הגדרות:

הנחה:
$s_i(t)$, $\varphi(t)$ - אותות ממשיים דטרמיניסטיים המוגבלים בזמן לתחום 0 עד T.

מכפלה פנימית (Inner Product):

$$\langle s_i(t),\varphi(t)\rangle \triangleq \int_0^T s_i(t)\cdot\varphi(t)\,dt$$

נורמה - Norm (אנרגיית הסימבול Es):

$$\|s_i(t)\|^2 \triangleq \langle s_i(t),s_i(t)\rangle = E_{s_i}$$

הערות:
- זוהי האנרגיה של si(t).

אנרגית הסימבול:

אנרגיית סימבול היא הגודל של הוקטור (נקודת הקונסטלציה) במרחב האותות, או הנורמה של האות בזמן:

$$E_{s_i} = \|s_i(t)\|^2 = \|\underline{s_i}\|^2 = \underline{s_i}\cdot\underline{s_i}^T$$

אנרגיה ממוצעת לסימבול:
היא התוחלת של נקודות הקונסטלציה במרחב האותות:

$$E_s \triangleq E_{avg} = E\left[\|\underline{s_i}\|^2\right] \triangleq \sum_{i=0}^{M-1}\left(\underline{s_i}\cdot\underline{s_i}^T\right)\cdot P_r(\underline{s_i})$$

אנרגיה ממוצעת לביט (סיבית) - Eb:
k - מספר הסיביות בסימבול.

$$E_s = k\cdot E_b$$

שיקולי הספק מינימלי (אנרגית סימבול ממוצעת מינ'):
המטרה: למצוא וקטור הזזה $\underline{a}$ כך שהספק השידור של המערכת המוזזת תהיה בעל אנרגיית סימבול ממוצעת מינימלית.

$$\tilde{E}_s = \sum_{i=0}^{M-1} P(\underline{s_i})\cdot\|\underline{s_i}-\underline{a}\|^2$$

$$\underline{a} \triangleq \sum_{j=0}^{M-1} p(s_j)*\underline{s_j} \qquad a_k = \sum_{j=0}^{M-1} p(s_j)*s_{j,k}$$

הסתברות א-פריורית P(mi):
ההסתברות ששודר האות mi.

הסתברות א-פוסטריורית P(mi/η):
בהנתן שהתקבל η מה ההסתברות ששודר האות mi.

הסתברות להחלטה נכונה P(c):
- שודר אות m.
- התקבל אות r.
- ההסתברות להחלטה נכונה, היא סכימה על ההסתברויות שהתקבל η וגם האות המשוערך ($\hat{m}$) הוא האות ששודר באמת (mi).

$$P(c) = \sum_{j=0}^{J-1} P(c,r_j) = \sum_{j=0}^{J-1} P(c/r_j)P(r_j) =$$
$$= \sum_{j=0}^{J-1} P(r_j)\max_{m_i}\{P(m_i/r_j)\} =$$
$$= \sum_{j=0}^{J-1} P_{rob}(\hat{m}=m_i, r=r_j) = \sum_{j=0}^{J-1} P(r_j)P(\hat{m}/r_j)$$

הערות:
- $\hat{m}$ הוא שונה עבור כל η.

כלל החלטה Max A-Posteriori - MAP:

$$\hat{m} = \arg\max_{m_i}\{P(m_i/r_j)\} = \arg\max_{m_i}\{P(m_i)\cdot P(r_j/m_i)\}$$

- רוצים להביא את P(c) למקסימום.
- האות המשוערך ($\hat{m}$) יהיה ה- mi שיביא למקסימום את ההסתברות P(mi/η).

כלל MAP (כללי):

$$\forall i\neq k:$$
$$\underbrace{\frac{P(r_j/m_k)}{P(r_j/m_i)}}_{Likelihood\ Ratio} > \frac{P(m_i)}{P(m_k)} \Rightarrow \hat{m}=m_k$$

הסבר
מחשבים את כל ה- $P(m_k)\cdot P(m_k/r_j)$ ובודקים מי הכי גדול. ע"פ הביטוי הגדול ביותר מחליטים מי האות ששודר.

MAP עבור מערכת בינארית (בערוץ בדיד):

$$\frac{P(r_j/m_0)}{P(r_j/m_1)} \underset{m_1}{\overset{m_0}{\gtrless}} \underbrace{\frac{P(m_1)}{P(m_0)}}_{th}$$

(ערך הסף = th).

$$P_r^{MAP}(e) = Q\left(\frac{d/2}{\sigma_N}\right)$$

הסתברות שגיאה, 2 אותות בערוץ AWGN:

$$P_e = prob\left(z > \frac{\|s_1-s_2\|^2}{2}\right) = Q\left(\frac{\|s_1-s_2\|^2}{2\sigma}\right)$$

כללי החלטה MAP:

$$Likelihood\ Ratio: \frac{f(s|H_0)}{f(s|H_1)}$$

ערוץ בדיד	$\arg max_i\, p(m_i)p(r\|m_i)$
ערוץ רציף	$\arg max_i\, p(m_i)f(r\|m_i)$
ערוץ עם רעש מתחבר בת"ס	$\arg max_i\, p(s_i)f_N(r-s_i)$
ערוץ עם רעש גאוסי iid בת"ס (AWGN)	$\arg min_i\, \|r-s_i\|^2 - 2\sigma^2\ln(p(s_i))$
או:	$\arg max_i\, \langle r,s_i\rangle + \sigma^2\ln(p(s_i)) - \frac{1}{2}\|s_i\|^2$

קריטריון MAP עבור ערוץ AWGN, עם תוחלת אפס:
(פירוט על AWGN ניתן למצוא תחת סעיף "שונות" בסוף הדף)

הנחות
- רעש גאוסי לבן בעל תוחלת אפס (אבריו ח"ק).
- הרעש בת"ס באות המשודר.

נקבל שקריטריון MAP הופך לכלל MED:
(Minimum Euclidean Distance)

$$\hat{m}(\underline{r}) = \arg\max_{\underline{s_i}}\{P(\underline{s_i})\cdot f_N(\underline{r}-\underline{s_i})\}$$
$$= \arg\min_{\underline{s_i}}\left\{\|\underline{r}-\underline{s_i}\|^2 - 2\sigma_n^2\ln(P(\underline{s_i}))\right\}$$

הסתברות להחלטה נכונה עבור ערוץ רעש מתחבר:

$$P(c) = \sum_{i=0}^{M-1} P(m_i)\int_{\underline{r}\in D_i} f_N(\underline{r}-\underline{s_i})\,d\underline{r}$$

עבור פילוג א-פריורי אחיד ($P(\underline{s_i})$ - מתפלג אחיד):

$$P(\underline{s_i}) = \frac{1}{M} \Rightarrow \hat{m}(\underline{r}) = \arg\min_{\underline{s_i}}\left\{\|\underline{r}-\underline{s_i}\|^2\right\}$$

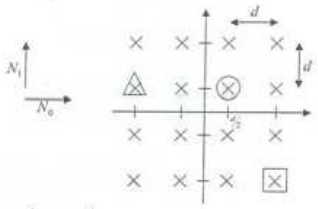
BPSK - Binary Phase Shift Keying:
זו מערכת אנטיפודלית.
(מימד L=1, מערכת בינארית)
תחת הנחת AWGN.

$$s_0(t) = -s_1(t) = \sqrt{E_s}\cdot\varphi_0(t)$$
$$d = 2\sqrt{E_s} \quad ; \quad E_{avg} = E_b = E_s \triangleq E$$

הסתברות שגיאה ב- BPSK עבור פילוג א-פריורי אחיד:

$$p_{S0} = p_{S1}$$
$$d = 2\sqrt{E_b}$$
$$p_r(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

הסתברות שגיאה ב- 16-QAM:
לכל נקודה פנימית / קצה / פינתית יש הסתברות שגיאה שונה:



$$Q \triangleq Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

$$P_r(e/s_1) = 1 - P_r\left(-\frac{d}{2} < N_0 < \frac{d}{2}\right)\cdot P_r\left(-\frac{d}{2} < N_1 < \frac{d}{2}\right)$$
$$= 1-(1-2Q)^2$$
$$P_r(e/s_2) = 1 - P_r\left(N_0 < \frac{d}{2}\right)\cdot P_r\left(-\frac{d}{2} < N_1 < \frac{d}{2}\right)$$
$$= (1-Q)(1-2Q)$$
$$P_r(e/s_3) = 1 - P_r\left(N_0 > -\frac{d}{2}\right)\cdot P_r\left(N_1 < \frac{d}{2}\right)$$
$$= 1-(1-Q)^2$$

$$\sum_{n=N1}^{N2} q^n = q^{N1} * \frac{1-q^{N2-N1+1}}{1-q}$$

הפיכת מטריצות:
עבור מטריצה A 2x2:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\alpha)$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\alpha)$$
$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin(\alpha/2+\beta/2)\cos(\alpha/2-\beta/2)$$
$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin(\alpha/2-\beta/2)\cos(\alpha/2+\beta/2)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos(\alpha/2+\beta/2)\cos(\alpha/2-\beta/2)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin(\alpha/2+\beta/2)\sin(\alpha/2-\beta/2)$$
$$\sin\alpha\cos\beta = 1/2\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\sin\beta = 1/2\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\cos\alpha\cos\beta = 1/2\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

משפט הקוסינוסים:

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$$

משפט הסינוסים:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\underline{v}^T\underline{v} = \|\underline{v}\|^2 = \sum_{i}^{L-1} v_i^2$$

סד"פ ליכסון מטריצה:
1. מוצאים ערכים עצמיים של המטריצה C.
2. מוצאים וקטורים עצמיים של המטריצה C.
נרמל את גודל הקטורים העצמיים ל 1.
3. בונים מטריצה A שעמודותיה הם הוקטורים העצמיים.
4. מבצעים את המנפלה הבאה:

$$A^{-1} = A^T$$
$$A^{-1}\cdot C\cdot A = A^T\cdot C\cdot A$$

מתקבלת מטריצה אלכסונית שבאלכסון הראשי נמצאים כל הערכים העצמיים של מטריצה C.

מרחק נקודה מישר:

$$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

הלבנת רעש:

1. מציאת ע"ע. $|C_x - \lambda I| = 0$
2. מציאת ו"ע. $C_x v = \lambda v$
3. נרמול לפי λ: $v_1 = \frac{v_1}{\sqrt{\lambda_1}}$
4. קיבלנו: $I = C_Y = AC_xA^T$

בשלב זה: $A = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T\end{pmatrix}, AC_xA^T = \begin{pmatrix}\lambda_1\|v_1\|^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2\|v_2\|^2\end{pmatrix}$

הערות:
- הסתברות השגיאה תחושב כרגיל:

$$P_r(e) = Q\left(\frac{\tilde{d}}{2\sigma_{\underline{A}}}\right)$$
$$\tilde{d} \triangleq \|s_0-s_1\|^2$$
$$\sigma_{\underline{A}} = 1$$