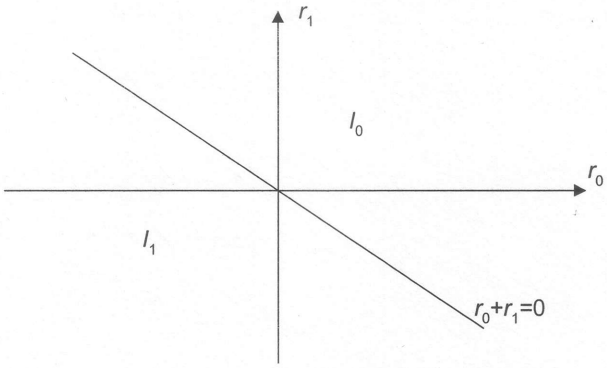
וכלל ההחלטה האופטימלי

$$\frac{-2r_0 - 2r_1}{\sigma^2} \underset{\underline{s_0}}{\overset{\underline{s_1}}{\gtrless}} \ln\left[\frac{P(\underline{s_0})}{P(\underline{s_1})}\right]$$

$$(r_0 + r_1) \underset{\underline{s_0}}{\overset{\underline{s_1}}{\lessgtr}} -\frac{\sigma^2}{2} \ln\left[\frac{P(\underline{s_0})}{P(\underline{s_1})}\right]$$

וכאשר $P(\underline{s_0}) = P(\underline{s_1}) = 1/2$ נקבל

$$(r_0 + r_1) \underset{\underline{s_0}}{\overset{\underline{s_1}}{\lessgtr}} 0$$

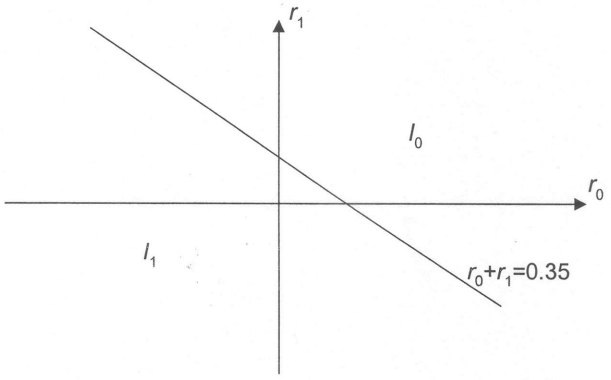


ב. ההחלטה בנקודות הנמצאות על הקו $r_0 + r_1 = 0$ אינה משפיעה על הסתברות השגיאה.

ג.

$$(r_0 + r_1) \underset{\underline{s_0}}{\overset{\underline{s_1}}{\lessgtr}} -\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\ln(2) \cong 0.35$$

(המשך 11)



כיוון שההסתברות האפריורית של s_1 גדולה מזו של s_0, אז בחלק גדול יותר של המישור (r_0, r_1) מחליטים על s_1.

ד. כיוון ש-$E\{n_0^2\} \neq E\{n_1^2\}$ במקרה זה ההחלטה אינה נקבעת ע"י מרחק אוקלידי מינימלי (עבור הסתברות א-פריורית זהה).

$$f_{R|S}(\underline{r}\,|\,\underline{s_0}) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(r_0-1)^2+\frac{1}{2}(r_1-1)^2]}$$

$$f_{R|S}(\underline{r}\,|\,\underline{s_1}) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(r_0+1)^2+\frac{1}{2}(r_1+1)^2]}$$

$$\Lambda_{\underline{r}} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^2 \end{bmatrix}$$

ובדומה לסעיף א' נקבל במקרה זה

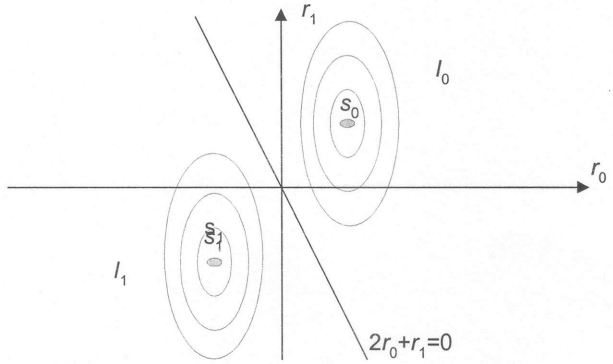
$$\frac{-2r_0 - r_1}{\sigma^2} \underset{\underline{s_0}}{\overset{\underline{s_1}}{\gtrless}} \ln\left[\frac{P(\underline{s_0})}{P(\underline{s_1})}\right]$$

ועבור $P(\underline{s_0}) = P(\underline{s_1}) = 1/2$ נקבל

$$(2r_0 + r_1) \underset{\underline{s_0}}{\overset{\underline{s_1}}{\lessgtr}} 0$$

במקרה זה משטחים שווי הסתברות הם אליפסות סביב הנקודות (s_0, s_1) עם יחס צירים $1:\sqrt{2}$ -

$$(r_0 \pm 1)^2 + \frac{1}{2}(r_1 \pm 1)^2 = const.$$



11/12

תקשורת ספרתית
פתרון תרגיל 2.

12.

א. חוק ההחלטה מתקבל מיחס הסבירויות:

$$\log\frac{p(\underline{r}\,|\,s^{(0)})}{p(\underline{r}\,|\,s^{(1)})}=\frac{a}{\sigma_0^2}r_0-\frac{b}{\sigma_1^2}r_1+\frac{b^2}{2\sigma_1^2}-\frac{a^2}{2\sigma_0^2}\quad\begin{Bmatrix}\geq 0\Rightarrow H^{(0)}\\ \leq 0\Rightarrow H^{(1)}\end{Bmatrix}$$

ב. מהביטוי ליחס הסבירויות ברור כי גבול איזורי ההחלטה הינו קו ישר.

ג. נסמן: $\tan\theta=\frac{\sigma_1^2 a}{\sigma_0^2 b}$. אזי הסתברות השגיאה בהינתן היפותיזה $H^{(0)}$ נתונה ע"י:

$$\Pr\{\varepsilon\,|\,H^{(0)}\}=\Pr\{n_1\cos\theta-n_0\sin\theta>d_0\}$$

כאשר d_0 מסמן את המרחק מהאות $s^{(0)}$ לקו הגבול בין איזורי ההחלטה. מרחק זה ניתן לחשב באופן אנליטי ע"י פתרון מערכת משוואות ליגאריות מתאימה ומתקבל:

$$d_0=\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2b^2+\sigma_1^2a^2}{\sqrt{\sigma_0^4b^2+\sigma_1^4a^2}}$$

לכן,

$$\Pr\{\varepsilon\,|\,H^{(0)}\}=Q\left(\frac{d_0}{\sqrt{\sigma_1^2\cos^2\theta+\sigma_0^2\sin^2\theta}}\right)$$

באופן דומה ניתן לקבל את הסתברות השגיאה בהינתן היפותיזה $H^{(1)}$ ומתקבלת תוצאה זהה. לכן הסתברות השגיאה נתונה ע"י:

$$\Pr\{\varepsilon\}=Q\left(\frac{\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2b^2+\sigma_1^2a^2}{\sqrt{\sigma_0^4b^2+\sigma_1^4a^2}}}{\sqrt{\sigma_1^2\cos^2\theta+\sigma_0^2\sin^2\theta}}\right)$$

ד. מ-א' ברור כי היחס הדרוש הינו:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$$

ה. גבול איזורי ההחלטה הוא הישר מסעיף א' עבור $\sigma_0=\sigma_1=\sigma$. נסמן כמקודם:

$$\tan\theta=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

הסתברות השגיאה היא לכן

$$\Pr\{\varepsilon\}=Q\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{b^2+a^2}}{\sqrt{\sigma_1^2\cos^2\theta+\sigma_0^2\sin^2\theta}}\right)$$

הסתברות השגיאה במקרה זה יותר גדולה כיוון שהמקלט איננו אופטימלי.