.2

א.

$$\langle \psi_0(t),\psi_1(t)\rangle = \int_0^{\pi/\omega} \sin\omega t\cos\omega t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/\omega}\sin 2\omega t dt = 0$$

ב.

$$\|\psi_0(t)\|^2 = \int_0^{\pi/\omega}\sin^2\omega t dt = \int_0^{\pi/\omega}\frac{1}{2}[1-\cos 2\omega t]dt = \frac{1}{2}\left[t-\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^{\pi/\omega} = \frac{\pi}{2\omega}$$

$$\|\psi_1(t)\|^2 = \int_0^{\pi/\omega}\cos^2\omega t dt = \int_0^{\pi/\omega}\frac{1}{2}[1+\cos 2\omega t]dt = \frac{\pi}{2\omega}$$

$$\varphi_0(t) = \frac{\psi_0(t)}{\|\psi_0(t)\|} = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sin\omega t \quad , \quad \varphi_1(t) = \frac{\psi_1(t)}{\|\psi_1(t)\|} = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\cos\omega t$$

ג.

$$s_i(t) = \sin\left(\omega t + \frac{i\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{i\pi}{3}\right)\sin\omega t + \sin\left(\frac{i\pi}{3}\right)\cos\omega t$$

$$= \left[\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\cos\left(\frac{i\pi}{3}\right)\right]\varphi_0(t) + \left[\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\sin\left(\frac{i\pi}{3}\right)\right]\varphi_1(t)$$

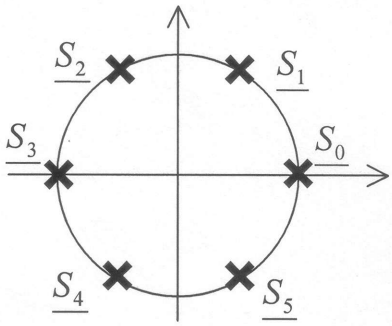
ד.

כלומר, קואורדינטות האותות לפי הבסיס $\{\varphi_0(t),\varphi_1(t)\}$ הן:

$$s_0(t): \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}(1,0) \qquad s_3(t): \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}(-1,0)$$

$$s_1(t): \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad s_4(t): \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$s_2(t): \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad s_5(t): \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



ה.

$$\psi_0(t) = s_1(t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), \qquad \varphi_0(t) = \frac{\psi_0(t)}{\|\psi_0(t)\|} = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\langle s_2(t),\varphi_0(t)\rangle = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\int_0^{\pi/\omega}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)dt = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/\omega}[\cos\frac{\pi}{3}-\cos(2\omega t+\pi)]dt$$

$$= \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}$$

$$\psi_1(t) = s_2(t) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\varphi_0(t) = \sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$$

ראינו בסעיף ג' כי מימד מרחב האותות הוא 2 (דהיינו, המרחב נפרש ע"י שני אותות), ולכן גם הבסיס החדש יהיה בן שני אותות, ואין צורך להמשיך בתהליך Gram-Schmidt. ננרמל את $\psi_1(t)$:

$$\|\psi_1(t)\|^2 = \int_0^{\pi/\omega}\left[\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 dt =$$

$$= \int_0^{\pi/\omega}\left[\sin^2\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\sin^2\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)\right]dt$$

$$= \frac{\pi}{\omega}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right]=\frac{3}{8}\frac{\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \varphi_1(t)=\sqrt{\frac{2\omega}{3\pi}}\left(2\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

ניתן למצוא את ייצוג האותות במערכת החדשה בדרך הסטנדרטית, אך נשתמש בדרך מעט שונה. נסמן ב-$\underline{\tilde{\varphi}}(t)$ את הבסיס האורתונורמלי שהתקבל בסעיף ב', ונסמן ב-A את מטריצת הייצוג של האות בבסיס זה, כלומר $\underline{\tilde{\varphi}}(t)=\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}[\sin\omega t,\cos\omega t]^T$, $\underline{s}(t)=A\underline{\tilde{\varphi}}(t)$, כאשר A נמצאה בסעיף ג'. נשים לב שמימדי המטריצות הם: $\left[\underline{\tilde{\varphi}}(t)\right]_{2x1},[\underline{A}]_{6x2},[\underline{s}(t)]_{6x1}$.

כעת נסמן ב-B את מטריצת המעבר מהבסיס $\underline{\tilde{\varphi}}(t)$ לבסיס החדש שמצאנו, $\underline{\varphi}(t)$, כלומר $\underline{\varphi}(t)=B\underline{\tilde{\varphi}}(t)$. מכאן ש:

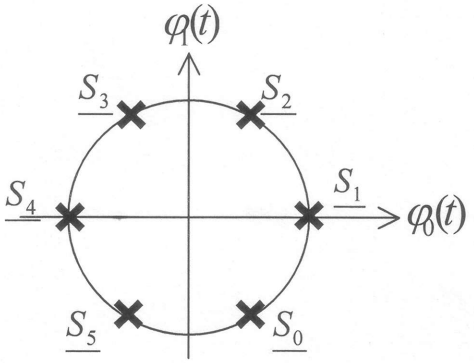
$$\underline{s}(t)=A\underline{\tilde{\varphi}}(t)=A\left(B^{-1}\underline{\varphi}(t)\right)=\left(AB^{-1}\right)\underline{\varphi}(t)$$

$$\varphi_0(t)=\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\left[\frac{1}{2}\sin\omega t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega t\right]=\frac{1}{2}\tilde{\varphi}_0(t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\varphi}_1(t)$$

$$\varphi_1(t)=\sqrt{\frac{2\omega}{3\pi}}\left[\sin\omega t\left(-1-\frac{1}{2}\right)+\cos\omega t\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]=-\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\varphi}_0(t)+\frac{1}{2}\tilde{\varphi}_1(t)$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix} \qquad B^{-1}=B^T \qquad A=\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\\ -1 & 0\\ -1/2 & -\sqrt{3}/2\\ 1/2 & -\sqrt{3}/2\end{bmatrix}$$

כאשר המטריצה A הוגדרה בסעיפים ג' ו – ד', ו- B - מטריצת סיבוב יוניטרית.



$$\underline{s}(t)=AB^{-1}\underline{\varphi}(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\cdot\begin{bmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ 1 & 0\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\\ -1 & 0\\ -1/2 & -\sqrt{3}/2\end{bmatrix}\cdot\underline{\varphi}(t)$$

רואים שהציור החדש מתקבל מסיבוב הציור הקודם. ברור כי אנרגיית האותות (כלומר ריבוע המרחק מהראשית) ללא שינוי, כיוון שאנרגיית וקטור המייצג אות זהה לאנרגיית האות, ללא תלות בבחירת בסיס למרחב האותות. כנ"ל לגבי המרחק בין וקטורים המייצגים אותות – ראינו שהמרחק האויקלידי בין שני הוקטורים שמייצגים שני אותות זהה לשורש אנרגיית ההפרש בין האותות, בלי תלות בבסיס. לבסוף, כיוון שבבסיסים שונים מרחק הנקודות (המייצגות אותות) מהראשית אינו משתנה, וגם המרחק בין הנקודות עצמן איננו משתנה, הרי שגם <u>הפרש הזויות</u> בין אותות אינו משתנה (חפיפת משולשים עפ"י 3 צלעות).

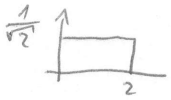
נזכיר כי ייצוג האותות במרחב האותות הוא סטטיסטי מספיק (sufficient statistic) לחישוב ביצועי מערכת תקשורת המשתמשת בהם, ואין חשיבות לאותות עצמם או לבסיס מעבר לקביעת הייצוג במרחב האותות. קבוצות אותות שונות בבסיסים שונים בעלות ייצוג זהה תהיינה בעלות ביצועים זהים.

1. א.

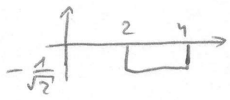
$\underline{s_1} = [1\ 1\ 0\ 0]$ $\quad \underline{s_2} = [1\ 1\ -1\ -1]$ $\quad \underline{s_3} = [1\ 1\ 1\ 0]$

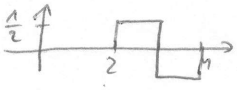
$\underline{s_4} = [-1\ -1\ -1\ -1]$ $\quad \underline{s_5} = [1\ -1\ 1\ -1]$

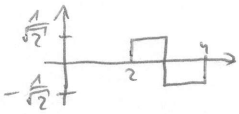
ב.

$\|s_1\| = \sqrt{2}$ $\quad \varphi_1 =$ 

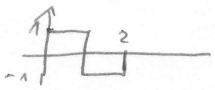
$\psi_2 =$

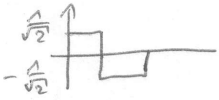
; $\|\psi_2\| = \sqrt{2}$; $\varphi_2 =$ 

$\psi_3 = s_3 - \underbrace{\langle s_3, \varphi_1 \rangle}_{\sqrt{2}} \varphi_1 - \underbrace{\langle s_3, \varphi_2 \rangle}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \varphi_2 =$ 

$\varphi_3 =$ 

$s_4 = -\sqrt{2}\,\varphi_1 + \sqrt{2}\cdot\varphi_2 \Rightarrow$ לא נדרש פלוגיה בסיס חדש

$\psi_4 = s_5 - \cancel{\langle s_5, \varphi_1 \rangle \varphi_1} - \cancel{\langle s_5, \varphi_2 \rangle \varphi_2} - \langle s_5, \varphi_3 \rangle \varphi_3 =$ 

$\varphi_4 =$ 

$\underline{s_1} = [\sqrt{2}\ 0\ 0\ 0]$

$\underline{s_2} = [\sqrt{2}\ \sqrt{2}\ 0\ 0]$

$\underline{s_3} = [\sqrt{2}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0]$

$\underline{s_4} = [-\sqrt{2}\ \sqrt{2}\ 0\ 0]$

$\underline{s_5} = [0\ 0\ \sqrt{2}\ \sqrt{2}]$

במצב החדש:

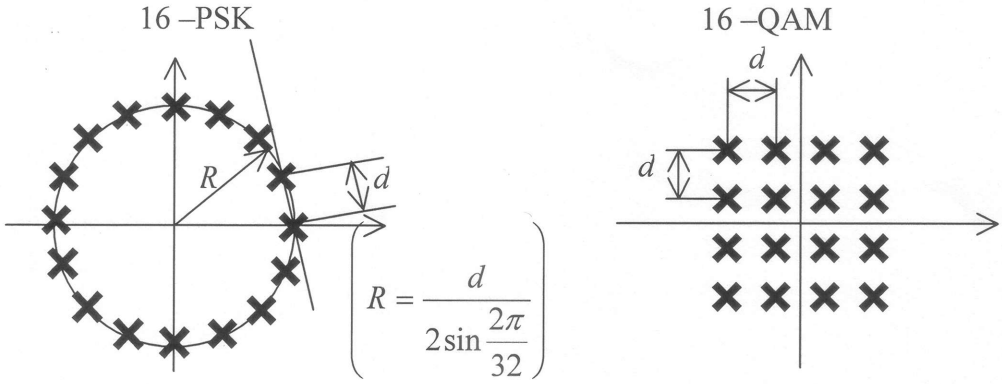
נשמר ב $\|s_i\|^2$

כמו גם $\langle s_i, s_j \rangle$

הם נפגעים בשני המצבים!

3.

א.



ב.

בקונסטלצית 16-PSK המרחק בין שני אותות הוא: $2R\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{16}\right) = d$

ג.

$$\overline{E}_{16-QAM} = \frac{1}{4}d^2\left[\frac{1^2+1^2}{4} + 2\cdot\frac{1^2+3^2}{4} + \frac{3^2+3^2}{4}\right] = 2.5d^2$$

$$\overline{E}_{16-PSK} = R^2 = \frac{d^2}{4\sin^2\frac{2\pi}{32}} > \overline{E}_{16-QAM}$$

4.

א.

$$\rho = \frac{\langle s_0(t), s_1(t)\rangle}{\|s_0(t)\|\cdot\|s_1(t)\|}, \quad \|s_0(t)\|^2 = \frac{2E}{T}\int_0^T \cos^2 2\pi f_c t dt = \frac{E}{T}\int_0^T (1+\cos 4\pi f_c t)dt = E\left(1+\frac{\sin 4\pi f_c T}{4\pi f_c T}\right)$$

.

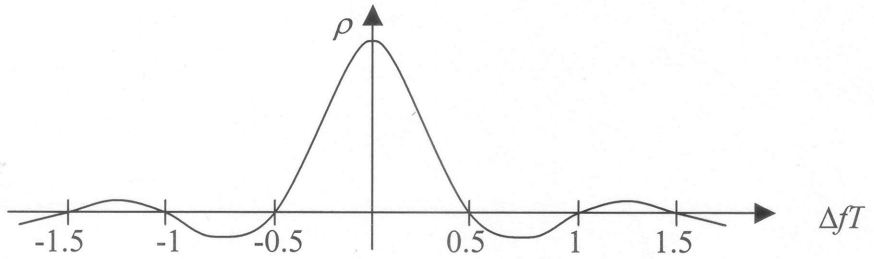
וכיוון $f_c T >> 1$, הרי ש- $\left|\frac{\sin 4\pi f_c T}{4\pi f_c T}\right| << 1$ ו- $\|s_0(t)\|^2 \cong E$. בצורה דומה נקבל גם $\|s_1(t)\|^2 \cong E$.

ש-

$$\langle s_0(t), s_1(t)\rangle = \int_0^T \frac{2E}{T}\cos 2\pi f_c t\cdot\cos 2\pi(f_c+\Delta f)t dt = \frac{E}{T}\int_0^T [\cos 2\pi\Delta f t + \cos 2\pi(2f_c+\Delta f)t]dt$$

$$\cong E\frac{\sin 2\pi\Delta f T}{2\pi\Delta f T}$$

ב.



נגזור את ρ לקבלת המינימום לפי $2\pi\Delta f T \equiv x$ ונקבל: $\rho' = 0 \Rightarrow \cos x\cdot x - \sin x = 0 \Rightarrow x = \tan x$

מפתרון נומרי מקבלים x=4.4934, ולכן $\Delta f T = 0.715$. מהצבה מקבלים $\rho_{\min} = -0.217$ בנוסף

$d_{|\rho_{\min}} = \sqrt{2E(1-\rho_{\min})} = 1.103\sqrt{2E}$.