.1

א. נחשב את הביטויים המופיעים בהגדרת יחס האות לרעש (S/N):

$$g_0(t=T)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\cdot h(T-\tau)d\tau \underset{\uparrow}{=} \int_0^T g(\tau)\cdot h(T-\tau)d\tau$$

$g(t)$ מתאפסת מחוץ ל- $[0,T]$

פונקצית האוטוקורלציה של הרעש במוצא המסנן (ע"ע "אותות אקראיים ורעש")

$$R_{n_0}(\tau)=E\{n_o(t)n_o^*(t-\tau)\}=\underset{\uparrow}{R_n(\tau)}*h^*(-\tau)*h(\tau)=\frac{N_0}{2}h^*(-\tau)*h(\tau)\underset{\uparrow}{=}\frac{N_0}{2}h(-\tau)*h(\tau)$$

$\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ המסנן ממשי

מתקיים (מהגדרת האוטוקורלציה) $E\{n_0^2(t)\}=R_{n_0}(0)$ כעת,

$$R_{n_0}(0)=\left[\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu)h(\mu-\tau)d\mu\right]\Bigg|_{\tau=0}=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}h^2(\mu)d\mu\underset{\uparrow}{=}\frac{N_0}{2}\int_0^{\infty}h^2(\tau)d\tau$$

$h(t)$ סיבתי

ב.

מהתבוננות בתוצאת סעיף א' נסיק כי מסנן $h(t)$ שאינו מתאפס ב-$t>T$ אינו תורם לערך S, אך מגדיל בהכרח את ערך N. לכן נצמצם את החיפוש למסנן $h(t)$ שמתאפס לכל $t>T$. אם נצרף לכך את העובדה שהמסנן סיבתי, הרי שאנו מעונינים רק במסננים עם $h(t)$ שמוגבל לתחום $[0,T]$.

$$N=R_{n_0}(0)=\frac{N_0}{2}\int_0^T h^2(\tau)d\tau\ ,$$

$$S=\left[\int_0^T h(T-\tau)\cdot g(\tau)d\tau\right]^2\underset{\uparrow}{\le}\int_0^T h^2(T-\tau)d\tau\cdot\int_0^T g^2(\tau)d\tau=\int_0^T h^2(\tau)d\tau\cdot\int_0^T g^2(\tau)d\tau$$

אי שוויון קושי-שוורץ

ומכאן נקבל חסם עליון ליחס האות לרעש במוצא המסנן:

$$\frac{S}{N}\le\frac{2}{N_0}\int_0^T g^2(\tau)d\tau \qquad (*)$$

ושיויון מתקבל עבור $h^{opt}(t)=cg(T-t)$ (כיוון ש- $g(t)$ ממשית), כאשר c קבוע ממשי. תגובת התדר של המסנן היא:

$$H^{opt}(f)=cG^*(f)e^{-j2\pi Tf} \qquad \left(G(f)\equiv F\{g(t)\}\right)$$

יחס האות לרעש במוצא מסנן זה הוא הערך המתקבל עם שיוויון בנוסחא (*).

דהיינו, $\frac{2}{N_0}\int_0^T g^2(\tau)d\tau$

ג.

במקרה זה $h(t)$ נתון, וכמו כן יש מגבלה על הספקו של $g(t)$: $\int_0^T g^2(\tau)d\tau \le E_g$. אם נפעיל את אי-שיוויון קושי-שוורץ (כמו בסעיף ב') נקבל שוב $g(t)=ch(T-t),\quad t\le T$:

$$\frac{S}{N}\le\frac{2\int_0^T h^2(\tau)d\tau\cdot\int_0^T g^2(\tau)d\tau}{N_0\int_0^\infty h^2(\tau)d\tau}\le\frac{2E_g}{N_0}\cdot\frac{\int_0^T h^2(\tau)d\tau}{\int_0^\infty h^2(\tau)d\tau}$$

אילוץ ההספק

ערך מקסימלי יושג כאשר $g(t)=ch(T-t)$ עם

$c=\sqrt{\frac{E_g}{\int_0^\infty h^2(\tau)d\tau}}$ (ע"מ לעמוד באילוץ ההספק). עבור בחירה זו מתקבל

$$\frac{S}{N}=\frac{2E_g}{N_0}\cdot\frac{\int_0^T h^2(\tau)d\tau}{\int_0^\infty h^2(\tau)d\tau}.$$

(במקרה זה מושג שיוויון בשני אי-השיוויונים בנוסחא ל-S/N ו-$g(t)$ עומד במגבלת ההספק)

ד.

עבור $t\le T$:

$$g_0^2(t)=\left(\int_0^t g(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau\right)^2=\left[\int_0^t g(\tau)\cdot g(T-(t-\tau))d\tau\right]^2\le\int_0^t g^2(\tau)d\tau\cdot\int_0^t g^2(T-t+\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t g^2(\tau)d\tau\cdot\int_{T-t}^T g^2(\tau')d\tau'\le\left[\int_0^T g^2(\tau)d\tau\right]^2=g_0^2(T)$$

$\tau'\equiv\tau+T-t$ עבור $t\le T$ קושי-שוורץ

וכיוון ש $g_0(2T-t)=g_0(t)$ עבור $T\le t\le 2T$ (ראו שאלה 6 ב') ו- $g_0(t)=0$ עבור $t>2T$ סיימנו את ההוכחה. נשים לב כי גבולות האינטגרל בשוויון הראשון לעיל נובעים מהעובדות הבאות: א. $g(t)=0$ עבור $t<0$, וכן $h(t-\tau)=0$ עבור $t-\tau<0$.

ה.

במקרה זה עדיין נכון לרשום $S=\left(\int_0^T g(\tau)\cdot h(T-\tau)d\tau\right)^2$, כעת, נגדיר $S_{n_o}(f)=F\{R_{n_o}(\tau)\}$

$$N=E\{n_0^2(T)\}=R_{n_0}(0)=F^{-1}[S_{n_0}(f)]\big|_{\tau=0}$$

n_0 סטציונרי, השונות שלו

לא תלויה בזמן

הקשר בין ספקטרום הרעש במוצא המסנן לזה שבכניסתו הוא: $S_{n_0}(f)=|H(f)|^2 S_N(f)$. לכן:

$$N=\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 S_N(f)df \qquad (1)$$

מצד שני, $S=\left[\int_{-\infty}^{\infty}H(f)G(f)e^{j2\pi fT}df\right]^2$.

ניתן לרשום את S כך:

$$S=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(f)}{\sqrt{S_N(f)}}H(f)\sqrt{S_N(f)}e^{j2\pi fT}df\right]^2 \qquad (2)$$

$$\underset{\text{קושי-שוורץ}}{\le}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 S_N(f)df\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|G(f)|^2}{S_N(f)}df$$

שילוב של (1) ו-(2) נותן: $\frac{S}{N}\le\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|G(f)|^2}{S_N(f)}df$

והמקסימום מתקבל עבור $H(f)\sqrt{S_N(f)}=k\cdot\left[\frac{G(f)e^{j2\pi fT}}{\sqrt{S_N(f)}}\right]^*$

כלומר $H(f)=\frac{k\cdot G^*(f)e^{-j2\pi fT}}{S_N(f)}$

($S_N(f)$ הוא ממשי)

ו.

נפרק את $H(f)$ שהתקבל למכפלת שני גורמים:

$$H(f)=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{S_N(f)}}}_{\text{First factor}}\cdot\underbrace{\frac{kG^*(f)}{\sqrt{S_N(f)}}e^{-j2\pi fT}}_{\text{Second factor}}$$

מהפירוק עולה שניתן לפתור את הבעיה בשני שלבים: הלבנת הרעש בשלב ראשון (גורם 1), ומציאת מסנן אופטימלי לאות השידור אחרי שעבר במסנן המלבין בשלב השני (גורם 2). דרך פעולה זו מותרת כיוון שהסינון במסנן המלבין הינה פעולה <u>הפיכה</u> ולכן מסנן אופטימלי שיופיע בהמשך מסוגל לבטלה (וזהו רעיון פשוט אך חשוב במציאת פתרונות אופטימליים).

.2

$$\begin{aligned}R_y(\tau)&=E\{y(t+\tau)y(t)\}=\\&=1\cdot\left[P\{x(t)\ge 0,x(t+\tau)\ge 0\}+P\{x(t)\le 0,x(t+\tau)\le 0\}\right]+\\&\quad+(-1)\cdot\left[P\{x(t)\le 0,x(t+\tau)\ge 0\}+P\{x(t)\ge 0,x(t+\tau)\le 0\}\right]\end{aligned}$$

מטעמי סימטריה ברור כי

$$P\{x(t)\ge 0,x(t+\tau)\ge 0\}=P\{x(t)\le 0,x(t+\tau)\le 0\}$$
$$P\{x(t)\le 0,x(t+\tau)\ge 0\}=\tfrac{1}{2}-P\{x(t)\ge 0,x(t+\tau)\ge 0\}$$

ולכן $R_y(\tau)=4\cdot P\{x(t)\ge 0,x(t+\tau)\ge 0\}-1$.

פונקצית צפיפות ההסתברות המשותפת של שני משתנים אקראיים גאוסיים במשותף U,V בעלי ווריאנס זהה (σ^2), תוחלת 0 ומקדם קורלציה ρ (ע"ע "אותות אקראיים ורעש") היא:

$$f_{UV}(u,v)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{\sigma^2}\right]}$$

במקרה שלנו:

$$\sigma^2=\sigma^2_{x(t)}=\sigma^2_{x(t+\tau)}=R_x(0)\Leftarrow U\equiv x(t),V\equiv x(t+\tau)$$

$$\rho=\frac{E\{x(t)x(t+\tau)\}}{\sqrt{E\{x^2(t)\}E\{x^2(t+\tau)\}}}=\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}$$

ומהצבה בנוסחא הקודמת ל – $R_y(\tau)$ מקבלים

$$R_y(\tau)=4\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{\sigma^2}\right]}dudv-1$$

נבצע החלפת משתנים $v=r\sin\theta,\quad u=r\cos\theta$

היעקוביאן הוא $J(u,v|r,\theta)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$

ומכאן

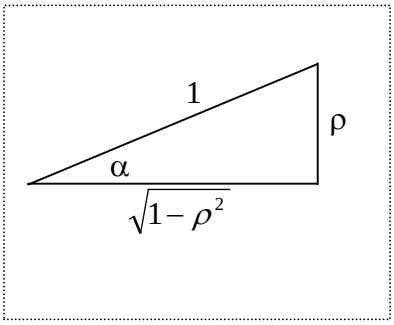
$$R_y(\tau)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty\frac{r}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{r^2(1-\rho\sin 2\theta)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}}drd\theta-1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(1-\rho\sin 2\theta)}e^{-\frac{r^2(1-\rho\sin 2\theta)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}}\Bigg|_{r=0}^{r=\infty}d\theta-1=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(1-\rho\sin 2\theta)}d\theta-1$$

בשלב זה נשתמש בקשר $\int\frac{dx}{p+q\sin ax}=\frac{2}{a\sqrt{p^2-q^2}}\tan^{-1}\frac{q+p\tan\frac{ax}{2}}{\sqrt{p^2-q^2}}$

על מנת לקבל

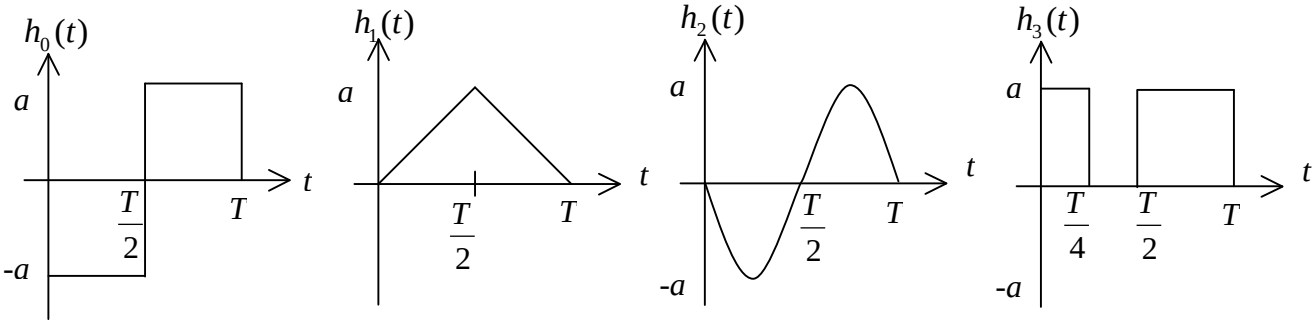
$$R_y(\tau)=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{\tan\theta-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-1=1+\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}-1=\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\rho=\underline{\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}\right]}$$



$$\alpha=\tan^{-1}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}=\sin^{-1}\rho$$

.3

א.



ב.

באופן כללי, $s_{out}(t)=\int_0^t s(\tau)s(\tau+T-t)d\tau$. עבור $t<0$ או $t>2T$ מתקיים $s_{out}(t)=0$.

מהאינטגרל שלעיל מקבלים גם, שעבור $T\le t\le 2T$ מתקיים

$$s_{out}(t)=\int_0^t s(\tau)s\big(\tau-(t-T)\big)d\tau=\int_{t-T}^{T} s(\tau)s(\tau-(t-T))d\tau=\int_0^{2T-t} s(\xi)s(\xi-T+t)d\xi=s_0(2T-t)$$

מתאפס עבור $\tau>T$ (או $\tau<0$)

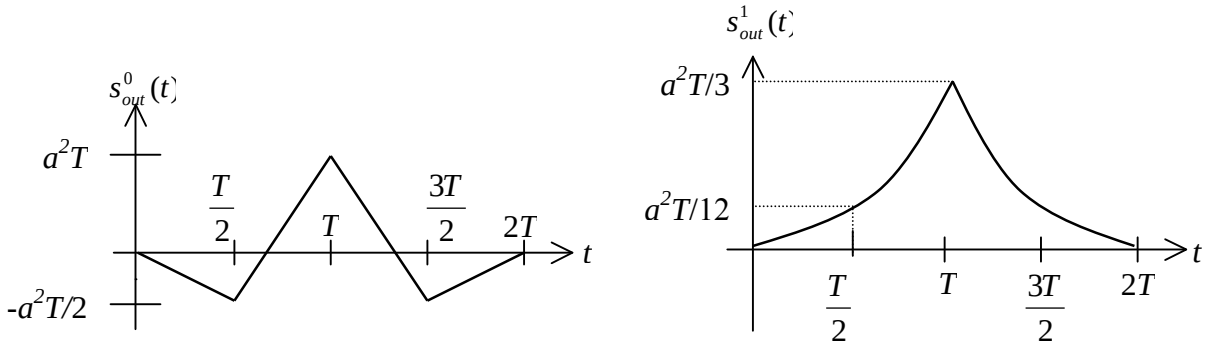
מתאפס עבור $\tau<t-T$ (או $\tau>t$)

החלפת משתנה $\xi\equiv\tau+T-t$ $(\tau=\xi-T+t)$

$s\big(\xi+T-(2T-t)\big)$

מכאן שהמוצא מהמסנן המתואם סימטרי סביב T.

נסמן ב $s_{out}^i(t)$ את מוצא מסנן מתואם $h_i(t)$ כאשר בכניסתו $s_i(t)$.



$s_{out}^{1}(t):$ $$\int_0^t z\frac{2a}{T}\cdot\frac{2a}{T}(t-z)dz = ... = \frac{2}{3}\frac{a^2}{T^2}t^3 \qquad 0\le t\le\frac{T}{2}$$

$$\int_0^{t-\frac{T}{2}} z\frac{2a}{T}\cdot\frac{2a}{T}(T-t+z)dz + \int_{t-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z\frac{2a}{T}\cdot\frac{2a}{T}(t-z)dz + \int_{\frac{T}{2}}^{t}(T-z)\frac{2a}{T}\cdot\frac{2a}{T}(t-z)dz =$$

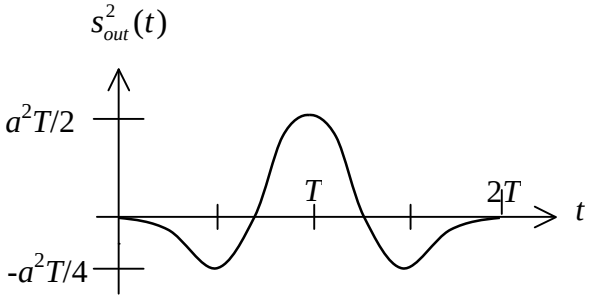
$$= ..... = \frac{2a^2}{3T^2}\left(t^3 - 4\left(t-\tfrac{T}{2}\right)^3\right), \qquad \frac{T}{2}\le t\le T$$

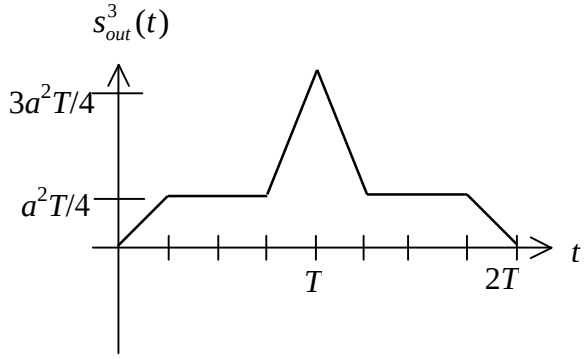
$s_{out}^{2}(t):$ $$\int_0^t a^2\sin\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi(\tau+T-t)}{T}\right)d\tau$$

$0\le t\le T$ $$= \frac{a^2}{2}\int_0^t\left[\cos\left(\frac{2\pi(T-t)}{T}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(2\tau+T-t)}{T}\right)\right]d\tau$$

$$= a^2\frac{t}{2}\cos\left(\frac{2\pi(T-t)}{T}\right) - \frac{a^2}{2}\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{2\pi(t+T)}{T}\right) + \frac{a^2}{2}\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{2\pi(T-t)}{T}\right)$$

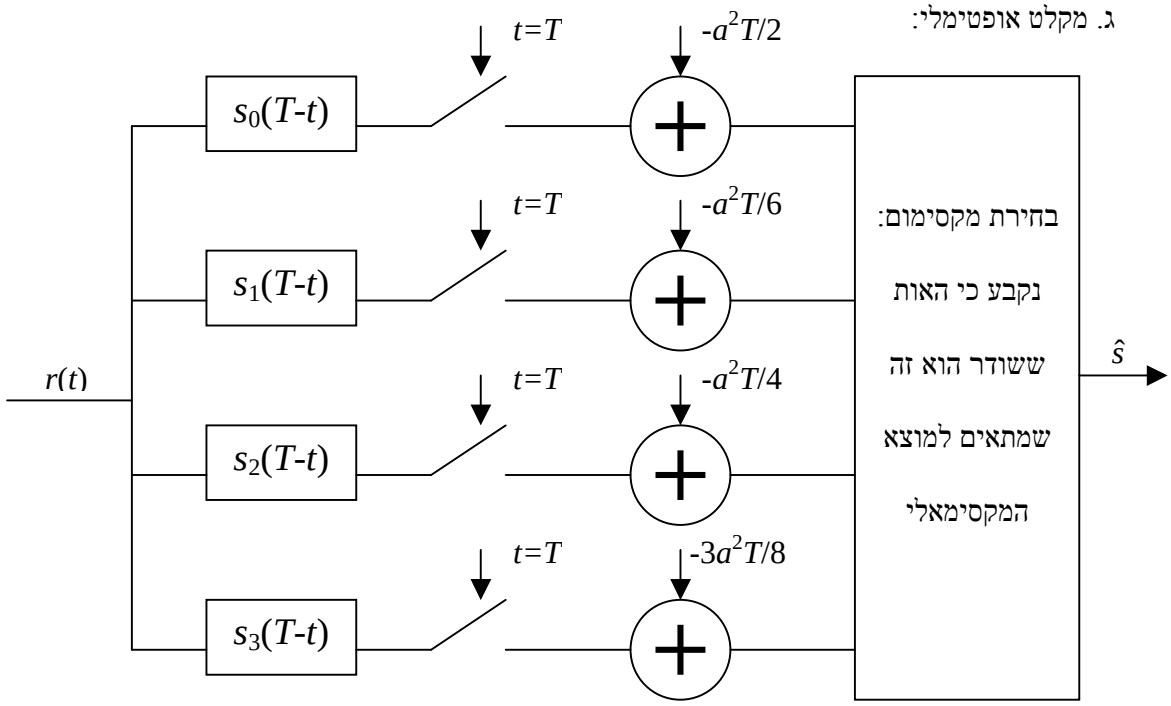
$$= a^2\frac{t}{2}\cos\frac{2\pi t}{T} - \frac{a^2T}{4\pi}\sin\frac{2\pi t}{T}$$





הערך המקסימלי המתקבל ב- $t=T$ הוא אנרגיית האות: $s_0(T) = E_s = \int_0^T s^2(t)dt$

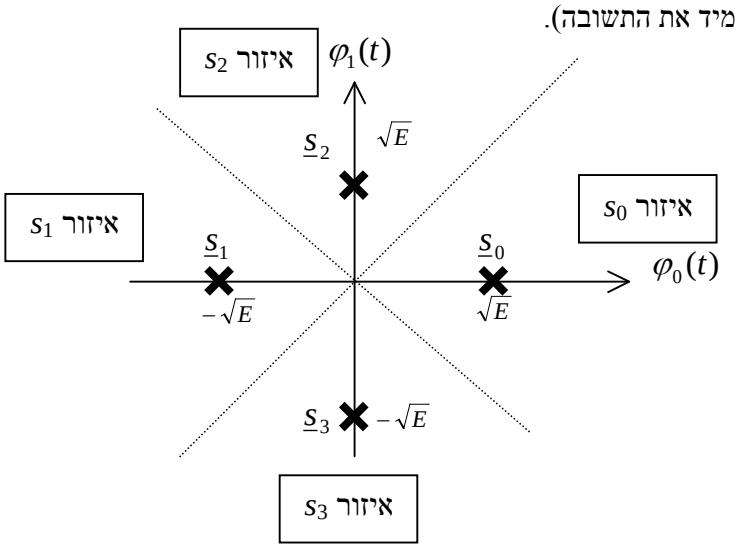
ג. מקלט אופטימלי:



.4

א.

נבחר $\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{E}}s_0(t)$, $\varphi_1(t)=\frac{1}{\sqrt{E}}s_2(t)$. קל לוודא ש- $\langle\varphi_1(t),\varphi_0(t)\rangle=0$ וש- $\{\varphi_1(t),\varphi_0(t)\}$ פורש את מרחב האותות. (זו דוגמא בה "שיטת הניחוש" עדיפה עלGram-Schmidt למי שרואה מיד את התשובה).



ב.ג.

עבור אותות שווי הסתברות ושווי אנרגיה, כלל ה- MAP הופך להיות

$$\hat{s}=\arg\max_{s_i(t)}\{\langle r(t),s_i(t)\rangle\}.$$

כיוון ש- $s_1(t)=-s_0(t)$, הרי ש- $\langle r(t),s_1(t)\rangle=-\langle r(t),s_0(t)\rangle$

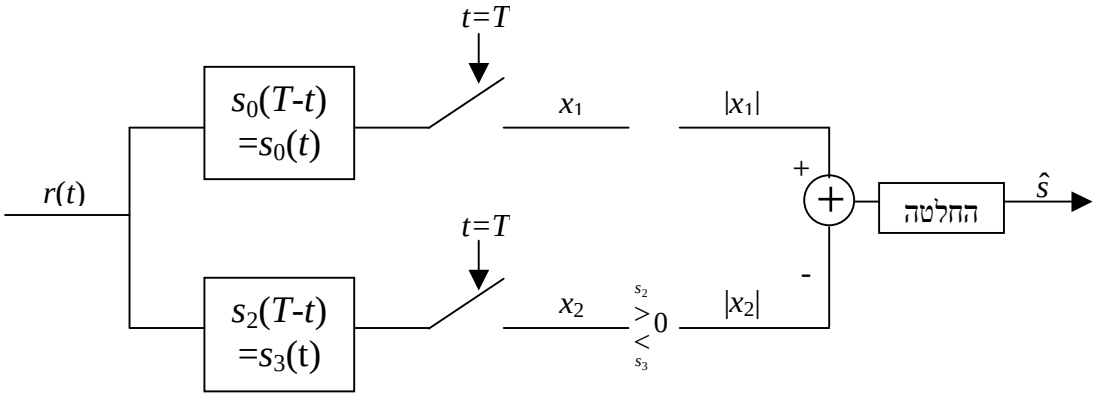
מכאן ש $(\langle r(t),s_1(t)\rangle)>(\langle r(t),s_0(t)\rangle)$ אם ורק אם $(\langle r(t),s_1(t)\rangle)>0$

יותר מכך, $\max_{s_i(t)\in\{s_0(t),s_1(t)\}}\{\langle r(t),s_i(t)\rangle\}=|\langle r(t),s_1(t)\rangle|$

מהפעלת שיקולים דומים על זוג האותות $\{s_2(t),s_3(t)\}$ מקבלים את המקלט המפושט הבא (זכרו שהמכפלה הפנימית בין $r(t)$ ל - $s_i(t)$ היא הערך שמקבל מוצא מסנן מתואם ל- $s_i(t)$ ברגע T, כשבמבואו $r(t)$).

x_1= מוצא מסנן מתואם ראשון בזמן T.

x_2 = מוצא מסנן מתואם שני בזמן T.



פעולת בלוק ההחלטה:

$$\hat{s}=\begin{cases} s_0 & x_1>|x_2| \\ s_1 & -x_1>|x_2| \\ s_2 & x_2>|x_1| \\ s_3 & -x_2>|x_1| \end{cases} \quad \begin{matrix} (|x_1|>|x_2|) \\ \\ (|x_1|<|x_2|) \\ \\ \end{matrix}$$

ד.

איזורי ההחלטה מופיעים באיור שבסעיף א'. לגבי הסתברות השגיאה:

$$P(C)=(1-Q)^2 \quad , \quad P(\varepsilon)=1-(1-Q)^2=2Q-Q^2$$

כאשר

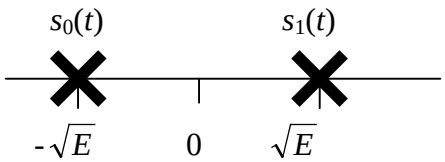
$$Q\equiv Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)=Q\left(\frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{2N_0}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

(כרגיל, יש לזכור שסיבוב האותות יחד לא משנה את הביצועים).

.5

נמצא את הסף במקרה זה

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-(r-\sqrt{E})^2/N_0}}{\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-(r+\sqrt{E})^2/N_0}} \underset{s_0}{\overset{s_1}{\gtrless}} \frac{P(s_0)}{P(s_1)}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{4r\sqrt{E}}{N_0}\underset{s_0}{\overset{s_1}{\gtrless}}-\ln 3$$



והסף הוא $Th=\frac{-N_0\ln 3}{4\sqrt{E}}$ (הגיוני שהסף התקרב לאות בעל ההסתברות הנמוכה).

$$P(\varepsilon)=P(s_1)\cdot P\left(r<\frac{-N_0\ln 3}{4\sqrt{E}}\middle|s_1\right)+P(s_0)\cdot P\left(r>\frac{-N_0\ln 3}{4\sqrt{E}}\middle|s_0\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left[1-Q\left(\frac{\frac{-N_0\ln 3}{4\sqrt{E}}-\sqrt{E}}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]+\frac{1}{4}Q\left(\frac{\frac{-N_0\ln 3}{4\sqrt{E}}+\sqrt{E}}{\sqrt{N_0/2}}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}Q\left(\frac{N_0\ln 3+4E}{2\sqrt{2N_0E}}\right)+\frac{1}{4}Q\left(\frac{4E-N_0\ln 3}{2\sqrt{2N_0E}}\right)=$$

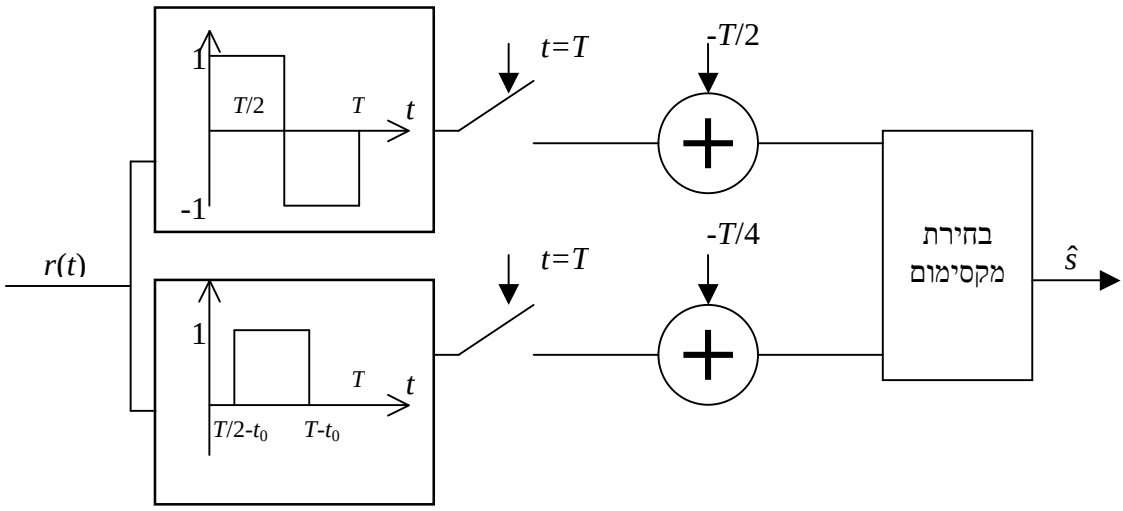
$$=\frac{3}{4}Q\left(\frac{\ln 3+4x}{2\sqrt{2x}}\right)+\frac{1}{4}Q\left(\frac{4x-\ln 3}{2\sqrt{2x}}\right)= \qquad x\equiv\frac{E}{N_0}=\frac{E_b}{N_0}=9.6\text{dB}=9.12$$

$$=\frac{3}{4}\cdot 5.4257\cdot 10^{-6}+\frac{1}{4}\cdot 1.7197\cdot 10^{-5}=8.37\cdot 10^{-6}$$

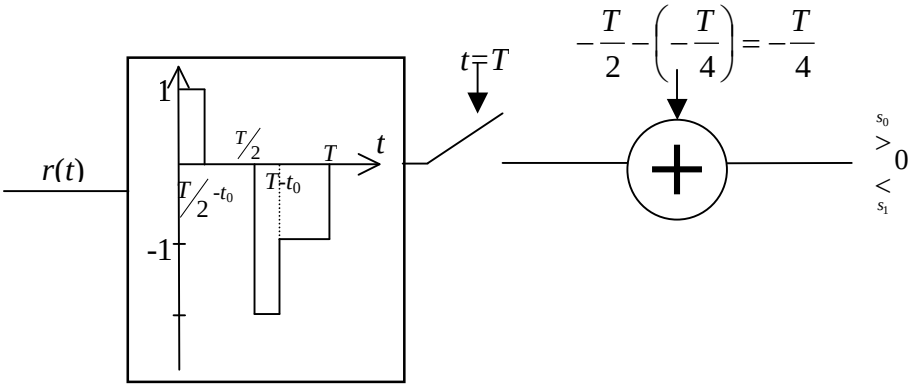
.6

א.אנרגיית $s_0(t)$ היא $E_0=T$, ואנרגיית $s_1(t)$ היא $E_1=T/2$.

להלן סכימת מקלט אופטימלי המבוסס על שני מסננים מתואמים:



או בסכימה מפושטת



ב.

המרחק בין האותות הוא

$$d^2=\int_0^T\left[s_0(t)-s_1(t)\right]^2dt=\int_0^{t_0}1^2\,dt+\int_{t_0}^{T/2}2^2\,dt+\int_{T/2+t_0}^{T}1^2\,dt=$$

$$=t_0+4\left(T/2-t_0\right)+T-\left(T/2+t_0\right)=-4t_0+2.5T$$

כיוון ש $P(\varepsilon)=Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$, הרי שהסתברות השגיאה מינימלית כאשר d מקסימלי $\Leftarrow$ נבחר $t_0=0$

ואז

$$P(\varepsilon)=Q\left(\sqrt{\frac{2.5T}{2N_0}}\right)$$

ג.

המרחק בין האותות מינימלי עבור $t_0=T/2$. במקרה זה $d^2=T/2$, ואז

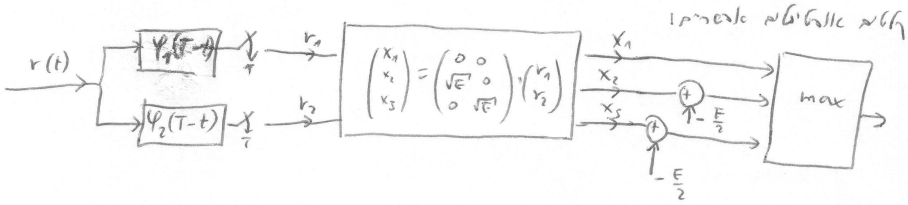
$$P(\varepsilon)=Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{N_0}}\right)$$

7. נסמן $\varphi_1(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(\omega_0 t)$; $\varphi_2(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\omega_0 t)$

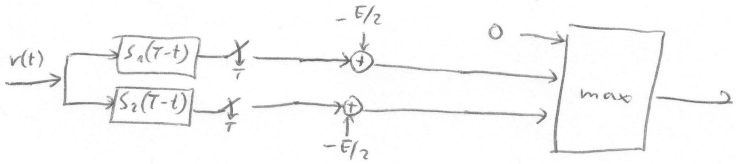
כאשר $\omega_0=\frac{2\pi k}{T}$. נשים לב ש- $\{\varphi_1,\varphi_2\}$ בסיס אורתונורמלי

ומכאן האותות בדיסקרט הינו: $\underline{s_0}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\underline{s_1}=\begin{pmatrix}\sqrt{E}\\0\end{pmatrix}$ $\underline{s_2}=\begin{pmatrix}0\\\sqrt{E}\end{pmatrix}$

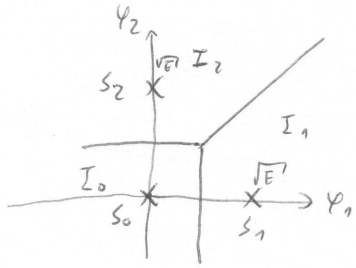
א. מקלט אופטימלי אפשרי:



ב.



ג. מרחק האותות:



I_0, I_1, I_2 אזורי הקלטה עבור האותות s_0, s_1, s_2 בהתאמה

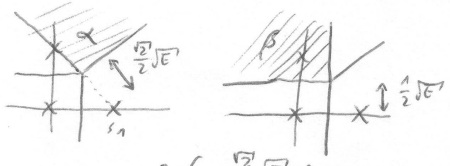
$$P(\varepsilon)=P(s_0)\cdot P(\varepsilon|s_0)+2\cdot P(s_1)\cdot P(\varepsilon|s_1)$$

הסתברות הטעות בין s_1, s_2 :

$$P(\varepsilon|s_0)=1-P(C|s_0)=1-\left(1-Q\left(\frac{\sqrt{E}/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right)^2=1-\left(1-Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)\right)^2$$

$$P(\varepsilon|s_1)=P\left(\begin{matrix}\text{אזור}\\\alpha\end{matrix}\middle|s_1\right)+\frac{1}{2}P\left(\begin{matrix}\text{אזור}\\\beta\end{matrix}\middle|s_1\right)$$

כאן אפשר לראות שיש שני אזורים אם אפשר לפתרון בא בלינר



$$P(\alpha|s_1)=Q\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E}}{\sqrt{N_0/2}}\right)\cdot Q(0)=\frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

$$P(\beta|s_1)=Q\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{E}}{\sqrt{N_0/2}}\right)^2=Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}Q_1&\triangleq Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)\\Q_2&\triangleq Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)\end{aligned}}$$

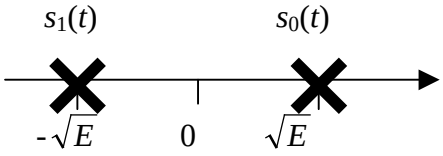
$$P(\varepsilon)=\frac{1}{3}\left[2Q_1-Q_1^2\right]+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}Q_2+\frac{1}{2}Q_1^2\right]=\frac{2}{3}Q_1+\frac{1}{3}Q_2$$

8.

א.

מיידי לברר ששני אותות $s_0(t)$, ו- $s_1(t)$ אנטיפודליים אמ"מ $s_1(t) = -s_0(t)$.

במקרה כזה ברור שהמרחב שפורש את שני האותות הוא חד-מימדי, ובסיס אורתונורמלי למרחב זה יכול להיות (למשל) $\varphi_0(t) = \frac{s_0(t)}{\|s_0(t)\|} = \frac{s_0(t)}{\sqrt{E}}$. לפי בסיס זה, נקבל את התמונה הבאה



כלל ההחלטה

$$P(s_0)e^{-(r-d/2)^2/N_0} \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} P(s_1)e^{-(r+d/2)^2/N_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2rd}{N_0} \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} \ln\frac{P(s_1)}{P(s_0)}, \qquad r \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} \frac{N_0}{2d}\ln\frac{P(s_1)}{P(s_0)} \equiv th$$

$$P(\varepsilon) = P(s_0)\cdot\int_{-\infty}^{th}\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-(r-d/2)^2/N_0}dr + P(s_1)\cdot\int_{th}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-(r+d/2)^2/N_0}dr =$$

$$= P(s_0)\cdot\left[1-Q\left(\frac{th-d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right] + P(s_1)\cdot Q\left(\frac{th+d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) =$$

$$= P_0 Q\left(\frac{\frac{d}{2}-\frac{N_0}{2d}\ln\frac{P_1}{P_0}}{\sqrt{N_0/2}}\right) + P_1 Q\left(\frac{\frac{d}{2}+\frac{N_0}{2d}\ln\frac{P_1}{P_0}}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

ב.

עבור פילוג א-פריורי זהה מקבלים $th=0$ ולכן

$$(*) \qquad P(\varepsilon) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

אנרגיית הפולס המשודר היא $E = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4}$, ולכן במוצא המסנן המתואם

$$SNR = \frac{2E}{N_0} = \frac{d^2}{2N_0}$$

ומקבלים

$$P(\varepsilon) = Q(\sqrt{SNR}\big|_{MATCHED_FILTER})$$

יש לשים לב שנוסחה (*) נכונה גם לאותות שאינם אנטיפודליים כיוון שהסתברות השגיאה תלויה אך ורק במרחק בין האותות ובצפיפות הספקטרלית של הרעש. מובן שמעשית קונסטלציה בינארית שאינה אנטיפודלית אינה שימושית, כיוון שמבוזבזת בה אנרגיה שאינה תורמת להגדלת המרחק בין האותות. קונסטלציה אנטיפודלית היא היעילה ביותר (במובן הסתברות שגיאה ביחס להספק שידור) מבין כל הקונסטלציות האפשריות לשני אותות.

9. א. $d^2 = E_0 + E_1 - 2\rho\sqrt{E_0E_1} \Rightarrow d = \sqrt{E_0 + E_1 - 2\rho\sqrt{E_0E_1}}$

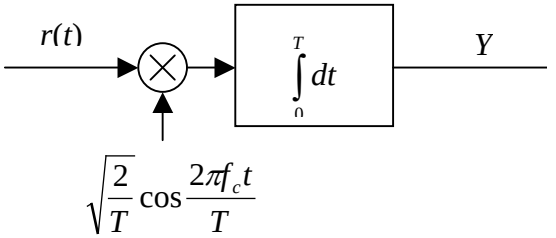
ב. $$P(\varepsilon) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_0 + E_1 - 2\rho\sqrt{E_0E_1}}{2N_0}}\right)$$

10.ב. מוצא האינטגרטור, Y , הוא מ"א גאוסי עם תוחלת $+\sqrt{E}$ או $-\sqrt{E}$ ושונות $\frac{N_0}{2}$. לכן כלל ההחלטה יהיה

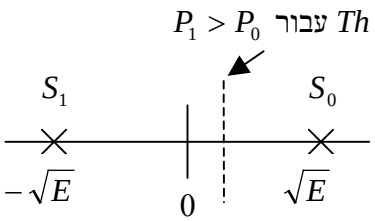
$$\frac{f(Y \mid S_1)}{f(Y \mid S_0)} \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad -(Y+\sqrt{E})^2 \big/ N_0 + (Y-\sqrt{E})^2 \big/ N_0 \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) \Leftrightarrow Y \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} \frac{N_0 \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right)}{4\sqrt{E}}$$

על כן ייראה מקלט אופטימלי כך:



$$Y \underset{S_1}{\overset{S_0}{\gtrless}} \frac{N_0}{4\sqrt{E}} \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = Th$$



$$P(\varepsilon) = P(S_0)\cdot P(Y < Th \mid S_0) + P(S_1)\cdot P(Y > Th \mid S_1)$$
$$= P_0 \cdot Q\left(\frac{\sqrt{E} - Th}{\sqrt{N_0/2}}\right) + P_1 \cdot Q\left(\frac{\sqrt{E} + Th}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

נשים לב, שכאשר $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$ המקלט האופטימלי הוא זה הנתון בסעיף א' (הסף Th הוא 0)

וכן שמתקבלת (כצפוי) הסתברות השגיאה של אפנון BPSK - $Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$.

ג. נסמן גם כאן את מוצא האינטגרטור ב-Y (Y הוא כמובן גאוסי).

$$\eta_0 \equiv E\{Y \mid S_0\} = \frac{2}{T}\sqrt{E}\int_o^T \cos(2\pi f_c t)\cdot\cos(2\pi f_c t + \Delta\theta)dt \cong \frac{\cancel{2}}{\cancel{T}}\sqrt{E}\cdot \cancel{T}\frac{1}{\cancel{2}}\cos(\Delta\theta)$$
$$= \sqrt{E}\cos(\Delta\theta)$$

בצורה דומה: $\eta_1 \equiv E\{Y \mid S_1\} = -\sqrt{E}\cos(\Delta\theta)$

שונות Y נותרה ללא שינוי, $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$. מהעובדה שהאותות שווי הסתברות א-פריורית, קריטריון ה-MAP הוא:

$$\frac{f(Y \mid S_1)}{f(Y \mid S_0)} \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} 1 \Leftrightarrow e^{-\left(Y+\sqrt{E}\cos(\Delta\theta)\right)^2 / N_0 + \left(Y-\sqrt{E}\cos(\Delta\theta)\right)^2 / N_0} \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{Y \underset{S_2}{\overset{S_0}{\gtrless}} 0 \quad if \quad \cos(\Delta\theta) > 0}_{**} \quad ; \quad Y \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} 0 \quad if \quad \cos(\Delta\theta) < 0$$

אבל למקלט לא ידוע סימנו של $\cos(\Delta\theta)$!!! לכל היותר, המקלט יכול לנחש ש- $\cos(\Delta\theta) > 0$ ולעבוד לפי בכלל שמסומן ב-(**) למעלה. אם המקלט במקרה צדק בניחושו, אז הסתברות השגיאה יכולה להיות טובה (בתלות ביחס האות לרעש): כיוון שהסף ב-0 ו- $\eta_0 = -\eta_1$, מקבלים כי:

$$P(\varepsilon) = Q\left(\frac{\eta_0}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\cos(\Delta\theta)\right).$$

אם המקלט טעה בניחושו, הנוסחה הנ"ל ל- $P(\varepsilon)$ עדיין נכונה, אך $\cos(\Delta\theta) < 0$, ולכן נקבל הסתברות שגיאה הגדולה מ- $\frac{1}{2}$ (Q של ארגומנט שלילי גדול מ- $\frac{1}{2}$) !!!