תוחלת - Expectation ("צפי"):
התוחלת היא הערך שהכי סביר לקבל כאשר מגרילים מ.א X.
תכונות:

$$E\{const\} = const$$
$$E_{X/X}\{X/X\} = X$$
$$Y = g(X) \Rightarrow E\{a\cdot X + b\cdot Y\} = a\cdot E\{X\} + b\cdot E\{Y\}$$

שונות - Variance:

$$Var(X) \triangleq \sigma_X^2 \triangleq E\left\{(X - E(X))^2\right\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^2 \cdot f_X(x)\,dx = E\{X^2\} - E\{X\}^2$$
$$\mathrm{var}(X) \geq 0$$
$$\mathrm{var}(C) = 0$$
$$\mathrm{var}(aX + b) = a^2\mathrm{var}(X)$$
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2COV(X,Y)$$
$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

אם X,Y בלתי תלויים סטטיסטית אזי:

- $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$
  $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$
- $E(Y|X) = E(Y)$
  $E(X|Y) = E(X)$
- $g(X), h(Y)$ בת"ס.
- $E\{g(X)h(Y)\} = E\{g(X)\}E\{h(Y)\}$
- X,Y חס"ק $COV(X,Y) = 0$

מ.א אורתוגוניים:
מ.א אורתוגוניים **אמ"מ**:

$$E\{X\cdot Y\} = 0$$

פונקציית צפיפות פילוג מותנית (חוק בייס):

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

אם X מתפלג בצורה כלשהי, Y מא מתפלג בצורה כלשהי ו B=X+Y. אז: f(B)=f(x)*f(Y)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\Pr(A) = \sum_n \Pr(A \mid B_n)\Pr(B_n)$$

כללי אצבע:
(1) בת"ס >>> חוסר קורלציה.
(2) חוסר קורצליה + $\eta_X = 0 \;\; or \;\; \eta_Y = 0$ >>> אורתוגוניות.
(3) חוסר קורלציה + גאוסיים במשותף >>> בת"ס.

אי תלות סטטיסטית (בת"ס):
סימון ל- 2 איברים שהם בת"ס:

$$A \coprod B$$

2 מ.א נקראים בת"ס (בלתי תלויים סטטיסטית) **אמ"מ**:

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}\cdot P\{Y \leq y\}$$

2 מ.א נקראים בת"ס (בלתי תלויים סטטיסטית) **אמ"מ**:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$
$$f_X(x) = f_{X/Y}(x/y)$$

פילוג גאוסי (נורמלי)

$$X \sim N(\eta, \sigma^2)\;;\;\Omega \in \mathbb{R}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

פילוג אקספוננציאלי

$$X \sim \exp(\lambda):$$

$$f_X(x) = \begin{cases}\lambda\cdot\exp(-\lambda\cdot x) & x \geq 0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$\eta_X = \frac{1}{\lambda}\;;\;\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

פילוג יוניפורמי

$$X \sim U[a,b]$$

$$F_X(x) = \begin{cases}0 & x \leq a\\ x & a < x < b\\ 1 & b \leq x\end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases}0 & x \leq a\\ 1/(b-a) & a < x < b\\ 0 & b \leq x\end{cases}$$

$$E\{X\} = \frac{|b| - |a|}{2}$$

$$VAR\{X\} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

פילוג פואסוני

$$X \sim P(\lambda)\;;\;\Omega \in \{0,1,2,3,\ldots\}$$
$$n = 0,1,2,3,\ldots\;;\;\lambda > 0$$

$$P\{X = n\} = \exp(-\lambda)\cdot\frac{\lambda^n}{n!}$$

תוחלת:

$$\eta_X = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot P(X = n) = \lambda$$

שונות:

$$\sigma_X^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n-\lambda)^2\cdot P(X = n) = \lambda$$

מ.א גאוסיים במשותף / וקטור גאוסי (ו.ג)

הגדרת מ.א גאוסים במשותף:

(1) 2 מ.א. יהיו גאוסיים במשותף אמ"מ:

$$f_{X,Y}(x,y) =$$
$$\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(X-\eta_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho(X-\eta_X)(Y-\eta_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(Y-\eta_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right)$$

$$\rho = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}\;;\;-1 \leq \rho \leq 1$$

אם X ו.ג אז קיימת טרנספורמציה לינארית T (מטריצה מלכסנת של Cx) כך שאברי Y יהיו בת"ס:

$$\underline{Y} = \underline{T}\cdot\underline{X}$$
$$\underline{C}_Y = \underline{T}\cdot\underline{C}_X\cdot\underline{T}^T = \underline{T}\cdot\underline{C}_X\cdot\underline{T}^{-1}$$

פונקציה אופיינית של ו.ג:
וקטור גאוסי מוגדר ע"י וקטור התוחלת ומטריצת הקוואריאנס:

$$\underline{X} \sim N(\underline{\eta}, \underline{C}_X)$$
$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\cdot\underline{C}_X)}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\eta}_X)^T\underline{C}_X^{-1}(\underline{x}-\underline{\eta}_X)\right)$$
$$\phi_{\underline{X}}(\underline{\omega}) = \exp\left(j(\underline{\omega}^T\cdot\underline{\eta}_X) - \frac{1}{2}\underline{\omega}^T\cdot\underline{C}_X\cdot\underline{\omega}\right)$$

עבור Cx אלכסונית:

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\sigma_{X_i}^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_i - \eta_{X_i})^2}{\sigma_{X_i}^2}\right)\right)$$

פונקציית צפיפות מותנית של ו.ג:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix}\underline{X}\\ \underline{Y}\end{bmatrix}$$
$$f_{\underline{Y}/\underline{X}}(\underline{y}/\underline{x}) = \frac{f_{\underline{Z}}(\underline{z})}{f_{\underline{Y}}(\underline{y})}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\cdot\underline{C}_{Y/X})}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{y}-\underline{\eta}_{Y/X})^T\underline{C}_{Y/X}^{-1}(\underline{y}-\underline{\eta}_{Y/X})\right)$$

תהליכים אקראיים

פונקציה אופיינית של ו.ג:
וקטור גאוסי מוגדר ע"י וקטור התוחלת ומטריצת הקוואריאנס:

$$\underline{X} \sim N(\underline{\eta}, \underline{C}_X)$$
$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\cdot\underline{C}_X)}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\eta}_X)^T\underline{C}_X^{-1}(\underline{x}-\underline{\eta}_X)\right)$$

פונקציית/מטריצת הקרוסקורלציה:

$$R_{X(t),Y(t)}(t_1,t_2) \triangleq E\{X(t_1)Y^*(t_2)\} =$$
$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f_{X(t),Y(t)}(x,y;t_1,t_2)\,x\cdot y^*\,dxdy$$

פונקציית/מטריצת אוטוקוריאנס:

$$C_{X(t)}(t_1,t_2) = E\{(X(t_1)-\eta_X(t_1))\cdot(X(t_2)-\eta_X(t_2))\} =$$
$$= R_{X(t)}(t_1,t_2) - \eta_X(t_1)\cdot\eta_X(t_2)$$

הערה:

$$C_X(t,t) = Var\{X(t)\} = R_X(t,t) - \eta_{X(t)}^2$$

פונקציית.מטריצת קרוסקוריאנס:

$$C_{X(t)Y(t)}(t_1,t_2) = E\{(X(t_1)-\eta_X(t_1))\cdot(Y(t_2)-\eta_Y(t_2))\} =$$
$$= R_{X(t)Y(t)}(t_1,t_2) - \eta_X(t_1)\cdot\eta_Y(t_2)$$

סטציונאריות (קביעות בזמן) במובן הרחב wss:
(Wide Sense Stationary)
אם הסטטיסטיקה מסדר שני של ת.א קבועה בזמן אז התהליך יקרא wss:
תנאים הכרחיים ומספיקים ל WSS:

$$(1)\;\;\eta(t) = \eta = const$$
$$(2)\;\;R(t_1,t_2) = R(t_2 - t_1) = R(\tau)\;\;or\;\;const$$

תכונות של מטריצת האוטוקורלציה:
- PD (חיובית מוגדרת):

$$\tau \triangleq t_1 - t_2$$
$$R_X(\tau) = R(-\tau)\;;\;R_X^2(\tau) \leq R_X^2(0)\;;\;R_X(\tau) \leq R_X(0)$$
$$R_X(0) = E\{X^2\} \geq 0$$

"רעש לבן":

$$R_X(\tau) = k\delta(\tau)$$
$$R_X(0) = k\delta(0) = \infty$$
$$S_X(\omega) = k$$

Q Function

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

The $Q(\cdot)$ function is monotonically decreasing.

$$Q(\alpha) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$Q(-\infty) = 1 \qquad Q(0) = \frac{1}{2} \qquad Q(\infty) = 0$$

$$Q(-x) = 1 - Q(x)$$

ההסתברות ש- X גדול מ- x:

$$X \sim (\eta, \sigma^2) \Rightarrow P_r\{X \rhd x\} = Q\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)$$

$$P_r\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2}(\cdot) = \int_{x_1}^{\infty}(\cdot) - \int_{x_2}^{\infty}(\cdot) = Q(x_1) - Q(x_2)$$

עבור x>=0 נקבל:

$$Q(x) \leq \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

אפשרות II להלבנת רעש:

1. $R_i = S_i + N'$ – רעש צבעוני. N'
   נמצא מטריצת מעבר $R'_i = AR_i$
   כך ש- $R'_i = S'_i + N$ – רעש לבן. N
2. הכפלת כל האותות במטריצת המעבר $S'_i = AS_i$

Guy Cohen Rulezzz