

אותות ומערכות

ד"ר יצחק ברגלי. שעות קבלה: יום ב' 15:00-16:00 חדר 428

מייל: bergeli@eng.biu.ac.il

הרכב הציון: מבחן 85%.

בוחן בתאריך 4.5.2010 עד 5% (בנוס)

תרגיל מטל"ב - הגשה פרונטאלית - 10%

מבוא לקורס

מטרה כללית של הקורס: שימוש מעשי בכלי של התמרות פורייה.
דוגמא: נסתכל על האות הכי בסיסי: האות ההרמוני. כלומר, אות מהצורה:

$$e^{j\alpha t} = \cos(\alpha t) + j \sin(\alpha t)$$

זהו אות עצמי של מערכת ליניארית. אם נכניס אותות למערכת ליניארית וקבועה בזמן - נקבל את האות כפול קבוע. **לכן נרצה לייצג כל אות ע"י אות הרמוני.**

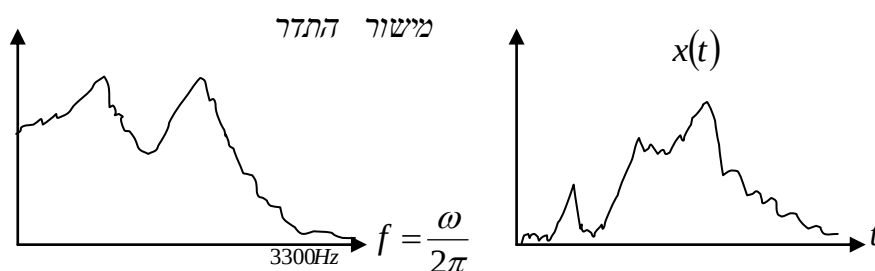
אם האות הוא מחזורי אזי ניתן לבטא אותו בצורת טור פורייה:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$$

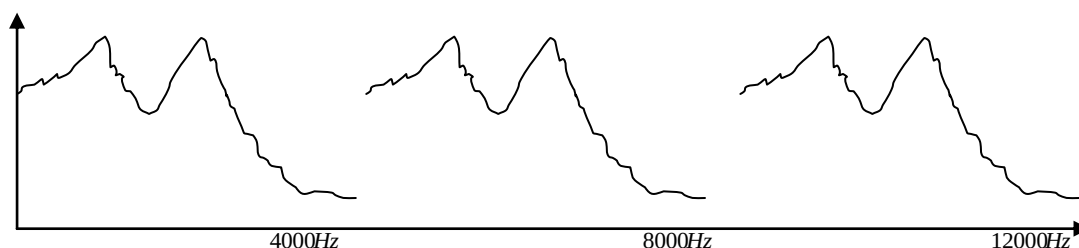
אם האות אינו מחזורי אזי ניתן לייצג אותו כהתמרת פורייה:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} X(j\omega) \right] e^{j\omega t} d\omega$$

נרצה לדעת את התדר של כל אות. באות מחזורי זה קל: התדר הוא: $f = \frac{1}{T}$ (זמן המחזור)
 באות לא מחזורי (כמו אות דיבור) אין תדר במישור הזמן אלא ניתן להסתכל עליו כאל סכום של תדרים שונים, לדוגמא: אות דיבור:



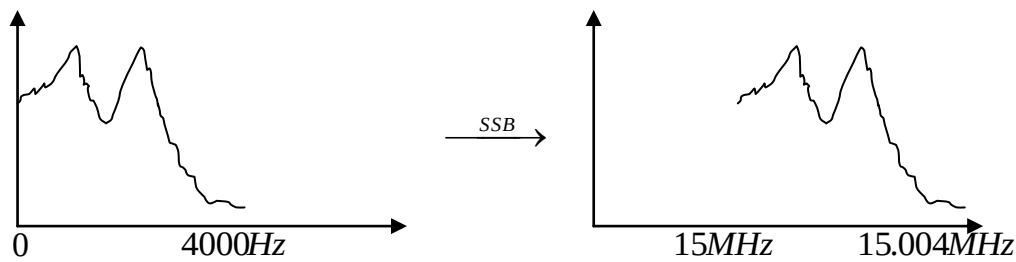
תדר של אות דיבור מגיע עד בערך 3300Hz
 בהמשך הקורס נלמד שניתן לעשות לאות **ריבוב בתדר**: כאשר אות מסוים נמצא בתחום מסוים במישור התדר (כמו אות דיבור) - ניתן להזיז אותו במישור התדר או להוסיף עוד אותות לאותו. (נצריך מערכת שתוכל להחזיר אותם ל-3 אותות נפרדים):



אפנון SSB

נתון אות דיבור שהתדר שלו הוא עד 4000Hz. נרצה להעלות את האות לתדר גבוה יותר משני סיבות:

1. לאפשר לכמה משתמשים להשתמש באותו תווך
2. להתאים את האות לתווך (לתת טווח התפשטות מסוים)



הערה חשובה: הזזה של האות היא פעולה שמשנה את האות. לא ניתן לראות זאת בציר הזמן אלא במישור התדר. לעומת זאת - התמרת פורייה של האות איננה משנה את האות, אלא היא ביטוי של האות במישור התדר.

נושאי הקורס:

- רוב הקורס יעסוק בשימושים של טורי פורייה והתמרות פורייה. כהקדמה נחזור על אלגברה ליניארית והטלה לבסיס.
- נלמד על ייצוג של אותות מחזוריים על ידי טור פורייה.
- נלמד על ייצוג של אותות לא מחזוריים על ידי התמרת פורייה.
- נעסוק בהבנה ובתכונות של הכלים המתמטיים שלמדנו בסמסטר א
- נסתכל על דוגמאות ושימושים של התמרות פורייה (בעיקר בתחום התקשורת)
- נוכיח את משפט הדגימה: נלמד שיש קשר הדוק בין אות בזמן בדיד ובין אות בזמן רציף. ישנם מקרים בהם ניתן לדגום אות רציף.

חזרה - אלגברה ליניארית

1. מרחב ליניארי: קבוצה המקיימת 2 תכונות:
 - א. סגירות לחיבור: אם $x, y \in S$ אזי: $x + y \in S$
 - ב. סגירות לכפל בסקלר: אם $x \in S$ אזי: $\alpha x \in S$. ממשי או מרוכב. בדר"כ מרוכב. [כי התמרת פורייה היא במישור המרוכב]

קיימים 2 מרחבים ליניאריים עיקריים שנעבוד איתם:

 - א. מרחב הסדרות המרוכבות (סופיות או אינסופיות) בזמן בדיד: נסמן: $l: \{x[n] = \dots, x[-1], x[0], x[1], \dots\}$
 - ב. מרחב האותות הרציפים המרוכבים בזמן רציף: נסמן: $L: \{x(t) | -\infty < t < \infty\}$
2. נורמה: זהו ביטוי לגודל של איבר במרחב ליניארי. הנורמה מקיימת:
 - א. הומוגניות: $\forall x \in S, \forall \lambda \in C: \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
 - ב. אי-שיוויון המשולש: $\forall x, y \in S: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
 - ג. חיוביות: $\|x\| \geq 0$. וכמו"כ מתקיים: $x \equiv 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$

במרחבים שלנו מתקיים:

בזמן בדיד:

- נורמה מסדר 1: נורמת הפעולה של אות בזמן בדיד: $\|x\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|$
- נורמה מסדר 2: נורמת האנרגיה של אות בזמן בדיד: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}$
- נורמה אינסופי: נורמת המקסימום של אות בזמן בדיד: $\|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]|$

בזמן רציף:

נורמה מסדר 1: נורמת הפעולה של אות בזמן רציף: $\|x\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$

נורמה מסדר 2: נורמת האנרגיה של אות בבזמן רציף: $\|x\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$

נורמה אינסוף: נורמת המקסימום של אות בזמן רציף: $\|x\|_{\infty} = \sup_{t \in R} |x(t)|$

הרבה פעמים נרצה לחבר מרחב ונורמה, ונגדיר מרחבי נורמה.

בזמן בדיד:

מרחב l_1 - מרחב האותות הבדידים עם נורמת פעולה סופית: $l_1 : \{x \in l : \|x\|_1 < \infty\}$

מרחב l_2 - מרחב האותות הבדידים עם נורמת אנרגיה סופית: $l_2 : \{x \in l : \|x\|_2 < \infty\}$

מרחב l_{∞} - מרחב האותות הבדידים עם נורמת מקסימום סופית: $l_{\infty} : \{x \in l : \|x\|_{\infty} < \infty\}$

בזמן רציף:

מרחב L_1 - מרחב האותות הרציפים עם נורמת פעולה סופית: $L_1 : \{x \in L : \|x\|_1 < \infty\}$

מרחב L_2 - מרחב האותות הרציפים עם נורמת אנרגיה סופית: $L_2 : \{x \in L : \|x\|_2 < \infty\}$

מרחב L_{∞} - מרחב האותות הרציפים עם נורמת מקסימום סופית: $L_{\infty} : \{x \in L : \|x\|_{\infty} < \infty\}$

3. **מכפלה פנימית:** פעולה על שני איברים במרחב המקיימת את התכונות הבאות:

א. הרמטיות: $\forall x, y \in S : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$

ב. ליניאריות: $\forall \alpha \in C, \forall x, y, z \in S : \langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

ג. חיוביות: $\langle x, x \rangle \geq 0$. ובנוסף מתקיים: $x \equiv 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0$

משפט: ליניאריות מצד ימין מקיימת: $\langle x, \alpha y \rangle = \langle \alpha y, x \rangle^* = |\alpha \langle y, x \rangle|^* = \alpha^* \langle x, y \rangle$

הצמוד של הקבוע יוצא החוצה.

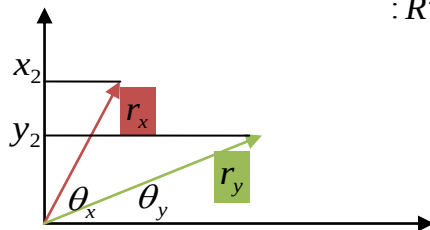
הגדרה: מכפלה פנימית במרחב הליניארי בזמן בדיד l היא: $\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]^*$

מהגדרה זאת נקבל כי: $\langle x, x \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \|x\|_2^2$

מכפלה פנימית במרחב הליניארי בזמן רציף L היא: $\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)^* dt$

מהגדרה זאת נקבל כי: $\langle x, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \|x\|_2^2$

נסתכל לשם האינטואיציה על מכפלה פנימית במרחב הממשי R^2 :



$$x_1 = r_x \cos \theta_x \quad y_1 = r_y \cos \theta_y$$

$$x_2 = r_x \sin \theta_x \quad y_2 = r_y \sin \theta_y$$

$$\langle x, y \rangle = r_x r_y \cos(\theta_x - \theta_y)$$

נראה שמכפלה פנימית היא ביטוי להתאמה בכיוון.

נסתכל על מקרי קצה:

אזי: $\langle x, y \rangle = 0$ כלומר: $\cos(\theta_x - \theta_y) = 0$ $\theta_x - \theta_y = \pm \frac{\pi}{2}$ והוקטורים ניצבים.

אזי: $\langle x, y \rangle = \|x\|_2 \|y\|_2$ כלומר: $\cos(\theta_x - \theta_y) = 1$ $\theta_x - \theta_y = 0$ והוקטורים באותו כיוון

אזי: $\langle x, y \rangle = -\|x\|_2 \|y\|_2$ $\cos(\theta_x - \theta_y) = -1$ כלומר: $\theta_x - \theta_y = \pi$ והוקטורים בכיוונים מנוגדים

4. תלות ליניאריות בין אותות:

נסתכל על קבוצה המוכלת במרחב ליניארי: $X \subset S$
א. הוקטור $y \in S$ תלוי ליניארית ב- X אם הוא ניתן לתיאור כצירוף ליניארי של איברים ב- X .

כלומר: קיימים סקלרים $\alpha_i \in C$ ווקטורים $x_i \in X$ כך שמתקיים הסכום: $y = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i$

אחרת: y הוא בלתי תלוי ליניארית ב- X

ב. הקבוצה X תלויה ליניארית אם קיימים וקטורים $x_1, \dots, x_n \in X$ וסקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in C$ כך

שמתקיים: $\alpha_k \neq 0$ לכל $1 \leq k \leq n$ ו: $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$.

כלומר: בתוך הקבוצה ישנו לפחות וקטור אחד שתלוי ליניארית באחרים ואז אם נחסר אותו מהצירוף הליניארי של האחרים - נקבל 0.

5. בסיס:

בסיס סופי: הקבוצה $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset S$ היא בסיס סופי של המרחב הליניארי S

אם קיימת קבוצה אחת של סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in C$ לכל $y \in S$ כך שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = y$$

כלומר: ניתן לייצג כל וקטור ב- S ע"י צירוף ליניארי של $\alpha_i x_i$. הבסיס צריך לפרוס את כל המרחב S ולהיות מינימלי. אין וקטורים מיותרים. [מכאן - שהבסיס חייב להיות בת"ל]

בסיס אינסופי: אם S הינו מרחב נורמה אזי הקבוצה האינסופית אבל בת המניה $X = \{x_i | -\infty < i < \infty\}$ הינה בסיס של המרחב S אם לכל $y \in S$ קיימת קבוצה

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \right\| = 0 \text{ כך ש: } \alpha_i | -\infty < i < \infty$$

ההתכנסות הזאת נקראת התכנסות בנורמה. כלומר: ככל שתוסיף יותר איברים מ- x_i

$$y = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \text{ כך שתקרב יותר ויותר לוקטור } y. \text{ ניתן לכתוב בקיצור:}$$

6. קבוצות אורתוגונליות / אורתונורמליות:

הקבוצה $X \subset S$ תיקרא אורתוגונלית אם $\forall x_l, x_k \in X \quad l \neq k$ מתקיים: $\langle x_l, x_k \rangle = 0$

ובנוסף $\forall x \in X : \langle x, x \rangle = 1$ כלומר: אין בקבוצה את וקטור האפס.

הקבוצה $X \subset S$ תיקרא אורתונורמלית אם בנוסף: $\forall x \in X : \langle x, x \rangle = 1$

תכונות:

1. משפט פיתגורס: בקבוצות אורתוגונליות, אם $x_1, x_2 \in X$ אזי:

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2\|^2 &= \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle = \\ &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \end{aligned}$$

2. קבוצה אורתוגונלית היא בת"ל

ההוכחה: בדרך השלילה: נניח כי הקבוצה היא תלויה ליניארית. כלומר: קיימים קבועים

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in C$ ולפחות אחד מהם שונה מ-0, ו- $\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i = 0$. אזי נסתכל על המכפלה

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i, x_k \right\rangle = 0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \langle x_i, x_k \rangle = \alpha_k \|x_k\|^2 = 0$$

הפנימית: נקבל שלכל k $\alpha_k = 0$ וזה לא ייתכן ע"פ ההנחה. על כן הסתירה מוכיחה את המשפט.

ייצוג על בסיס אורתונורמלי:

יהי $V = \{v_i | -\infty < i < \infty\}$ בסיס אורתונורמלי סופי או אינסופי של מרחב מכפלה פנימית S . אזי קיימת

סדרה יחידה של קבועים $\hat{x}_i | -\infty < i < \infty$ כך שמתקיים: $x_i = \sum_{i=-\infty}^{\alpha_k} \hat{x}_i v_i$

$$\langle x, v_k \rangle = \left\langle \sum_{i=-\infty}^{\alpha_k} \hat{x}_i v_i, v_k \right\rangle = \sum_{i=-\infty}^{\alpha_k} \hat{x}_i \langle v_i, v_k \rangle = \hat{x}_k \langle v_k, v_k \rangle = \hat{x}_k$$

נגלה את הקבוע ה- k :

הערות:

$$\hat{x}_k = \frac{\langle x, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} = \frac{\langle x, v_k \rangle}{\|v_k\|^2}$$

בייצוג כזה - אם קיים בסיס אורתונורמלי למרחב וידוע הייצוג של הוקטורים x, y בעזרת הבסיס והקבועים $\hat{x}_i, \hat{y}_j$ אזי נוכל לייצג את המכפלה הפנימית ע"י:

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=-\infty}^{\infty} \hat{x}_i v_i, \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{y}_j v_j \right\rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{x}_i \hat{y}_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \hat{x}_i \hat{y}_i$$

באותות רציפים הסכום יהפוך לאינטגרל.

אותות הרמוניים בזמן בדיד

המשפחה ההרמונית: $\Phi_k[n] = e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$ $k = 0, 1, \dots, N-1$ היא בסיס למרחב האותות בזמן בדיד המחזוריים במחזור N . (זה לא דווקא חייב להיות המחזור הכי קטן שלהם)

המכפלה הפנימית המוגדרת לבסיס זה היא: $\langle x[n], y[n] \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[n]^*$

הוכחה: כדי להוכיח שזה בסיס צריך להוכיח שאפשר לייצג כל אות ע"י קבועים ו- $\Phi_k[n]$. נוכיח גם כי הבסיס הוא אורתוגונלי. (ומזה יוצא שהוא גם בת"ל)

$$\langle \Phi_k[n], \Phi_r[n] \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk \frac{2\pi}{N} n} e^{-jr \frac{2\pi}{N} n} = \quad k \neq r \quad 0 \leq k, r \leq N-1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-r) \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1 - \left[e^{j(k-r) \frac{2\pi}{N} N} \right]}{1 - e^{j(k-r) \frac{2\pi}{N}}} = 0$$

השתמשנו בנוסחת סכום סופי של טור הנדסי: $\sum_{k=1}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. התוצאה היא 0 משום שע"פ הנתון $k \neq r$

ולכן: $e^{j(k-r)2\pi} = 1$, שהרי $k-r$ זהו מספר שלם השונה מ-0.

$$\langle \Phi_k[n], \Phi_k[n] \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk \frac{2\pi}{N} n} e^{-kr \frac{2\pi}{N} n} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

הגודל של כל אות הוא:

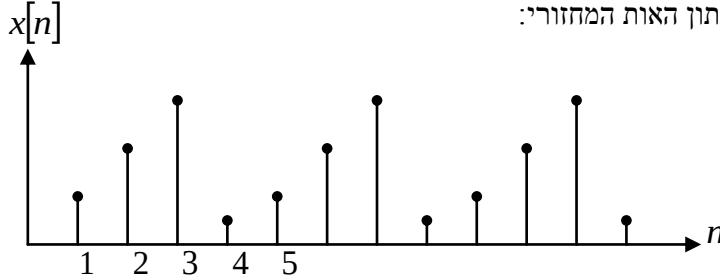
נבחן את גודל הבסיס. תחילה נגדיר מסרק הלמים:

$$\theta_k[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN]$$

אם ניקח מחזור אחד של האות המחזורי ונכפול במסרק הלמים נקבל את האות המחזורי:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \theta_k[n]$$

נמחיש את זה בצורה גרפית. נתון האות המחזורי:



כיון שהאות הוא מחזורי ניתן לחלק אותו ל-4 אותות בסיס. כך בעצם בכל פעם כופלים את הגודל של האות ברכבת הלמים.

הערה: בקשר להוכחת האורתוגונליות - צריך N וקטורי בסיס כדי שההוכחה תתפוס (שלא נאפס את המכנה, שהרי אסור ש- $k-r$ יהיה כפולה של N).

נמצא את הקבועים ע"י מכפלה פנימית:

$$a_k = \frac{\langle x[n], \Phi_k[n] \rangle}{\langle \Phi_k[n], \Phi_k[n] \rangle} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

כיון ש- $x[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \theta_i[n]$ אזי:

הפירוק הזה של $x[n]$ נקרא **טור פורייה** של $x[n]$ בזמן בדיד [DFS]

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

נוסחת האנליזה: לוקחים אות ומחשבים מקדמי פורייה שלו:

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

נוסחת הסינתזה: מחשבים את האות מתוך מקדמי פורייה שלו:

הסימון: $k \in \langle N \rangle$ אומר שניתן לחשב את מקדמי פורייה בעזרת כל N ערכים עוקבים של האות. (המייצגים מחזור אחד)

אותות הרמוניים בזמן רציף

$$\Phi_k(t) = e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \quad -\infty < k < \infty$$

המשפחה ההרמונית:

היא בסיס אורתוגונלי למרחב האותות בזמן רציף המחזוריים במחזור T עם מכפלה פנימית:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^T x(t) y(t)^* dt$$

הערה: את ההוכחה נגביל (לעת עתה) לאותות רציפים. נוכיח אורתוגונליות: עבור $k \neq r$ נקבל כי:

$$\langle \Phi_k(t), \Phi_r(t) \rangle = \int_0^T e^{jk \frac{2\pi}{T} t} e^{-jr \frac{2\pi}{T} t} dt = \int_0^T e^{j(k-r) \frac{2\pi}{T} t} dt = 0$$

הסבר: אינטגרל של אות מחזורי על פני כל המחזור הוא 0 אם $k \neq r$. לכן האותות אורתוגונליים. כלומר: הם בת"ל, ואין אותות מיותרים.

כעת נוכיח כי הבסיס יכול לייצג כל אות במרחב. ניעזר בלמה:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

כאשר: $\delta(t)$ היא הדלתא של דיראק. ההוכחה תינתן בשיעור הבא.

נסמן ב- $x_1(t)$ מחזור יחיד של $x(t)$. כלומר:

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נציג את האות $x(t)$ על ידי שכפול של $x_1(t)$. ניעזר בכלל ההזזה:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \delta(t - nT - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \delta(t - nT - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT - \tau) d\tau = \{ \text{ע"פ הלמה} \} = \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk \frac{2\pi}{T}(t-\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) e^{jk \frac{2\pi}{T} \tau} d\tau}_{\text{מספר קבוע}} \cdot e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \end{aligned}$$

הוכחנו שכל אות $x(t)$ הוא צירוף ליניארי של קבועים עם איברים מהבסיס.

מזה נגזור בשיעור הבא את טור פורייה הרציף של $x(t)$.

טורי פורייה - Fourier Series

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \quad \text{זמן רציף:}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad \text{זמן בדיד:}$$

הערה: כאשר מחשבים מקדמי פורייה של אותות מחזוריים תמיד לוקחים מחזור אחד ולא משנה איפה הוא מתחיל.

בזמן בדיד: מקדמי פורייה מחזוריים. כלומר: $a_{k+N} = a_k$

הגדרה: פונקציית ההלם של דיראק מוגדרת באופן הבא:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt \quad \text{לכל פונקציה } x(t) \text{ רציפה מסביב ל-} t=0 \text{ הפונקציה מקיימת:}$$

פונקציית דלתא היא לא פונקציה במובן הרגיל אלא פונקציה מוכללת. צריך להיזהר בפעולות איתה. לדוג': שתי פעולות שניתן לעשות עם פונקציית הלם הם הזזה בזמן והכפלה בקבוע:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) a \delta(t-t_0) dt = a f(t_0)$$

עם כל שאר הפעולות צריך להיזהר. לדוגמא:

$\delta(t)$ אינה מקבלת ערך סופי מוגדר עבור $a=0$ ולכן לא נוכל להציב בקלות $t=0$. זה שהערך ב-0 הוא ∞ זה לא אומר כלום על הפונקציה, כי הרי היא מוגדרת באופן מיוחד בנקודה 0.

כמו"כ - פונקציית הדלתא לא מוגדרת רק בעזרת הערך בנקודה $t=0$ אלא באיזור מסוים סביב ה-0. לכן כאשר כופלים אותה בפונקציה רגילה $f(t)$ - הפונקציה צריכה להיות רציפה סביב ה-0.

לכאורה אם נציב $t=0$ ב- $\delta(at)$ נקבל ∞ ובשאר הזמן נקבל 0 אבל זה נכון לכל a וברור כי לא הגדרנו כך באופן מלא את הפונקציה. אלא צריך להסתכל דרך ההגדרה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(at) dt = \{t' = at\} = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t'}{a}\right) \delta(t') \frac{1}{a} dt' = \frac{1}{a} f(0) \quad a > 0$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad \text{אם } a < 0 \text{ היה יוצא מינוס החוצה, ולכן:}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad \text{כעת, נוכיח את הלמה מהשיעור הקודם:}$$

הוכחה: נסתכל על המבנה של הפונקציה בצד שמאל: $e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$ הוא אות מחזורי במחזור T לכל k. לכן סכום של כל האותות יהיה גם מחזורי במחזור T, וזה מתאים לצד ימין שם יש רכבת הלמים כאשר הערך חוזר על עצמו כל T.

כעת נוכיח שמסביב ל-0 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ יש רק פונקציית הלם בזמן $t=0$. נסתכל מתחת לאינטגרל

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \text{תלוי בגבולות} \quad \text{(ע"פ ההגדרה של פונקציית הלם):}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt \quad \text{אפשרות 1: אם } -\frac{T}{2} \leq t_1 < 0 < t_2 \leq \frac{T}{2} \text{ אזי נקבל T כי:}$$

זהו אינטגרל של סכום של איברים. כל האיברים יתאפסו חוץ מ- $k=0$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{T}{2\pi} \left[e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} \right] = \frac{T}{2\pi} [e^{j\pi} - e^{-j\pi}] = 0 \quad \text{אם למשל } k=1 \text{ נקבל 0 כי:}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \{k=0\} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = T \quad \text{אם } k=0 \text{ נקבל:}$$

ולכן סכימה של כל האיברים תיתן T.

אפשרות ב: אם $-\frac{T}{2} \leq t_1, t_2 < 0$ או $0 < t_1, t_2 \leq \frac{T}{2}$ אזי נקבל 0.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} dt + \sum_{k=-\infty}^0 \int_{t_1}^{t_2} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} dt - \int_{t_1}^{t_2} 1 \cdot dt$$

כאשר: $0 < t_1, t_2 \leq \frac{T}{2}$ נקבל:

החסרנו את $\int_{t_1}^{t_2} 1 \cdot dt$ כי יש את 0 פעמיים. נטפל בסכום הראשון:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{j\frac{2\pi}{T}t} \right)^k \right] dt$$

נרצה להשתמש בסכום של טור הנדסי אינסופי, אבל צריך שהאיבר בתוך הטור יהיה קטן מ-1 ואצלנו: $|e^{j\frac{2\pi}{T}t}| = 1$ לכן נעשה את הטריק הבא:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ a > 0}} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^{(j\frac{2\pi}{T}-a)t} \right]^k dt = \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ a > 0}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{1 - e^{(j\frac{2\pi}{T}-a)t}} dt$$

כעת האיבר בתוך הטור קטן מ-1 ושואף ל-1 וניתן להשתמש בנוסחה של טור הנדסי אינסופי.

יש אי-רציפות כאשר: $1 - e^{(j\frac{2\pi}{T}-a)t} = 0$ כלומר: $t = 0, \pm T, \pm 2T, \pm 3T, \dots$ הוא כפולה שלמה של

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ a > 0}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{1 - e^{(j\frac{2\pi}{T}-a)t}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{T}t}} dt \quad \text{T. לכן, כאשר } a \rightarrow 0 \text{ נקבל:}$$

$$\sum_{k=-\infty}^0 \int_{t_1}^{t_2} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=-\infty}^0 e^{jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=-\infty}^0 \left[e^{j\frac{2\pi}{T}t} \right]^k dt = \{k=-m\} =$$

הסכום השני דומה:

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[e^{-j\frac{2\pi}{T}t} \right]^m dt = \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ a > 0}} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[e^{-(j\frac{2\pi}{T}+a)t} \right]^m dt = \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ a > 0}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{1 - e^{-(j\frac{2\pi}{T}+a)t}} dt$$

שוב יש לנו אי רציפות כאשר $t = 0, \pm T, \pm 2T, \pm 3T, \dots$ הוא כפולה שלמה של T. בסה"כ נקבל:

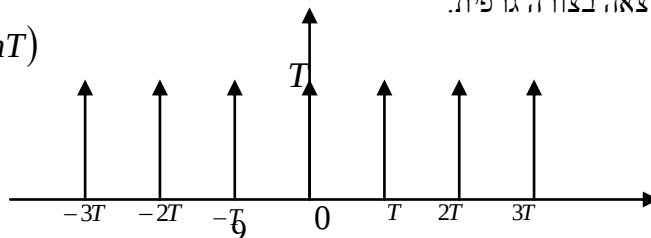
$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{T}t}} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{T}t}} dt - \int_{t_1}^{t_2} 1 \cdot dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{T}t}}{(1 - e^{j\frac{2\pi}{T}t})(1 - e^{-j\frac{2\pi}{T}t})} + \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{(1 - e^{j\frac{2\pi}{T}t})(1 - e^{-j\frac{2\pi}{T}t})} - 1 \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{2 - e^{j\frac{2\pi}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi}{T}t} + 1} - 1 \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{2 - e^{j\frac{2\pi}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{2 - e^{j\frac{2\pi}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi}{T}t}} - 1 \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} [1 - 1] dt = 0 \end{aligned}$$

ההוכחה דומה למקרה השלישי: $-\frac{T}{2} \leq t_1, t_2 < 0$

הערה: אם 0 היה בתחום האינטגרציה אזי אחד מההלמים היה נמצא בתוך תחום האינטגרציה ואז לא היינו מקבלים 0.

נתאר את התוצאה בצורה גרפית:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$



דוגמאות לטור פורייה:

1. אות רציף מחזורי הרמוני: $x(t) = e^{j\omega_0 t}$. המחזור הוא: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. ניתן ללכת לנוסחאות ולחשב את המקדמים אבל ניתן לחשב באופן ישיר:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = e^{j\omega_0 t} \quad a_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

2. אות סינוסי בזמן רציף: $x(t) = \sin(\omega_0 t)$. ניתן להציג את האות כסכום של אקספוננטים:

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] \quad a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k=1 \\ -\frac{1}{2j} & k=-1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

3. אות סינוסי בזמן בדיד: $x[n] = \sin(\omega_0 n)$.

קודם צריך לבדוק האם האות מחזורי, שהרי לא לכל ω_0 האות הוא מחזורי.

למשל: עבור $\omega_0 = \pi\sqrt{2}$ נקבל: $x[0] = \sin(0) = 0$. כעת צריך למצוא n מסוים שעבורו שוב נקבל 0. כלומר: צריך למצוא n עבורו $\sqrt{2}n \in N$ וזה לא מתקיים. לכן האות הוא לא מחזורי.
הכלל: אם $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ אזי המחזור הוא N .

$$x[n] = \sin(\omega_0 n) = \frac{1}{2j} [e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}] \quad \text{נפרק את האות:}$$

$$x[n] \xrightarrow{FS} a_1 = \frac{1}{2j} \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad \forall k \neq \pm 1 + mN: a_k = 0 \quad \text{נקבל:}$$

האות הזה הוא מחזורי. ניתן להגביל אותו ל- N מקדמים מחזוריים. אם לדוגמה נבחר את התחום: $0 \leq k \leq N-1$, אזי בגלל שהמחזור הוא N אזי: $a_{-1} = a_{N-1}$ $a_1 = a_{N+1}$. נקבל:

$$\sin(\omega_0 n) \xrightarrow{FS} a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k=1 \\ -\frac{1}{2j} & k=-1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

כאשר: $\omega_0 = \frac{2\pi M}{N}$ אזי כיון שהאות הוא בזמן בדיד, צריך שהמחזור יהיה מספר שלם. (בניגוד לזמן רציף שבו המחזור לא חייב להיות מס' שלם).

לפיכך: אם $\frac{N}{M}$ הוא מספר שלם אזי המחזור הוא $\frac{N}{M}$: $x[n] = \sin(\omega_0 n) = \sin(2\pi \frac{M}{N} n)$
אם $\frac{N}{M}$ אינו מספר שלם אזי צריך לחפש מחלק משותף.

בכל מקרה בשביל טור פורייה מספיק לקבוע כי המחזור הוא N (המחזור האמיתי יכול להיות יותר

$$a_M = \frac{1}{2j} \quad a_{-M} = -\frac{1}{2j} \quad x[n] = \frac{1}{2j} [e^{j2\pi \frac{M}{N}n} - e^{-j2\pi \frac{M}{N}n}] \quad \text{(קטן):}$$

עבור $0 \leq k \leq N-1$ נקבל:

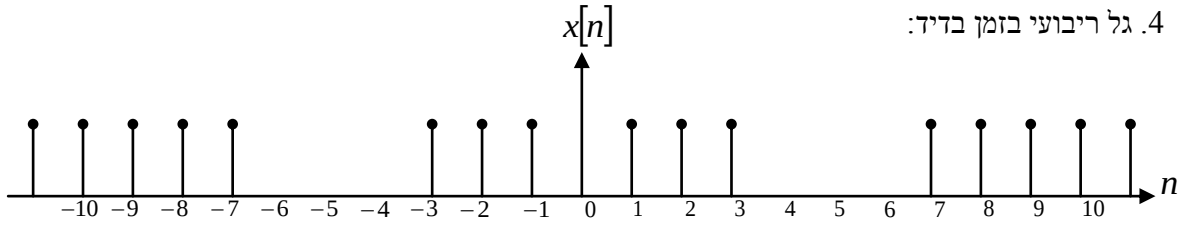
$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k=M \\ -\frac{1}{2j} & k=N-M \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אם $M > N$ עדיין האות הוא מחזורי במחזור N אבל זה לא קריטי משום שכאשר $\omega_0 > 2\pi$ אזי:

$$x[n] = \sin(\omega_0 n) = \sin[(\omega_0 - 2\pi)n]$$

ולכן תמיד ניתן להפוך את התדר להיות $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$. אין משמעות פיזיקלית לתדרים שמעל 2π .

4. גל ריבועי בזמן בדיד:



בציור לעיל המחזור הוא $N = 10$. נכתוב את האות בצורה מתמטית:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & -N_1 \leq n \leq N_1 \\ 0 & N_1 < |n| \leq \frac{N}{2} \end{cases}$$

כדי לחשב את מקדמי פורייה של האות נצטרך לגשת לנוסחה:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \{m = n + N_1\} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk2\pi\frac{N_1}{N}} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} = \\ &= \frac{1}{N} e^{jk2\pi\frac{N_1}{N}} \cdot \frac{1 - \left(e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)^{2N_1+1}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{jk\frac{2\pi}{N}} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} = \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left[k\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{k}{2}\frac{2\pi}{N}\right)} \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots \end{aligned}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} [1] = \frac{2N_1 + 1}{N}$$

כאשר k הוא כפולה שלמה של N נקבל:

האות הזה נקרא אות דיריכלה (Dirichlet) [מקדמי פורייה שלו דומים לפונקציית sinc, אלא שההבדל בין sinc לדיריכלה הוא שדיריכלה מחזורי וגם הערכים שבתוך ה-sin הם שונים] נסתכל על מקרי קצה:

א. $N = 2N_1 + 1$, כלומר: אין רווחים בין הדגימות. אם נציב במקדם פורייה נקבל: $x[n] = 1$. אם נציב בנוסחה שקיבלנו נקבל: $a_k = 1$ כאשר $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots$ ו- $a_k = 0$ בשאר המקרים.

$$a_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[k - lN] \quad \text{כלומר:}$$

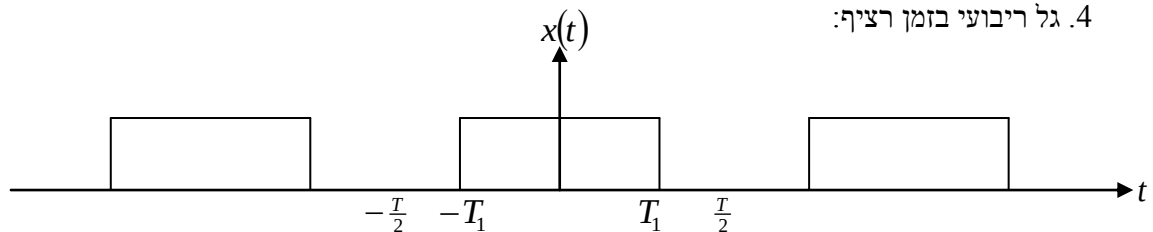
$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN] \quad \text{כלומר: } n = 0, N, 2N \text{ נקבל רק דגימה במקומות}$$

ב. אם $N_1 = 0$ נקבל רק דגימה במקומות: $n = 0, N, 2N$. כלומר: $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN]$. אם נציב בנוסחה שקיבלנו נקבל: $a_k = \frac{1}{N}$ כאשר $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots$ ו- $a_k = 0$ בשאר המקרים.

$$x[n] = 1 \xrightarrow{\text{DFS}} a_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[k - lN] \quad \text{לסיכום: קיבלנו דואליות:}$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN] \xrightarrow{\text{DFS}} a_k = \frac{1}{N}$$

4. גל ריבועי בזמן רציף:



$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases} \quad x(t+T) = x(t) \quad \text{ההגדרה המתמטית היא:}$$

מחזור הגל הוא T .

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

נמצא מקדמי פורייה:

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{jk\omega_0 T} [e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}] = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} =$$

נניח כי $k \neq 0$. נקבל:

$$= \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k \frac{2\pi}{T} T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k}$$

$$a_{k=0} = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} 1 dt = \frac{2T_1}{T}$$

עבור $k=0$ נקבל:

מקרי קצה:

א. $T = 4T_1$ - כלומר: חצי מהמחזור הערך של $x(t)$ הוא 0 וחצי מהמחזור הוא 1.

$$a_0 = \frac{2T_1}{4T_1} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k} = \frac{2 \sin(k \frac{2\pi}{4T_1} T_1)}{\pi k} = \frac{2 \sin(k \frac{\pi}{2})}{\pi k} = \begin{cases} 0 & \text{וג, } k \neq 0 \\ (-1)^l \cdot \frac{1}{\pi k} & k = 2l - 1 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi} \quad a_2 = a_{-2} = 0 \quad a_3 = a_{-3} = -\frac{1}{3\pi} \dots$$

נרשום את המקדמים בעזרת פונקציית sinc: כידוע:

$$\sin c(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{2T_1}{T} \cdot \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_1} = \frac{2T_1}{T} \sin c(k\omega_0 T_1) = \frac{2T_1}{T} \sin c\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2T_1}{T} \sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) \quad \omega = k\omega_0 = k \frac{2\pi}{T}$$

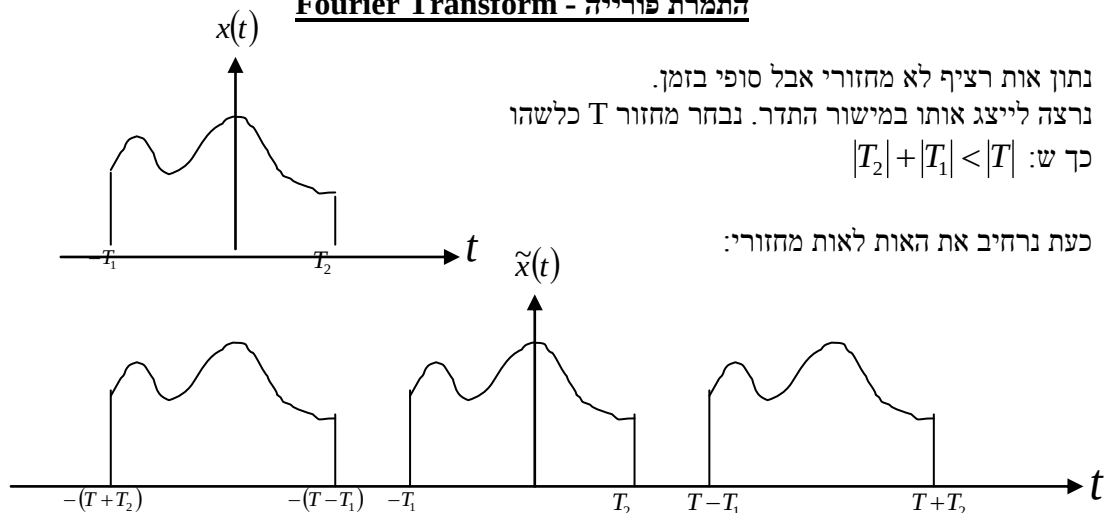
בצורה הזאת ניתן לראות שהצורה של גל ה-sinc אינה תלויה בזמן המחזור כלל. (מקדמי הפורייה של הפונקציה הם דגימות של התמרת פורייה של הפונקציה עבור $\omega = k\omega_0$).

ב. כאשר זמן המחזור שואף ל- ∞ נשאר בעצם רק הריבוע המרכזי (כל שאר הריבועים בורחים ל- ∞) האות כבר לא מחזורי ואז נקבל:

$$a_k = \frac{2T_1}{T} \sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) \Rightarrow T a_k \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 2T_1 \sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

כלומר: יש כאן ביטוי במישור התדר לאות שאיננו מחזורי. זוהי הדרך להגיע להתמרת פורייה של האות.

התמרת פורייה - Fourier Transform



$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt$$

הטור פורייה של האות החדש יהיה:

ניקח T מספיק גדול כך שנוכל לקחת מחזור אחד של $\tilde{x}(t)$ ונגדיר את $x(t)$ בעזרת $\tilde{x}(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$Ta_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt$$

ע"פ מה שראינו לעיל:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

נגדיר את הפונקציה:

$$Ta_k = X(jk\omega_0)$$

ולכן ניתן לחשב את מקדמי פורייה של $\tilde{x}(t)$:

ננסה ליצור בחזרה את $x(t)$ מ- $X(j\omega)$:

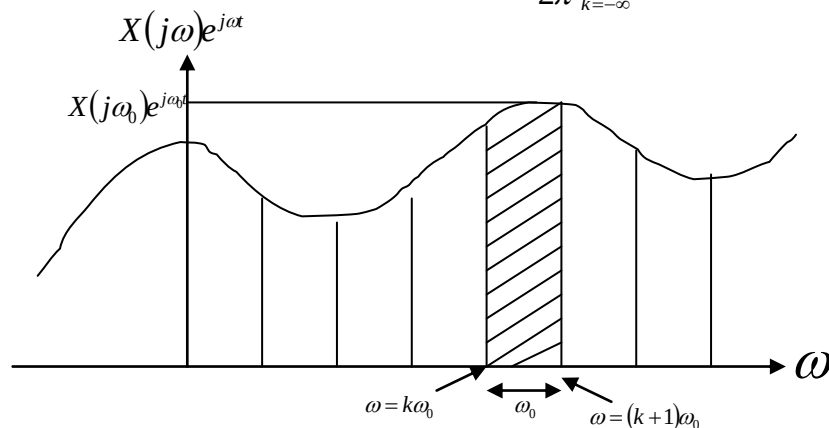
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

ננסה לראות מה קורה כאשר $T \rightarrow \infty$:

$$x(t) = \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

אזי הסכום $(\omega = k\omega_0)$ הופך לאינטגרל ע"פ סכומי רימן:



שטח המלבן הוא אורך כפול רוחב: $\omega_0 \cdot X(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$

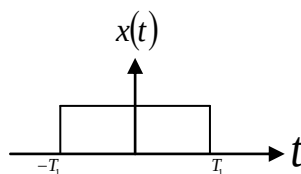
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

כאשר $\omega_0 \rightarrow 0$ סכום שטחי כל המלבנים הופך לאינטגרל:

קיבלנו ייצוג יחיד: מעבר מ- $x(t)$ ל- $X(j\omega)$:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

התמרת פורייה בזמן רציף:



קיבלנו את הנוסחה של

דוגמא להתמרת פורייה בזמן רציף:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |x| < T_1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נתון פולס מלבני יחיד:

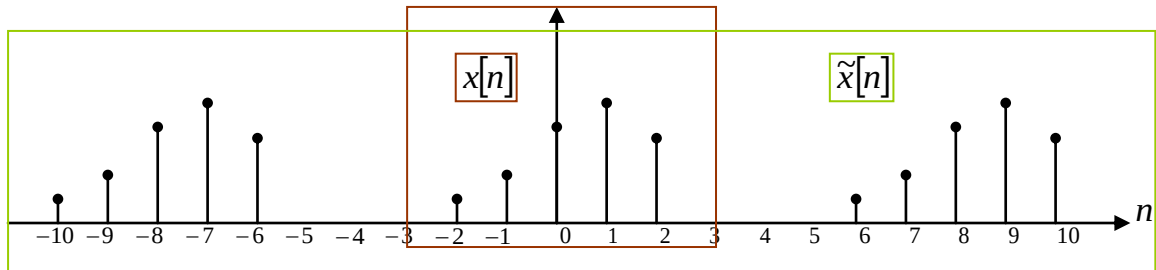
הערה: אין הבדל בין קטן לקטן שווה, שהרי ההתמרה היא אינטגרלית ולא מבדילים בין ההתמרות שלהם.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} [e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}] = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

זה מתאים למה שראינו קודם, שכאשר מרווחים ל- ∞ את זמן המחזור של פולס מלבני מחזורי נקבל התמרה שהיא אות sinc.

התמרת פורייה בזמן בדיד

ניקח אות לא מחזורי בזמן בדיד ונעשה לו המשכה מחזורית:



האות $\tilde{x}[n]$ הוא מחזורי במחזור N . לקחנו רווח בין הדגימות כך ש: $\tilde{x}[n] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} x[n]$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \xrightarrow{DFS} a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} : \tilde{x}[n] \text{ האות של האות } \tilde{x}[n]$$

נבחר את המחזור המרכזי - כלומר: את המחזור שמכיל את האות המקורי $x[n]$ ונקבל:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

כיון שבחרנו את המחזור של $x[n]$ הרי נוכל לקחת מ- $(-\infty)$ ועד (∞) שהרי האות $x[n]$ מתאפס.

נגדיר: $X[e^{j\omega}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$, וננסה להביע את a_k בעזרת הנוסחה:

$$a_k = \frac{1}{N} X[e^{jk \frac{2\pi}{N}}] = \frac{1}{N} X[e^{jk\omega_0}] \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

עם $X[e^{j\omega}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ היא פונקציה מחזורית ב- ω , משום שהיא סכימה של איברים $e^{-j\omega n}$ עם

מקדמים $x[n]$, ולכן כיון ש- $e^{-j\omega n}$ מחזורית במחזור $\frac{2\pi}{|n|}$ (עבור $n \neq 0$), אזי יש מחזור משותף לכל

האיברים שאנחנו סוכמים והוא 2π . גם עבור $n \neq 0$ נקבל: $e^{j\omega \cdot 0} = 1$ ו-1 היא פונקציה מחזורית.

נקבל ש- $X[e^{j\omega}]$ היא פונקציה מחזורית במחזור 2π .

המקדמים a_k מחזורים במחזור N . (כי $a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$ כי כאשר $k = N$ נקבל 2π , ועבור

כל כפולה של N נקבל 2π).

כעת, נחפש דרך למצוא את $x[n]$ דרך ההתמרה, או דרך מקדמי פורייה:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X[e^{jk\omega_0}] e^{jk\omega_0 n}$$

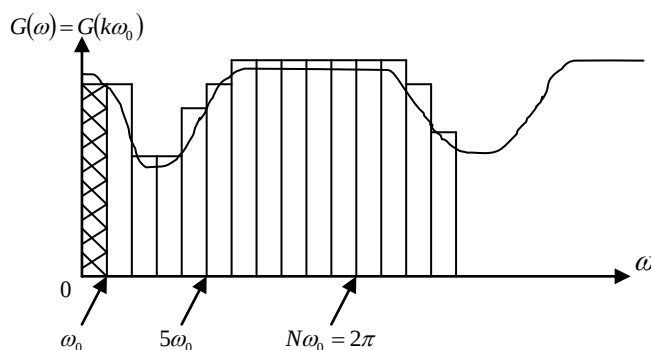
נבדוק מה קורה כאשר $N \rightarrow \infty$, כלומר: כאשר $\tilde{x}[n] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} x[n]$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} \rightarrow 0$,

יש לנו סכום של איברים שהולך ונהיה גדול יותר ויותר והרווחים בין הדגימות הולכים וקטנים:

הפונקציה $G(\omega)$ מחזורית 2π .

שטח כל מלבן הוא אורך כפול רוחב, כלומר: ערך הפונקציה כפול הרווח.

הרווח הוא ω_0 ולכן נקבל: $G(k\omega_0) \cdot \omega_0$



לכן סכום כל שטחי המלבן יהיה:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X[e^{jk\omega_0}] e^{jk\omega_0 n} = \left\{ N = \frac{2\pi}{\omega_0} \right\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X[e^{jk\omega_0}] e^{jk\omega_0 n} \cdot \omega_0$$

קיבלנו סכימה של כל המלבנים במחזור אחד. כאשר נקטין את ω_0 נוכל לומר שזה קירוב ע"י אינטגרל:

$$\tilde{x}[n] \xrightarrow{N \rightarrow \infty, \omega_0 \rightarrow 0} x[n] = \frac{1}{2\pi} \int X[e^{j\omega}] e^{j\omega n} d\omega$$

ישנם N מלבנים במחזור, האורך של המחזור כולו הוא $N\omega_0$ וזה בדיוק 2π .

לסיכום:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad \text{נוסחת האנליזה:}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{נוסחת הסינתזה:}$$

התמרת פורייה בזמן בדיד

בייצוג אות ע"י התמרת פורייה אנחנו מתארים אות לא מחזורי בזמן בדיד ע"י רצף של אותות הרמוניים! האות בציר הזמן הוא בדיד אבל במישור התדר אנחנו מייצגים אותו ע"י התמרה רציפה ומחזורית. זה מזכיר לנו טור פורייה (סכום של אותות הרמוניים).

- התמרת פורייה בזמן רציף היא אינסופית ואיננה מחזורית.

- התמרת פורייה בזמן בדיד היא מחזורית 2π .

- בדר"כ אנו מסתכלים על ההתמרה רק בין $(-\pi)$ ל- (π) כי נוח לקחת את המחזור באופן הזה.

- אפשר להגדיר כל מספר כתדר לאות בזמן בדיד.

- נזכור כי האותות שמשתנים הכי לאט אלו האותות שהתדרים שלהם קרובים ל-0. האותות שמשתנים הכי מהר אלו האותות שהתדרים שלהם שואפים ל- π .

- אותות בתדר 2π אלו אותות בתדר 0 כלומר: $e^{j2\pi n} = 1^n = e^{j\omega n}$ - לא משתנים בכלל במישור הזמן.

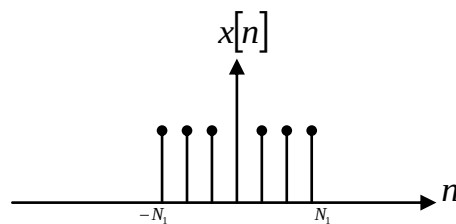
- אותות בתדר π אלו אותות מהצורה: $e^{j\pi n} = x[n] = (-1)^n$ - אלו אותות שמשתנים כל הזמן ב-n.

נסמן התמרת פורייה בזמן בדיד: $DTFT \rightarrow [-\pi, \pi]$

דוגמאות:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

1. פולס מלבני יחיד בזמן בדיד:



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} =$$

נחשב את ההתמרה:

$$= \{m = n + N_1\} = \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\omega(m-N_1)} = e^{j\omega N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\omega m} = e^{j\omega N_1} \frac{1 - e^{-j\omega(2N_1+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

מקרה קצה: $N_1 = 0$ - כלומר: יש לנו רק דגימה אחת ב-0. נקבל: $\delta[n] \xrightarrow{DTFT} 1$

סיכום - טורי פורייה והתמרות פורייה

<u>זמן רציף</u>	<u>זמן בדיד</u>	
<u>FS</u> אנליזה: $a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ סינתזה: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	<u>DFS</u> אנליזה: $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$ סינתזה: $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$	אותות מחזוריים (טורי פורייה)
<u>FT</u> אנליזה: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ סינתזה: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	<u>DTFT</u> אנליזה: $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ סינתזה: $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	אותות לא-מחזוריים (התמרת פורייה)

תכונות:

$$\begin{aligned}
 & \text{FS: } x(t), y(t) \xrightarrow{FS} a_k, b_k \quad \text{אותות מחזוריים במחזור } T \\
 & \text{DFS: } x[n], y[n] \xrightarrow{DFS} a_k, b_k \quad \text{אותות מחזוריים במחזור } N \\
 & \text{FT: } x(t), y(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega), Y(j\omega) \quad \text{נסמן: } FT = \mathfrak{F} \\
 & \text{DTFT: } x[n], y[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega}) \quad \text{נסמן: } FT = \mathfrak{F}
 \end{aligned}$$

1. ליניאריות:

$$\begin{aligned}
 & \alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{FS} \alpha a_k + \beta b_k \quad \text{FS} \\
 & \alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{DFS} \alpha a_k + \beta b_k \quad \text{DFS} \\
 & \alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{FT} \alpha X(j\omega) + \beta Y(j\omega) \quad \text{FT} \\
 & \alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{DTFT} \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega}) \quad \text{DTFT}
 \end{aligned}$$

2. הזזה בזמן:

FS: $y(t) = x(t - t_0)$. המחזור T נשמר בהזזה בזמן. נקבל:

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t - t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{\langle T \rangle} x(\tau) e^{-jk\omega_0 (\tau + t_0)} d\tau = \\
 &= e^{-jk\omega_0 t_0} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k
 \end{aligned}$$

הערה: גבולות האינטגרציה משתנים כיון שזה על מחזור שלם ולא משנה מאיפה מתחילים.

DFS: $y[n] = x[n - n_0]$. המחזור N נשמר בהזזה בזמן. נקבל:

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[n - n_0] e^{-jk\omega_0 n} = \int_{k=\langle N \rangle} x[m] e^{-jk\omega_0 (m + n_0)} = \\
 &= e^{-jk\omega_0 n_0} \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[m] e^{-jk\omega_0 m} = e^{-jk\omega_0 n_0} a_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x(t - t_0) \xrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \quad \text{FT} \\
 & x[n - n_0] \xrightarrow{DTFT} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad \text{DTFT}
 \end{aligned}$$

3. הזזה בתדר:

FS: ההזזה תתבצע ע"י כך שנסתכל על המקדמים של y מוזזים: $b_k = a_{k-k_0}$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k-k_0} e^{jk\omega_0 t} = \{k' = k - k_0\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k'} e^{j(k'+k_0)\omega_0 t} =$$

$$= e^{jk_0\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk'\omega_0 t} = e^{jk_0\omega_0 t} x(t)$$

$$e^{jk_0\omega_0 t} x(t) \xrightarrow{FS} a_{k-k_0}$$

כלומר: הזזה בתדר שקולה להכפלה בפאזה ליניארית בזמן.
הזזה בזמן שקולה להכפלה בפאזה ליניארית בתדר.

$$e^{jk_0\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{FS} a_{k-k_0} \quad \text{DFS}$$

$$Y(j\omega) = X(j(\omega - \omega_0)) \quad \text{FT} \quad \text{נקבל:}$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j(\omega - \omega_0))\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \omega_0)) e^{j\omega t} d\omega = \{\omega' = \omega - \omega_0\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega') e^{j(\omega' + \omega_0)t} d\omega' = e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega') e^{j\omega' t} d\omega' = e^{j\omega_0 t} x(t)$$

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xrightarrow{FT} X(j(\omega - \omega_0))$$

הערה: בטורי פורייה בזמן רציף עשינו הזזות בתדרים ספציפיים, כי אם נכפול בתדר שאינו ω_0 לא נוכל להסתכל על הטור פורייה כי אז האות לא יהיה מחזורי כאן אין לנו בעיה של מחזוריות ולכן ניתן להזיז בכל תדר.

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{FT} X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad \text{DTFT}$$

4. מחזוריות בתדר:

FS: טור פורייה בזמן רציף אינו מחזורי

$$a_{k+N} = a_k \quad \text{DFS} \quad \text{מחזורי } N$$

FT: התמרת פורייה של אות רציף איננה מחזורית

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega}) \quad \text{DTFT} \quad \text{מחזורית } 2\pi$$

5. הרחבה/כיווץ ציר הזמן:

FS: $y(t) = x(\alpha t)$ אם $\alpha > 1$ בצענו כיווץ, אם $\alpha < 1$ בצענו הרחבה.

אם $x(t)$ מחזורי במחזור T אזי $y(t)$ מחזורי במחזור $\frac{T}{\alpha}$ כלומר: $\alpha\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 \alpha t}$$

נקבל שמקדמי פורייה של $x(\alpha t)$ הם כמו של $x(t)$ אבל עם מחזור שונה:

$$\frac{T}{\alpha} x(\alpha t) \xrightarrow{FS} a_k$$

$$y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}] & \text{מכפולה של } m \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{DFS} \quad \text{על מנת לעשות DFS נצטרך להוסיף אפסים בין}$$

הדגימות כאשר מרחיבים את האות הבדיד.

אם $x[n]$ מחזורי במחזור N אזי $y[n]$ מחזורי במחזור mN ותדר בסיסי $\frac{\omega_0}{n}$

$$b_k = \frac{1}{mN} \sum_{k=\langle mN \rangle} y[n] e^{-jk\frac{\omega_0}{m} n} = \{n' = \frac{n}{m}\} = \frac{1}{mN} \sum_{k=\langle mN \rangle} x[n'] e^{-jk\omega_0 n'} = \frac{1}{m} a_k$$

$$y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}] & \text{מכפולה של } m \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{עם מחזור } mN \xrightarrow{DFS} \frac{1}{m} a_k$$

FT: $y(t) = x(\alpha t)$ אם $\alpha > 1$ בצענו כיווץ, אם $\alpha < 1$ בצענו הרחבה.

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) e^{-j\alpha t} dt = \{\tau = \alpha t\} = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{\alpha}\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} X(j\frac{\omega}{\alpha})$$

$$x(\alpha t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{\alpha} X(j\frac{\omega}{\alpha})$$

DTFT: $y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}] & m \text{ חכפולה של } m \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$. על מנת לעשות DTFT נצטרך להוסיף אפסים בין

הדגימות כאשר מרחיבים את האות הבדיד.

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-j\omega n} = \{n' = \frac{n}{m}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n'] e^{-j\omega n'm} = X((e^{j\omega})^m)$$

6. קונבולוציה:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \quad \text{FT}$$

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} t' = t - \tau \\ dt' = dt \end{matrix} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t') e^{-j\omega(t'+\tau)} dt' \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} y(t') e^{-j\omega t'} dt' =$$

$$= X(j\omega) Y(j\omega)$$

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega) Y(j\omega)$$

קיבלנו שהתמרת פורייה של קונבולוציה היא הכפלת ההתמרות.

$$x[n] * y[n] \xrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega}) \quad \text{DTFT}$$

הערה: מעבר דרך מערכת ליניארית ניתן לתאר בשתי אפשרויות:

$$x(t) \xrightarrow{*} h(t) \longrightarrow y(t) \quad \text{קונבולוציה בזמן:}$$

$$X(j\omega) \longrightarrow H(j\omega) \longrightarrow Y(j\omega) \quad \text{מכפלה בתדר:}$$

$$w[n] \xrightarrow{DFS} d_k \quad x[n] \xrightarrow{DFS} a_k \quad b_k = a_k d_k \quad \text{DFS}$$

$$y[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} b_k e^{jk\omega_0 n} = y[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k d_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k \in \langle N \rangle} \left[\frac{1}{N} \sum_{m \in \langle N \rangle} x[m] e^{-jk\omega_0 m} \right] d_k e^{jk\omega_0 n} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m \in \langle N \rangle} x[m] \sum_{k \in \langle N \rangle} d_k e^{jk\omega_0(n-m)} = \frac{1}{N} \sum_{m \in \langle N \rangle} x[m] w[n-m] = \frac{1}{N} x[n] \otimes w[n]$$

קיבלנו קונבולוציה בזמן בדיד, אבל זו קונבולוציה ציקלית כיון שהאותות $x[n]$, $w[n]$ בעלות אותו זמן מחזור N .

הגדרה: קונבולוציה ציקלית מוגדרת ע"י: $x[n] \otimes w[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] w[n - (m \bmod N)]$

דוגמא: נתונים האותות: $N=4$ $x[n] = 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, \dots$ מחזור $N=4$

$w[n] = 7, 4, 5, 6, 7, 4, 5, 6, 7, 4, 5, \dots$ מחזור $N=4$

$w[-n] = 5, 4, 7, 6, 5, 4, 7, 6, 5, 4, 7, \dots$

$$z[n] = x[n] \otimes w[n] = \sum_{m=0}^{4-1} x[m]w[n-m]$$

$$z[0] = \sum_{m=0}^{4-1} x[m]w[0-m] = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 34$$

$$z[1] = \sum_{m=0}^{4-1} x[m]w[1-m] = 0 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 = 36$$

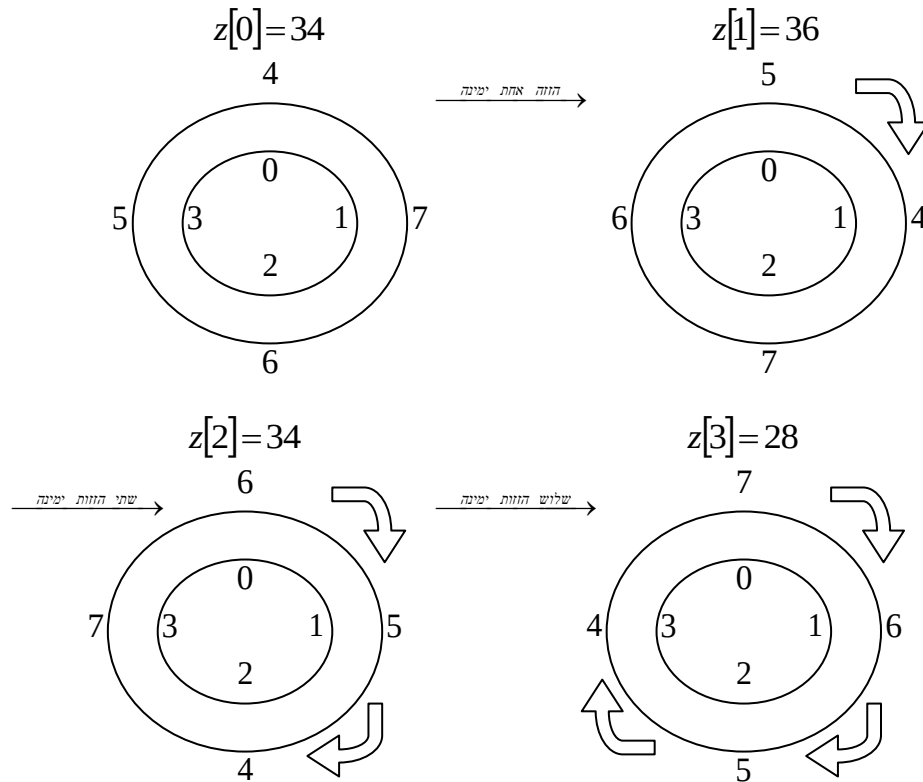
$$z[2] = \sum_{m=0}^{4-1} x[m]w[2-m] = 0 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 34$$

$$z[3] = \sum_{m=0}^{4-1} x[m]w[3-m] = 0 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 28$$

$$z[n] = 28, 34, 36, 34, 28, 34, 36, 34, 28, \dots$$

נקבל:

כלומר: במקום להסתכל על האות בצורה מחזורית - נסתכל בצורה מעגלית:



מכפלה של שני מקדמי פורייה היא הקונבולוציה הציקלית של 2 אותות מחזוריים:

$$\frac{1}{N} x[n] \otimes w[n] \xrightarrow{DFS} a_k d_k$$

6. קונבולוציה:

$$\begin{aligned} x(t) * y(t) &\xrightarrow{FT} X(j\omega)Y(j\omega) && \text{FT} \\ x[n] * y[n] &\xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) && \text{DTFT} \\ w[n] &\xrightarrow{DFS} d_k \quad x[n] &\xrightarrow{DFS} a_k && \text{DFS: נתון} \\ \frac{1}{N} x[n] \otimes w[n] &\xrightarrow{DFS} a_k d_k && \text{אזי:} \end{aligned}$$

$$x[n] \otimes w[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]w[n - (m \bmod N)]$$

לסיכום:

- התמרת פורייה בדידה או רציפה של קונבולוציה היא מכפלת ההתמרות.
- מקדמי פורייה הבדידים של קונבולוציה ציקלית הם מכפלת המקדמים
- קונבולוציה ליניארית (רגילה) בין שתי אותות מחזוריים - בדר"כ תתבדר, כי האותות אינסופיים.

קונבולוציה ליניארית בזמן בדיד:

נדון בתכונות של קונבולוציה ליניארית של אות בדיד כללי עם אות בדיד מחזורי. [כאשר אות מחזורי עובר במערכת ליניארית עם תגובה להלם $h[n]$ לא מחזורית, אזי המוצא הוא הקונבולוציה ביניהם. בדר"כ תגובה להלם של מערכת ליניארית היא לא מחזורית. אם היא מחזורית - אזי בדר"כ היא לא יציבה]

יהי $x[n]$ אות מחזורי בדיד במחזור N , ו- $y[n]$ אות כללי. נגדיר את הקונבולוציה ביניהם:

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-l]y[l]$$

$z[n]$ הוא מחזורי במחזור N , שהרי:

$$z[n+N] = x[n+N] * y[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n+N-l]y[l] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-l]y[l] = z[n]$$

נסתכל על מקדמי פורייה של $z[n]$. נסמן: $z[n] \xrightarrow{DFS} c_k$. אזי ע"פ ההגדרה:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-l]y[l] \right] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

נפריד את הסכומים ע"י הוספה והחסרה של l , כלומר: $n = n + l - l$, נקבל:

$$= \frac{1}{N} \sum_{n-l=\langle N \rangle} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-l]y[l] \right] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n-l+l} = \frac{1}{N} \sum_{n-l=\langle N \rangle} x[n-l] e^{-jk \frac{2\pi}{N} (n-l)} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} y[l] e^{-jk \frac{2\pi}{N} l}$$

ניתן לכתוב בסכום הראשון $n-l$ במקום n כי כיון שהסכום הראשון הוא על מחזור שלם ניתן להתחיל מכל מספר. נקבל שהסכום הראשון הוא מקדם פורייה של $x[n-l]$ שהוא הזזה של $x[n]$, אבל כבר ראינו בשיעור הקודם שמקדם פורייה של הזזה של אות נשאר אותו דבר. הסכום השני הוא תגובת התדר של $y[l]$, כלומר: זוהי התמרת פורייה של $y[l]$ בתדרים $k \cdot \frac{2\pi}{N}$.

$$= a_k Y(e^{jk\omega_0})$$

לסיכום: נקבל שכל מקדם a_k מוכפל בהתמרת פורייה בתדר $k \cdot \frac{2\pi}{N}$.

המחזור של $Y(e^{jk\omega_0})$ הוא N כי: $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$. האות המחזורי שהסדרה $Y(e^{jk\omega_0})$ מתארת הוא:

$$b_k = \frac{1}{N} Y(e^{jk\omega_0}) \xrightarrow{IDFS} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[n-mN] = y_{per}[n]$$

$\sum_{m=-\infty}^{\infty} y[n-mN]$ הוא הרחבה/קיפול מחזורי של האות הלא-מחזורי $y[n]$.

$$x[n] * w[n] \xrightarrow{DFS} N a_k d_k \xrightarrow{IDFS} x[n] \otimes y_{per}[n] \quad \text{נקבל:}$$

כלומר: המוצא של אות מחזורי העובר במערכת ליניארית עם תגובה להלם לא מחזורית $h[n]$ ניתן לתיאור ע"י קונבולוציה ליניארית עם התגובה להלם או ע"י קונבולוציה ציקלית עם ההרחבה/הקיפול המחזורי של התגובה להלם.
עם $y_{per}[n]$ ניתן לתאר קונבולוציה רגילה של $y[n]$ עם כל אות מחזורי במחזור N .

קונבולוציה ציקלית בזמן רציף:

יהי: $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$ $y(t) \xrightarrow{FS} d_k$ אותות מחזוריים במחזור T .

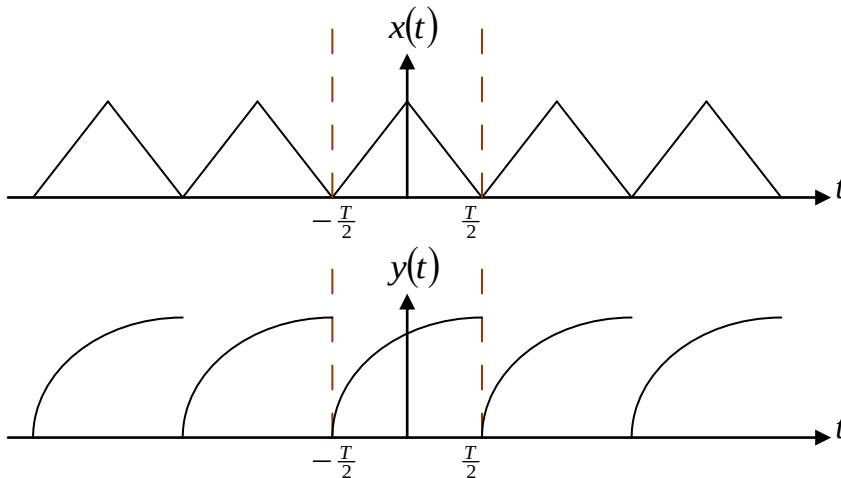
נגדיר: $z(t) \xrightarrow{FS} c_k = a_k d_k$ אזי נקבל כי:

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k d_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\frac{1}{T} \int_T y(\tau) e^{-jk \frac{2\pi}{T} \tau} d\tau \right] e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = \\ &= \frac{1}{T} \int_T y(\tau) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk \frac{2\pi}{T} (t-\tau)} \right] d\tau = \frac{1}{T} \int_T y(\tau) x(t-\tau) d\tau = \frac{1}{T} x(t) \otimes y(t) \end{aligned}$$

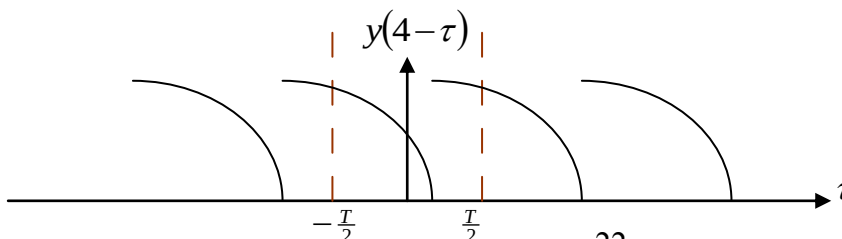
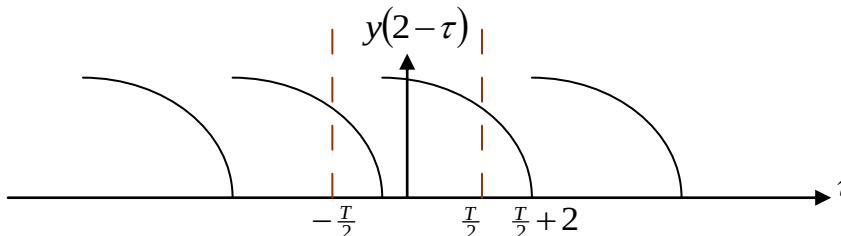
קיבלנו קונבולוציה ציקלית (בדומה לזמן בדיד) כלומר:

$$x(t) \otimes y(t) = \int_T x(\tau) y((t-\tau) \bmod T) d\tau \quad \text{כאשר: } \frac{1}{T} x(t) \otimes y(t) \xrightarrow{FS} a_k d_k$$

דוגמא גרפית: נתונים האותות המחזוריים $x(t), y(t)$ באופן הבא:



נסמן בקווים אדומים מקווקים מחזור אחד של האותות. הקונבולוציה הציקלית מתבצעת על מחזור אחד. על מנת לבצע את הקונבולוציה נצטרך לייצג גרפית את $y(t-\tau)$ (היפוך והזזה)



כיון שהאות הוא מחזורי - אזי כל פעם שחלק מהאות זו ימינה ויוצא מתחום האינטגרציה - אותו חלק בדיוק נכנס משמאל לתחום האינטגרציה. בכל מקרה תמיד ישנו מחזור שלם של y בתוך תחום האינטגרציה.

תוצאת הקונבולוציה היא סכימה של כל המכפלות בין האות $x(t)$ ובין ההיפוך וההזזה של $y(t)$

קונבולוציה ליניארית בזמן רציף:

יהי $x(t)$ אות מחזורי רציף במחזור T , ו- $y(t)$ אות כללי. נגדיר את הקונבולוציה ביניהם:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

נסתכל על מקדמי פורייה של $z(t)$. נסמן: $z(t) \xrightarrow{FS} c_k$. אזי ע"פ ההגדרה:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_T \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_T \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\frac{2\pi}{T}(t-\tau)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{-j\frac{2\pi}{T}\tau} \left[\frac{1}{T} \int_T x(t - \tau) e^{-j\frac{2\pi}{T}(t-\tau)} dt \right] d\tau = a_k Y(jk\omega_0) \end{aligned}$$

בזמן בדיד אמרנו שהסדרה $Y(e^{jk\omega_0})$ מגדירה אות מחזורי. בזמן רציף הסדרה $Y(jk\omega_0)$ אינה

$$\frac{1}{T} Y(jk\omega_0) \xrightarrow{IFS} y_{per}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(t - mT)$$

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{FS} a_k Y(jk\omega_0) \xrightarrow{IFS} x(t) \otimes y_{per}(t) \quad \text{לסיכום נקבל:}$$

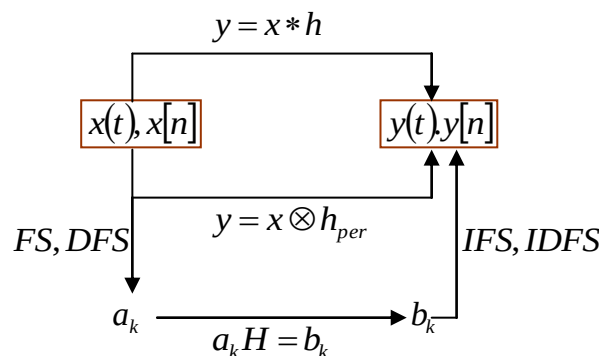
כאשר אות מחזורי רציף עובר דרך מערכת ליניארית עם תגובה להלם $h(t)$ שאינה מחזורית - אזי ניתן לתאר את המוצא בשלושה דרכים:

א. קונבולוציה ליניארית עם $h(t)$. כלומר: $y(t) = x(t) * h(t)$

ב. קונבולוציה ציקלית עם ההרחבה המחזורית של $h(t)$. כלומר: $y(t) = x(t) \otimes h_{per}(t)$

ג. ייצוג של מקדמי פורייה של המוצא ע"י הכפלה של מקדמי פורייה של $x(t)$ עם תגובת התדר

$$a_k H(e^{jk\omega_0}) = b_k, \quad a_k H(jk\omega_0) = b_k \quad \text{כלומר: } k\omega_0 \text{ בתדרים}$$



דוגמא: נתונה מערכת עם תגובה להלם $h(t) = u(t)e^{-\frac{t}{\tau}}$. אזי ההרחבה/קיפול של $h(t)$ היא:

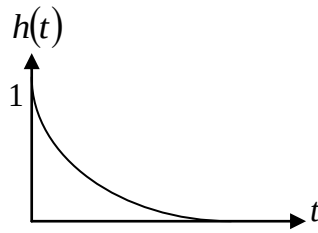
$$h_{per}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(t - mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(t - mT) e^{-\frac{t-mT}{\tau}}$$

נתמקד בתחום $0 \leq t < T$. נתאר מחזור אחד של $h_{per}(t)$. עבור $0 \leq t < T$ חיובי

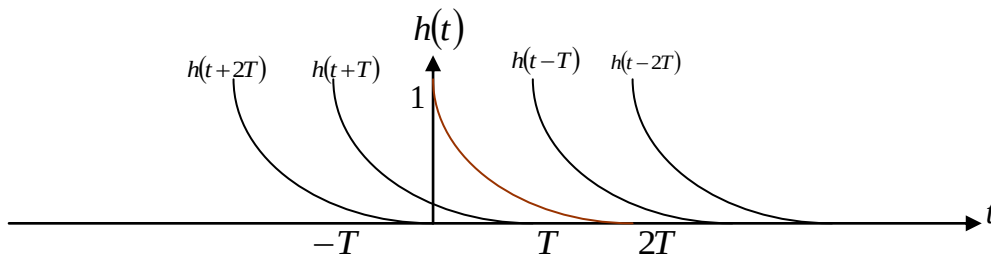
$$u(t - mT) = 1 \quad \text{כאשר } -\infty < m < 0 \text{ ולכן:}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^0 e^{\frac{t-mT}{\tau}} = e^{\frac{t}{\tau}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{mT}{\tau}} = e^{\frac{t}{\tau}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{T}{\tau}} \right)^m = \frac{e^{\frac{t}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

בדוגמא הזאת $h(t)$ הוא אקספוננט דועך:



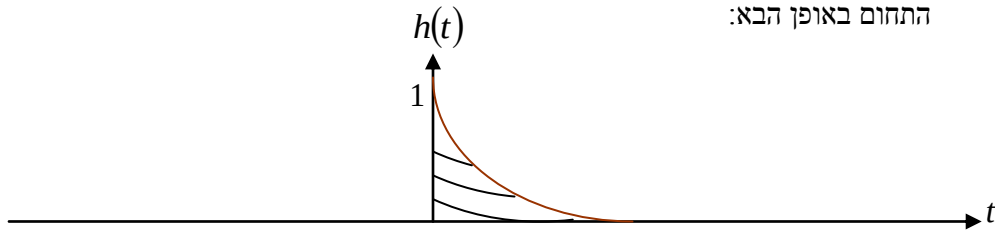
הייצוג הגרפי של $h_{per}(t)$ הוא שכפול של $h(t)$ ע"י הרכבת: $h(t-mT)$:



האות הכולל הוא סכימה של כל האותות.

דרך אחרת להציג את $h_{per}(t)$ בתחום $0 \leq t < T$ היא לעשות קיפול של האות לתוך

התחום באופן הבא:



כל קיפול כזה מגיע מאחד האותות המוזזים $h(t-mT)$. בדוגמא הזאת נקבל ש- $h_{per}(t)$ הוא הגבר של $h(t)$ כי אנחנו סוכמים רק איברים חיוביים. הדבר מתבטא גם בביטוי המתמטי של $h_{per}(t)$ שהרי:

$$\frac{e^{\frac{t}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \text{ הוא הגבר פי } \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \text{ של } h(t). \text{ הגודל } 1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \text{ הוא קבוע.}$$

אם הפונקציה $h(t)$ הייתה סופית היינו מקבלים שכפול שלה בזמן.

כעת, נסתכל על התמרת פורייה של $h(t)$:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)t} dt = -\frac{1}{j\omega + \frac{1}{\tau}} e^{-\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{\tau}}$$

$$b_k = a_k \frac{1}{jk\omega_0 + \frac{1}{\tau}} \xrightarrow{IFS} y(t)$$

מוצא המערכת יהיה:

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) \otimes h_{per}(t) \xrightarrow{FS} a_k H(jk\omega_0)$$

לסיכום:

7. היפוך ציר הזמן:

FT: נתון: נתון: $y(t) = x(-t)$ נחפש את התמרת פורייה:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-j\omega t} dt = \{t' = -t\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{j\omega t'} dt' = X(-j\omega)$$

$$x[-n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{-j\omega}) \quad \text{:DTFT}$$

$$x(-t) \xrightarrow{FS} a_{-k} \quad \text{:FS}$$

$$x[-n] \xrightarrow{DFS} a_{-k} \quad \text{:DFS}$$

8. הצמדה:

FS: $y(t) = x^*(t)$ נחפש מקדמי פורייה:

$$b_k = \frac{1}{T} \int_0^T x^*(\tau) e^{-jk\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau = \left[\frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) e^{jk\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau \right]^* = [a_{-k}]^*$$

$$x^*[n] \xrightarrow{DFS} [a_{-k}]^* \quad \text{:DFS}$$

$$x^*(t) \xrightarrow{FT} X^*(-j\omega) \quad \text{:FT}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{-j\omega n} = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\omega n} \right]^* = Y^*(e^{-j\omega}) \quad y[n] = x^*[n] \quad \text{:DTFT}$$

9. סימטריה:

FT:

א. עבור אות ממשי: $x(t) = x^*(t) \quad x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$

על פי תכונת ההצמדה נקבל: $x^*(t) \xrightarrow{FT} X^*(-j\omega)$

ולכן: $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

כלומר: $\text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\{X(-j\omega)\} \quad \text{Im}\{X(j\omega)\} = -\text{Im}\{X(-j\omega)\}$

החלק הממשי של ההתמרה הוא פונקציה אי-זוגית והחלק המדומה הוא פונקציה אי-זוגית.

ניתן להשתמש גם בהגדרות של ערך מוחלט ופאזה ונקבל:

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \quad \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$$

הערך המוחלט של ההתמרה הוא פונקציה זוגית, והפאזה היא פונקציה אי-זוגית.

הערה: התמרת פורייה של אות ממשי היא מרוכבת אך סימטרית. בדר"כ לא מתארים מה קורה

בצד השלילי של ציר התדר כי ניתן לתאר אותו באמצעות הסימטריה.

ב. עבור אות זוגי: $x(t) = x(-t) \quad x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$

על פי תכונת היפוך ציר הזמן נקבל: $x(-t) \xrightarrow{FT} X(-j\omega)$

ולכן: $X(j\omega) = X(-j\omega)$

כלומר: תכונת הזוגיות נשמרת.

ג. עבור אות אי-זוגי: $x(t) = -x(-t) \quad x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$

פי תכונת היפוך ציר הזמן נקבל: $-x(-t) \xrightarrow{FT} -X(-j\omega)$

ולכן: $X(j\omega) = -X(-j\omega)$

כלומר: תכונת אי-הזוגיות נשמרת.

ד. עבור אות זוגי וממשי: $x^*(t) = x(t) = x(-t) \quad x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$

על פי תכונת ההצמדה נקבל: $x^*(t) \xrightarrow{FT} X^*(-j\omega)$

על פי תכונת היפוך ציר הזמן נקבל: $x(-t) \xrightarrow{FT} X(-j\omega)$

ולכן: $X(j\omega) = X(-j\omega) = X^*(-j\omega)$

כלומר: התמרת פורייה היא זוגית וממשי

ה. עבור אות אי-זוגי וממשי: $x^*(t) = x(t) = -x(-t) \quad x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$

על פי תכונת ההצמדה נקבל: $x^*(t) \xrightarrow{FT} X^*(-j\omega)$
 על פי תכונת היפוך ציר הזמן נקבל: $-x(-t) \xrightarrow{FT} -X(-j\omega)$
 ולכן: $X(j\omega) = -X(-j\omega) = X^*(-j\omega) = -X^*(j\omega)$
 כלומר: התמרת פורייה היא אי-זוגית ומדומה טהורה.

1. ניתן לחלק כל אות ממשי לאות זוגי ואי-זוגי: $x(t) = x_{\text{even}}(t) + x_{\text{odd}}(t)$

$$x_{\text{even}}(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad x_{\text{odd}}(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

כאשר האות $x(t)$ הוא זוגי אזי: $x_{\text{odd}}(t) = 0$

כאשר האות $x(t)$ הוא זוגי אי-זוגי: $x_{\text{even}}(t) = 0$

התמרת פורייה של $x(t)$ (כאשר נתון שהוא ממשי), היא (על פי תכונת הליניאריות):

$$X(j\omega) = X_{\text{even}}(j\omega) + X_{\text{odd}}(j\omega)$$

החלק הזוגי של $x(t)$ תורם את החלק הממשי של $X(j\omega)$: $X_{\text{even}}(j\omega) = \text{Re}\{X(j\omega)\}$

החלק האי-זוגי של $x(t)$ תורם את החלק המדומה של $X(j\omega)$: $X_{\text{odd}}(j\omega) = j \text{Im}\{X(j\omega)\}$

$$x[n] = x^*[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) : \text{DTFT}$$

$$x(t) = x^*(t) \xrightarrow{FS} a_k = [a_{-k}]^* : \text{FS}$$

$$x[n] = x^*[n] \xrightarrow{DFS} a_k = [a_{-k}]^* : \text{DFS}$$

דוגמאות:

$$1. \text{ נתון האות הרציף והתמרת פורייה שלו: } a > 0 \quad e^{-at}u(t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{a + j\omega}$$

נמצא את ההתמרה של האות: $a > 0 \quad x(t) = e^{-a|t|}$

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = \frac{2[e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)]}{2} = 2\text{Even}\{e^{-at}u(t)\}$$

עבור $a > 0$ וממשי הביטוי הוא ממשי, ולכן על פי תכונה 1. של סימטריה נקבל:

$$2\text{Even}\{e^{-at}u(t)\} \xrightarrow{FT} 2\text{Re}\left\{\frac{1}{a + j\omega}\right\} = 2\text{Re}\left\{\frac{a - j\omega}{(a + j\omega)(a - j\omega)}\right\} =$$

$$= 2\text{Re}\left\{\frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2}\right\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

הערה חשובה: ברוב המקרים יש להשתמש בתכונות כדי למצוא את התמרת פורייה ולא ללכת ישר לנוסח האינטגרלית.

$$2. \text{ נתון האות הדידי והתמרת פורייה שלו: } |a| < 1 \quad a^n u[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

נמצא את ההתמרה של האות: $|a| < 1 \quad x[n] = a^{|n|}$

$$x[n] = a^n u[n] + a^{-n} u[-n] - \delta[n]$$

הוספנו $\delta[n]$ כי עבור $n = 0$ נקבל פעמיים את הערך של $x[0] = a^0 = 1$

$$x[-n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{-j\omega}) \quad \text{על פי תכונת היפוך ציר הזמן נקבל:}$$

ולכן:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} - 1 =$$

$$= \frac{1 - ae^{j\omega} + 1 - ae^{-j\omega} - (1 - ae^{j\omega})(1 - ae^{-j\omega})}{(1 - ae^{j\omega})(1 - ae^{-j\omega})} =$$

$$= \frac{2 - ae^{j\omega} - ae^{-j\omega} - 1 + ae^{j\omega} + ae^{-j\omega} - a^2}{1 - ae^{j\omega} - ae^{-j\omega} + a^2} = \frac{1 - a^2}{1 - a(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) + a^2} =$$

$$= \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2}$$

10. דואליות:

FT: כזכור נוסחאות התמרת פורייה: סינתזה: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

אנליזה: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

הנוסחאות מאוד דומות אחת לשנייה, התפקידים של $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ מתחלפים. נראה דוגמא כיצד ניתן להשתמש בזה ואח"כ נמצא דואליות באופן כללי:

ראינו בדוגמא לעיל כי: $x(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$

ולכן ע"פ נוסחת הסינתזה: $e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \omega^2} e^{j\omega t} d\omega$

נכפיל ב- (2π) את שני האגפים ונקבל:

$$2\pi e^{-|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \omega^2} e^{j\omega t} d\omega$$

נגדיר: $t' \leftrightarrow -t$ ונקבל: $2\pi e^{-|t'|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \omega^2} e^{-j\omega t'} d\omega$

נגדיר: $\omega \leftrightarrow t' \leftrightarrow t$ ונקבל: $2\pi e^{-|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + t^2} e^{-j\omega t} dt$

כלומר: $\frac{2}{1 + t^2} \xrightarrow{FT} 2\pi e^{-|t|}$

מצאנו מההתמרה של $x(t) = e^{-|t|}$ את ההתמרה של $x(t) = \frac{2}{1 + t^2}$

כעת נראה זאת באופן כללי:

יהי $x(t) \xrightarrow{FT} X(\omega)$ [הערה: ה- j אינו פרמטר בפונקציה ולכן בפיתוח הבא לא נשתמש בו כדי לבטא את $X(j\omega)$]

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

נכפיל ב- (2π) את שני האגפים ונקבל: $2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

נגדיר: $t' \leftrightarrow -t$ ונקבל: $2\pi x(-t') = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t'} d\omega$

נגדיר $\omega \leftrightarrow t' \leftrightarrow t$ ונקבל: $2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$

כלומר נקבל כי: $x(t) \xrightarrow{FT} X(\omega) \quad X(t) \xrightarrow{FT} 2\pi x(-\omega)$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| \geq T_1 \end{cases} \xrightarrow{FT} X(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$$

דוגמא: נתון אות חלון: $w_1 \leftrightarrow T_1$ נחליף: ונקבל:

$$\frac{2 \sin(t w_1)}{t} \xrightarrow{FT} \begin{cases} 2\pi & |\omega| < w_1 \\ 0 & |\omega| \geq w_1 \end{cases}$$

$$\frac{\sin(t w_1)}{\pi t} \xrightarrow{FT} \begin{cases} 1 & |\omega| < w_1 \\ 0 & |\omega| \geq w_1 \end{cases}$$

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad \text{סינתזה:}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad \text{אנליזה:}$$

$$x[n] \xrightarrow{DFS} a[k] \quad \text{נסמן: } a_k = a[k] \text{ נקבל:}$$

$x[n], a[k]$ מחזוריים במחזור N . לכן יש אפשרות להחליף ביניהם:

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a[k] e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \Rightarrow \{n \leftrightarrow -n\}$$

$$\frac{1}{N} x[-n] = \frac{1}{N} \sum_{k \in \langle N \rangle} a[k] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \Rightarrow \{k \leftrightarrow n\}$$

$$\frac{1}{N} x[-k] = \frac{1}{N} \sum_{k \in \langle N \rangle} a[k] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

$$a[n] \xrightarrow{DFS} \frac{1}{N} x[-k] \quad \text{כלומר:}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \quad \text{סינתזה:} \quad \text{FS: ע"פ הנוסחאות:}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) e^{-jk \frac{2\pi}{T} \tau} d\tau \quad \text{אנליזה:}$$

לא ניתן למצוא דואליות בין סדרה של מקדמים ובין אינטגרל.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{סינתזה:} \quad \text{DTFT: ע"פ הנוסחאות:}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad \text{אנליזה:}$$

לא ניתן למצוא דואליות בין סדרה של מקדמים ובין אינטגרל.

אמנם - יש דואליות בין טור פורייה לבין ההתמרה הבדידה.

$$x[n] = a_n \quad \text{לדוגמא: נתון האות הרציף: } x(t) \xrightarrow{FS} a_k \text{ ונתון האות הבדיד:}$$

האות הבדיד מתנהג כמו מקדמי פורייה של האות הרציף. נוכל לבטא את התמרת פורייה

בזמן בדיד של $x[n]$ בעזרת $x(t)$:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-j\omega n} = \{k \leftrightarrow n\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k e^{-j\omega k} = \text{הצגה של } x(t) \text{ כטור פורייה}$$

בנוסחה של טור פורייה האקספוננט צריך להיות: $e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$
 כלומר: $x[n] = a_n \xrightarrow{DTFT} X(-\omega\frac{T}{2\pi})$
 נוודא שזה נכון: האות $x(t)$ מחזורי T . התמרת פורייה של זמן בדיד היא מחזורית 2π
 ואכן: $X(-\omega\frac{T}{2\pi})$ מחזורית 2π .

המשך - תכונות טורי פורייה והתמרת פורייה:

11. הכפלה במישור הזמן:

FT: ראינו לעיל כי הכפלה במישור התדר היא קונבולוציה במישור הזמן:

$$z(t) = g(t) * h(t) \xrightarrow{FT} Z(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$$

נסתכל על Z כפונקציה של הזמן, כלומר כ- $Z(t)$. מתכונת הדואליות נקבל:

$$Z(t) \xrightarrow{FT} 2\pi \cdot z(-\omega)$$

$$Z(t) = G(t)H(t) \xrightarrow{FT} 2\pi \cdot g(-\omega) * h(-\omega) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta)h(-\omega - \theta)d\theta \quad (*)$$

נסמן: $x(t) = G(t)$; $y(t) = H(t)$; $X(j\omega) = 2\pi \cdot g(-\omega)$; $Y(j\omega) = 2\pi \cdot h(-\omega)$ נציב במשוואה (*) לעיל:

$$x(t)y(t) \xrightarrow{FT} 2\pi \cdot \frac{X(j\omega)}{2\pi} * \frac{X(j\omega)}{2\pi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(-j\theta)}{2\pi} \frac{Y(j(\omega + \theta))}{2\pi} d\theta$$

נציב: $\{\theta \leftrightarrow -\theta\}$ נקבל:

$$x(t)y(t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j(\omega - \theta))d\theta = \frac{1}{2\pi} X(j\theta) * Y(j\theta)$$

כלומר: אם נתון אות שהוא מכפלה של שתי אותות בזמן, אזי במישור התדר הוא יהיה קונבולוציה בין שני ההתמרות של שני האותות (כפול קבוע)

FS:

$$x(t)y(t) \xrightarrow{FS} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

$$x[n]y[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\theta}) \otimes Y(e^{j\theta}) \quad :DTFT$$

$$x[n]y[n] \xrightarrow{DFS} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} \quad :DFS$$

בזמן בדיד אנחנו מקבלים שמכפלה במישור הזמן היא קונבולוציה ציקלית במישור התדר

תנאי התכנסות:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau \quad :FS$$

האינטגרל הוא גבול שלא תמיד מתכנס. גם הסכום הוא אינסופי ולא תמיד מתכנס.

1. קיום מקדמי פורייה: תנאי מספיק לקיום של מקדמי פורייה a_k הוא שלאות $x(t)$ הספק סופי:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

לאותות מחזוריים של אנרגיה אינסופית, ולכן אנחנו בודקים הספק, כלומר: האנרגיה במחזור

אחד חלקי זמן המחזור. ההתכנסות כאן היא לאיבר בודד a_k

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad :2. \text{ התכנסות ב-} L_2 \text{ נגדיר את הסכום החלקי:}$$

מתכנס ב- L_2 לאות $x(t)$ בעל הספק סופי, אם:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T |x_N(t) - x(t)|^2 dt = 0$$

ההתכנסות כאן היא לאות $x(t)$ ולא למספר בודד. אמנם, זה לא מבטיח שהסכום $x_N(t)$ שווה זהותית לאות $x(t)$, שהרי כיון שההתכנסות היא תחת אינטגרל יכול להיות הבדל בנקודות בודדות בין הסכום לאות והאינטגרל לא יושפע מזה. כלומר: המדד הזה לא מבטיח שוויון מוחלט.

3. התכנסות נקודתית: הסכום $x_N(t)$ מתכנס נקודתית (כלומר: לכל נקודה t_0) ל- $\frac{x(t_0^+) + x(t_0^-)}{2}$.

אם מתקיימים תנאי דיריכלה:

$$x(t_0^+) = \lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} x(t_0 + \varepsilon)$$

1. קיימים הגבולות החד-צדדיים בנקודה t_0 :

$$x(t_0^-) = \lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} x(t_0 - \varepsilon)$$

2. קיימות הנגזרות החד-צדדיות בנקודה t_0 :

$$x'_R(t_0) = \lim_{\substack{t > t_0 \\ t \rightarrow t_0}} \frac{x(t) - x(t_0^+)}{t - t_0^+}$$

$$x'_L(t_0) = \lim_{\substack{t < t_0 \\ t \rightarrow t_0}} \frac{x(t) - x(t_0^-)}{t - t_0^-}$$

הערות:

- אם $x(t)$ רציפה אזי האות מתכנס ל- $x(t)$ לכל נקודה t_0 . אם היא לא רציפה – ההתכנסות היא לאמצע הקפיצה
- התנאים הם תנאים מספיקים ולא הכרחיים, כלומר: קיימים אותות שלא מקיימים את התנאים ובכל זאת יש התכנסות.
- ההגדרה המתמטית היא: $\lim_{N \rightarrow \infty} |x_N(t_0) - x(t_0)| = 0$. קודם בוחרים t_0 ואח"כ מחשבים התכנסות.

ד. ניתן להגדיר תנאים חלופיים לתנאי דיריכלה:

1. $x(t)$ חסום

2. ישנו מס' סופי של נקודות מינימום ומקסימום במחזור אחד של האות

3. ישנו מס' סופי של קפיצות במחזור אחד של האות

תנאים אלה מתקיימים ברוב האותות.

4. התכנסות במידה שווה: אם בנוסף לנאמר לעיל הנגזרת משני הצדדים קיימת וסופית לכל t אזי

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sup_t |x_N(t) - x(t)| \right] = 0$$

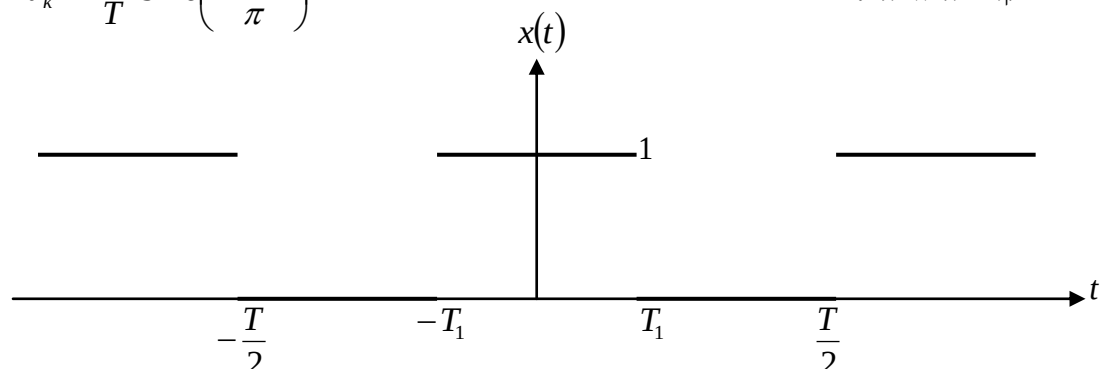
הטור $x_N(t)$ מתכנס במידה שווה. ההגדרה המתמטית היא:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -T_1 < t < T_1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{כאשר } T_1 < \frac{T}{2}$$

דוגמא: נתון האות הרציף מחזורי במחזור T , כאשר $T_1 < \frac{T}{2}$:

$$a_k = \frac{2T_1}{T} \sin c \left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi} \right)$$

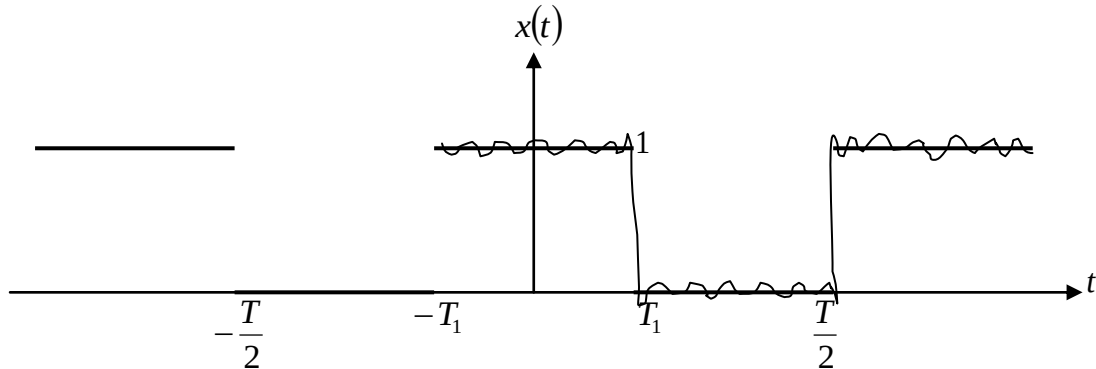
מקדמי הטור הם:



ההספק של האות הוא סופי, ולכן קיימים מקדמי פורייה לטור. נבדוק כיצד נראה הסכום של כמות מסוימת של מקדמים:

כאן המרצה הראה במטל"ב שעבור N קטן אין עדיין התכנסות של הסכום לכל נקודה אבל עבור N הולך וגדל מתקיימת התכנסות לכל נקודה. בנקודת הקפיצה של האות יש $over-shoot$ של הסכום שנשאר למרות שאנחנו מגדילים את N . זה נובע מכך שאין התכנסות במידה שווה – בגלל הקפיצות.

לכל זמן $t < T_1$ שנבחר אזי האות יתכנס ל-1 בסופו של דבר עבור N מסוים. ככל שהזמן יותר קרוב ל- T_1 כך ההתכנסות תהיה יותר איטית (צריך N גדול יותר). אם הזמן הוא בדיוק $t = T_1$ אזי לעולם לא תהיה התכנסות אלא רק לאמצע הקפיצה.



כלומר: האות מתכנס נקודתית והוא מתכנס במובן L_2 אבל הוא לא מתכנס במידה שווה. לסיכום: לכל אות נורמלי תהיה התכנסות נקודתית והתכנסות ב- L_2 . ניתן לעבוד עם אותות שיש בהם קפיצות וההתכנסות היא לא במ"ש – כלומר: נהיה מוכנים לסבול את ה- $over-shoot$ בכיוון ההפוך: אם ידועים מקדמי פורייה של הטור - a_k . אזי:

1. התכנסות ב- L_2 : אם a_k סכימים בריבוע, כלומר: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, אזי קיים אות $x(t)$ המקיים:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_T \left| \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} - x(t) \right|^2 dt = 0$$

2. התכנסות במ"ש: אם a_k סכימים בהחלט, כלומר: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty$, אזי מובטחת התכנסות במ"ש

דוגמא: נתון הגל הריבועי לעיל, מחזורי במחזור T , כאשר $T_1 < \frac{T}{2}$: $x(t) = \begin{cases} 1 & -T_1 < t < T_1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

ראינו לעיל שאין התכנסות במ"ש. כעת נוכיח זאת ע"י שנראה שמקדמי פורייה של האות אינם סכימים בהחלט. נניח כי $\frac{T_1}{T} = \frac{M}{N}$ הוא מס' רציונלי (לצורך הפשטות)

$$a_k = \frac{2T_1}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T} T_1 k\right)}{\pi k}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T} T_1 k\right)}{k} \right| = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(2\pi \frac{M}{N} k\right)}{k} \right|$$

כעת נגדיר: $k = k'N + 1$. נבצע סכימה רק על k המקיימים זאת. ברור כי:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(2\pi \frac{M}{N} k\right)}{k} \right| > \frac{1}{\pi} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\left[2\pi \frac{M}{N} (k'N + 1)\right]}{k'N + 1} \right|$$

שהרי הורדנו איברים מהסכום. כעת: מספר – שלם $Mk' = \frac{M}{N} k'N$, ולכן:

$$\sin\left[2\pi \frac{M}{N} (k'N + 1)\right] = \sin\left[2\pi \frac{M}{N} k'N + 2\pi \frac{M}{N}\right] = \sin\left[2\pi \frac{M}{N}\right]$$

כלומר: המונה של הסכום אינו תלוי באינדקס k' , ולכן ניתן להוציא אותו:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| > \frac{1}{\pi} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin[2\pi \frac{M}{N} (k'N+1)]}{k'N+1} \right| = \frac{1}{\pi} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin[2\pi \frac{M}{N}]}{k'N+1} \right| =$$

$$= \frac{\sin[2\pi \frac{M}{N}]}{\pi} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{k'N+1} \right| \rightarrow \infty$$

שהרי זהו טור הנדסי אינסופי. קיבלנו שכאשר האות אינו רציף – אזי במישור התדר יהיה לאות זנב שמן (שאמנם שואף ל-0 אבל לאט) ולכן בהתמרה ההפוכה הוא לא יתן לאות להתכנס במ"ש. DFS: בטור פורייה בדיד אין בעיית התכנסות שהרי אין כאם סכום אינסופי אלא סכום על N איברים. DTFT: כאן הטור הבדיד הוא לא מחזורי, ולכן יש בעיית התכנסות. כיון ש-DTFT דואלי ל-FS לכן:

1. התכנסות ב-L₂ (במישור התדר): קיים $X(j\omega)$ במובן שגיאה ריבועית, אם האות $x[n]$ סכים בריבוע, כלומר: יש לו אנרגיה סופית:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

2. התכנסות במ"ש: ההתמרה $X(j\omega)$ מתכנסת במ"ש (אם נעשה התמרה הופכית) אם האות $x[n]$ סכים בהחלט, כלומר:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

FT: בשני הכיוונים (מעבר מזמן לתדר ובחזרה) ישנה בעיית התכנסות.

1. קיום ההתמרה: $X(j\omega)$ קיים במובן שגיאה ריבועית אם לאות $x(t)$ אנרגיה סופית:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

$$2. \text{ התכנסות ההתמרה ההופכית: נסמן: } x_{\omega}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

א. התכנסות ב-L₂ (במישור התדר): לכל אות $x(t)$ בעל אנרגיה סופית הסכום האינסופי של ההתמרה ההפוכה $x_{\omega}(t)$ מתכנס ב-L₂ לאות $x(t)$ אם:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x_{\omega}(t) - x(t)|^2 dt = 0$$

הערה: כיון שהאות $x(t)$ אינו מחזורי אנחנו מחפשים אנרגיה סופית ולא הספק (כמו שחיפשנו בטור פורייה עבור אות מחזורי)

ב. התכנסות נקודתית: מתקיים: $x_{\omega}(t_0) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [x(t_0^+) + x(t_0^-)]$ אם מתקיימים התנאים המספיקים הבאים:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. ל- $x(t)$ מס' סופי של נקודות מינימום ומקסימום בכל מקטע סופי

3. ל- $x(t)$ מס' סופי של קפיצות סופיות בכל מקטע סופי

3. תופעת גיבס: (בהתמרת פורייה)

א. אם $x(t)$ אינה רציפה, אזי ההתכנסות של $x_{\omega}(t)$ אינה במ"ש. נקבל תופעת גיבס בנקודות

הקפיצה (*over-shoot*) של 9% מערך הפונקציה בנקודת הקפיצה

ב. ההתכנסות לעבר ההתמרה $X(j\omega)$ בנקודות אי הרציפות אינה במ"ש. לדוגמא: כאשר

נעבור מפונקציית sinc בזמן לפונקציית חלון שאינה רציפה בתדר – נקבל

over-shoot

12. משפטי פלנשארל ופרסבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \right] y^*(t)dt = \quad \text{FT}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \right]^* d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y^*(j\omega)d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad \text{זהו משפט פלנשארל. אם נציב } x(t) = y(t) \text{ נקבל:}$$

זהו שוויון פרסבל. האנרגיה של האות נשמרת במעבר מזמן לתדר.

$$\frac{1}{T} \int_T x(t)y^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_k^* \quad \text{FS: שוויון פלנשארל:}$$

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{שוויון פרסבל:}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega \quad \text{DTFT: שוויון פלנשארל:}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad \text{שוויון פרסבל:}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n]y^*[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k b_k^* \quad \text{DFS: שוויון פלנשארל:}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k \in \langle N \rangle} |a_k|^2 \quad \text{שוויון פרסבל:}$$

13. גזירה והפרש:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} x(t) \right] e^{-j\omega t} dt \quad \text{FT: נגדיר: } y(t) = \frac{d}{dt} x(t). \text{ אזי התמרת פורייה של } y(t) \text{ היא:}$$

$$\text{נשתמש באינטגרציה בחלקים: } \int_a^b u(t)v'(t)dt = u(t)v(t) \Big|_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt \quad \text{לפיכך:}$$

$$= \frac{1}{2\pi} x(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-j\omega)x(t)e^{-j\omega t} dt = j\omega \cdot X(j\omega)$$

אם לאות יש אנרגיה סופית, אזי הערך שלו ב- ∞ וב- $-\infty$ שואף ל-0. לפיכך הביטוי השמאלי הוא 0.

$$\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{FT} j\omega \cdot X(j\omega)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k \quad \text{FS:}$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad \text{DTFT: אין הגדרה של נגזרת בזמן בדיד. אבל יש הגדרה של הפרש:}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} X(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \xrightarrow{DFS} (1 - e^{-jk\omega_0}) a_k \quad \text{DFS:}$$

התמרת פורייה של פונקציה קבועה

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) = 0 \xrightarrow{FT} (j\omega)X(j\omega) = 0 \quad \text{FT: נתון האות } x(t) = \text{const} \text{ אזי מתקיים:}$$

$$X(j\omega) = 0 \quad \text{כלומר: לכל } \omega \neq 0 \text{ נקבל שהתמרת פורייה היא:}$$

כעת, ננחש כי התמרת פורייה של פונקציית קבועה היא פונקציית הלם $\delta(\omega)$, כלומר:

$$x(t) = c \xrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi \cdot c \cdot \delta(\omega)$$

נבדוק את ההתמרה ההפוכה ונקבל:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot c \cdot \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = c$$

$$x(t) = 1 \xrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega) \quad \text{מקרה פרטי:}$$

$$x(t) = u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(t) = x_{\text{even}} + x_{\text{odd}}$$

דוגמא:

$$x_{\text{even}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{FT} \pi \cdot \delta(\omega)$$

$$x_{\text{odd}} = \frac{1}{2} \text{sign}(t)$$

$$\frac{d}{dt} x_{\text{odd}} = \delta(t) \quad \text{נמצא את ההתמרה של } x_{\text{odd}} \text{ ע"י תכונת התמרת הנגזרת:}$$

$$\delta(t) \xrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\frac{d}{dt} x_{\text{odd}} = \delta(t) \xrightarrow{FT} j\omega X_{\text{odd}}(j\omega) = 1 \quad \text{ולכן:}$$

$$X_{\text{odd}}(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

אנחנו רוצים לדעת מה קורה כאשר $\omega = 0$. ידוע שהתמרה של אות אי-זוגי היא אי-זוגית:

$$X_{\text{odd}}(j\omega) = -X_{\text{odd}}(-j\omega)$$

$$\omega = 0: X_{\text{odd}}(j \cdot 0) = -X_{\text{odd}}(-j \cdot 0) = -X_{\text{odd}}(0) = 0$$

שהרי משהו שווה למינוס של עצמו רק אם הוא 0.
לסיכום נקבל:

$$u(t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \Big|_{\omega=0}$$

$$x[n] = c \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) = 2\pi c \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l) \quad \text{DTFT:}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi c \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = c \quad \text{נבדוק ע"י ההתמרה ההפוכה:}$$

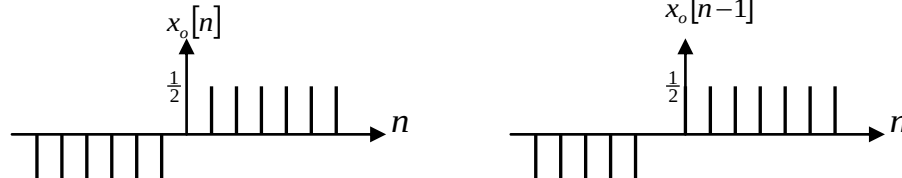
בכל מחזור יש רק פונקציית הלב אחת ולכן לאינטגרל נכנס רק ההלב שבין $-\pi$ ל- π .

$$x[n] = u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{2} \text{sign}[n] \quad \text{נמצא התמרת פורייה של מדרגה בזמן בדיד:}$$

הפונקציה היא בזמן בדיד ולכן חשוב לשים לב לנקודה $n = 0$. לכן הוספנו את הביטוי $\frac{1}{2} \delta[n]$ כדי להראות ש- $u[n=0] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

$$x_e[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \delta[n] \xrightarrow{DTFT} X_e(e^{j\omega}) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n) + \frac{1}{2}$$

$$x_o[n] - x_o[n-1] = \frac{1}{2} \text{sign}[n] - \frac{1}{2} \text{sign}[n-1] = \frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1]$$



רואים שיש הבדל רק בשתי נקודות: $n = 0, n = 1$.

$$\frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1] = \frac{1}{2} (\delta[n] + \delta[n-1]) \xrightarrow{FT} \frac{1}{2} (1 + e^{-j\omega})$$

ע"פ תכונת ההפרש נקבל:

$$x_o[n] - x_o[n-1] \xrightarrow{DTFT} (1 - e^{-j\omega}) X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} (1 + e^{-j\omega})$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}} \quad \text{ולכן:}$$

זה נכון לכל $\omega \neq 2\pi m$ כפולה שלמה של 2π . נבדוק מה קורה עבור $\omega = 0$:

$$x_o[n] = -x_o[-n]$$

$$\Rightarrow x_o[n=0] = -x_o[0] = 0 \xrightarrow{DTFT} X(e^{j0}) = 0$$

לסיכום נקבל:

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}} =$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n) + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1+e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}} \right] =$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n) + \frac{1}{2} \left[\frac{1-e^{-j\omega} + 1+e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}} \right] =$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$$

הרצאה 6 27.4.2010

$$u(t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \Big|_{\omega=0}$$

בשיעור שעבר ראינו כי:

$$u[n] \xrightarrow{DTFT} \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi m) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$$

14. אינטגרציה וסכימה:

$$FT: \text{נגדיר: } y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = x(t) * u(t) \text{ אזי:}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \cdot X(j \cdot 0)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = y(t) + c \quad \pi\delta(\omega) \cdot X(j \cdot 0)$$

נכפול את המשוואה העליונה ב- $j\omega$ ונקבל:

$$j\omega Y(j\omega) = X(j\omega) + \pi\delta(\omega) \cdot X(j \cdot 0) \cdot j\omega = X(j\omega)$$

הנחנו שהאות $x(t)$ רציף, ולכן ערך ההתמרה בתדר $\omega = 0$ הוא ערך סופי. לכן ניתן להוריד את הביטוי השני ולהישאר עם $X(j\omega)$.

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} X(j\omega)$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] u[n-m] = x[n] * u[n] \quad \text{נגדיר: DTFT}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi m)$$

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi m)$$

15. התמרת פורייה של אותות מחזוריים:

FT: תהי $X(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ התמרת פורייה. נחפש את ההתמרה ההפוכה:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad \text{כלומר:}$$

התמרת פורייה של אות הרמוני היא פונקציית דלתא.

כעת, יהי $x(t)$ אות מחזורי רציף במחזור T. (הבענו אותו באמצעות טור פורייה)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{FT} X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

השתמשנו בליניאריות של התמרת פורייה. הביטוי השמאלי הוא טור פורייה של אות $x(t)$

הניתן כסכום של אותות הרמוניים. הביטוי הימני הוא התמרת פורייה של הטור.

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m) \quad \text{DTFT}$$

כעת, יהי $x[n]$ אות מחזורי במחזור N. נביע אותו באמצעות טור פורייה:

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi m)$$

נגדיר: $l = Nm + k$. נקבל:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_{l-Nm} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[\omega - (l - Nm)\omega_0 - 2\pi m] =$$

$$= \sum_{k \in \langle N \rangle} a_{l-Nm} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[\omega - l\omega_0 + (N\omega_0 - 2\pi)m]$$

מתקיים: $N\omega_0 - 2\pi = N \frac{2\pi}{N} - 2\pi = 0$ ולכן:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - l\omega_0)$$

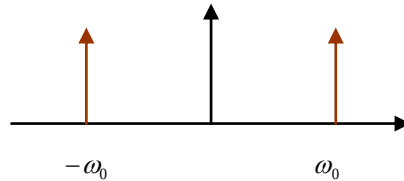
זאת משום ש- $a_k = a_{Nm+k}$ (מחזורי במחזור N). לסיכום:

$$\sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \xrightarrow{DTFT} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi a_l \delta(\omega - l\omega_0)$$

מחזוריות ההתמרה היא: $N\omega_0 = N \frac{2\pi}{N} = 2\pi$

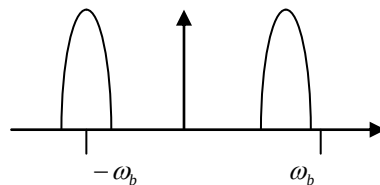
לסיכום:

- התמרת פורייה של אות הרמוני בודד היא פונקציית הלם
 - התמרת פורייה של אות מחזורי (סכום של אותות הרמוניים) היא רכבת הלהמים.
 - אות המכיל תדר יחיד הינו בדר"כ מרוכב.
 - אות ממשי המכיל שני תדרים יהיה אות מסוג: $\cos(\omega_0 t)$. התמרת פורייה שלו היא:
- $$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \xrightarrow{FT} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

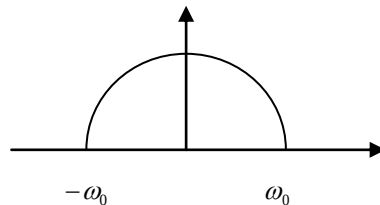


אות כזה משתנה בקצב של $\frac{\omega_0}{2\pi}$

- אות המכיל רק רכיבי תדר הקרובים לתדר ω_b משתנה בקירוב בקצב של $\frac{\omega_b}{2\pi}$



- אות המכיל רכיבי תדר עד תדר ω_b משתנה לכל היותר בקצב $\frac{\omega_b}{2\pi}$:



סינון

מסנן הוא רכיב המשנה את ההרכב הספקטראלי (במישור התדר) של האות. מסננים נפוצים הם:

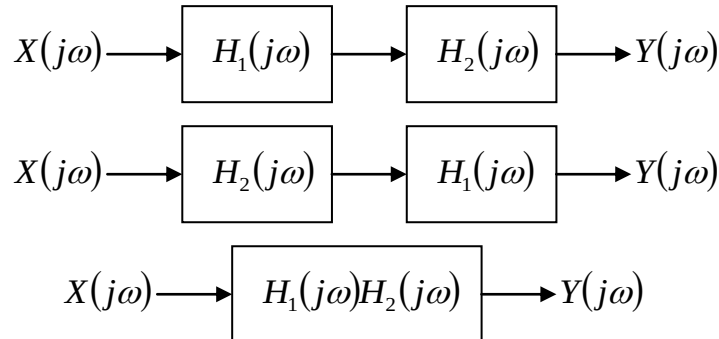
- LPF – מעביר רק תדרים נמוכים של האות. חוסם תדרים גבוהים
- HPF – מעביר תדרים גבוהים וחוסם תדרים נמוכים של האות.
- BPF – מעביר תדרים בתחום מסוים וחוסם תדרים גבוהים יותר או נמוכים יותר

כל מערכת LTI היא בעצם מסנן.

בזמן רציף מוצא מערכת LTI הוא:

בזמן בדיד מוצא מערכת LTI הוא:

מערכות LTI הן קומוטטיביות - שלושת המערכות הבאות הן שקולות:



בזמן רציף: משפחה של מערכות LTI בזמן רציף מתוארת ע"י משוואה דיפרנציאלית:

$$\sum_{l=0}^N a_l \frac{d^l}{dt^l} y(t) = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

נעשה התמרת פורייה לשני אגפי המשוואה (השוויון נשמר משום שהתמרת פורייה יחידה):

$$\sum_{l=0}^N a_l (j\omega)^l Y(j\omega) = \sum_{l=0}^M b_l (j\omega)^l X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l (j\omega)^l}{\sum_{l=0}^N a_l (j\omega)^l}$$

בזמן בדיד: משפחה חשובה של מערכות LTI בזמן בדיד מתוארת ע"י משוואת הפרש:

$$\sum_{l=0}^N a_l y[n-l] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

התמרת פורייה של שני אגפי המשוואה תיתן:

$$\sum_{l=0}^N a_l e^{-j\omega l} Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l} X(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{l=0}^N a_l e^{-j\omega l}}$$

דוגמא: נתכנן מסנן FIR (Finit Impulse Response) - זהו מסנן בעל תגובת הלם סופית. נתכנן אותו בעזרת תכונת ההכפלה:

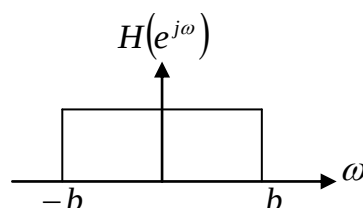
$$\sum_{l=0}^N a_l y[n-l] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

נתחיל מהמד"ר לעיל:

$$y[n] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad \text{נציב: } a_0 = 1, N = 0 \text{ נקבל:}$$

נראה שהתגובה להלם היא לכל היותר $M+1$ דגימות בזמן:

$$h[n] = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \xrightarrow{DTFT} H(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}$$



דוגמא: נתכנן מסנן LPF.

המסנן מחזורי 2π . במישור הזמן נקבל:
$$h[n] = \frac{b}{\pi} \sin c\left(\frac{b_n}{\pi}\right) \xrightarrow{DTFT} H(e^{j\omega})$$

הבעיה היא שלא ניתן לממש את התגובה להלם, משום שהיא אינסופית בזמן. לכן נממש עבור אות סופי כלשהו, כלומר, נכפיל אותו ב- $w[n]$ המוגדרת ע"י:

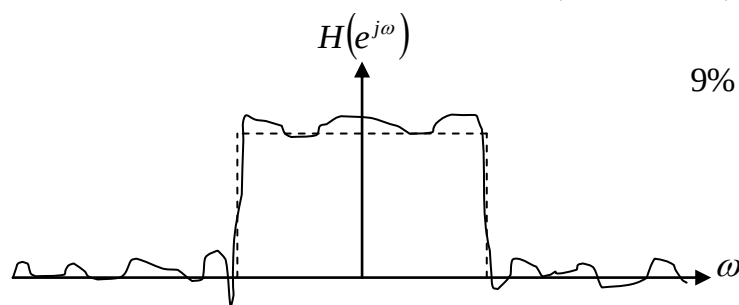
$$w[n] = \begin{cases} 1 & -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$h[n]w[n] = \begin{cases} \frac{b}{\pi} \sin c\left(\frac{b}{\pi}\right) & -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} W(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

נקבל:

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left[\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

זהו גרעין דיריכלה. נקבל שתוצאת הקונבולוציה היא:



כמו בטור פורייה יש לנו over-shoot של 9% אך ככל שניקח N גדול יותר הוא יהיה נקודתי יותר.

סיכום

- ישנם 4 סוגי התמרות:

זמן רציף	זמן בדיד	
FS	DFS	אות מחזורי
FT	DTFT	אות לא מחזורי

- הקשר בין טור פורייה להתמרת פורייה:

עבור $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$ מחזורי במחזור T מתקיים:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

עבור $x[n] \xrightarrow{FS} a_k$ מחזורי במחזור N מתקיים: $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

- הקשר בין התמרת פורייה לטורי פורייה:

נתון $x(t)$ אות לא מחזורי. אזי: $x_{per}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT) \xrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$

נתון $x[n]$ אות לא מחזורי. אזי: $x_{per}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN] \xrightarrow{DFS} a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$

- קיפול של אות בזמן = מתיחה של אות בתדר

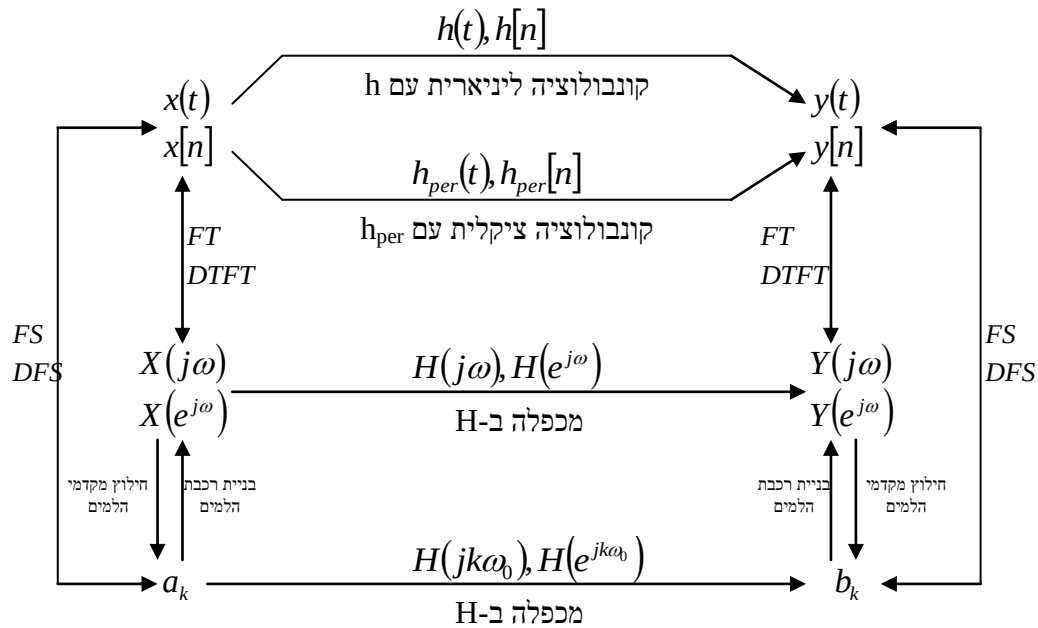
- דגימה של אות בזמן = קיפול של אות בתדר

- דואליות:

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$X(t) \xrightarrow{FT} 2\pi x(-j\omega)$$

- תגובה של מערכת LTI:

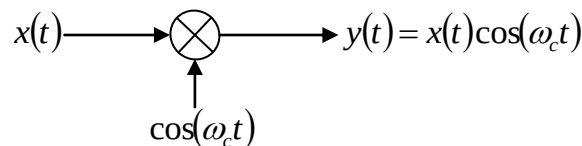


יישומים בתקשורת

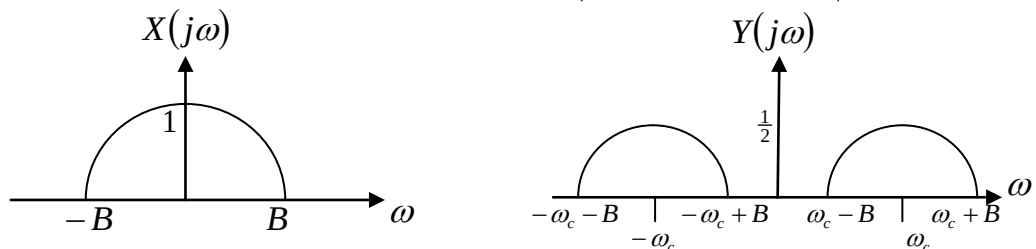
אפנון: שיטה להזיז את האות בתדר. מטרת האפנון:
 - ריבוב: יכולת לשדר כמה אותות בתדרים שונים באותו תווך. (כך פועלות תחנות הרדיו)
 - לאפשר עבודה בתחום תדרים המתאים לערוץ.

אפנון (Double Side Band) DSB

נתון אות $x(t)$ מוגבל סרט B במישור התדר, כלומר:
 $X(j\omega) \neq 0 \quad |\omega| \leq B$
 $X(j\omega) = 0 \quad |\omega| > B$
 אנחנו מעוניינים להזיז את תחום התדרים של האות. לפיכך נכפיל את האות $x(t)$ ב- $\cos(\omega_c t)$ - גל נושא.



במישור התדר נקבל הזזה של האות באופן הבא:

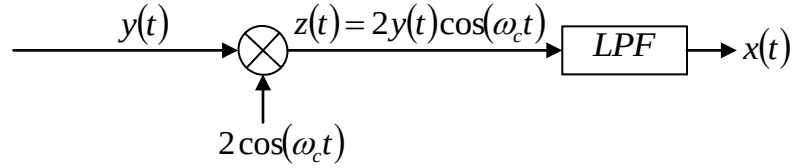


$$y(t) = x(t)\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2} x(t) [e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}]$$

$$\xrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2} \{X[j(\omega + \omega_c)] + X[j(\omega - \omega_c)]\}$$

רוחב הסרט הוא רוחב התדרים בצד החיובי של ציר ω . נשים לב שרוחב הסרט של $X(j\omega)$ הוא B ואילו רוחב הסרט של האות המשודר $Y(j\omega)$ הוא $2B$. כיון שאנחנו יכולים לשלוט על תדר הגל הנושא ω_c - אנחנו יכולים לשלוט על תחום התדרים שאותו אנחנו רוצים לשדר.

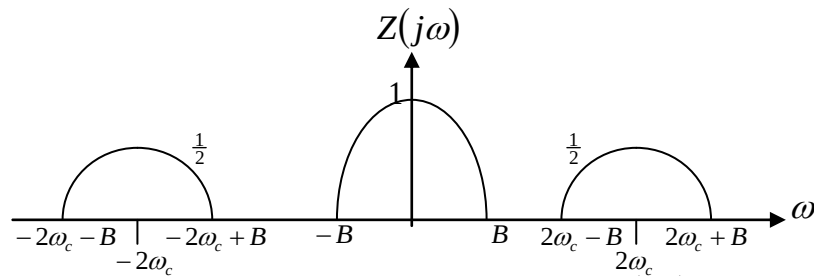
כעת נגלה את האות בעזרת הגלאי הבא:



כפלנו את האות המשודר ב- $2 \cos(\omega_c t)$. נקבל: $z(t) = 2y(t) \cos(\omega_c t) = y(t)(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})$
 נעבור למישור התדר: $e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t} \xrightarrow{FT} 2\pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$

ולכן (ע"פ מעבר מכפל בזמן לקונבולוציה בתדר):
 $y(t) = \frac{1}{2} x(t)[e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}] \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2} \{X[j(\omega - \omega_c)] + X[j(\omega + \omega_c)]\}$

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} Y(j\omega) * 2\pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] = \\ &= \frac{1}{2} \{X[j(\omega - \omega_c)] + X[j(\omega + \omega_c)]\} * [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] = \\ &= \frac{1}{2} \{X[j(\omega - \omega_c + \omega_c)] + X[j(\omega - \omega_c - \omega_c)] + \\ &\quad + X[j(\omega + \omega_c + \omega_c)] + X[j(\omega + \omega_c - \omega_c)]\} = \\ &= \frac{1}{2} \{X[j(\omega - 2\omega_c)] + 2X(j\omega) + X[j(\omega + 2\omega_c)]\} = \\ &= \frac{1}{2} X[j(\omega - 2\omega_c)] + X(j\omega) + \frac{1}{2} X[j(\omega + 2\omega_c)] \end{aligned}$$



כעת, על מנת להוציא את $X(j\omega)$ עלינו להעביר את האות דרך מסנן LPF כאשר נבחר את רוחב הפס שלו בתחום $B \leq \omega \leq 2\omega_c - B$ (עדיף כמה שיותר קרוב ל-B כדי לסנן רעשים).

הבעיה היא שהאפנון הזה לא עובד במציאות. כיון שהמשדר הוא לא אידיאלי יקח לו זמן לעבד את האות ולשדר אותו ואז האות האות ישודר בהשהיה של τ שניות. נראה כיצד זה משפיע על המקלט:

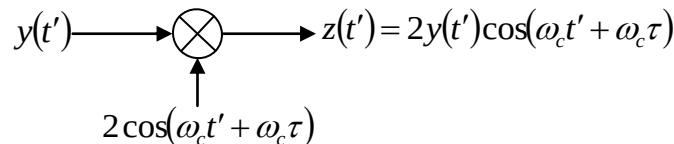
האות שיכנס למשדר יהיה בהשהיה: $x(t - \tau)$. המשדר כופל את האות בגל נושא $\cos(\omega_c t)$ ונקבל:

$$\tilde{y}(t) = y(t - \tau) = x(t - \tau) \cos[\omega_c(t - \tau)] = x(t - \tau) \cos[\omega_c t - \omega_c \tau]$$

נוצר הפרש פאזה של $\omega_c \tau$ במשדר. המקלט לא יודע זאת ולכן הוא יתייחס לאות כאילו הוא הגיע בזמן.

נגדיר: $t - \tau \leftrightarrow t'$. ואז נקבל: $2 \cos(\omega_c t) = 2 \cos(\omega_c t' + \omega_c \tau)$, $y(t - \tau) = y(t')$

[התייחסנו לאות המגיע כאל אות חדש (בפועל הוא הגיע בהשהיה של τ שניות)]. המקלט כופל את האות הנכנס ב- $2 \cos(\omega_c t' + \omega_c \tau)$. נקבל בגלאי:



$$z(t') = y(t') \cdot 2 \cos[\omega_c(t' + \tau)] = y(t')[e^{j\omega_c(t'+\tau)} + e^{-j\omega_c(t'+\tau)}]$$

נעבור למישור התדר:

$$y(t') = x(t') \cos[\omega_c t'] \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2} \{X[j(\omega - \omega_c)] + X[j(\omega + \omega_c)]\}$$

$$e^{j\omega_c(t'+\tau)} + e^{-j\omega_c(t'+\tau)} \xrightarrow{FT} 2\pi[e^{j\omega_c \tau} \delta(\omega - \omega_c) + e^{-j\omega_c \tau} \delta(\omega + \omega_c)]$$

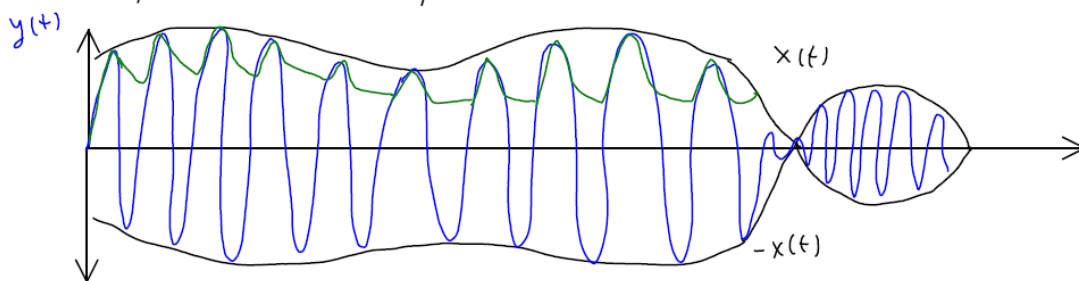
$$Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi} Y(j\omega) * 2\pi[e^{j\omega_c \tau} \delta(\omega - \omega_c) + e^{-j\omega_c \tau} \delta(\omega + \omega_c)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \{X[j(\omega - \omega_c)] + X[j(\omega + \omega_c)]\} * [e^{j\omega_c \tau} \delta(\omega - \omega_c) + e^{-j\omega_c \tau} \delta(\omega + \omega_c)] = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ e^{j\omega_c \tau} X[j(\omega - \omega_c + \omega_c)] + e^{j\omega_c \tau} X[j(\omega + \omega_c + \omega_c)] + \right. \\
&= \frac{1}{2} \left\{ e^{-j\omega_c \tau} X[j(\omega - \omega_c - \omega_c)] + e^{-j\omega_c \tau} X[j(\omega + \omega_c - \omega_c)] \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \{e^{j\omega_c \tau} X(j\omega) + e^{j\omega_c \tau} X[j(\omega + 2\omega_c)] + e^{-j\omega_c \tau} X[j(\omega - 2\omega_c)] + e^{-j\omega_c \tau} X(j\omega)\} = \\
&= \frac{1}{2} e^{j\omega_c \tau} X[j(\omega + 2\omega_c)] + X(j\omega) \cos(\omega_c \tau) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_c \tau} X[j(\omega - 2\omega_c)]
\end{aligned}$$

אם נפעיל מסנן LPF נקבל את המוצא: $\cos(\omega_c \tau) X(j\omega) \xrightarrow{FT^{-1}} \cos(\omega_c \tau) \cdot x(t)$

קיבלנו שאות המוצא תלוי בהשהיה τ . אם $\cos(\omega_c \tau) \neq 1$ לא נקבל את האות כמו שהוא. למעשה קשה מאוד לממש את האות כיון שהתזמון המדויק שבו האות נכנס למשדר אינו ידוע. עבור השהיה קטנה $\tau \rightarrow 0$ נקבל כמעט את כל האות, אבל עבור השהיה τ שתיתן: $\omega_c \tau \rightarrow \frac{\pi}{2}$ האות יעלם ולא נקלוט אותו!
לכן בדר"כ לא משתמשים באפנון כזה באופן מעשי.

אפנון AM



ניתן לשחזר את האות בתנאי שהאמפליטודה העליונה לעולם לא יורדת מ-0. לכן נוסיף לאות איבר חיובי שישאיר את האות תמיד חיובי:

$$y(t) = [x(t) + a] \cos(\omega_c t) = \tilde{x}(t) \cos(\omega_c t)$$

$$x(t) + a > 0$$

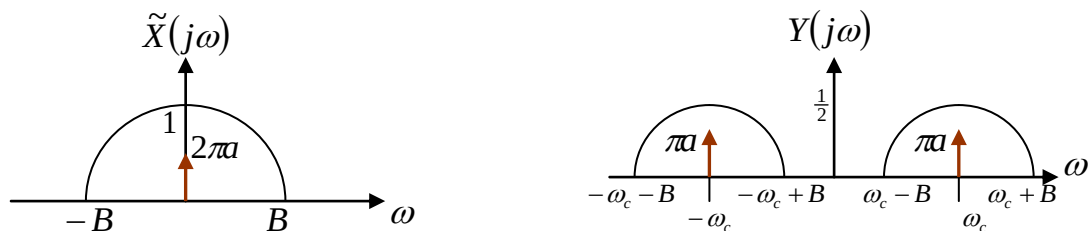
המטרה היא למצוא a שיקיים:

$$\tilde{x}(t) = x(t) + a \xrightarrow{FT} \tilde{X}(j\omega) = X(j\omega) + 2\pi \delta(\omega)$$

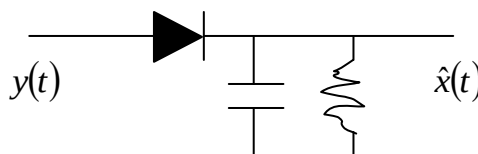
במישור התדר נקבל:

$$y(t) = [x(t) + a] \cos(\omega_c t)$$

$$\xrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2} X[j(\omega - \omega_c)] + \frac{1}{2} X[j(\omega + \omega_c)] + \pi \delta(\omega - \omega_c) + \pi \delta(\omega + \omega_c)$$

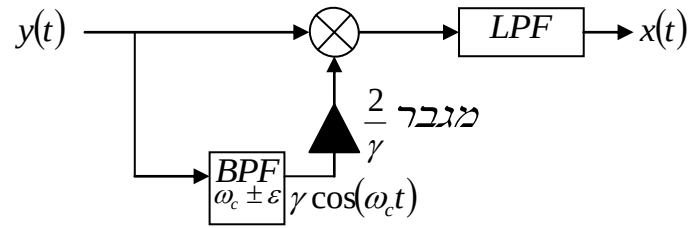


אפנון כזה קל לגלות ע"י מעגל חשמלי שמחבר את הפיקים של האות: (בירוק)



כאשר המתח עולה הקבל נטען עד לפיק, כאשר המתח יורד הקבל מתפרק (תלוי בתדר). ככל שהתדר ω_c יותר גבוה הקבל מתפרק יותר לאט והאות יקלט יותר טוב.

הבעיה היא ששידור ההלם מבזבז הספק. מצד שני אם ניצור הלם נמוך יותר גלאי ההלם לא יעבוד, כי אם נשדר את ההלם על הספק נמוך אזי התנאי $x(t) + a > 0$ לא יתקיים. ניתן לשפץ את המקלט באופן הבא:



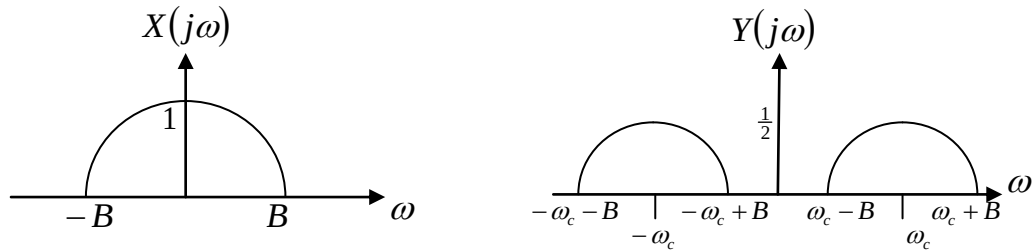
הפעלנו מסנן צר על איזור הדלתא. הוא מסנן את הגל הנושא ומגביר אותו. אח"כ מפעילים מסנן LPF והוא מוציא את האות.

מקלט כזה נקרא: $DSB-RC$ (Double Side-Band Reduced Carrier)

המקלט הקודם נקרא: $DSB-SC$ (Double Side-Band Supressed carrier)

אפנון (Double Side Band) DSB

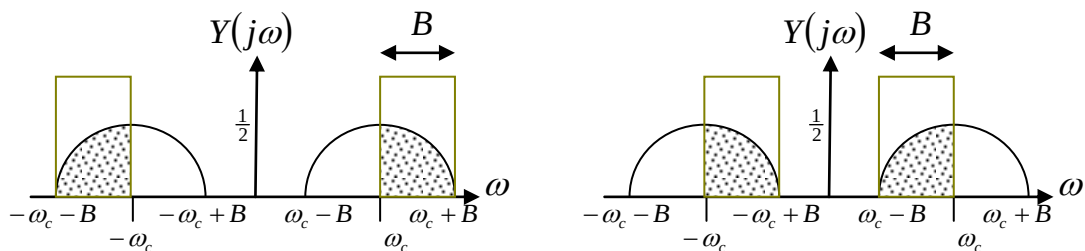
ראינו בשיעור שעבר שאפנון DSB הוא שידור של האות כאשר התדרים שלו מוזזים והם סביב ω_c :



ראינו שאפנון DSB מאוד רגיש לשינוי פאזה של האות. (השהיה במישור הזמן). כמו"כ דיברנו על שימוש בגל נושא, ושע"י גלאי מעטפת נוכל לשחזר אותו. אם הגל הנושא חלש - לא נוכל להפעיל גלאי מעטפת, אבל נוכל לשחזר את הגל הנושא שמכפילים בו בשביל שלא תהיה בעיה עם הפאזה. אפנון כזה נקרא DSB-RC. הבעיה היא שבאפנון DSB יש בזבוז של רוחב סרט. ניתן לראות כי רוחב הסרט של החלק החיובי של $Y(j\omega)$ הוא $2B$ שהוא כפול מרוחב הסרט החיובי של האות עצמו. לפיכך כדי לשדר את האות אנחנו משתמשים ברוחב סרט כפול - וזה דבר בזבוזי. כמו"כ לא ניתן לשדר אות מרוכב - ולכן יש להקפיד שהאות המשודר יהיה סימטרי במישור התדר כלומר: עלינו לשדר גם את החלק השלילי של האות.

אפנון (Single side Band) SSB

אפנון זה אנו משדרים רק חלק מהאות. אם נשים לב ניתן להפיק את כל המידע של האות ע"י שימוש באחד משתי האפשרויות הבאות:



ע"מ לשדר רק את החלקים המקווקווים עלינו להפעיל מסנן BPF (בירוק). דרך נוספת היא להשתמש במסנן הילברט. זהו מסנן בעל תגובה להלם:

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \xrightarrow{FT} \hat{H}(j\omega) = -j \operatorname{sign}(\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases}$$

$|\hat{H}(j\omega)|$

$\angle \hat{H}(j\omega)$

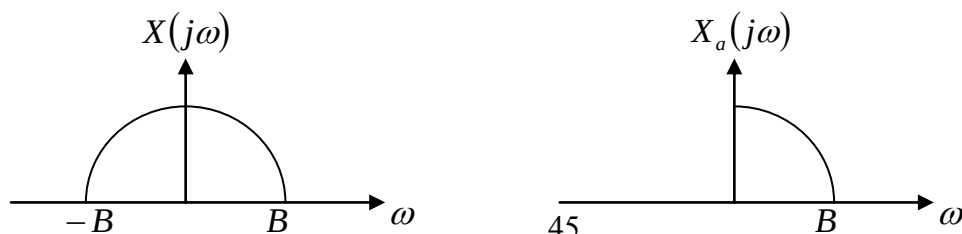
היתרון בשימוש במסנן הילברט הוא העובדה שהמסנן הוא ממשי. אילו היינו רוצים לסנן באמצעות LPF המסנן שהיינו צריכים לתכנן לא היה ממשי כי הוא לא סימטרי.

אפנון (Upper Side Band) SSB-USB

שלב 1: העברת החלק החיובי של האות בלבד:

$$x_a(t) = \frac{1}{2} x(t) + \frac{j}{2} [x(t) * \hat{h}(t)]$$

$$\xrightarrow{FT} X_a(j\omega) = \frac{1}{2} X(j\omega) + \frac{j}{2} X(j\omega) [-j \operatorname{sign}(\omega)] = X(j\omega) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\omega) \right]$$



שלב 2: הצמדה של האות. האות שקיבלנו הוא לא ממשי (כי במישור התדר הוא לא סימטרי), לכן עלינו להפוך אותו לממשי ע"י הצמדה של האות והזזה שלו לתחום התדרים שאנו רוצים. הזזה של האות במישור התדר מתבצעת ע"י הכפלה באקספוננט:

$$y(t) = 2 \operatorname{Re}\{x_a(t)e^{j\omega_c t}\} = x_a(t)e^{j\omega_c t} + x_a^*(t)e^{-j\omega_c t}$$

כעת, ניקח את החלק הממשי של האות:

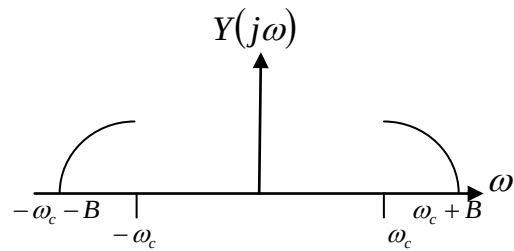
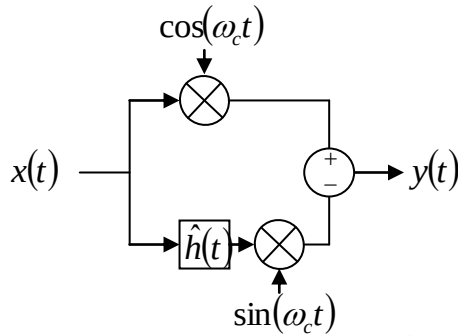
$$Y(j\omega) = X_a[j(\omega - \omega_c)] + X_a^*[-j(\omega + \omega_c)]$$

$$y(t) = 2 \operatorname{Re}\{x_a(t)e^{j\omega_c t}\} = 2 \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2}x(t) + \frac{j}{2}(x(t) * \hat{h}(t))\right\}e^{j\omega_c t} =$$

נבנה את האפנן:

$$= x(t)\operatorname{Re}\{e^{j\omega_c t}\} + [x(t) * \hat{h}(t)]\operatorname{Re}\{je^{j\omega_c t}\} =$$

$$= x(t)\cos(\omega_c t) - [x(t) * \hat{h}(t)]\sin(\omega_c t)$$

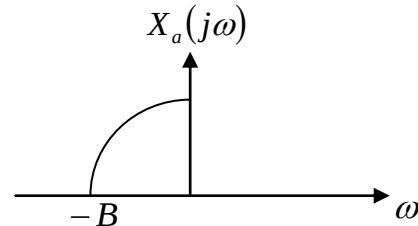
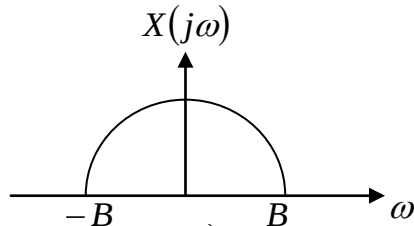


אפנן (Low Side Band) SSB-LSB

שלב 1:

$$x_a(t) = \frac{1}{2}x(t) - \frac{j}{2}[x(t) * \hat{h}(t)]$$

$$\xrightarrow{FT} X_a(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\omega) - \frac{j}{2}X(j\omega)[-j\operatorname{sign}(\omega)] = X(j\omega)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sign}(\omega)\right]$$



$$y(t) = 2 \operatorname{Re}\{x_a(t)e^{j\omega_c t}\} = x_a(t)e^{j\omega_c t} + x_a^*(t)e^{-j\omega_c t}$$

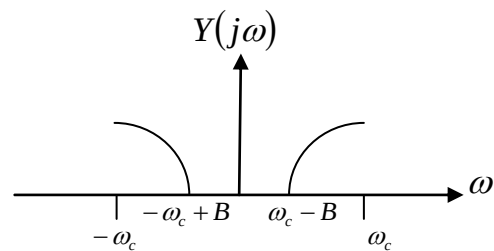
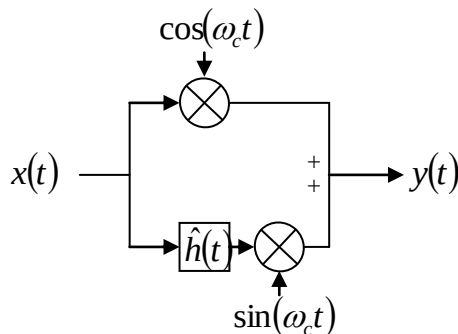
$$Y(j\omega) = X_a[j(\omega - \omega_c)] + X_a^*[-j(\omega + \omega_c)]$$

$$y(t) = 2 \operatorname{Re}\{x_a(t)e^{j\omega_c t}\} = 2 \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2}x(t) - \frac{j}{2}(x(t) * \hat{h}(t))\right\}e^{j\omega_c t} =$$

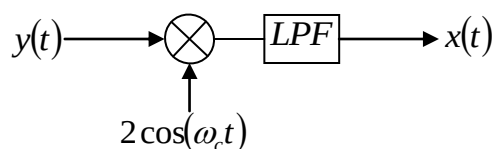
נבנה את האפנן:

$$= x(t)\operatorname{Re}\{e^{j\omega_c t}\} - [x(t) * \hat{h}(t)]\operatorname{Re}\{je^{j\omega_c t}\} =$$

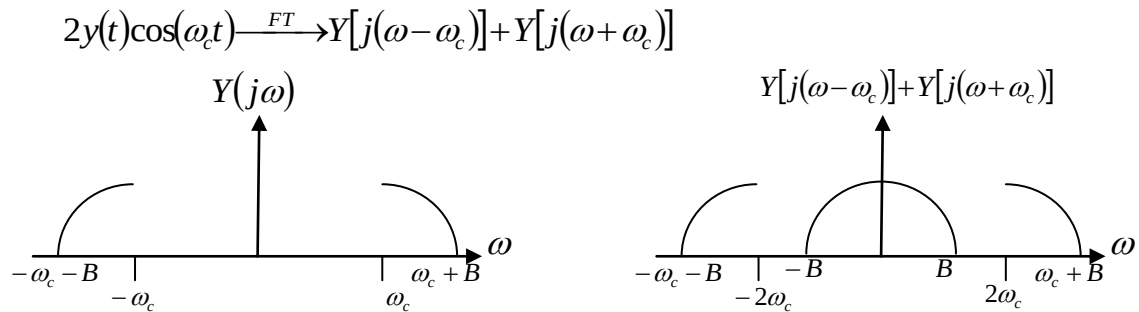
$$= x(t)\cos(\omega_c t) + [x(t) * \hat{h}(t)]\sin(\omega_c t)$$



שלב 2:



כעת נבנה גלאי לאות SSB.

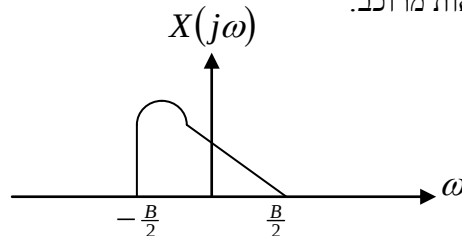


האות באמצע הוא האות המקורי. לכן נעביר דרך LPF ונוציא את האות המקורי:

$$\begin{aligned}
 & LPF\{y(t)\cos(\omega_c t)\} \\
 & \xrightarrow{FT} LPF\{Y[j(\omega - \omega_c)] + Y[j(\omega + \omega_c)]\} = \\
 & = LPF\{X_a[j(\omega - 2\omega_c)] + X_a^*(-j\omega) + X_a(j\omega) + X_a^*[-j(\omega + 2\omega_c)]\} = \\
 & = X_a^*(-j\omega) + X_a(j\omega) \\
 & \xrightarrow{FT^{-1}} x_a(t) + x_a^*(t) = \frac{1}{2}x(t) - \frac{j}{2}[x(t)*\hat{h}(t)] + \frac{1}{2}x(t) + \frac{j}{2}[x(t)*\hat{h}(t)] = x(t)
 \end{aligned}$$

בשיעור שעבר הוכחנו כי אפנון DSB רגיש מאוד לכל שינוי פאזה והאות במוצא אף יכול להתאפס עבור הפרש פאזה מסוים. הבעיה נוצרת כי מקבלים את חצי העיגול פעם מימין ופעם משמאל בפאזה שונה והסכום שלהם יכול להתאפס.

במקרה של אפנון SSB הם לא יכולים לבטל האחד את השני כי הם בתדרים אחרים. המורכבות היא הצורך לייצר את הגל הנושא בתדר מדויק על מנת שלא תיווצר הזזה. כעת נראה כיצד משדרים אות מרוכב:



התמרת פורייה של אות מרוכב היא ממשית ואינה סימטרית. בדר"כ אנו עוסקים באות ממשי, שההתמרה שלו היא מרוכבת ולכן את הגל נצטרך לצייר פעמיים - עבור החלק המדומה ועבור החלק הממשי, או עבור הערך המוחלט והפאזה.

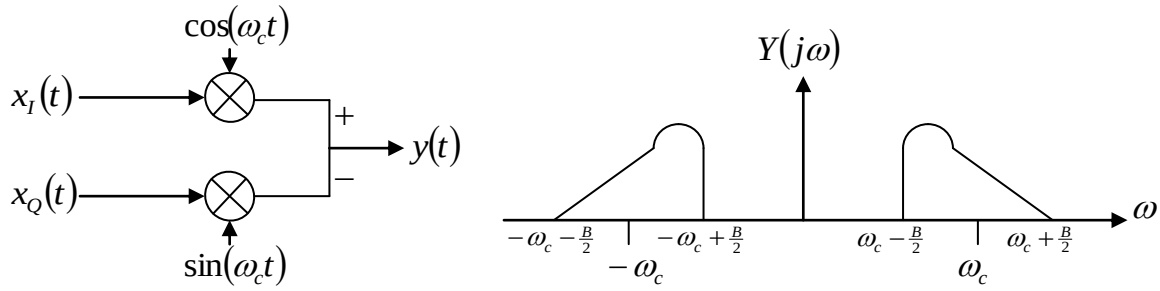
על מנת לשדר את האות אנו צריכים להפוך את האות לממשי, כלומר - להפוך לסימטרי במישור התדר. תחילה נזיז את האות במישור התדר על מנת שיהיה מוגדר רק עבור תדרים חיוביים:

$$e^{j\omega_c t} x(t) \xrightarrow{FT} X(\omega - \omega_c)$$

כעת נהפוך את האות לממשי, ע"י הוספת השיקוף שלו:

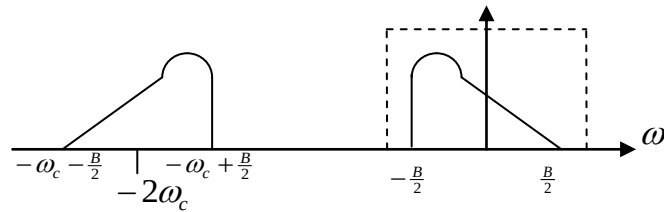
$$\begin{aligned}
 y(t) &= \text{Re}\{e^{j\omega_c t} x(t)\} = \text{Re}\{e^{j\omega_c t} [x_I(t) + jx_Q(t)]\} = \\
 &= x_I(t)\text{Re}\{e^{j\omega_c t}\} + x_Q(t)\text{Re}\{je^{j\omega_c t}\} = x_I(t)\cos(\omega_c t) - x_Q(t)\sin(\omega_c t)
 \end{aligned}$$

על מנת לייצג אות מרוכב נצטרך לעשות שתי כניסות למערכת, כאשר כניסה אחת מייצגת את החלק הממשי $x_I(t)$ והכניסה השנייה מייצגת את החלק המרוכב $x_Q(t)$. המערכת הזאת פשוטה למימוש, ואין צורך להשתמש במסנן הילברט.



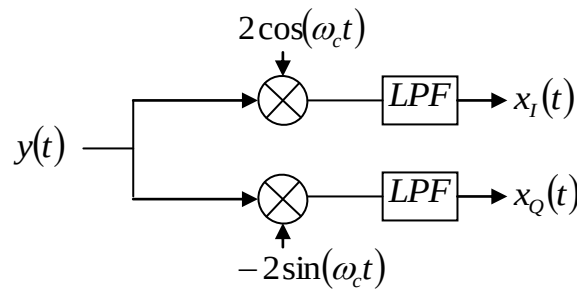
כעת נבנה את הגלאי. נרצה להזיז חזרה את האות המשודר באופן הבא:

$$e^{-j\omega_c t} y(t) \xrightarrow{FT} Y[j(\omega + \omega_c)]$$



ע"מ להוציא את האות המקורי נעביר דרך LPF. באופן אנליטי נקבל:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2LPF\{e^{-j\omega_c t} y(t)\} = 2LPF\{y(t)\cos(\omega_c t) - jy(t)\sin(\omega_c t)\} = \\ &= 2LPF\{y(t)\cos(\omega_c t)\} - 2jLPF\{y(t)\sin(\omega_c t)\} \end{aligned}$$



נשים לב ששידור של אות מרוכב בעל רוחב סרט B זהה לשידור אות ממשי בעל רוחב סרט 2B (באות מרוכב מודדים את כל רוחב הסרט משום שהוא לא סימטרי במישור התדר ולכן אם ניקח רק את החלק החיובי - נאבד מידע).

נראה כיצד משפיעה שגיאת פאזה על האות המשודר:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= 2LPF\{e^{-j(\omega_c t + \theta)} y(t)\} = \\ &= LPF\{2 \operatorname{Re}\{x(t)e^{j\omega_c t}\} e^{-j(\omega_c t + \theta)}\} = LPF\{[x(t)e^{j\omega_c t} + x^*(t)e^{-j\omega_c t}] e^{-j(\omega_c t + \theta)}\} = \\ &= LPF\{x(t)e^{-j\theta} + x^*(t)e^{-j(2\omega_c t + \theta)}\} = x(t)e^{-j\theta} \end{aligned}$$

ה-LPF יסנן את הביטוי הצמוד $x^*(t)e^{-j(2\omega_c t + \theta)}$ משום שהוא מוזז בתדר $2\omega_c + \theta$.

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x(t)e^{-j\theta} = [x_I(t) + jx_Q(t)] [\cos\theta - j\sin\theta] = \\ &= [x_I(t)\cos\theta + x_Q(t)\sin\theta] + j[x_Q(t)\cos\theta - x_I(t)\sin\theta] \end{aligned}$$

אם $\theta = 0$ אזי אין השהיה ונקבל את האות $x(t) = x_I(t) + jx_Q(t)$

אם $\theta = 90^\circ$ נקבל ההיפך: $x_Q(t) + jx_I(t)$

עבור כל תדר אחר נקבל ערבוב של שניהם. אם אנחנו יודעים את θ אזי נוכל להכפיל ב- $e^{j\theta}$ ולקבל את האות $x(t)$. נעשה זאת ע"י מעגל מיוחד שמוצא את ההשהיה θ .

תקשורת ספרתית

בתקשורת אנלוגית אנחנו מטפלים באות בזמן רציף כמו שהוא. בתקשורת ספרתית אנחנו מקבלים סדרה של ביטים (אות בדיד) ועלינו להפוך אותו לאות רציף על מנת לשדר אותו. נייצג את הביטים בסדרת דגימות המכילות מידע ספרתי. זאת יכולה להיות כל סדרה של מספרים $x[n]$.

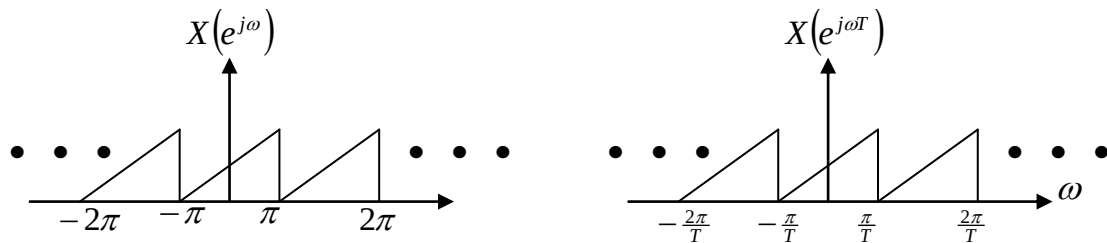
האפשרויות שלנו הם: $x[n] \in \{-3, -1, 1, 3\}$, $x[n] \in \{\pm 1 \pm j\}$, $x[n] \in \{-1, 1\}$, $x[n] \in \{0, 1\}$. במקלט נצטרך להעביר את כל הדגימות האלו, אלא שיהיה לנו רעש (לא נכנס לזה). תחילה נניח כי סדרת הביטים היא ממשית. נייצג אותה באמצעות אות רציף עם הלמים באופן הבא:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[t - nT] \quad T - \text{הרווח הקבוע בין ההלמים.}$$

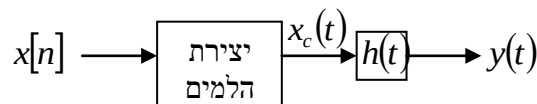
בחרנו הלמים כיון שזה הייצוג הכי פשוט, אלא שהוא בעייתי, כי רוחב הסרט הוא אינסופי, והוא קשה למימוש כי אין מציאות של מתח אינסופי. נמצא את רוחב הסרט של האות המשודר $x_c(t)$ ע"י התמרה:

$$\begin{aligned} X_c(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[t - nT] \right] e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\infty}^{\infty} \delta[t - nT] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega nT} = X(e^{j\omega T}) \end{aligned}$$

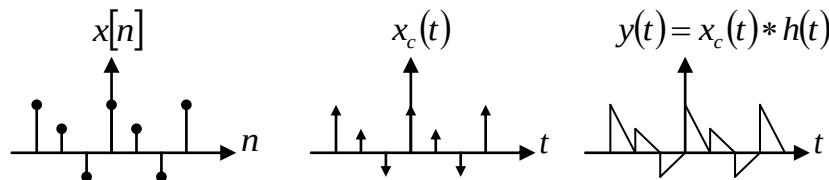
קיבלנו שהאות הרציף $x_c(t)$ מיוצג במישור התדר ע"י התמרת פורייה של האות הבדיד $x[n]$ בשינוי סקלה. מכאן ניתן לראות שרוחב הסרט הוא אינסופי, שהרי התמרת פורייה של אות בדיד היא מחזורית 2π , ולכן ההתמרה $X(e^{j\omega T})$ מחזורית $\frac{2\pi}{T}$. ההבדל בין $X(e^{j\omega})$ ובין $X(e^{j\omega T})$ הוא בשינוי הסקלה:



כיון שרוחב הסרט הוא אינסופי, אזי על מנת לשדר את האות עלינו למצוא דרך להביא את האות לרוחב סרט סופי. לכן נעביר את האות דרך מסנן כלשהו $h(t)$ (נבחר צורת משולש) ונקבל אות סופי:

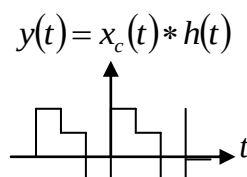


$$y(t) = x_c(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[t - nT] * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h[t - nT]$$



$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אילו היינו בוחרים מסנן מלבני, היינו מקבלים מלבנים:

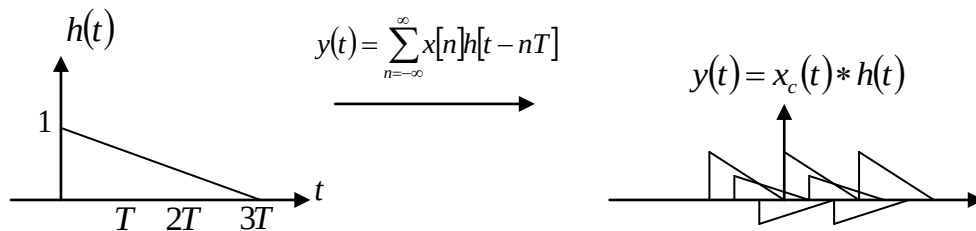


נבדוק את המסנן המלבני במישור התדר:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \xrightarrow{FT} H(j\omega) = e^{-j\omega \frac{T}{2}} \frac{2 \sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega}$$

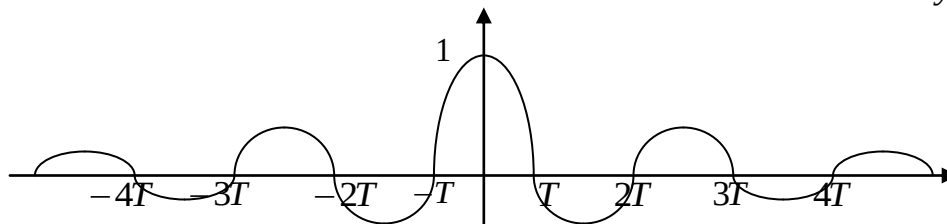
הבעיה היא שכיון ש- $X_c(j\omega)$ לא מתאפס במישור התדר וגם $H(j\omega)$ לא מתאפס במישור התדר נקבל עדיין שהאות $Y(j\omega) = X_c(j\omega)H(j\omega)$ הוא בעל רוחב סרט אינסופי.

לפיכך יש לדרוש שהמסנן $h(t)$ יהיה בעל רוחב סרט סופי. בציר הזמן המסנן האידיאלי צריך להיות אינסופי וזה בלתי אפשרי. מספיק שנדרוש הוא יהיה מאוד ארוך. לדוג': נראה כיצד נראה מסנן בעל אורך $3T$ במישור הזמן:



נקבל דריכה והמוצא התערבב לנו. ככל שנשאף את האורך של $h(t)$ לאינסוף - כך נקבל רוחב סרט סופי במישור התדר ולא תהיה דריכה.

נבחן שיטה אחרת לשדר את האות הבדיד $x[n]$ כך שנוכל לשחזר אותו אח"כ מתוך $y(t)$. נשים לב שאנו מעוניינים לשחזר רק נקודות דגימה בודדות. לפיכך נבחר $h(t)$ שמתאפס כל T שניות ובזמן אפס הערך שלו הוא 1. בחירה כזאת של $h(t)$ תיתן לנו בכל כפולה של T את ה- $x[n]$ המתאים. כל מה שקורה בין הכפולות לא מעניין אותנו. כעת, על מנת לשחזר את $x[n]$ ניקח דגימה כל T שניות מהאות $y(t)$.



לסיכום - יש למצוא מסנן המקיים את שתי הדרישות הבאות:

א. מסנן אינסופי בזמן (וסופי במישור התדר)

ב. מסנן המתאפס כל T שניות ומקיים $h(t=0)=1$

המסנן $h(t)$ צריך להיות ממשי. מה שיגרום לאות להיות מרוכב הוא $x[n]$ וכך ננצל גם את החלק הממשי וגם את החלק המדומה להעביר מידע. למעשה יצרנו קשר בין העולם הרציף ובין העולם הבדיד.

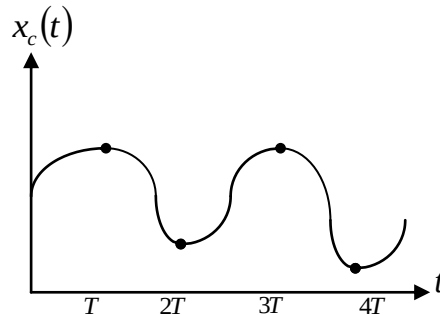
מעבר מאות בזמן רציף לאות בזמן בדיד

הרבה פעמים קיימת בעיה הפוכה, כלומר: עלינו לקחת את בזמן רציף ולדגום אותו - להפוך אותו לבדיד ואז לשחזר בחזרה את האות הרציף מתוך האות הבדיד. את התנאים לדגימה ושחזור אותות רציפים נראה בשבוע הבא.

מעבר מאות רציף לאות בדיד

נתון אות בזמן רציף $x_c(t)$. יצרנו ממנו אות בזמן בדיד $x_d[n]$ ע"י דגימה של האות הרציף כל T שניות:
 $x_d[n] = x_c(nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$x_c(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \delta(t - nT) dt$$



האם אפשר לשחזר את האות הרציף מתוך האות הבדיד? לכאורה הדבר בלתי אפשרי, שהרי בין כל שתי נקודות אפשר להעביר אינסוף קווים ואיך נדע איזה קו להעביר?
 נראה שעבור משפחה מסוימת של אותות ישנו תנאי על זמן הדגימה T שיאפשר שחזור מדויק של האות המקורי הרציף.
 אנחנו דוגמים את האות על מנת להכניס את המידע למחשב. מחשב הוא מכונה ספרתית המקבלת 0 ו-1. היא מערכת זולה, קטנה וקלה יותר לתכנון. חשוב לנו לא לאבד מידע בשחזור ולכן אנו רוצים שחזור מדויק של האות המקורי. נבדוק מתי האות שנדגום באמת ייצג את האות בזמן הרציף.

משפט הדגימה

מעתה נשתמש ב- ω לתיאור אות בזמן רציף במישור התדר, וב- Ω לאות בזמן בדיד במישור התדר. נבטא את האות הבדיד $x_d[n]$ במישור התדר:

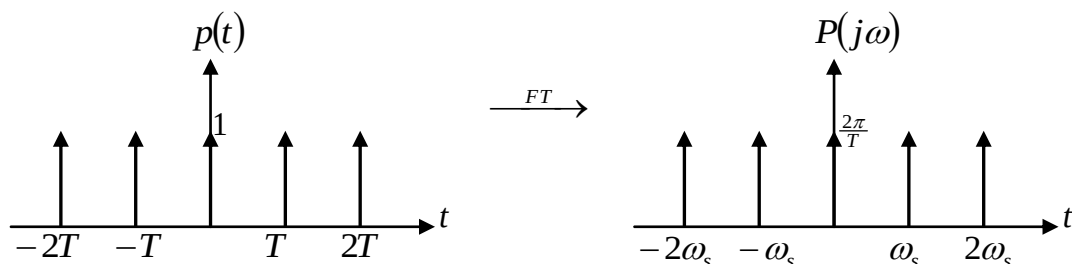
$$\begin{aligned} x_d[n] &\xrightarrow{DTFT} X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \delta(t - nT) dt \right] e^{-j\Omega n} = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{-j\Omega n} \delta(t - nT)] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{-j\Omega \frac{t}{T}} \delta(t - nT)] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] e^{-j\Omega \frac{t}{T}} dt = X_p(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}} \end{aligned}$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\frac{\Omega}{T})$$

קשרנו בין התמרת פורייה של האות $x_d[n]$ בזמן בדיד לבין התמרת פורייה של האות $x_p(t)$ בזמן רציף.

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{FT} P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad \text{הגדרנו:}$$

$p(t)$ היא רכבת הלהבים בזמן רציף. $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ - המרחק בין ההלמים במישור התדר:



$$x_p(t) = x_c(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t-nT) \xrightarrow{FT} X_p(j\omega)$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\omega - k\omega_s)]$$

$x_p(t)$ הוא מכפלת האות הדגום ברכבת ההלמים. במישור התדר נקבל קונבולוציה עם $\delta(t - k\omega_s)$ שנותנת סכום אינסופי של הזזות.

נוכיח כי ההתמרה של $x_d[n]$ שבטאנו בעזרת ההתמרה של $x_p(t)$ אכן מחזורית 2π :

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\omega - k\omega_s)] \Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}, \omega_s=\frac{2\pi}{T}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j\frac{\Omega - 2\pi k}{T}]$$

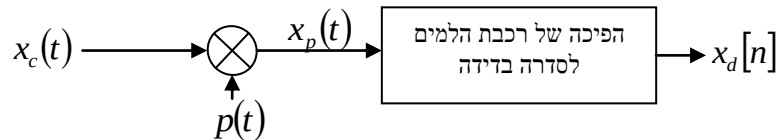
לסיכום, נתאר את פעולת הדגימה בשני שלבים:

א. לקחנו את האות הנתון $x_c(t)$ וכפלנו אותו ברכבת הלמים $p(t)$. קיבלנו רכבת הלמים בזמן רציף.

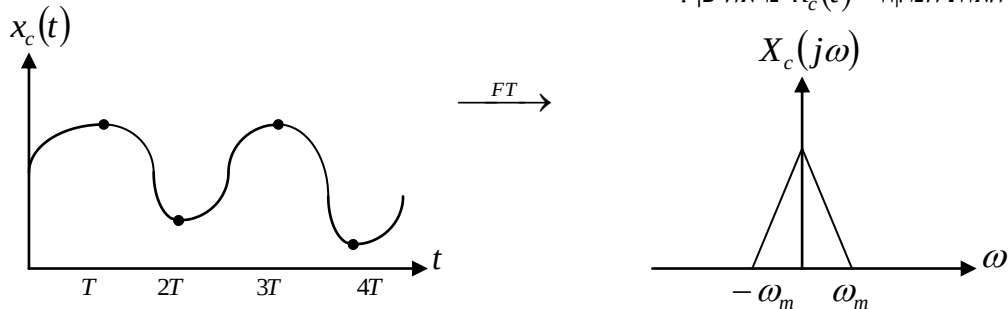
ב. ע"י התמרות ניתן לקשר בין האות $x_p(t) = x_c(t)p(t)$ ובין $x_d[n]$.

במציאות, החלוקה הזאת לשני שלבים לא קיימת, אבל מבחינה מתמטית זה נוח יותר להציג זאת כך.

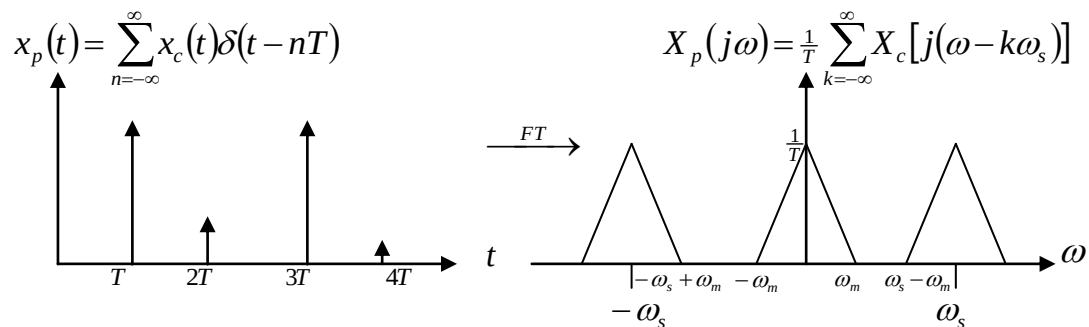
הצגה גרפית של פעולת הדגימה



נניח כי האות המקורי $x_c(t)$ נראה כך.

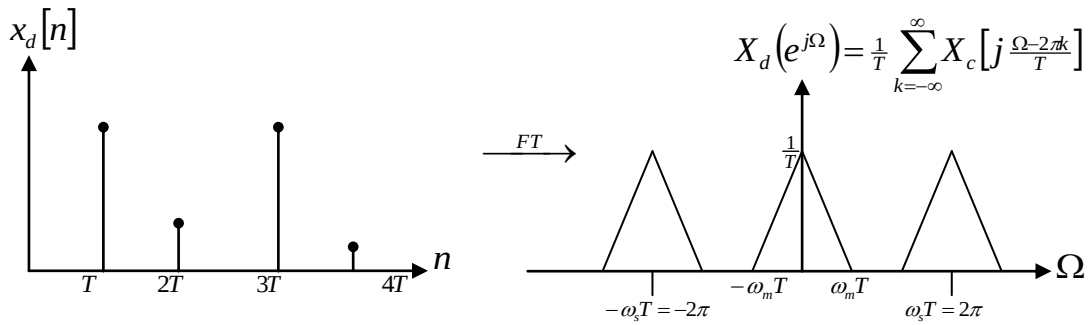


נכפול אותו ברכבת הלמים:



שטח ההלם מייצג את הדגימות במישור הזמן.

כעת נוכל לעבור מהאות $X_p(j\omega)$ לאות $X_d(e^{j\Omega})$ ע"י שינוי סקאלה:



קיבלנו את המחזוריות של 2π .

ניתן לראות מהגרף של $X_p(j\omega)$ שאם השכפולים אינם דורכים אחד על השני ניתן יהיה לעבור ל-

$X_d(e^{j\Omega})$. נקבל שהתנאי לדגימת האות הוא: $\omega_s - \omega_m > \omega_m \Rightarrow \omega_s > 2\omega_m$

הערה חשובה: כל פעולה שעושים על האות חייבת להיות פעולה בציר הזמן. ציר התדר לא קיים במציאות, אלא זו רק דרך מתמטית להסתכל על האות. נזכור כי האות שלנו הוא בזמן בדיד, ולכן כל הכפלה או חילוק או מעבר ב-LPF ישמור את האות בזמן בדיד.

שחזור האות מזמן בדיד לזמן רציף

נתון האות הבדיד: $x_d[n]$. אנחנו מעוניינים לשחזר את האות הרציף $x_c(t)$ מתוכו.

שלב א: נגיע לאות $x_p(t)$ בעזרת שינוי סקאלה

שלב ב: נבטא את $x_p(t)$ בעזרת $x_c(t)$:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

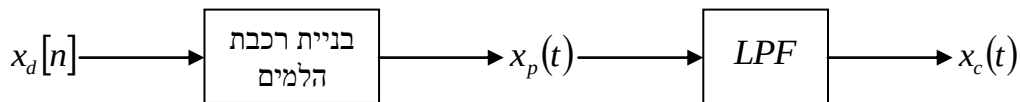
עכשיו, כאשר אנחנו בזמן רציף נוכל להעביר דרך LPF וזה יעזור לנו לשחזר, זאת אם התנאי של הדריכות מתקיים, כלומר: אם אין חפיפה בין השכפולים, כלומר: $\omega_s > 2\omega_m$. לכן מסנן המקיים:

$$H(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$X_p(j\omega)H(j\omega) = X_c(j\omega)$$

יקיים:

השחזור מאות בדיד לאות המקורי נעשה בדרך הפוכה למה שעשינו בדגימה. הגדרנו מסנן שבעזרת רכבת הלמים עובר מ- $x_d[n]$ ל- $x_p(t)$, כלומר - הלכנו מהסוף להתחלה.



משפט הדגימה של נייקויסט

יהי $x_c(t)$ אות מוגבל סרט המקיים $X_c(j\omega) = 0$ עבור $|\omega| > \omega_m$. אזי ניתן לקבוע את $x_c(t)$ מתוך

$$x_c(nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

דגימותיו באופן הבא:

$$\omega_s > 2\omega_m \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

זאת אם מתקיים:

כאשר T הוא המרווח בין הדגימות.

הבעיה היא שעל מנת לדגום את האות אנו צריכים לבנות את האות $x_p(t)$ והוא מכיל רכבת הלהבים. המשמעות היא אות עם מתח אינסופי – וזה בלתי אפשרי למימוש. לכן נחפש פתרון אחר:

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) h(t - nT)$$

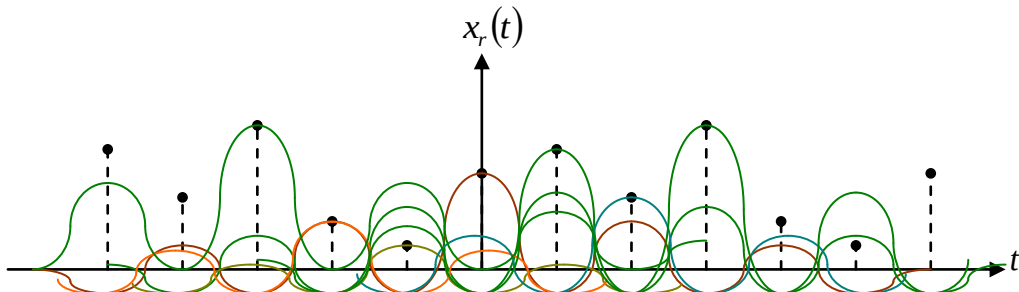
במקום להשתמש ברכבת הלהבים השתמשנו בסכום של $x_c(nT)$ כפול המערכת המוזנת:

$$H(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \xrightarrow{FT^{-1}} h(t) \quad \omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} > \omega_m$$

$$h(t) = \frac{\omega_c T \sin(\omega_c t)}{\pi \omega_c t} = \frac{\frac{\pi}{T} T \sin(\frac{\pi}{T} t)}{\pi \frac{\pi}{T} t} = \frac{\sin(\frac{\pi}{T} t)}{\frac{\pi}{T} t} = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) h(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \text{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right) \quad \text{נקבל:}$$

המשמעות היא פונקציית sinc סביב כל אחת מן הנקודות $t = nT$:



ישנן נקודות מסוימות בהן נוכל לדעת בדיוק מהו $x_r(t)$. נקודות אלו הן נקודות הדגימה $t = nT$, שהרי:

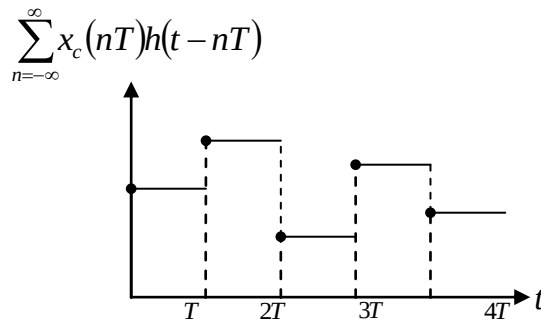
$$\text{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right) = \begin{cases} 1 & t = nT \\ 0 & \text{שלם } t \end{cases}$$

אלא שעדיין הערך של $x_r(t)$ בנקודות הדגימה הוא אינסופי משום שבכל נקודה עוברות אינסוף דגימות. אנחנו רוצים ליצור אות בזמן רציף מהדגימות הנתונות בעזרת רכיב פשוט יותר, ללא הכפלה ב- sinc . לכן נשתמש בפונקציית מדרגה.

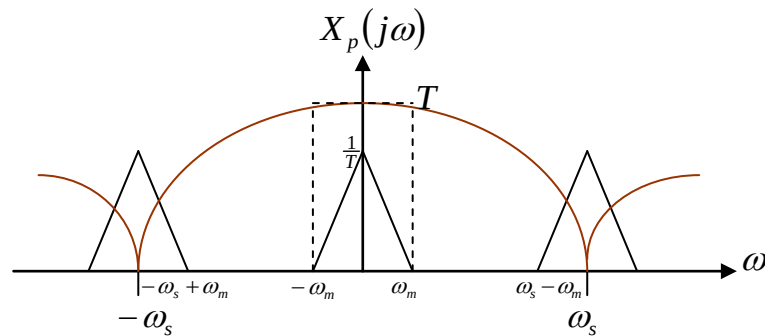
על מנת לתאר את הסכימה הזאת נשתמש במעברים שעשינו מוקדם יותר. נשתמש ברכבת הלהבים של מסנן מלבני. נבחר מסנן שהתגובה להלם שלו תהיה:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \xrightarrow{FT} H(j\omega) = e^{-j\omega \frac{T}{2}} \frac{2 \sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega}$$

המסנן הינו השהיה של פונקציית חלון ב- $\frac{T}{2}$ ימינה. מטרת המסנן היא לשמור את הערך של הדגימה עד הדגימה הבאה. מסנן זה נקרא: ZOH - Zero Order Hold.



נקבל:



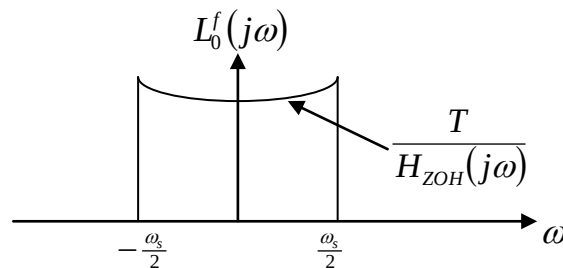
באזום מצויר הערך המוחלט של $\frac{2\sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega}$. כדי לצייר את $H()$ נרצה לדעת באלו נקודות הוא מתאפס.

$$\omega \frac{T}{2} = \pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_s$$

רצינו לקבל את המשולש מוכפל ב-T וקיבלנו שהוא לא לגמרי התאפס, נשאר בתוך המלבן משהו. שתי תופעות:

- א. תגובת התדר היא אינסופית ולכן היא לא מאפסת לגמרי את השכפולים.
 - ב. תגובת התדר אינה שטוחה בתחום הרצוי (יש עיוות גם במשולש המקורי)
- על מנת שהשכפול יהיה טוב יותר נרצה להגדיל את קצב הדגימה ω_s . נמתח את התמונה, כלומר את ה- $\sin c$. הנקודה הגבוהה של ה- $\sin c$ תרד, והמשולש המקורי שאינו תלוי ב- ω_s ישאר במקומו וכך נקבל קירוב טוב יותר.

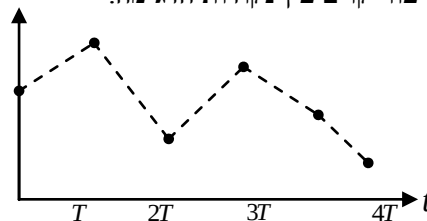
על מנת להעיף את השכפולים האחרים נוכל להעביר דרך עוד LPF . נרצה שהמסנן ימחק את השכפולים המיותרים מעבר ל- $\frac{\omega_s}{2}$. בכך פתרנו את בעיה א. את בעיה ב. נתקן בעזרת הכפלה ב- $\frac{1}{\text{המסנן הקודם}}$:



- אפשרות 1: להגדיל את ω_s - דגימות מהירות יותר.
- אפשרות 2: להוסיף מסנן מיד אחרי.

FOH - First Order Hold

שחזור האות הרציף ע"י חיבור קוים בין נקודות הדגימה.

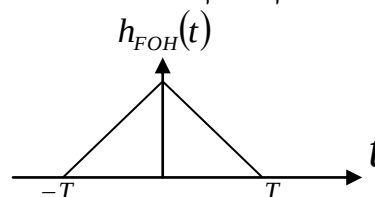


$$x_r(t) = \left(1 - \frac{t-nT}{T}\right)x_c(nT) + \left(\frac{t-nT}{T}\right)x_c[(n+1)T] \quad nT \leq t \leq (n+1)T$$

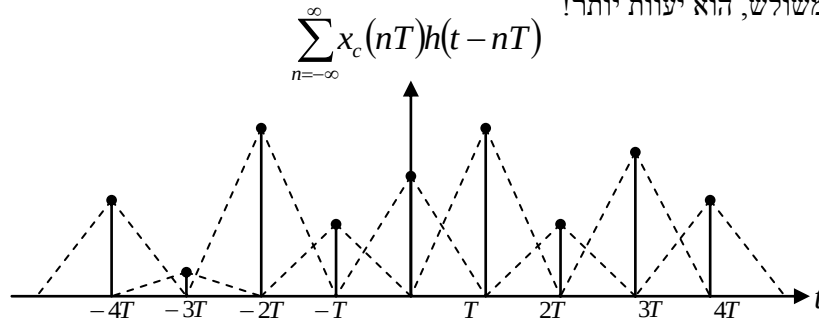
על מנת לנתח את האות נציג אותו כמסנן באופן הבא:

$$h_{FOH}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| \leq T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$H_{FOH}(j\omega) = \frac{2 - 2\cos(\omega T)}{\omega^2 T}$$



הקונבולוציה תגרום לכך שנקבל על כל דגימה משולש. בדגימות עצמן נקבל 1 כיון שסכום כל שני קווים מקווקים זהו הקו שעובר בין כל שתי נקודות דגימה. באזור השכפולים הוא ישיאף את הנקודות ל-0, ובאזור הרצוי - המשולש, הוא יעוות יותר!

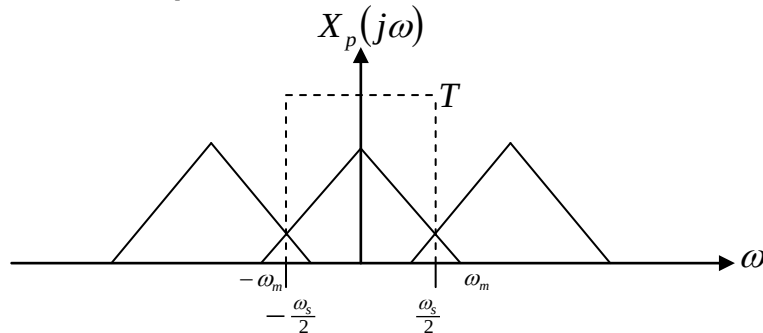


הערה: כל שחזור שלא נעשה - תמיד נוכל לתקן. לרוב נשתמש ב-ZOH ואז נוכל לתקן אח"כ. אם יש בעיה היא מתעוררת בדגימה. כלומר: כאשר תנאי נייקוויסט לא מתקיים.

דגימה בתדר נמוך מתדר נייקוויסט

נתון אות רציף $x_c(t)$ מוגבל סרט $X_c(j\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_n$. דגמו את האות בקצב $\omega_s < 2\omega_n$. השלב בו נאבד מידע הוא השלב בו מכפילים את האות ברכבת הלמים:

$$x_p(t) = x_c(t)p(t) \xrightarrow{FT} X_p(j\omega)$$



כאשר נרצה לשחזר את האות נפעיל מסנן LPF עם הגבר T (הקו המקווקו) אלא שנקבל שכפול בקצוות. תופעה זו נקראת aliasing - קיפול, שכפולים.

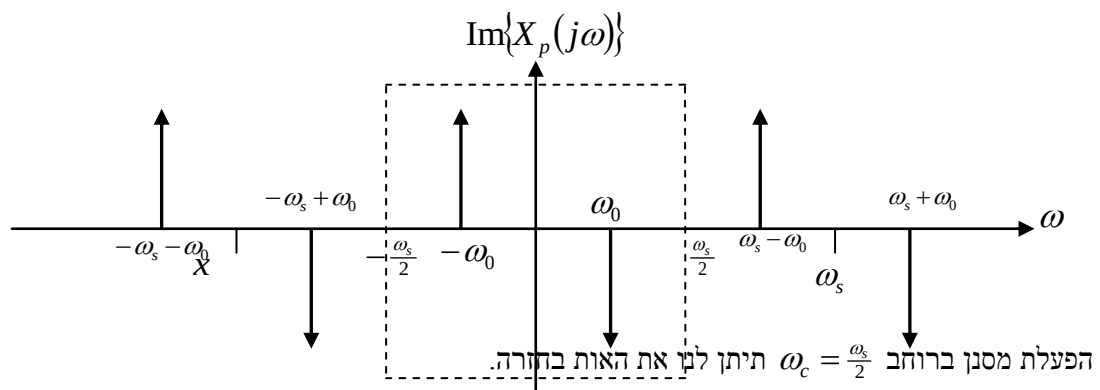
$$x_c(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

דוגמא: נתון האות

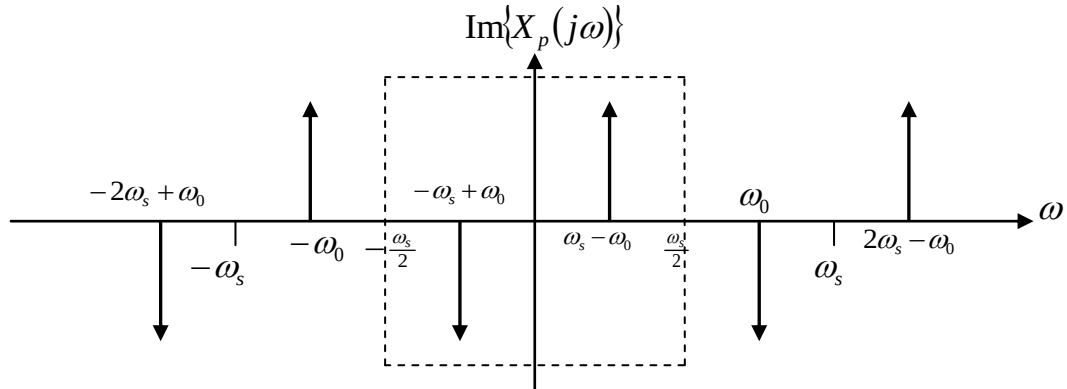
$$X_c(j\omega) = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\omega - k\omega_s)] = \frac{j\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - k\omega_s + \omega_0) - \delta(\omega - k\omega_s - \omega_0)]$$

דגימת האות תגרום להקטנה בגודל ביחס של T ולשכפולים במחזור של ω_s . כאשר אנחנו עומדים בתנאי נייקוויסט, כלומר אם: $\omega_s > 2\omega_0$ נקבל את הגרף:



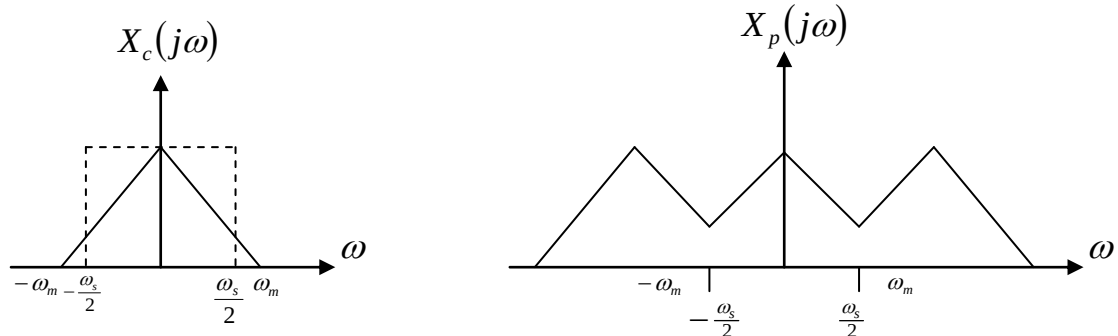
אם אנחנו לא עומדים בתנאי נייקוויסט, כלומר אם $\omega_s < 2\omega_0$ נקבל את הגרף הבא:



נשים לב כי הדלתות החיוביות הפכו לשליליות והשליליות לחיוביות. נוצר שינוי בתדר והפיכת פאזה. אם נפעיל מסנן נקבל את האות: $x_r(t) = -\sin[(\omega_s - \omega_0)t]$. נוצר קיפול - התדר התקפל סביב ω_s . (המונח קיפול מתאים רק לאותות ממשיים שיש לנו סימטריה במישור בתדר. בדר"כ לא נתייחס לקיפול אלא לשכפולים)

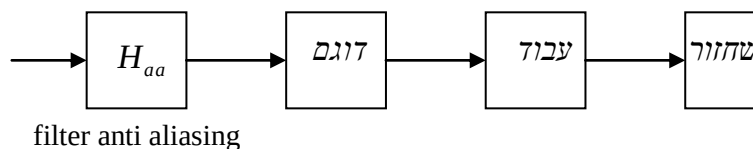
Anti-Aliasing Filter

נתון אות $x_c(t)$ ודגמנו אותו בקצב $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. איננו יודעים האם מתקיים תנאי נייקוויסט $\omega_s > 2\omega_0$. מה נוכל לעשות על מנת להקטין ככל הניתן את הנזק שעלול להיווצר? נרצה לעשות משהו לפני הדגימה על מנת להקטין את הנזק. נעביר את האות $x_c(t)$ דרך **Anti-Aliasing Filter** - מסנן נגד שכפולים ברוחב $\frac{\omega_s}{2}$ שימנע את השכפולים:



אילו לא היינו מעבירים את הפילטר לפני הדגימה היינו מקבלים שכפול כפול. תנאי נייקוויסט אומר שאם $\frac{\omega_s}{2} > \omega_0$ ניתן לשחזר את האות. אבל כאן התדר $\frac{\omega_s}{2}$ חותך את האות באמצע וגורם לשכפול אחרי פעולת הדגימה.

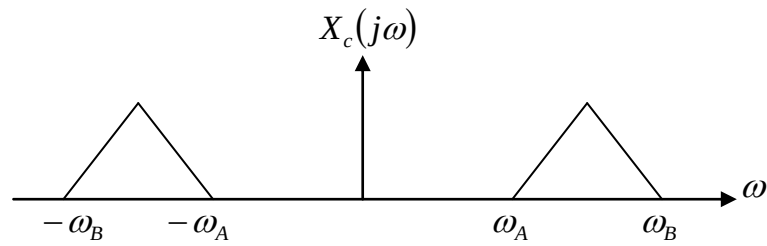
אם נעביר לפני הדגימה פילטר שיסנן את כל התדרים הגבוהים מ- $\frac{\omega_s}{2}$ - נחתוך את האות כבר לפני הדגימה ואז לאחר הדגימה האות לא ייחתך פעמיים.



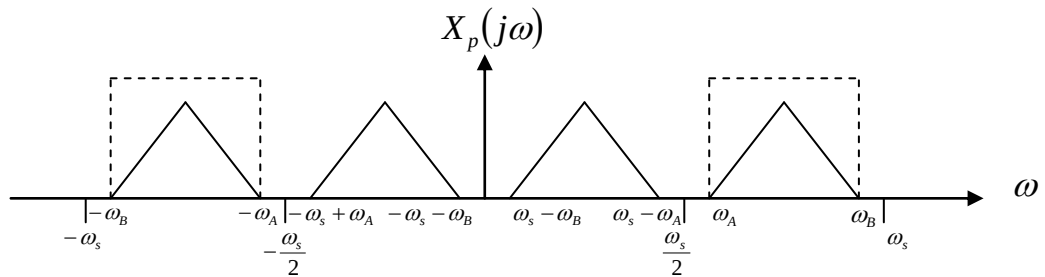
נראה כיצד ניתן להשתמש בפילטר H_{aa} על מנת לדגום אותות צרי סרט.

דגימת אותות צרי סרט

יהי $x_c(t)$ אות צר סרט המקיים: $\forall |\omega| > \omega_B, |\omega| < \omega_A$ $x_c(j\omega) = 0$



ניתן כמובן לדגום את האות בתדר נייקוויסט: $\omega_s > 2\omega_B$ אלא שבמקרה הזה ניתן לדגום בתדר נמוך יותר. נשתמש בשכפול של האות.

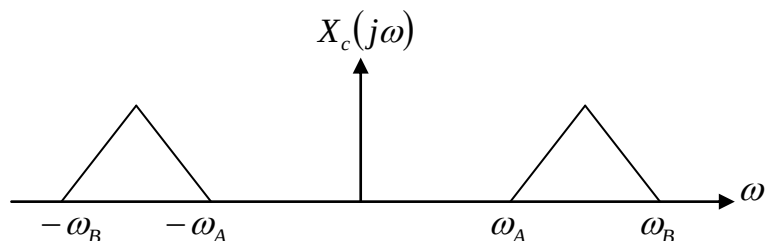


שתי המשולשים הצמודים לציר האנכי הם שכפולים של האות. אנחנו רואים שאם ניקח תדר דגימה ω_s כך שהשכפולים לא יעלו על עצמם - ניתן יהיה לשחזר את האות גם בלי לקיים את תנאי נייקוויסט. נשחזר את האות ע"י BPF.

דגימת אותות צרי סרט

בשיעור שעבר הראינו שלפעמים ניתן להשתמש בקיפולים שנוצרים מדגימה לטובתנו, כך נוכל לדגום אות בתדר דגימה נמוך מתדר נייקוויסט.

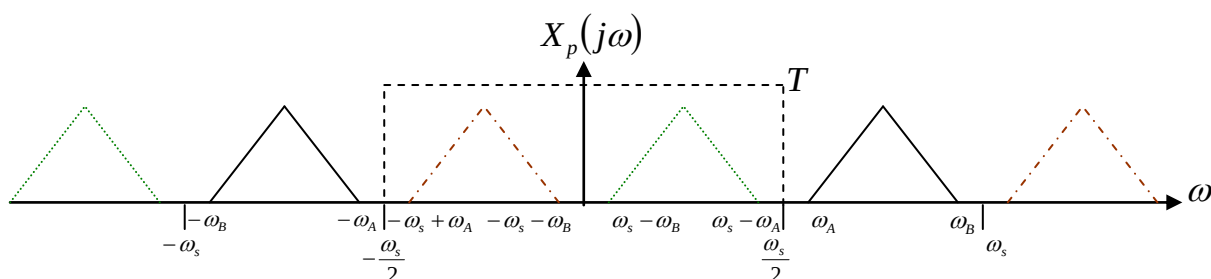
יהי $x_c(t)$ אות צר סרט המקיים: $\forall |\omega| > \omega_B, |\omega| < \omega_A$ $x_c(j\omega) = 0$



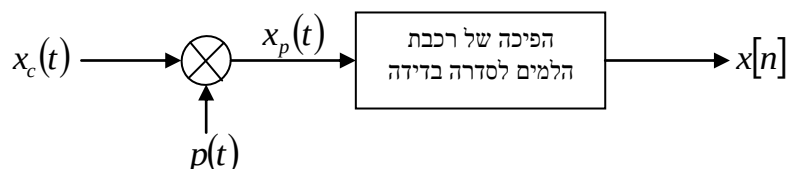
דגמנו את האות בתדר $\omega_s < 2\omega_A$. נקבל:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\omega - k\omega_s)] =$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \{X_c(j\omega) + X_c[j(\omega - \omega_s)] + X_c[j(\omega + \omega_s)] + \dots\}$$



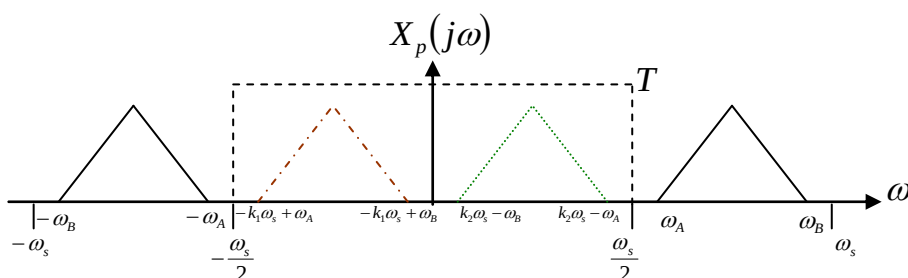
בשחור - $X_c(j\omega)$ באדום השכפול - $X_c[j(\omega - \omega_s)]$ בירוק - $X_c[j(\omega + \omega_s)]$
בגלל שהאות הוא צר נוכל בכל זאת לשחזר את האות.



כדי להפוך את רכבת ההלמים לסדרה בדידה יש צורך רק בשינוי סקאלה של הציר. את האפקט המשמעותי של הדגימה ראינו ב- $x_p(t)$. ניתן לראות כי $X_p(j\omega)$ מחזורי בתדר ω_s . אם נסתכל על מחזור אחד בקטע $\omega \in [-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$ נוכל להבין אם יש דריכות או לא. אם בקטע מחזור אחד אין דריכות אזי גם בשאר הקטעים אין דריכות. אמנם עשינו דוגמא ספציפית, לא ניתן לדעת בכל מקרה מתי יש דריכות ומתי אין. נראה את הדברים אנליטית מבחינה מתמטית:

$$LPF\{X_p(j\omega)\} = LPF\left\{\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\omega - k\omega_s)]\right\} = \frac{1}{T} X_c[j(\omega - k_1\omega_s)] + \frac{1}{T} X_c[j(\omega - k_2\omega_s)]$$

אחרי מעבר ב-LPF נקבל 2 משולשים עבור k_1, k_2 כלשהם.



נראה את התנאים על מנת שלא יהיו דריכות:

א. צריך שהאות הירוק ישאר בצד החיובי ויהיה קטן מתדר המסנן $\frac{\omega_s}{2}$, כלומר:

$$k_2\omega_s - \omega_B > 0 \quad k_2\omega_s - \omega_A < \frac{\omega_s}{2}$$

ב. צריך שהאות האדום ישאר בצד השלילי ויהיה גדול מתדר המסנן $-\frac{\omega_s}{2}$, כלומר:

$$-k_1\omega_s + \omega_B < 0 \quad -k_1\omega_s + \omega_A > \frac{\omega_s}{2}$$

נחבר את שני התנאים הראשונים: $k_2\omega_s - \omega_B + \frac{\omega_s}{2} > k_2\omega_s - \omega_A \Rightarrow -\omega_B + \frac{\omega_s}{2} > -\omega_A$

נחשב את שני התנאים האחרונים: $-k_1\omega_s + \omega_B + \frac{\omega_s}{2} < -k_1\omega_s + \omega_A \Rightarrow \omega_B + \frac{\omega_s}{2} < \omega_A$

$$\omega_B - \omega_A < \frac{\omega_s}{2}$$

המשמעות של התנאי שקיבלנו היא שחייבים שבתוך ה-LPF יהיה מקום ל-2 משולשים לפחות. אחרי שמוודאים זאת, יש לחפש k_1, k_2 מתאימים ע"מ למצוא את המשולשים האלו.
הערה: בשחזור נעדיף לעשות BPF על מנת לקבל את האות בתדר המקורי.

סיכום - דגשים לדגימה ושחזור

- הייצוג המתמטי של דגימה נעשה בשתי פעולות:

א. הכפלה ברכבת הלמים - העוצמה של האות יורדת פי T, שכפול האות במרחקים של $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

ב. חילוף מקדמי ההלמים $\Omega = \omega T$

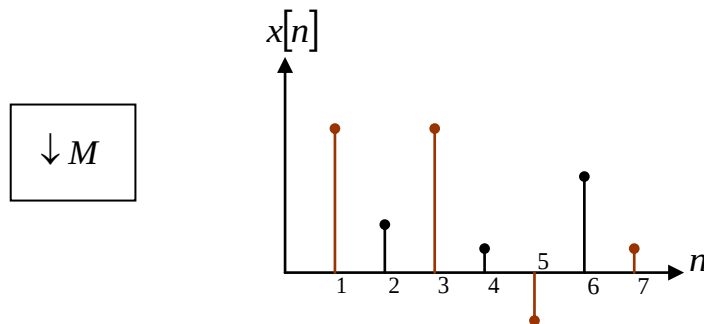
- שחזור - ע"י מסנן LPF עם הגבר T- מסנן אופטימלי. תדר הקטעון הוא $\frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$

- באות מוגבל סרט ישנו תדר מקסימלי ω_m שממנו והלאה האות מתאפס.

- באות צר סרט ישנו מרווח תדרים $[\omega_A, \omega_B]$ שבהם האות חי. מחוץ להם האות מתאפס.

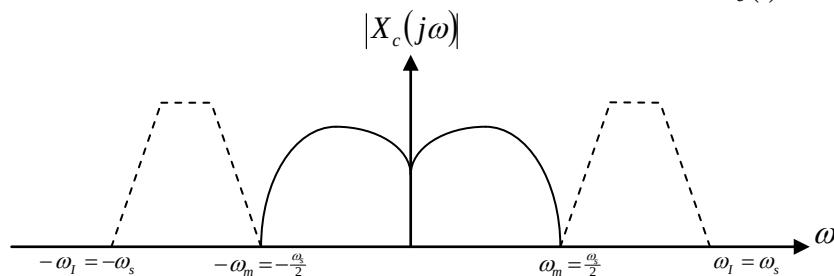
דגימה של אות בדיד

דגימה היא דגימה של אות בדיד. נתון אות בדיד $x[n]$, נדגום את האות ע"י לקיחת חלק מהדגימות:



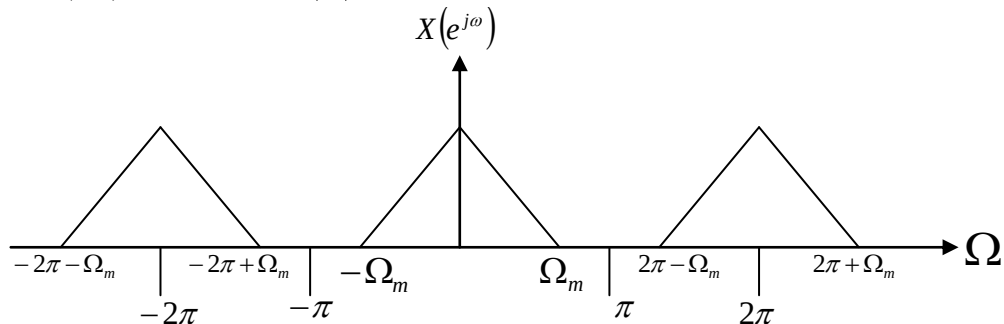
כאשר דגמנו אות רציף עברנו מהעולם הרציף לעולם הבדיד. כאשר דוגמים אות בזמן בדיד - נשארים בתחום הבדיד.

נתון אות רציף $x_c(t)$, דגמנו איתו אות נוסף שמפריע לנו, כמתואר בציר:



אם נדגום את האות בתדר נייקוויסט - האות הנוסף יתקפל על האות המקורי, כי $\omega_s < 2\omega_1$. למדנו כי ניתן לסנן את הרעש ע"י מסנן H_{aa} בתדר $\frac{\omega_s}{2}$ שיסנן את האות הנוסף. קיימת שיטה נוספת - נעביר את האות למישור הספרתי ושם האות הנוסף לא יתקפל על האות המקורי. שם נוכל לצמצם את האות לפחות דגימות בלי הפרעה לאות המקורי.

נניח כי $x[n]$ הוא אות בזמן בדיד מוגבל סרט, כלומר: $\Omega_m < |\Omega| < \pi$ $X(e^{j\Omega}) = 0$



הדגימות יתבצעו בעזרת איפוס, מחיקה וצמצום. את האיפוס והמחיקה נעשה בעזרת רכבת הלמים. נניח לרגע שהאות הבדיד נוצר מאות רציף, והדגימה הייתה מהירה מידי (יש דגימות מיותרות). נוכל אמנם לחזור לזמן הרציף ולדגום בקצב דגימה קטן יותר. אבל אנחנו רוצים להישאר במישור הספרתי הבדיד ולא לחזור למישור הרציף. לכן נמחק חלק מהדגימות ע"י הכפלת האות ברכבת הלמים ברווח M ואז נוכל לצמצם את הדגימות שאופסו. בעצם אנחנו מוחקים $M-1$ דגימות בכל מחזור M . (במציאות אמנם לא מאפסים אלא חותכים את האות ע"י מסנן, אבל לצורך ההבנה נקרא לזה איפוס ומחיקה.)

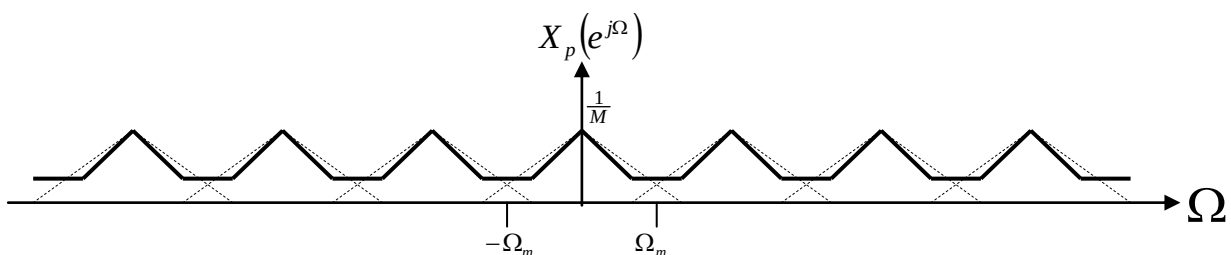
נגדיר רכבת הלמים $p[n]$. (מקביל ל- $p(t)$ מדגימה בזמן רציף): $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM]$

$P(e^{j\Omega}) = \frac{2\pi}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[\Omega - k\Omega_s]$ $\Omega_s = \frac{2\pi}{M}$ הוא קצב הדגימה.

נכפול את האות $x[n]$ ברכבת ההלמים ונקבל: $x_p[n] = x[n]p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[n - kM]$

$$X_p(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \otimes P(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\Omega - k\Omega_s)})$$

קיבלנו בדומה לזמן רציף שהכפלה ברכבת הלמים יוצרת שכפולים של האות. במישור התדר נקבל:



אמנם יש לנו שכפול אחד אבל כיון שבמישור התדר האות המקורי מורכב מאינסוף משולשים (האות המקורי מחזורי 2π במישור התדר) - אזי נקבל שכפול של אינסוף משולשים. המרחק בין השכפולים הוא: $\Omega_s = \frac{2\pi}{M}$. במקרה שנעשה דצימציה מסדר 2 המרחק יהיה $\Omega_s = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

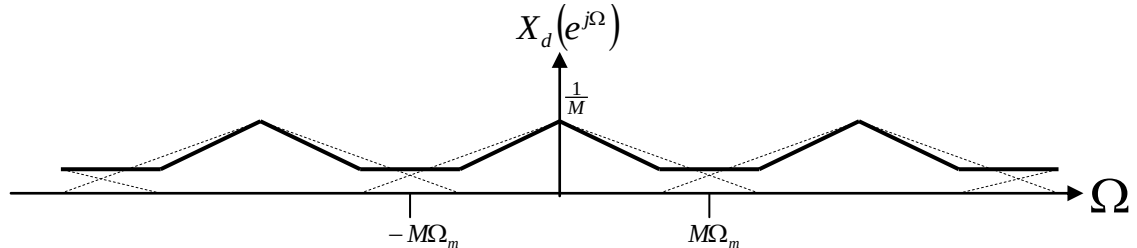
תזכורת: ראינו בתכונות התמרת פורייה DTFT כי ריווח באפסים בזמן הוא כיווץ בתדר:

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}] & \text{שלם} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \xrightarrow{DTFT} X_{(m)}(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega m})$$

אנחנו נשתמש בתכונה זו בכיוון ההפוך. אחרי המחיקה קיבלנו אות מהצורה של $x_{(m)}[n]$ - ישנו ריווח באפסים של האות. נגדיר: $X_d(e^{j\omega})$ - האות לאחר הדגימה. מתכונות התמרת פורייה נקבל:

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(e^{j\frac{\Omega}{M}}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\frac{\Omega}{M} - k\Omega_s)})$$

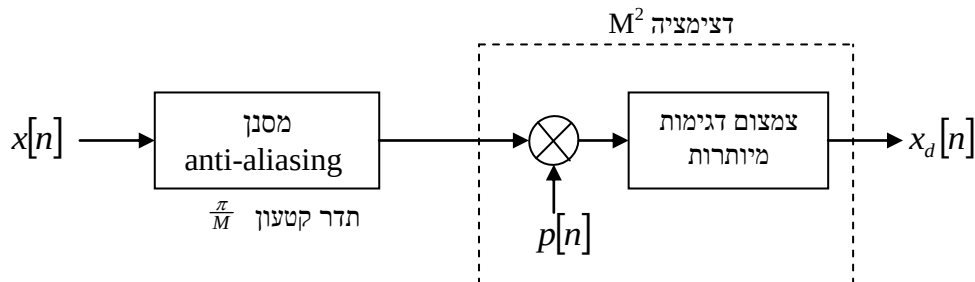
כלומר: אם נמתח את האות במישור התדר נקבל במישור הזמן את האות הדגום (המכווץ). במקרה ש- $M=2$ זה ימתח את האות פי 2 והמחזור שלו יהיה 4π :



בדוגמא שציירנו לא נוכל לשחזר את האות משום שיש דריכות. נרצה למצוא את התנאי לכך שלא יהיו דריכות ונוכל לשחזר את האות בלי לאבד מידע. התנאי הוא שהאות יהיה מוכל כולו בקטע $\Omega \in [-\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{M}]$. כלומר: $M\Omega_s < \pi \Rightarrow \Omega_s < \frac{\pi}{M}$

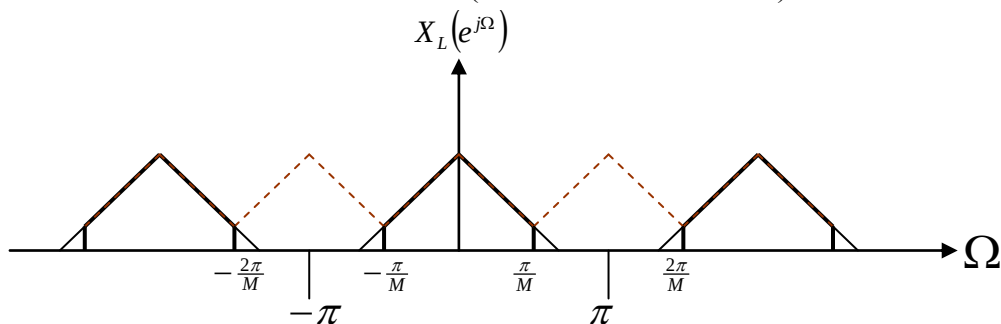
במקרה שתנאי זה לא מתקיים, אפשר למזער את הנזק מהדריכות ע"י הפעלת מסנן Anti-aliasing H_{aa} על האות המקורי. המסנן יעביר את האות רק בתדרים $|\Omega| \leq \frac{\pi}{M}$ וכך נוכל לדגום את האות בקצב M. אמנם חלק מהאות יחתך אבל רוב האות יעבור ונוכל לשחזר אותו.

נתון אות ספרתי $x[n]$ (לא בהכרח מוגבל סרט) ומסנן LPF אידיאלי עם תדר קטעון $|\Omega_c| = \frac{\pi}{M}$. השתמשו במסנן זה על מנת לבצע דצימציה לאות ביחס של M^2 ללא aliasing.



המערכת הנוכחית ללא הדצימציה לא מספקת לנו את הנדרש. אם נשתמש במסנן בשלב ראשון אזי נוכל לעשות דצימציה רק עד קצב M.

אחרי הפעלת המסנן נקבל אות מוגבל סרט (בשחור): $\frac{\pi}{M} < |\Omega| < \pi$. $X_L(e^{j\Omega}) = 0$ באדום - שכפול של האות (לאחר הכפלה ברכבת הלמים)



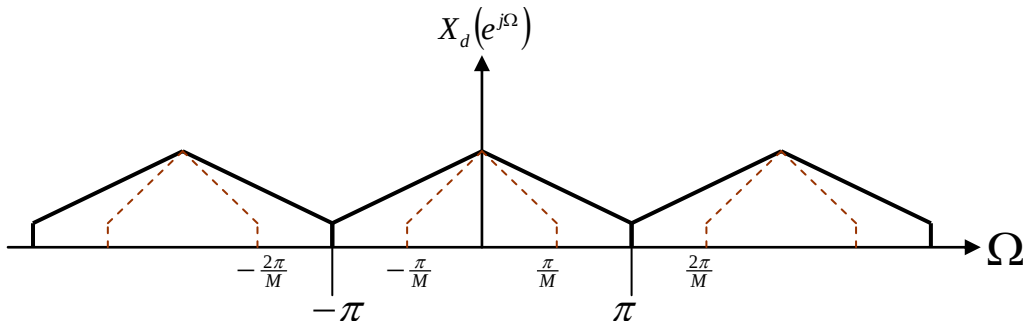
שלב 1: הפעלת מסנן anti-aliasing עם תדר קטעון $|\Omega_c| = \frac{\pi}{M}$

שלב 2: מכפלה ברכבת הלמים: $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM]$

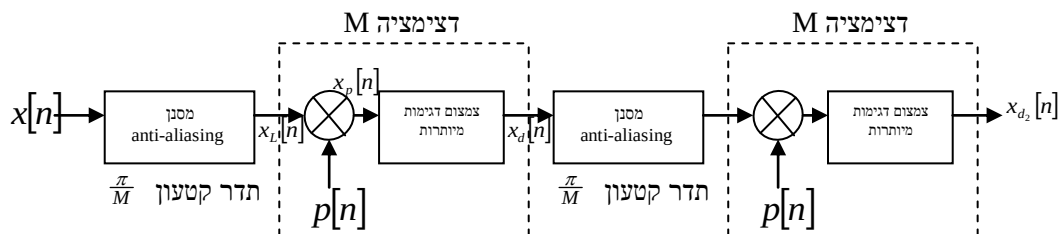
$$x_p[n] = x[n]p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[n - kM] \Rightarrow X_p(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\Omega - k\Omega_s)})$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(e^{j\frac{\Omega}{M}}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\frac{\Omega}{M} - k\Omega_s)})$$

שלב 3: מריחת האות במישור התדר:



כעת קיבלנו דצימציה של M . על מנת לקבל דצימציה של M^2 פשוט נכניס את האות עוד פעם לאותה מערכת. ואז נקבל דגימה של M^2 . לסיכום:



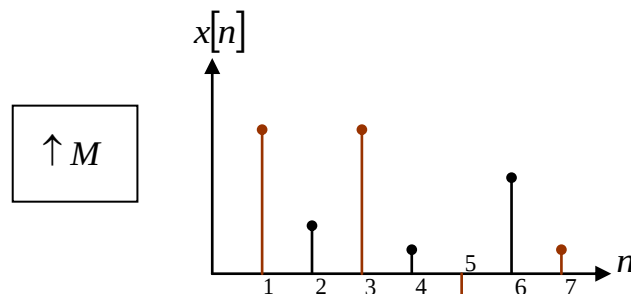
לאחר הפעלת המערכת פעם נוספת נקבל:

$$X_{d_2}(e^{j\Omega}) = X_{p_2}(e^{j\frac{\Omega}{M}}) = X_p(e^{j\frac{\Omega}{M^2}}) = \frac{1}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\frac{\Omega}{M^2} - k\Omega_s)})$$

למעשה בכל פעם אנו לוקחים חלק קטן מהאות המקורי ומותחים אותו. נוה יותר לעשות את אותה הפעולה פעמיים על מערכת זולה ופשוטה מאשר לבנות מערכת אחת יקרה ומסובכת. כך אנו חוסכים בחומרה.

אינטרפולציה של אות בדיד

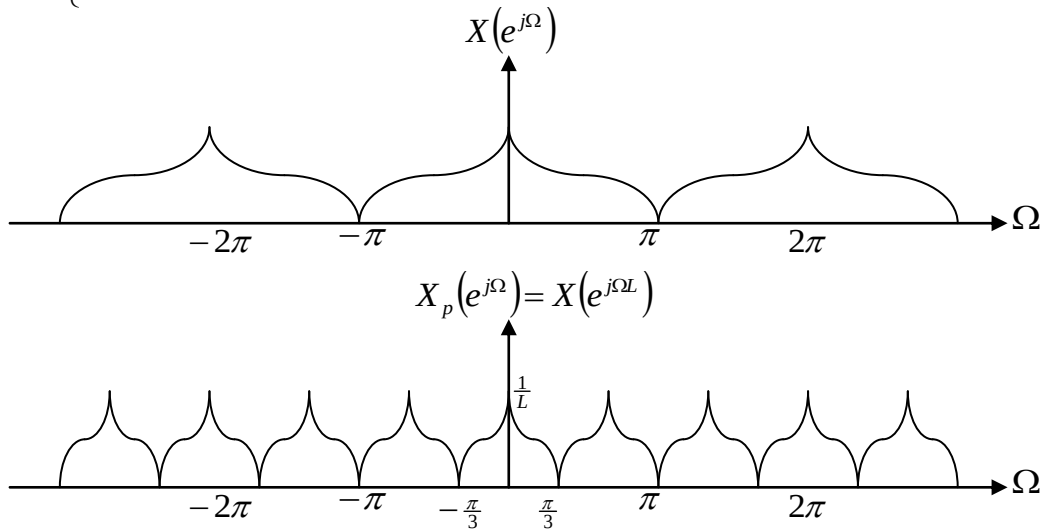
פעולת האינטרפולציה היא פעולה הפוכה לפעולת הדצימציה. כאשר נתון אות בזמן בדיד - נרצה להכניס דגימות בין הדגימות הקיימות:



באדום - הכנסנו דגימה בין כל שתי דגימות של האות המקורי (השחור) לעיל אמרנו שאם עשינו דצימציה של אות מוגבל סרט עם מסנן $\frac{\pi}{M}$ ראינו כי לא נאבד מידע. כעת אנו רוצים לשחזר את המידע. אם קצב האינטרפולציה M מקיים את תנאי נייקוויסט נוכל לשחזר באופן מלא את האות. האינטרפולציה מתבצעת בשני שלבים:

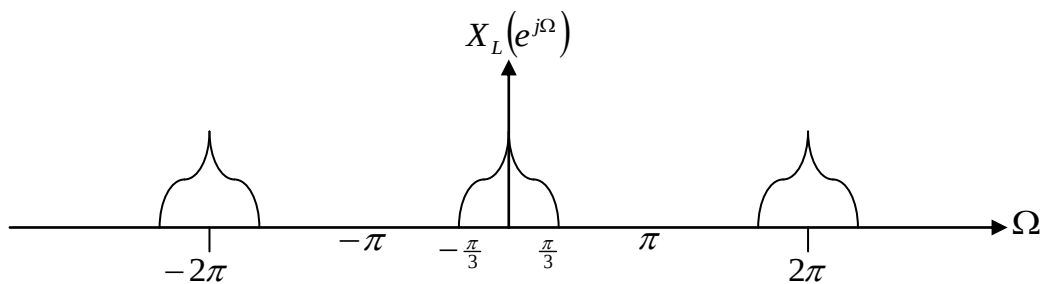
שלב 1: רווח באפסים. ע"פ התכונה ריווח בזמן = כיווץ בתדר - ניצור את האות $x_p[n]$ באופן הבא:

$$x_p[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{L}] & \text{שלם} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \xrightarrow{\text{DTFT}} X_p(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega L})$$



כיווצנו את האות במישור התדר (בדוגמא הנ"ל פי 3). במישור הזמן המשמעות היא הוספת אפסים.

שלב 2: נסנן את האות ע"י מסנן בעל הגבר L ותדר קטעון $\frac{\pi}{3}$, כך שכל אות שלישי יעבור:



נקבל את מוגבל סרט ומחזורי 2π . נבטא את המסנן בצורה מתמטית:

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{L}n)}{\frac{\pi}{L}n}$$

$$x_L[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \frac{\sin[\frac{\pi}{L}(n-kL)]}{\frac{\pi}{L}(n-kL)}$$

על כל דגימה מלבישים $\sin c$ שמתאפס בדגימות המקוריות. כך נקבל בסכום את הערך של הדגימות שאנו מוסיפים. כל אחד מה- $\sin c$ מתאפס בשאר המקומות. זהו מסנן אידיאלי.

סיכום

דגימה	דגימה	דגימה	דגימה	דגימה	דגימה
אות מקורי	אות בזמן רציף	אות בזמן בדיד	אות בזמן בדיד	אות בזמן בדיד	אות בזמן בדיד
מרווח בין דגימות	T	M - מס' הדגימות	M - מס' הדגימות	L (שלם)	T
תדר הדגימה	$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$	$\Omega_s = \frac{2\pi}{M}$	$\Omega_s = \frac{2\pi}{M}$	ספרתי	אנאלוגי
תדר בייקוויסט	$\omega_s < 2\omega_n$	$\Omega_s < \frac{\pi}{M}$	$\Omega_s < \frac{\pi}{M}$	L	T
אות מוצא	אות בזמן בדיד	אות בזמן בדיד	אות בזמן בדיד	$\frac{\pi}{L}$	$\frac{\pi}{T}$
				אות בזמן בדיד	אות בזמן רציף

חזרה - דגימה ושחזור

לקחנו אות בזמן רציף וייצגנו אותו ע"י דגימות. ראינו שיש קשר בין דגימה בזמן ודגימה בתדר. זה חשוב משום שאפילו שיש דגימה בזמן - לא נוכל להכיל במחשב את כל ה-DTFT שלו. אנחנו יודעים כי דגימה בזמן יוצרת קיפול (שכפול) בתדר:

$$x_d[n] = x_c[nT] \xrightarrow{DTFT} X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\frac{\Omega}{T} - k\omega_s)]$$

בגלל השכפולים בתדר ניתן לעשות דגימה לאותות מוגבלי סרט כך שלא יהיו דריכות. ראינו בתחילת הקורס כי קיפול בזמן יוצר דגימה בתדר.

קיפול בזמן - לוקחים את האות והופכים אותו למחזורי ע"י קונבולוציה עם רכבת הלמים:

$$x_{per}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_0) \xrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0)$$

ניתן למצוא את מקדמי הפורייה של האות המחזורי $x_{per}(t)$. מקדמי פורייה הם דגימות של התמרת פורייה של האות בתדרים $k\omega_0$, לכן נוצרת כאן אפשרות לבטא דגימה של האות.

הערות:

- ניתן להחזיק דגימות של אות בזמן, אבל לא ניתן להחזיק את ה-DTFT שלהם. כמו"כ ניתן להחזיק דגימות בתדר, ואם האות יהיה חסום T_0 בזמן - השכפולים לא יעלו אחד על השני ולא נאבד מידע. ניקח את הפירוק לטור פורייה.
- אות לא יכול להיות גם סופי בזמן וגם סופי בתדר.

דגימה של אות חסום בזמן

יהי $x_c(t)$ אות כללי בזמן רציף. עם התמרת פורייה $X_c(j\omega)$.

- נבצע קיפול בזמן בקצב T_0 ונקבל: $x_{c-per}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(t - kT_0) \xrightarrow{FS} x_{c-k} = \frac{1}{T_0} X_c(jk\omega_0)$

קיבלנו דגימה של התמרת פורייה בתדרים $\omega = k\omega_0$.

- כעת, נציג את האות $x_{c-per}(t)$ בעזרת מקדמי פורייה שלו ע"פ נוסחת הסינתזה:

$$x_{c-per}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{c-k} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X_c(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

- כעת נדגום את האות המחזורי $x_{c-per}(t)$ פעמים במחזור כך שקצב הדגימה הוא: $T = \frac{T_0}{N}$, נקבל:

$$x_{d-per}[n] = x_{c-per}[nT] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X_c(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 nT} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(jk\omega_0) e^{jk \frac{2\pi}{T_0} n \frac{T_0}{N}} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X_c(jk\omega_0) e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

- נחלק את הסכום הזה ל-2 סכומים. נציב: $k = l - rN$. נקבל:

$\underline{k}$	0	1	2	...	N	N+1	N+2	...	2N
$\underline{l}$	0	1	2	...	0	1	2	...	0
$\underline{r}$	0	0	0	...	1	1	1	...	2

$$0 \leq l \leq N-1 \quad -\infty < r < \infty$$

$$x_{d-per}[n] = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k=l-rN}}^{\infty} \frac{1}{T_0} X_c(jk\omega_0) e^{jk \frac{2\pi}{N} n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{T_0} X_c[j(l-rN)\omega_0] e^{j(l-rN) \frac{2\pi}{N} n}$$

כידוע: $e^{j(l-rN) \frac{2\pi}{N} n} = e^{jl \frac{2\pi}{N} n} e^{-jrN \frac{2\pi}{N} n} = e^{jl \frac{2\pi}{N} n} e^{-j2\pi n} = e^{jl \frac{2\pi}{N} n}$ כי r, n מס' שלמים. לפיכך:

$$x_{d-per}[n] = \sum_{l=0}^{N-1} \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X_c[j(l-rN)\omega_0] \right] e^{jl\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{l=0}^{N-1} x_{d-l} e^{jl\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=0}^{N-1} x_{d-k} e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

קיבלנו ע"פ נוסחת הסינתזה ביטוי למקדמי פורייה של האות הבדיד המחזורי:

$$x_{d-per}[n] \xrightarrow{DFS} x_{d-k} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X_c[j(l-rN)\omega_0]$$

כלומר: לאות בדיד מחזורי N המוצג ע"י טור פורייה שלו - יש N מקדמי פורייה שחוזרים על עצמם.
- נחזור לאות המקורי $x_c(t)$. אם דגמנו את האות בזמן בקצב T_0 נקבל ע"פ משפט הדגימה:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\omega - k\omega_s)] = \frac{T_0}{T} \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\omega - k\omega_s)] \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{T_0}{T} \frac{2\pi}{T_0} = N\omega_0$$

- נדגום את האות המקורי בתדר בנקודות $\omega = M\omega_0$:

$$\frac{T}{T_0} X_p(j\omega) \Big|_{\omega=M\omega_0} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(M\omega_0 - kN\omega_0)] = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(M - kN)\omega_0] = x_{d-M}$$

x_{d-k} הוא מקדמי טור פורייה של האות הבדיד המחזורי:

$$x_{d-per}[n] \xrightarrow{DFS} x_{d-k} = \frac{1}{N} X_p(jk\omega_0) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

משמעות הדבר הוא שמקדמי פורייה חוזרים על עצמם כל N פעמים. נקבל:

$$x_{d-per}[n] = x_{c-per}[nT] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(nT - kT_0) \xrightarrow{DFS} x_{d-k}$$

$$x_{d-k} = \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c[j(M - rN)\omega_0] = \frac{1}{NT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(k\omega_0 - r\omega_s)]$$

לסיכום - דגימה של אות חסום בזמן $x_c(t)$:

$$x_{d-per}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(nT - kT_0) \xrightarrow{DFS} x_{d-k} = \frac{1}{NT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(k\omega_0 - r\omega_s)]$$

קיבלנו גם בציר הזמן וגם בתדר דגימה וקיפול מחזורי.

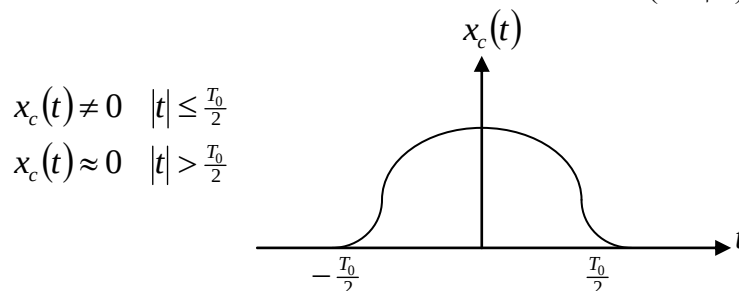
- נצטרך שגם בזמן וגם בתדר הקיפול יהיה עם דריכות זניחות כדי שנוכל לומר שהוא מייצג את האות.
קיבלנו קשר בין N דגימות בזמן ל- N דגימות בתדר. (תנאי נייקויסט אומר שנוכל לדגום את חסום סרט בזמן בלי לאבד מידע כלל).

- דגימה בזמן לא מאבדת מידע אם האות הוא חסום בתדר (או בערך חסום בתדר עם עיוותים קטנים, הדגימה בזמן לא תעוות את הייצוג בצורה משמעותית בדריכות קטנות)

- דגימה בתדר לא מאבדת מידע אם האות הוא חסום בזמן. המרחק בין הדגימות בתדר קובע את זמן המחזור של הקיפול המחזורי, ואם האות הוא חסום בזמן (או בערך חסום בזמן) העיוות לא יהיה משמעותי.

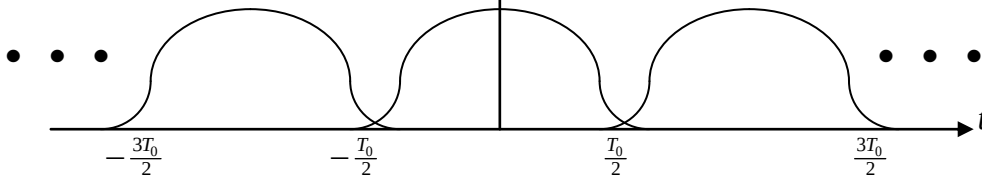
נציג את עקרונות הדגימה בצורה גרפית:

נתון אות מוגבל בזמן $x_c(t)$ (בקירוב):



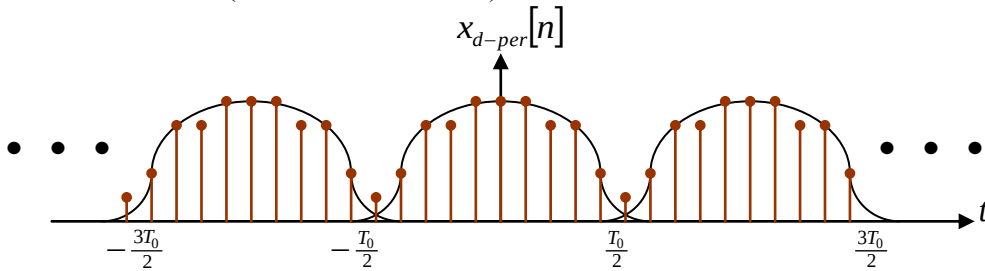
בחרנו T_0 שיכיל בתוכו כמעט את כל האות. כעת נבצע קיפול מחזורי:

$$x_{per}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(t - kT_0)$$

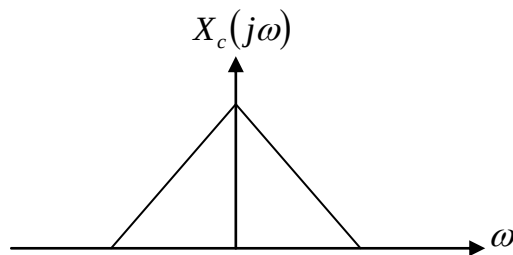


ניתן לראות שקיימות דריכות אלא שהן זניחות.

כעת נדגום את האות המחזורי N דגימות בכל מחזור (בדוגמא הבאה $N = 10$):

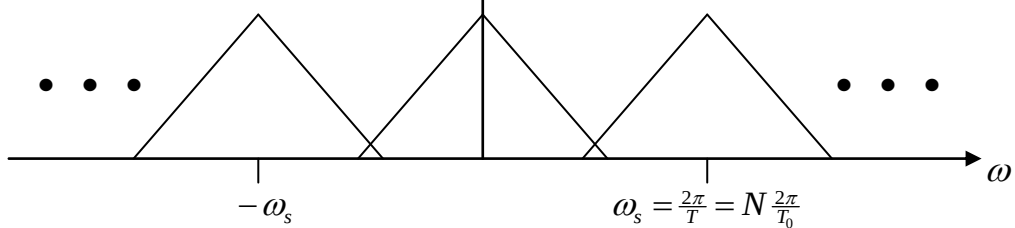


כעת נראה את התהליך בציר התדר:

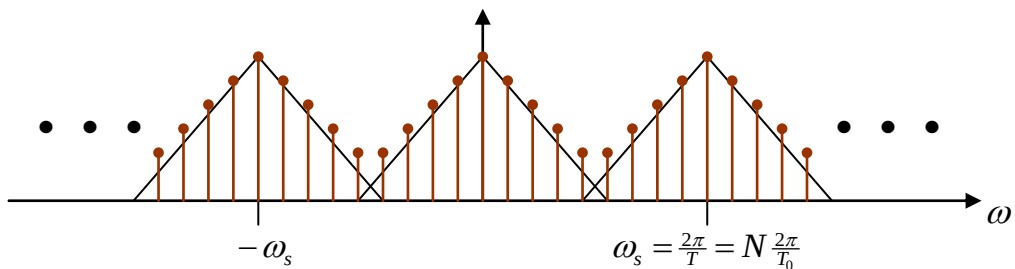


שכפול במישור התדר:

$$T \cdot X_p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(\omega - k\omega_s)]$$



דגימה בתדר:



נשים לב כי מספר הדגימות במחזור בזמן זהה למס' הדגימות במחזור בתדר. כמו"כ ברור כי נוצר עיוות בתדר בגלל השכפולים. אלא שאם העיוותים אינם גדולים אזי N דגימות יתנו לנו ייצוג סביר של האות.

- אם האות $x_c(t)$ מוגבל סרט $\frac{\omega_s}{2}$ אזי לפי נייקוויסט אין איבוד מידע בדגימה בזמן.
- אם האות $x_c(t)$ מוגבל בזמן לאורך T_0 אזי דגימה בתדר (קיפול בזמן) לא תגרום לאיבוד מידע.
- אנליזה בזמן: האם קיפול מחזורי זניח?
- אנליזה בתדר: האם קיפול בתדר לפי המרחק שלקחנו בזמן זניח?
- אם התשובה לשתי השאלות היא חיובית - נקבל ייצוג סביר של האות.
- בפועל האותות אינם מוגבלי סרט ולא בהכרח מוגבלים בזמן. לכן נסתפק בקירוב.

ניתן לקבל קירוב טוב כרצוננו להתמרת פורייה של אות:
נניח שאין דריכות בזמן ואין דריכות בתדר. (בפועל זה לא ניתן להשגה שהרי אי אפשר להגדיל גם את T_0 וגם את ω_s שהרי: $\omega_s T_0 = 2\pi N$ וגם N יגדל בהתאם, ולא ניתן לעשות אינסוף דגימות. אלא נגדיל רק אחד מהם - איפה שיש יותר עיוות.

$$x_{d-per}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(nT - kT_0) \xrightarrow{DFS} x_{d-k} = \frac{1}{NT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j(k\omega_0 - r\omega_s)]$$

אם אין דריכות בשני הצדדים אזי נוכל להתעלם מהשכפולים (כלומר: להרחיק אותם ל- ∞) ולומר כי:

$$x_c(nT) \xrightarrow{DFS} x_{c-k} = \frac{1}{NT} X_c(jk\omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_c(nT) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X_c(jk\omega_0) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_c(nT) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{נשתמש בזהות: } T_0 = NT \text{ ונקבל:}$$

נרצה להראות שעבור T מספיק קטן הסכום הזה יתכנס לאינטגרל המגדיר את התמרת פורייה.
נבחן את הגבול: $T = dt \rightarrow 0$ ולכן: $N = \frac{T_0}{T} \rightarrow \infty$. כמו"כ: אם $T_0 \rightarrow \infty$ אזי: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow 0$. לכן N שואף לאינסוף יותר מהר ממה ש- T שואף ל-0. נקבל:

$$k\omega_0 = \omega \quad nT = t$$

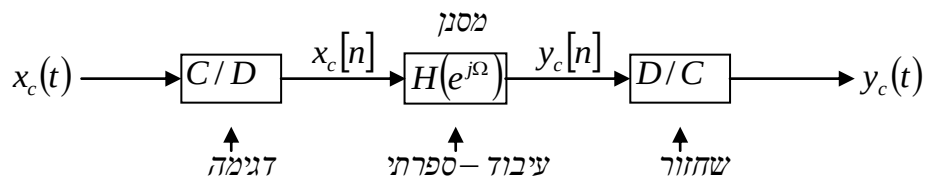
$$X_c(jk\omega_0) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_c(nT) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = T \sum_{n=0}^{N-1} x_c(nT) e^{jk\frac{2\pi}{T_0}nT} = T \sum_{n=0}^{N-1} x_c(t) e^{-jk\omega_0 t}$$

נקבל בעצם סכום אינסופי של מלבנים שהגבול שלו הוא האינטגרל המגדיר את התמרת פורייה:

$$X_c(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\omega t} dt$$

עיבוד ספרתי של אותות בזמן רציף

עיבוד ספרתי של אותות ההיא שיטה לטפל באותות רציפים באמצעות העולם הדידי. לאחר הטיפול נחזיר את האות להיות רציף. הסכמה המתארת את העיבוד נראית כך:



הסיבה שמעבירים את האות לזמן בדיד ומעבדים אותו היא משום שיותר קל לעשות עיבוד ספרתי כי יש חומרה התומכת בזה, עד כדי כך ששווה לשלם בחומרה הממירה את האות לזמן בדיד ואח"כ משחזרת אותו לזמן רציף.

מסנן ליניארי

$$y_d[n] = \frac{x_d[n+1] - x_d[n-1]}{2T}$$

נבחן את המערכת הבאה:

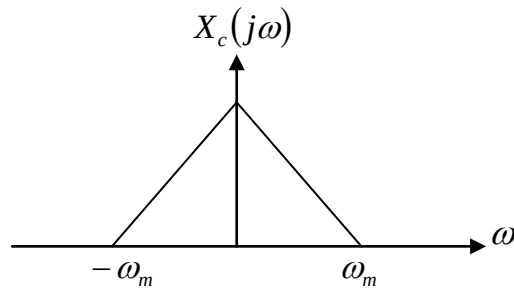
זוהי משוואת הפרש המתארת גזירה בזמן בדיד. ניתן למצוא מתוכה את התגובה להלם (ע"י התמרת פורייה):

$$Y_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2T} [e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}] X_d(e^{j\Omega}) \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = \frac{Y_d(e^{j\Omega})}{X_d(e^{j\Omega})} = \frac{1}{2T} [e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}]$$

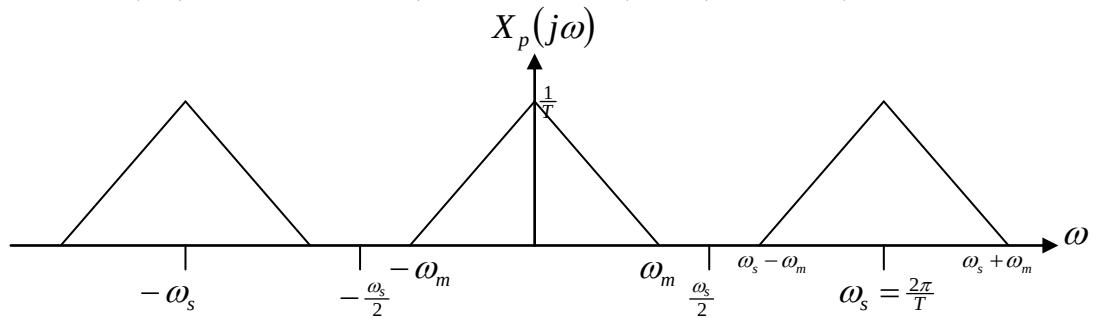
$$h[n] = \frac{1}{2T} (\delta[n+1] - \delta[n-1])$$

נמחיש את עקרונות העיבוד בצורה גרפית:

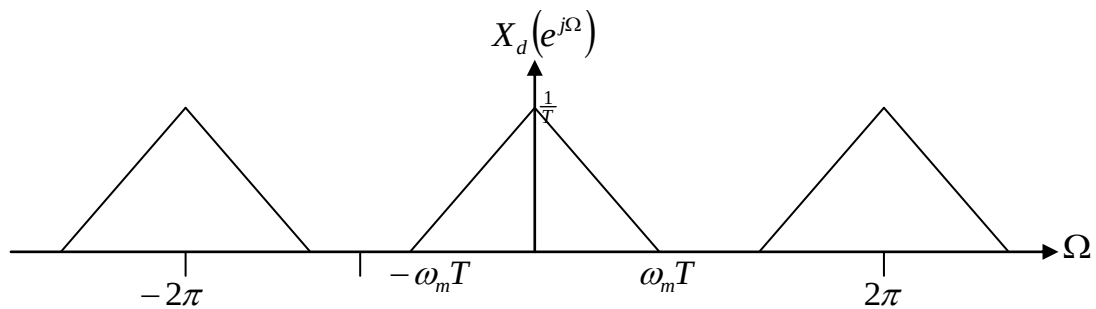
נתון אות מוגבל סרט (אם האות אינו מוגבל סרט אין משמעות לגזירה שהרי כבר בשלב הדגימה נהרוס את האות ע"י שכפולים)



נדגום את האות בקצב הגדול מקצב נייקוויסט: בשלב ראשון נכפול ברכבת הלמים, ונקבל:

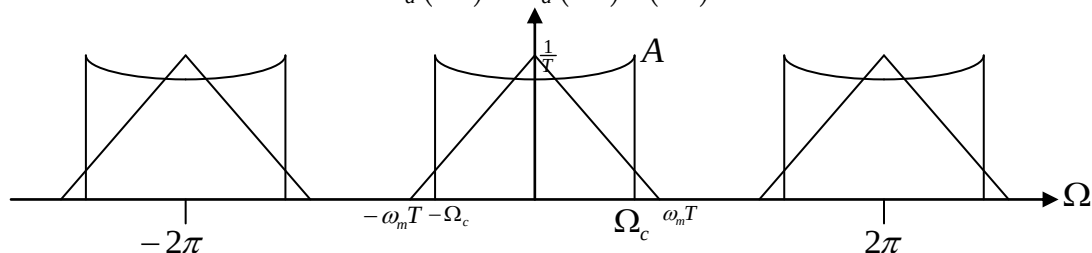


בשלב השני: נהפוך את רכבת ההלמים לסדרה בדידה (ע"י שינוי סקאלה): $\Omega = \omega T$

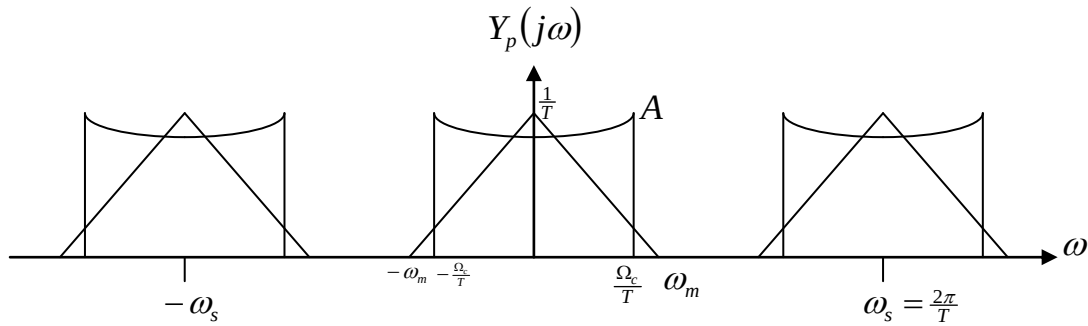


כעת נעביר את האות דרך המסנן $H(e^{j\Omega})$ עם תדר קטעון Ω_c (זוהי פעולת העיבוד):

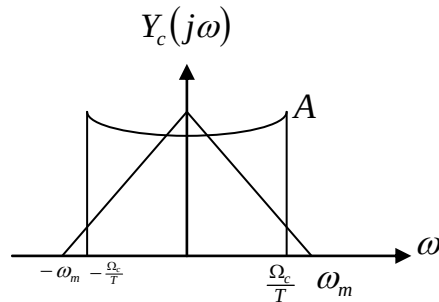
$$Y_d(e^{j\Omega}) = X_d(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega})$$



כעת נשחזר את האות הבדיד לאות רציף (ע"י שינוי סקאלה): $\omega = \frac{\Omega}{T}$



אחרי מעבר ב-LPF עם תדר קטעון $\frac{\omega_s}{2}$ והגבר T , נקבל את האות לאחר העיבוד:



הקשר בין המוצא לכניסה הוא:

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)H(e^{j\Omega}) = X_c(j\omega)H(e^{j\omega T})$$

עבור כל תדר מכפילים ב- T . המסנן מעביר את התדרים: $-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$.

כלומר: אם נסתכל על העיבוד בזמן רציף נראה כי קיבלנו מכפלה בתדר שהיא קונבולוציה בזמן.

אם לדוגמא המסנן הוא גוזר - אזי כידוע:

$$\frac{d}{dt}x(t) \xrightarrow{FT} j\omega X(j\omega)$$

נבדוק האם המסנן שתכננו הוא באמת גוזר:

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2T} [e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}] X_c(j\omega) = j \frac{\sin(\omega T)}{T} X_c(j\omega)$$

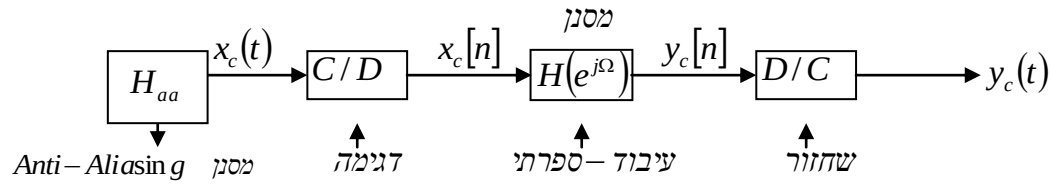
עבור $\omega T \rightarrow 0$ קטן (כלומר: אם דגמנו מספיק מהר) נקבל:

זוהי קירוב טוב לנגזרת בזמן. ניתן גם לתכנן את המסנן מסוף להתחלה. אנו רוצים ליצור מסנן כך ש:

$$H(e^{j\omega T}) = j\omega$$

אזי נתכנן מראש מסנן כזה, עם תדר קטעון ω_m $|\omega| < \omega_m$

עיבוד ספרתי של אותות בזמן רציף



המערכת פועלת כל עוד השכפולים לא נכנסו פנימה. נקבל: $Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)H(e^{j\omega T})$

מערכת השהיה

מערכת LTI לא יכולה להיזז בתדר, אבל ננסה ליצור השהיה באורך τ בזמן, כלומר נחפש:

$$y_d[n] = x_d[n - \frac{\tau}{T}]$$

$$h_d[n] = \delta[n - \frac{\tau}{T}]$$

ההשהיה תעבוד רק אם $\frac{\tau}{T}$ הוא מספר שלם. אם $\frac{\tau}{T}$ לא שלם - ניתן להעלות את קצב הדגימה ע"י אינטרפולציה ביחס של L , השהיה של k דגימות ואז דצימציה חזרה. אם τ הוא כפולה שלמה של $\frac{L}{T}$ אז זה יהיה בסדר. בתהליך האינטרפולציה והדצימציה לא נאבד מידע!

- אינטרפולציה מעלה את קצב הדגימה בזמן, כלומר: גורמת לכווץ של ציר התדר ואז מסננים ומשאירים את התדרים $[-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}]$.

- בתהליך הדצימציה נמלא את השכפולים בערכים, ונרחיב את האות. אבל בגלל שעשינו קודם אינטרפולציה אז זה מבטיח שלא נאבד מידע בדצימציה. זה יכול להבטיח לנו שנקבל השהיה של $\frac{kT}{L}$.

שנית. לכל τ רציונלי נוכל למצוא כזה L

אבל השהיה בשיטה זאת היא לא טובה כי עבור $\tau = \frac{11111}{283512}$ נצטרך ליצור מכל דגימה הרבה דגימות.

אם המסנן שאנו רוצים ליצור הוא: $H_c(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$ כלומר: השהיה ב- τ .

אז נצטרך ליצור מסנן ספרתי: $H_d(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{\Omega\tau}{T}}$ $-\pi \leq \omega \leq \pi$. יש לנו מחזוריות של המסנן הזה:

$$H_d(e^{j2\pi}) = e^{-j\frac{2\pi\tau}{T}} = e^{-j0}$$

המסנן הוא ספרתי, ולכן הוא מחזורי 2π , כלומר: עבור 2π נקבל את אותה תגובה של 0. השיוויון ל- e^{-j0} יתקבל רק אם $\frac{\tau}{T}$ שלם! וזו אותה מגבלה.

- תנאי נייקוויסט אומר: $X_c(j\omega) = 0 \quad \forall \omega: |\omega| > \frac{\pi}{T}$

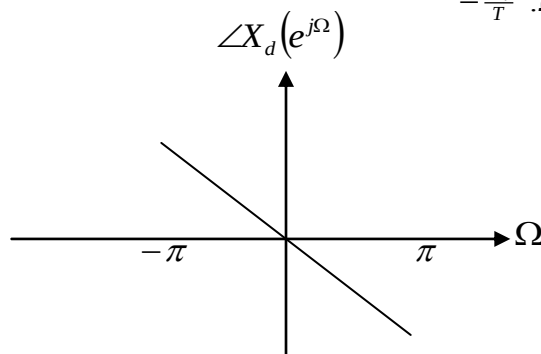
אם נחמיר את תנאי נייקוויסט ונאמר:

$$X_c(j\omega) = 0 \quad \forall \omega_c: |\omega| < |\omega_c| < \frac{\pi}{T}$$

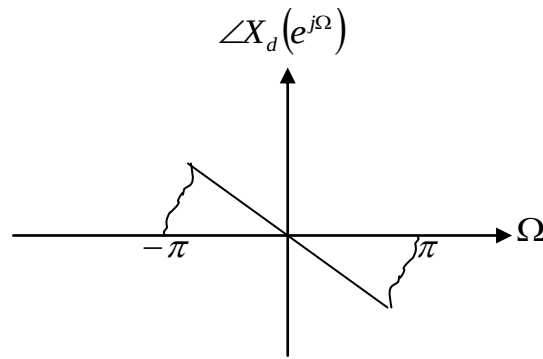
אזי נוכל לומר כי:

$$X_d(e^{j\Omega}) = 0 \quad \forall \Omega: \omega_c T < |\Omega| < \pi$$

צריך שלמסנן תהיה פאזה ליניארית: $-\frac{\Omega\tau}{T}$



הקטע שקרוב ל- π על פי הדרישה המחמירה לא מענין אותנו, והוא יכול לחזור ל-0 בקצב שלו. עדיין נוכל לבנות מסנן מחזורי שיראה כך:



נוכל לממש את המסנן בצורה ספרתית, וליצור כל השהיה שנרצה, ונקבל: $y_c(t) = x_c(t - \tau)$. זה מגביל יותר את האות. אבל תמיד נוכל להקטין ולשנות את T . ככל שיהיה לנו יותר מרווח שלא מעניין אותנו בין הפאזה ל- π / π אז זה יצור לנו מסנן שיהיה יותר קל לממש אותו. אי רציפות בזמן - רוחב סרט אינסופי בתדר אי רציפות בתדר - אינסופיות בזמן, זנב ארוך מאוד. כאשר אנחנו מתקנים בקצוות את הפאזה ל-0 זה מתקן את הרציפות.

בשיעור הקודם ראינו דוגמא למסנן המבצע גזירה במישור הספרתי: $y_d[n] = \frac{x_d[n+1] - x_d[n-1]}{2T}$

$$h[n] = \frac{1}{2T} (\delta[n+1] - \delta[n-1]) \xrightarrow{DTFT} H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2T} [e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}]$$

ראינו שעבור $\omega T \rightarrow 0$ קטן (כלומר: אם דגמנו מספיק מהר) נקבל: $Y_c(j\omega) \approx j\omega X_c(j\omega)$

לכן צריכים לתכנן מסנן שמקיים בזמן רציף: $H(j\omega) = j\omega$

אם ברצוננו להוסיף השהיה לאות נקבל: $H_c(j\omega) = j\omega e^{-j\omega \frac{T}{2}} = j\omega \cos(\omega \frac{T}{2}) + \omega \sin(\omega \frac{T}{2})$

נקבל: $H_d(e^{j\Omega}) = j \frac{\Omega}{T} \cos(\frac{\Omega}{2}) + \frac{\Omega}{T} \sin(\frac{\Omega}{2})$

התמרה הפוכה תיתן: $h[n] = \frac{\sin[\pi(n - \frac{1}{2})]}{\pi(n - \frac{1}{2})^2}$

קיבלנו תגובה להלם אינסופית, אבל זה הרבה יותר טוב מ- $\sin c$. החיתוך שלה שנרצה לדגום יהיה פחות נורא, כי היא דועכת לפי $\frac{1}{n^2}$ שזה יותר מהר מ- $\sin c$

מימוש מסננים מעשיים

נבחן מימוש של מסנן Butterworth LPF.

מסנן טוב הוא מסנן שמקיים: $|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2N}}$. זהו מסנן מסדר 2. המסנן הוא LPF כי הוא יורד

מונוטונית ככל ש- ω גדל. תדר $3dB$ הוא ω_c . יורד ל- $\frac{1}{2}$.

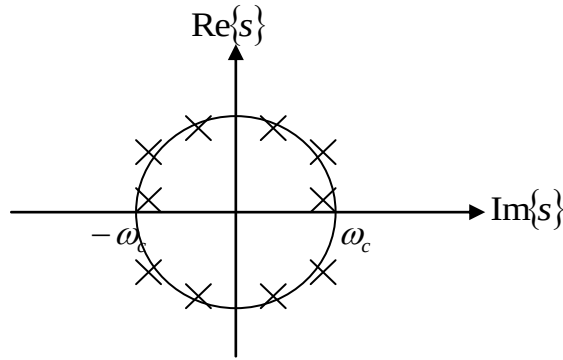
מערכות הניתנות למימוש אלה מערכות שניתן לבטא אותן באמצעות מד"ר בזמן רציף. נרצה למצוא את קוטב המסנן במישור הפלס, כלומר: את הערך שעבורו המכנה מתאפס (עבור מסנן מסדר N):

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H^*(j\omega) = H(j\omega)H(-j\omega) \xrightarrow{s=j\omega} H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (\frac{s}{j\omega_c})^{2N}}$$

ω_c ממשי תמיד. s - מרוכב. המכנה חייב להתאפס עבור $2N$ נקודות.

$$\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N} = -1 \Rightarrow \frac{s}{j\omega_c} = \sqrt[2N]{-1} = \sqrt[2N]{e^{j\pi}} = e^{\frac{j\pi}{2N}} \Rightarrow s_k = j\omega_c e^{\frac{j\pi k}{2N}}$$

הערכים המוחלטים של השורשים יופיעו בצמדים קומפלקסים על המעגל $|\omega_c|$. עבור $N = 5$ נקבל:



הערכים יאפסו את $|H(s)|^2 = H(s)H(-s)$ כאשר חצי יאפסו את $H(s)$ וחצי יאפסו את $H(-s)$ ניתן לומר כי הקטבים של $H(s)$ נמצאים בצד שמאל בגלל שהוא ממשי סיבתי ויציב. ניקח את הקטבים מצד שמאל ונרשום את $H(s)$ כמכפלה:

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} \cdot G$$

$$s_k = \omega_c e^{j \frac{(2k+N-1)\pi}{2N}}$$

כאשר G הוא הגבר כלשהו. מבחינה פורמלית:

$$s_1 = \omega_c e^{j \frac{3\pi}{4}} \quad s_2 = \omega_c e^{j \frac{5\pi}{4}} = \omega_c e^{j \frac{3\pi}{4}}$$

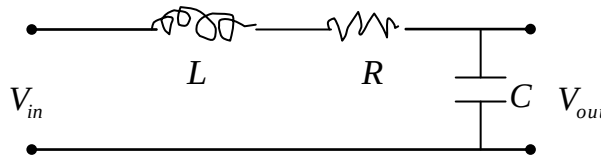
לדוגמא, עבור $N = 2$ נקבל:

מסנן ממשי מורכב מקטבים ממשיים או מצמדדים קומפלקסים, כלומר: אם קיים קוטב מרוכב - הצמוד המרוכב שלו גם יהיה קוטב.

$$H(s) = \left(\frac{1}{\frac{s}{\omega_c} - e^{j \frac{3\pi}{4}}} \right) \left(\frac{1}{\frac{s}{\omega_c} - e^{-j \frac{3\pi}{4}}} \right) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_c^2} - \left(e^{j \frac{3\pi}{4}} + e^{-j \frac{3\pi}{4}} \right) \frac{s}{\omega_c} + 1} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_c^2} - 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \frac{s}{\omega_c} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_c^2} - \sqrt{2} \frac{s}{\omega_c} + 1}$$

נסתכל על מעגל RLC טורי:



$$I(s) = \frac{V_{in}(s)}{sL + R + \frac{1}{sC}}$$

$$V_{out}(s) = I(s) \cdot \frac{1}{sC} = \frac{\frac{1}{sL}}{sL + R + \frac{1}{sC}} V_{in}(s)$$

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{1}{sL}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1}$$

$$LC = \frac{1}{\omega_c^2} \quad RC = \frac{\sqrt{2}}{\omega_c}$$

אם נרצה ליצור את המסנן שתכננו לעיל נבחר:

אם ברצוננו ליצור מסנן מסדר גבוה יותר, פשוט נשרשר ע"י חוצץ מתח. אלא שנהיה חייבים לקחת זוגות קומפלקסים, אחרת נקבל מסנן לא ממשי.

הערה: בכל מקרה מסנן Anti-Aliasing חייב להיות בזמן רציף. כל שאר העיבוד יכול להיות ספרתי.

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega) H_d(e^{j\omega T})$$

לסיכום:

$$H_d(e^{j\omega T}) = H_c(j\omega) \quad |\omega| < \frac{\pi}{T}$$

$$H_c(j\omega) = 0 \quad |\omega| > \frac{\pi}{T}$$

בניה בינתיים כי:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c(j \frac{\Omega - 2\pi k}{T})$$

שכפול מחזורי של $H_c(j\omega)$:

זה מזכיר את משפט הדגימה (מקונבולוציה עם רכבת הלהמים). ניזכר במשפט הדגימה:

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\frac{\Omega-2\pi k}{T})$$

$$x_d[n] = x_c[nT] \quad \text{המסנן הוא: } X_d(e^{j\Omega}) \text{ הוא דגימה של } X_c(j\omega) \text{ בזמן. כלומר:}$$

$$h_d[n] = Th_c[nT]$$

התגובה להלם של המסנן היא דגימה של המסנן מזמן רציף. העקרון הזה נקרא **שימור התגובה להלם**.

$h_c[n]$ הוא מוגבל סרט, וזה בעיה כי רוב המסננים אינם מוגבלי סרט. אז ישנם 2 אפשרויות:

$$H_{eff}(j\omega) = \begin{cases} H_c(j\omega) & |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad 1. \text{ נחסום את המסנן, נגדיר מסנן אפקטיבי:}$$

עיקרון שימור התגובה להלם יתקיים עבור המסנן האפקטיבי ולא עבור המסנן המקורי:

$$h_d[n] = T \cdot h_{eff}[nT]$$

כאשר נרצה לחשב את התגובה להלם יתקע כי המסנן הוא חסום סרט.

2. נשתמש במסנן כמו שהוא, ונקווה כי השכפולים זניחים. נממש את המסנן:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c(j\frac{\Omega-2\pi k}{T}) \xrightarrow{DTFT^{-1}} h_d[n] = Th_c[nT]$$

נשתמש בעקרון שימור התגובה להלם. אנו יודעים כי המסנן יורד מונוטונית, אבל צריך לדאוג שהשכפולים יהיו זניחים.

בזמן רציף: המסננים יהיו מיוצגים ע"י משוואת דיפרנציאליות, ובמישור s נקבל פולינום חלקי פולינום.

בזמן בדיד: המסננים יהיו מיוצגים ע"י משוואות הפרש, ובמישור z נקבל פולינום חלקי פולינום.

נתון מסנן בזמן רציף, נרצה להגיע ממנו למסנן בזמן בדיד שמייצג אותו. נשתמש בעקרון שימור התגובה:

1. נמיר למישור הזמן ונקבל תגובה להלם.

2. נדגום את התגובה להלם

3. נתמיר את התגובה ונקבל משוואת הפרש ב- z

אם $H_c(s)$ הוא חלוקה של 2 פולינומים נמצא לו חלוקה לשברים חלקיים. לצורך הפשטות נניח כי למסנן קיימים רק קטבים פשוטים (כלומר: כל הקטבים הם מסדר 1):

שלב 1:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

$$H_c(j\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{j\omega - s_k} \xrightarrow{FT^{-1}} h_c(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$

החלק הממשי של הקוטב צריך להיות שלילי על מנת שהמסנן יהיה יציב. אז כל האקספוננטים ידעכו.

$$h_d[n] = Th_c(nT) = Tu(n) \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} \quad \text{שלב 2: נדגום את המסנן שקיבלנו במישור הזמן:}$$

$$H_d[z] = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-k}} \quad \text{שלב 3: נתמיר את המסנן הדגום:}$$

נשים לב שכל קוטב s_k של המסנן בזמן רציף, ממופה לקוטב $e^{s_k T}$ של המסנן בזמן בדיד. אם הקוטב הוא

מצד שמאל (כלומר: חלק ממשי שלילי) אזי בזמן בדיד נקבל $e^{s_k T} < 1$ ונמצא שהקוטב הוא בתוך מעגל היחידה והמסנן יציב.

הערה: אפסים לא ימופו בצורה דומה!

דוגמא: נרצה לממש בקירוב (נזניח את השכפולים) מסנן Butterworth מסדר שני.

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_c^2} + \sqrt{2} \frac{s}{\omega_c} + 1} = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2} \omega_c^2 \frac{s}{\omega_c} + \omega_c^2} \quad \text{שלב ראשון: נפרק לשברים חלקיים:}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_c^2}{\left(s - \omega_c e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(s - \omega_c e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right)} = \frac{A}{s - \omega_c e^{j\frac{3\pi}{4}}} + \frac{B}{s - \omega_c e^{-j\frac{3\pi}{4}}} \\
&= \frac{A\left(s - \omega_c e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right) + B\left(s - \omega_c e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)}{\left(s - \omega_c e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(s - \omega_c e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)} \\
&\omega_c^2 = (A+B)s - \omega_c \left(Ae^{-j\frac{3\pi}{4}} + Be^{j\frac{3\pi}{4}}\right) \\
&A+B=0 \quad Ae^{-j\frac{3\pi}{4}} + Be^{j\frac{3\pi}{4}} = -\omega_c \\
&A = -j\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} \quad B = j\frac{\omega_c}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

אנחנו יודעים את הקטבים:

$$H(s) = -j\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{s - \omega_c e^{j\frac{3\pi}{4}}} - \frac{1}{s - \omega_c e^{-j\frac{3\pi}{4}}} \right)$$

נקבל:

הקטבים בהתמרת z יהיו: $e^{\omega_c e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}}$, וההתמרה תהיה:

$$H_d[z] = -jT\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1 - e^{\omega_c e^{j\frac{3\pi}{4}}} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{\omega_c e^{-j\frac{3\pi}{4}}} z^{-1}} \right)$$

$$e^{\pm j\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \pm j\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$H_d[z] = -jT\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{j\sqrt{2}}{2}\omega_c T} e^{j\omega_c \frac{\sqrt{2}}{2} T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{j\sqrt{2}}{2}\omega_c T} e^{-j\omega_c \frac{\sqrt{2}}{2} T} z^{-1}} \right)$$

בשביל לממש פולינום חלקי פולינום, נעשה מכנה משותף:

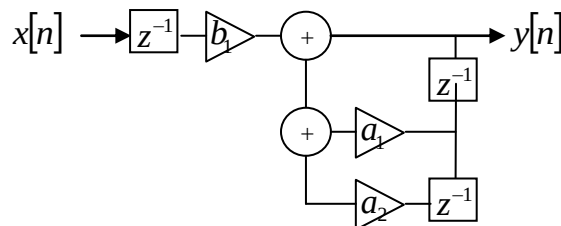
$$\begin{aligned}
H_d[z] &= -jT\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} \frac{e^{-\frac{j\sqrt{2}}{2}\omega_c T} \left(e^{-j\omega_c T \frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{j\omega_c T \frac{\sqrt{2}}{2}} \right) z^{-1}}{\left(1 - e^{-\frac{j\sqrt{2}}{2}\omega_c T} e^{j\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_c T} z^{-1} \right) \left(1 - e^{-\frac{j\sqrt{2}}{2}\omega_c T} e^{-j\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_c T} z^{-1} \right)} = \\
&= -jT\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} \frac{-2j\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_c T\right)}{1 - e^{-\frac{j\sqrt{2}}{2}\omega_c T} z^{-1} \left(e^{j\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_c T} + e^{-j\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_c T} \right) + e^{-\sqrt{2}\omega_c T} z^{-2}} = \\
&= \frac{-2\omega_c T \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_c T\right) z^{-1}}{1 - e^{-\frac{j\sqrt{2}}{2}\omega_c T} z^{-1} 2\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_c T\right) z^{-1} + e^{-\sqrt{2}\omega_c T} z^{-2}} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}
\end{aligned}$$

כדי לממש את זה נרשום משוואת הפרש:

$$H_d[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \Rightarrow Y[z][1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}] = X[z]b_1 z^{-1}$$

$$\begin{aligned}
y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] &= b_1 x[n-1] \\
y[n] &= b_1 x[n-1] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]
\end{aligned}$$

זו הצורה לעשות את זה במטל"ב:



פתרון מבחן תשס"ז – מועד א

1. (30 נקודות) נתון $p(t)$, אות מחזורי במחזור T :

$$p(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases} \quad P(t+T) = P(t)$$

ידוע כי $\frac{T_1}{T}$ אינו שבר רציונלי.

האות $p(t)$ מסונן ע"י מסנן מעביר גבוהים (HPF) אידיאלי, בעל תדר קטעון $\frac{\pi}{T}$.

במוצא המסנן מתבל האות: $q(t) = p(t) * h_{HPF}(t)$.

משתמשים באות $q(t)$ כגל נושא לשם אפנון האות $x(t)$, בעל התמרת פורייה:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{\omega_m} & -\omega_m \leq \omega \leq \omega_m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

האות המאופנן הינו: $y(t) = x(t)q(t)$

א. (5 נקודות) מצאו את התמרת פורייה $P(j\omega)$ של האות המחזורי $p(t)$ ואיירו אותה.

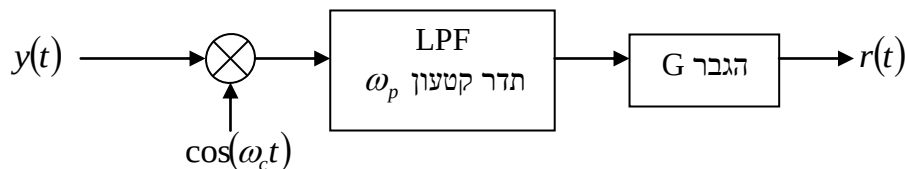
ב. (5 נקודות) מצאו את התמרת פורייה $Q(j\omega)$ של האות $q(t)$ ואיירו אותה.

האם $q(t)$ אות מחזורי? אם תשובתכם חיובית – מצאו את מחזורו. אם תשובתכם שלילית – נמקו.

ג. (6 נקודות) איירו את התמרת פורייה $Y(j\omega)$ של האות המאופנן $y(t)$. מצאו תנאי על T ,

המחזור של $p(t)$, שיבטיח את יכולת הגילוי של האות $x(t)$.

ד. (5 נקודות) השתמשו במקלט DSB התקני, הנתון להלן, כדי לשחזר את האות $x(t)$:



קבעו את התדר ω_c , את תדר הקטעון של המסנן מעביר הנמוכים האידיאלי (LPF) ω_p , ואת

ההגבר G כך שיובטח: $r(t) = x(t)$.

ה. (9 נקודות) כתוצה מתקלה במערכת השידור, מתאפסים הפולסים של $p(t)$ בזמנים:

$$t = kT \quad k = 0, \pm 3, \pm 6, \dots$$

איירו את התמרת פורייה של האות המאופנן $y(t)$ - $Y(j\omega)$ במקרה זה.

רמז: האות $p(t)$ לאחר הקלקול הוא אות מחזורי. מצאו את מחזור האות, ואיירו את המחזור הבסיסי שלו.

ו. (רשות: תוספת 5 נקודות) המקלט אינו יודע על הקלקול במשדר, ולכן ממשיך בפעולתו.

בעזרת הפרמטרים שמצאם בסעיף ד'. האם עדיין מתקיים במוצא המקלט $r(t) = x(t)$ אם

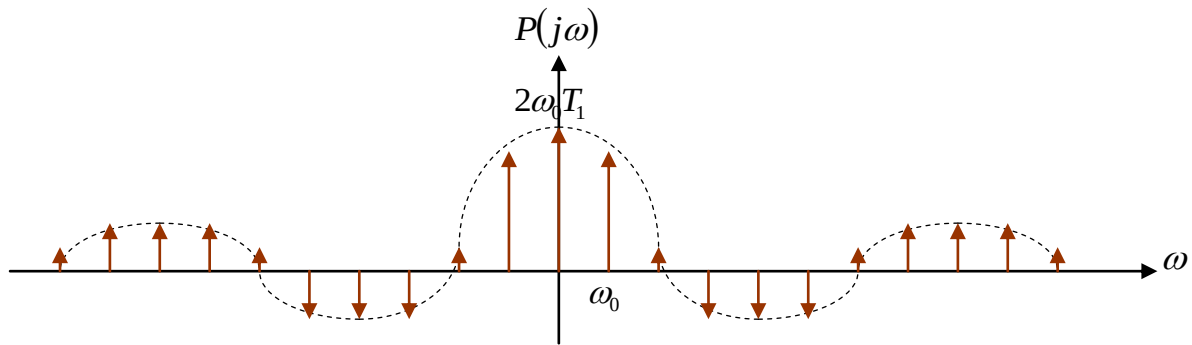
תשובתכם חיובית, נמקו. ואם לאו, הציעו תיקון למקלט שיאפשר גילוי מושלם.

הנחיה: בסעיף זה ניתן להניח כי: $\omega_m = \frac{2\pi}{T}$

פתרון:

א. ע"פ דף הנוסחאות: $P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$ $\xrightarrow{FT}$ $p(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases}$

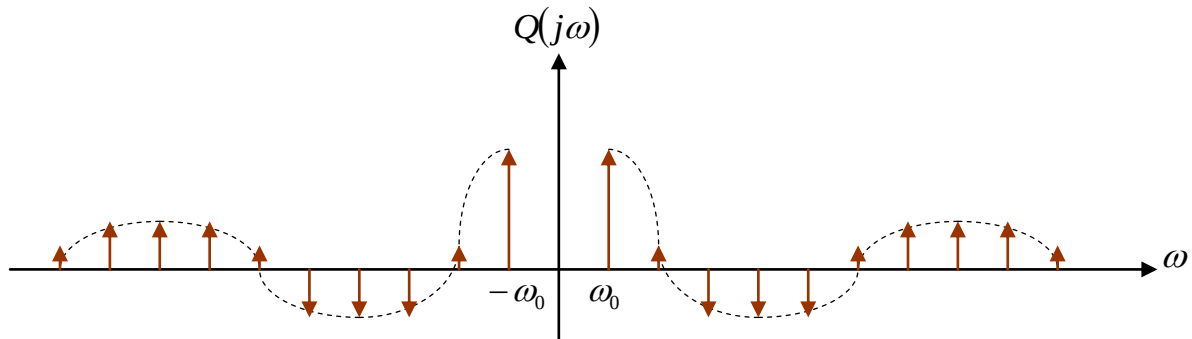
נקבל הלמים בצורת sinc, כאשר הרווח בין כל שני הלמים הוא: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



נקודות האיפוס הראשונות של ה-sinc הם כאשר: $\omega T_1 = \pm\pi$, כלומר: $\omega = \pm \frac{\pi}{T_1}$.

ההגבר במרכז הוא: $\frac{2k\omega_0 T_1}{k} = 2\omega_0 T_1 = 4\pi \frac{T_1}{T}$

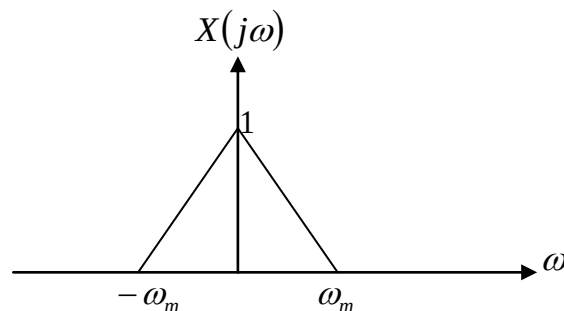
ב. תדר הקטעון של ה-BPF הוא: $\frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T}$. כלומר: הוא יסנן את ההלם במרכז, ונקבל:



$$Q(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0) \quad k \neq 0$$

האות $q(t)$ עדיין מחזורי כי התמרת פורייה שלו מורכבת מהלמים במרווחים קבועים. כמו"כ האות בסה"כ עבר דרך מערכת LTI ואות מחזורי שעובר דרך מערכת LTI נשאר מחזורי. המחזור של האות $q(t)$ נשאר T.

ג. האות $X(j\omega)$ הוא משולש בודד, כלומר: הוא אות חסום סרט ω_m :

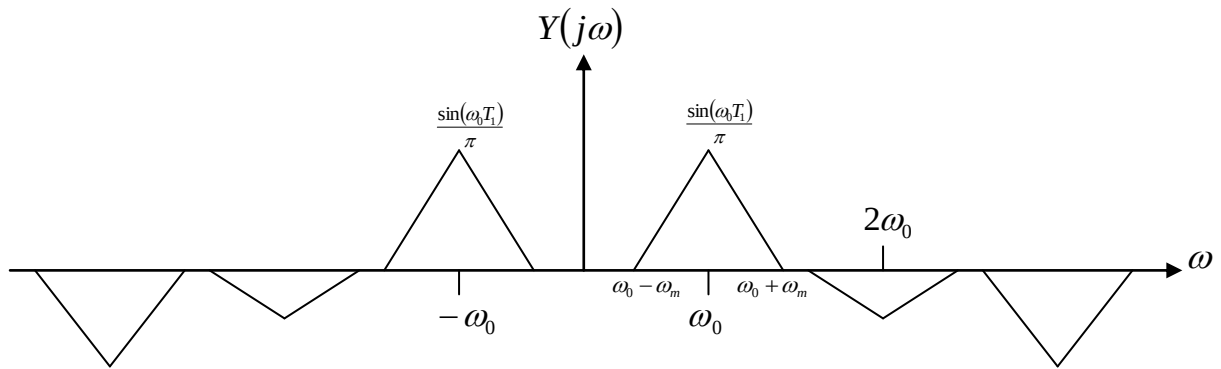


$$y(t) = x(t)q(t) \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Q(j\omega) =$$

האות המאופנן הוא:

$$= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} X(jk\omega_0) \quad k \neq 0$$

קיבלנו קונבולוציה עם הלמים, כלומר נקבל הזזות של האות עם הגבר משתנה לפי sinc:



התנאי לשחזור של $x(t)$ מתוך $y(t)$ הוא שהמשולשים לא ידרכו אחד על השני, כלומר:

$$\omega_0 + \omega_m \leq 2\omega_0 - \omega_m \Rightarrow 2\omega_m \leq \omega_0 \Rightarrow \omega_m \leq \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T}$$

ד. ההכפלה ב- $\cos(\omega_c t)$ מזיזה את $Y(j\omega)$ ימינה ושמאלה ומורידה את ההגבר בחצי:

$$\begin{aligned} y(t)\cos(\omega_c t) &\xrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi} Y(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} X(jk\omega_0) * \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{2k\pi} [X(j(k\omega_0 - \omega_c)) + X(j(k\omega_0 + \omega_c))] \end{aligned}$$

$$\omega_c = \omega_0$$

על מנת שההזזה תהיה בדיוק למרכז, נקבע:

תדר הקטעון של ה-LPF צריך לכלול רק את המשולש המרכזי שיווצר במרכז, כלומר:

$$\omega_m \leq \omega_p \leq \omega_0 - \omega_m$$

כיון שבמרכז התחברו 2 משולשים, נקבל שהורדת ההגבר בחצי שגרמה להכפלה ב- $\cos(\omega_c t)$

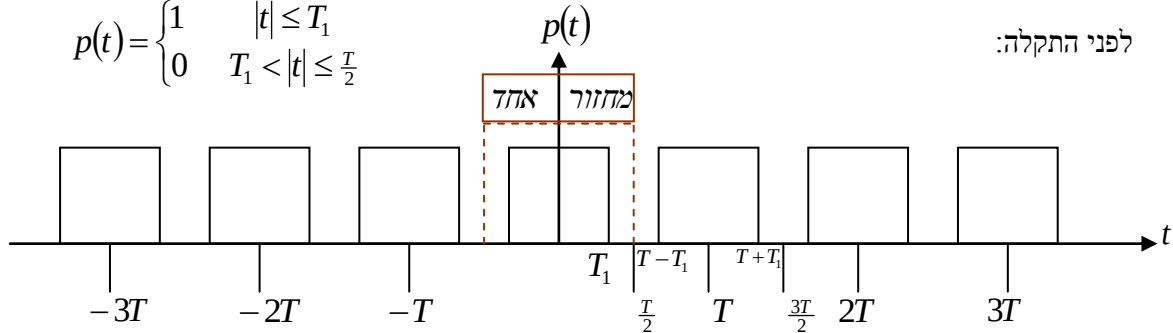
התקזזה, ולכן ההגבר צריך להיות אחד חלקי ההגבר של המשולש הראשון:

$$G = \frac{\pi}{\sin(\omega_0 T_1)}$$

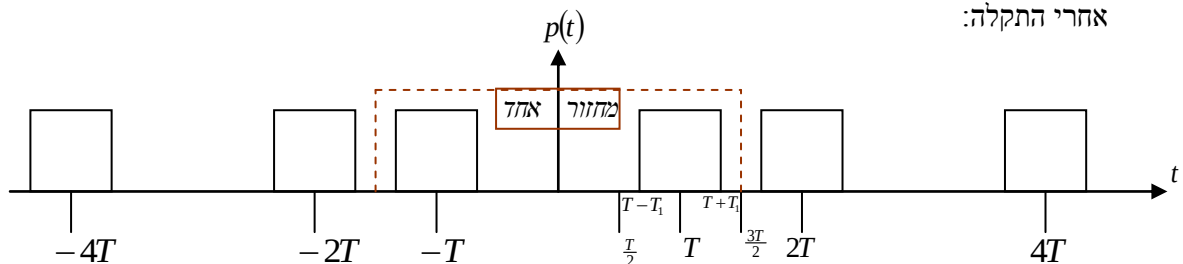
ה. הפולסים של האות $p(t)$ מתאפסים בזמנים: $t = kT$ $k = 0, \pm 3, \pm 6, \dots$, כלומר:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

לפני התקלה:



אחרי התקלה:



ניתן לראות כי המחזור עלה ל- $3T$. כעת נגדיר את האות החדש:

תחילה נגדיר מחזור אחד של האות. הוא מורכב משני ריבועים שמוזזים ב-T מהמרכז. כלומר, אם:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \xrightarrow{FT} G(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$$

מייצג ריבוע אחד במרכז, אזי: $f(t) = g(t-T) + g(t+T)$ מייצג שתי הזזות שלו ימינה ושמאלה.

$$f(t) = g(t-T) + g(t+T)$$

$$F(j\omega) = (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}) \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} = \frac{4 \sin(\omega T_1) \cos(\omega T)}{\omega}$$

הזזת בזמן היא הכפלה באקספוננט בתדר. כעת, כל שנותר לנו הוא להפוך את האות למחזורי עם מחזור $3T$, כלומר:

$$\tilde{p}(t) = f(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-3kT)$$

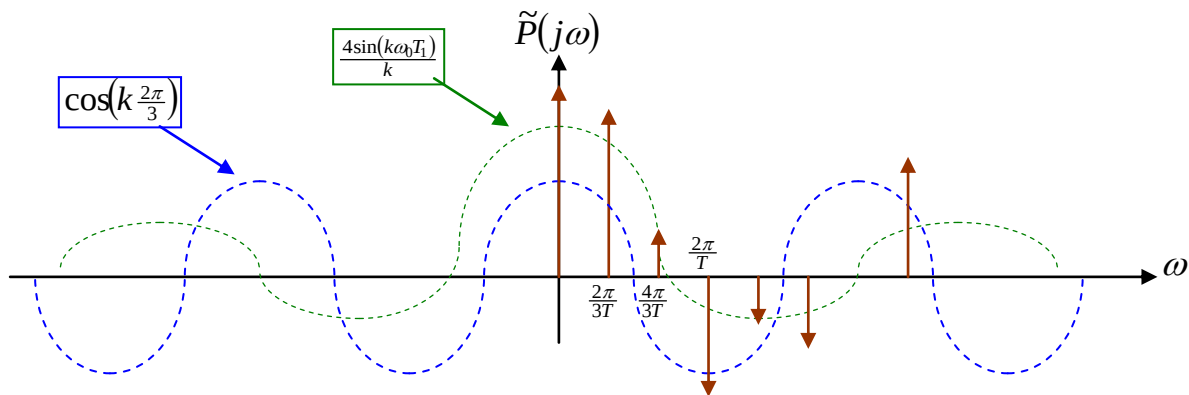
כדי למצוא את התמרת פורייה נמצא מקדמי פורייה של האות המחזורי $\tilde{p}(t)$:

$$\tilde{p}(t) \xrightarrow{FS} \tilde{p}_k = \frac{1}{3T} F(jk\omega_0) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{3T}$$

ולכן ע"פ הדואליות בין מקדמי פורייה להתמרת פורייה:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(j\omega) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{p}_k \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{3T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(jk\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) = \\ &= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin(\omega T_1) \cos(\omega T)}{\omega} \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin(k\omega_0 T_1) \cos(k\omega_0 T)}{k} \delta(\omega - k\omega_0) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin(k \frac{2\pi}{3T} T_1) \cos(k \frac{2\pi}{3} T)}{k} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{3T}) \end{aligned}$$

קיבלנו רכבת הלימים המוכפלת ב-sinc וב-cos:



$$\omega T_1 = \pm \pi n \Rightarrow \omega = \pm \frac{\pi}{T_1} n \quad n = 1, 2, \dots$$

נקודות האיפוס של ה-sinc הם:

$$k\omega_0 = k \frac{2\pi}{3T} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

הנקודות בהן יהיו ההלמים הם:

ה-cos לעולם לא יתאפס עבור k טבעי.

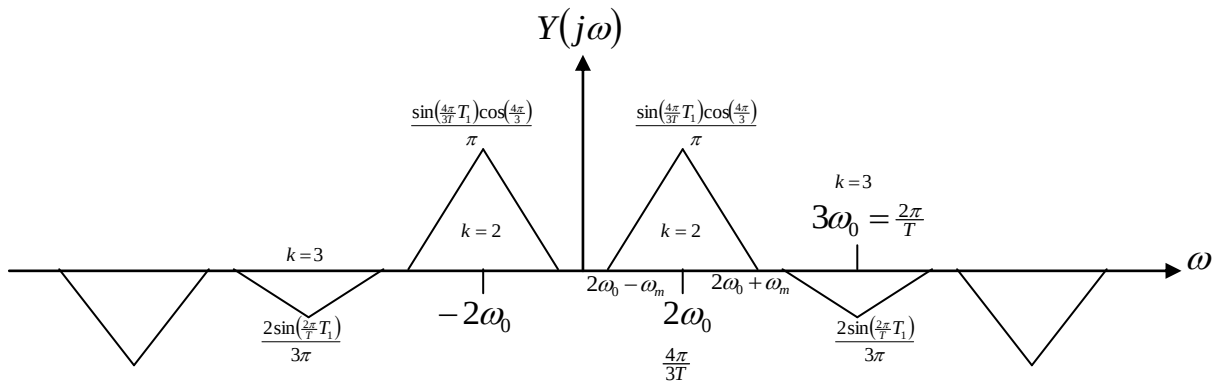
תדר הקטעון של מסנן ה-BPF הוא $\frac{\pi}{T} = \frac{3\omega_0}{2}$, כלומר: הוא יקטע את ההלם שבמרכז וגם את שני

ההלמים שמצדדיו (עבור $k = 0, \pm 1$). זהו הגל הנושא של האות $x(t)$. במישור פורייה נקבל:

$$y(t) = x(t) \tilde{q}(t) = x(t) [\tilde{p}(t) * h_{HPF}(t)] \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \tilde{Q}(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(k \frac{2\pi}{3T} T_1) \cos(k \frac{2\pi}{3} T)}{k\pi} X(jk \frac{2\pi}{3T}) \quad k \neq 0, \pm 1$$

בעצם נקבל הזזות של $X(j\omega)$ רק בהגבר שונה:



1. בסעיף ד מצאנו: תדר הגל הנושא: $\omega_c = \frac{2\pi}{T}$

תדר הקטעון: $\omega_m \leq \omega_p \leq \omega_0 - \omega_m$

הגבר: $G = \frac{\pi}{\sin(\frac{2\pi}{T}T_1)}$

נתון: $\omega_m = \frac{2\pi}{T}$

ברור כי המקלט לא יוציא את האות $x(t)$ בגלל שההגבר שונה וההזזות שונות, כמו"כ נקבל דריכה (המקלט יוציא את השכפול השלישי שמרכזו ב- $\frac{2\pi}{T}$)

על מנת לתקן את המקלט נצטרך:

- לשנות את תדר הגל הנושא ל- $\omega_c = 2\omega_0 = \frac{4\pi}{3T}$

- לשנות את ההגבר ל- $G = \frac{\pi}{2\sin(\frac{4\pi}{3T}T_1)\cos(\frac{4\pi}{3})}$

- צריך להתקיים $2\omega_m < \omega_0$ על מנת שלא יהיו דריכות. אז נוכל לשנות את תדר הקטעון של המסנן

ל- $\omega_m \leq \omega_p \leq \omega_0 - \omega_m$

2. (35 נק') אנו מעוניינים לדגום אות בזמן רציף $x(t)$.

מסיבות מעשיות, במקום לדגום ישירות את האות $x(t)$, אנו דוגמים אותו לאחר שעבר סינון LTI. כלומר, האות הדגום המעשי מוגדר כדלקמן:

$$v(t) = x(t) * g(t)$$

$$v[n] = v[nT] \quad -\infty < n < \infty$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2} \leq t \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{כאשר:}$$

ו-T הוא זמן הדגימה.

א. (5 נק') הוכיחו כי ניתן לרשום את הדגימות כ: $v[n] = \frac{1}{\Delta} \int_{nT-\frac{\Delta}{2}}^{nT+\frac{\Delta}{2}} x(\tau) d\tau$. משמע: הדגימות $v[n]$

מייצגות את ממוצע האות $x(t)$ סביב זמני הדגימה nT $-\infty < n < \infty$

ב. (4 נק') חשבו את התמרת פורייה של המסנן: $G(j\omega)$.

מעשה, נתון כי $x(t)$ הינו אות ממשי, מחזורי במחזור T_0 , בעל מקדמי טור פורייה C_k $-\infty < k < \infty$. כמו כן, נתון כי לאות אין רכיב DC.

ג. (8 נק') שרטטו איכותית את $|V(j\omega)|$, ערכה המוחלט של התמרת פורייה של האות במוצא המערכת $g(t)$.

ד. (6 נק') העזרו בתמונת התדר ששרטטתם כדי לקבוע קשר בין Δ ו- T_0 כך שבהכרח יתקבל $v[n] = 0$.

ה. (5 נק') השתמשו אך ורק בשיקולים במישור הזמן כדי לקבוע קשר בין Δ ו- T_0 כך שבהכרח יתקבל $v[n] = 0$ (מובן, שתוצאות הסעיפים ד' ו-ה' זהות).

רמז: הבהירו לעצמכם מה המשמעות של הנתון המציין, כי לאות $x(t)$ אין רכיב DC.

ו. (7 נק') נניח עתה כי $\Delta = \frac{T_0}{2}$ וכי $T = \frac{T_0}{N}$ (מספר שלם), וכי מקדמי פורייה של האות $x(t)$ מקיימים:

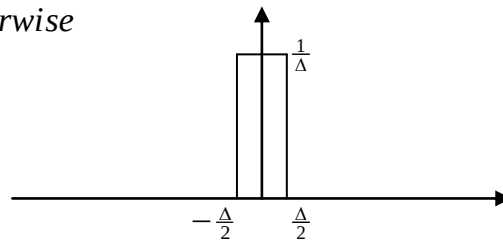
$$\begin{cases} c_k \neq 0 & k = \pm 1 \\ c_k = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

קבעו תנאי על N כך שלא תתרחש תופעת קיפול בדגימת $x(t)$ ע"י $v[n]$. מצאו, תחת תנאי זה, את המשחזר האידיאלי של $x(t)$ מתוך הדגימות $v[n]$, $-\infty < n < \infty$. יש לרשום תרשים מלבני מלא של המשחזר.

פתרון:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2} \leq t \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

א. נצייר את $g(t)$:



$g(t)$ הוא קירוב מסוים לפונקציית הלם. הוא מלבן שאורכו וגובהו תלוי ב- Δ . $v(t) = x(t) * g(t)$ הוא קונבולוציה עם מלבן זה. בצורה אידיאלית נקבל הלם ואז תוצאת קונבולוציה עם הלם היא האות עצמו. אלא שכאן יש קירוב של הלם, ולכן נחשב את הקונבולוציה:

$$v(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\Delta} \int_{t - \frac{\Delta}{2}}^{t + \frac{\Delta}{2}} x(\tau) d\tau$$

$$v[n] = v(nT) = \frac{1}{\Delta} \int_{nT - \frac{\Delta}{2}}^{nT + \frac{\Delta}{2}} x(\tau) d\tau$$

לפיכך דגימה של תוצאת הקונבולוציה תיתן:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2} \leq t \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \xrightarrow{FT} G(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega \frac{\Delta}{2})}{\Delta \omega}$$

ב. ע"פ דף הנוסחאות:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT_0) \xrightarrow{FS} c_k = \frac{1}{T_0} F(jk\omega_0) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

ג. נגדיר את האות:

כאשר: $f(t)$ הוא מחזור אחד של האות $x(t)$. לפיכך:

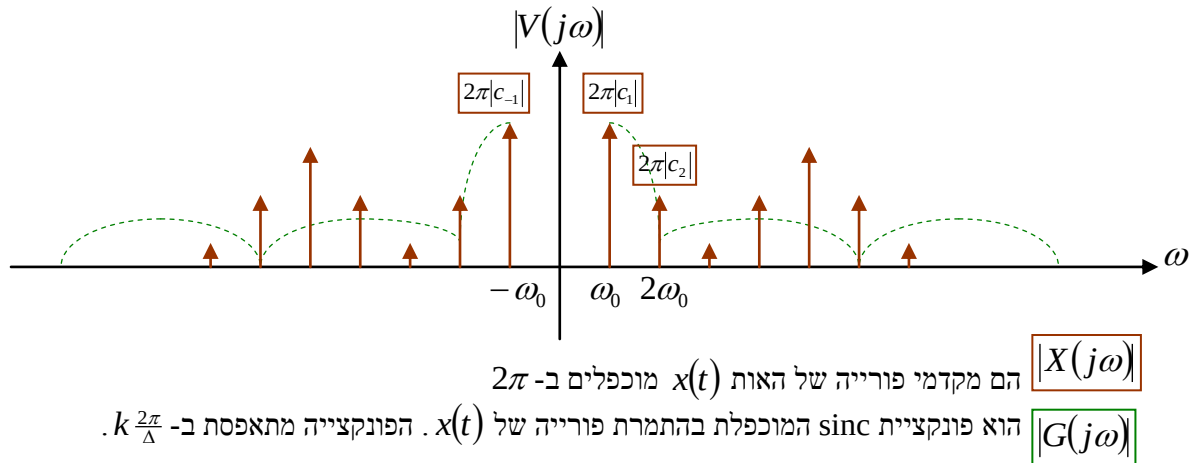
$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(jk\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) \quad k \neq 0$$

$k \neq 0$ כיון שלאות אין מרכיב DC - כלומר - אין הלם ב- $\omega = 0$. (כידוע - לאות מחזורי יש הלמים בתדר). המרחק בין ההלמים הוא: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. הערך המוחלט של ההתמרה חייב להיות סימטרי בגלל שהתמרת פורייה של אות ממשי היא סימטרית. ההלמים הם מקדמי פורייה של האות (מוכפלים ב- 2π):

$$v(t) = x(t) * g(t) \xrightarrow{FT} V(j\omega)$$

$$V(j\omega) = X(j\omega)G(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi \sin(k\omega_0 \frac{\Delta}{2})}{\Delta k \omega_0 T_0} F(jk\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)$$

נצייר איכותית:



מכפלת הגרפים תיתן את $|V(j\omega)|$.

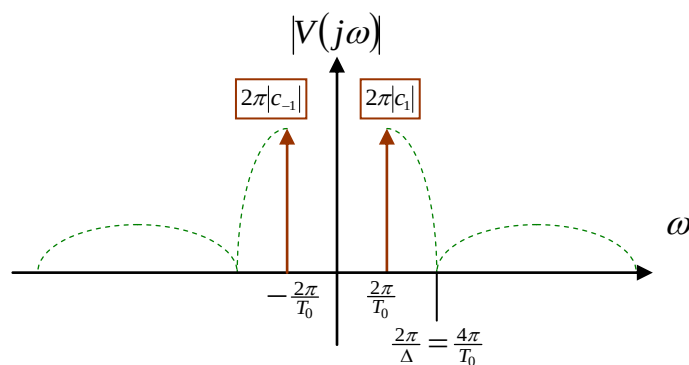
ד. על מנת שיתקיים: $v[n] = 0$ צריך שההלמים יפלו בדיוק על המקומות בהם פונקציית ה-sinc מתאפסת, כלומר:

$$k\omega_0 = k \frac{2\pi}{\Delta} \Rightarrow T_0 = \Delta$$

$$v[n] = v(nT) = \frac{1}{\Delta} \int_{nT - \frac{\Delta}{2}}^{nT + \frac{\Delta}{2}} x(\tau) d\tau = 0$$

ה. במישור הזמן נדרוש:

זה יתקיים אם האינטגרל יהיה על מחזור שלם של הפונקציה, כלומר נדרוש: $\Delta = T_0$. אז נקבל שאינטגרל על מחזור שלם הוא קבוע - DC. וזה יהיה בדיוק הגדרת המקדם פורייה של $x(t)$ ב-0, וכיון שנתון לנו שאין מקדם פורייה ב-0 אזי נדע שהאות $v[n] = 0$ בכל מקום.
ו. ע"פ הנתונים נקבל שכל ההלמים נמחקים חוץ מהשניים הראשונים:

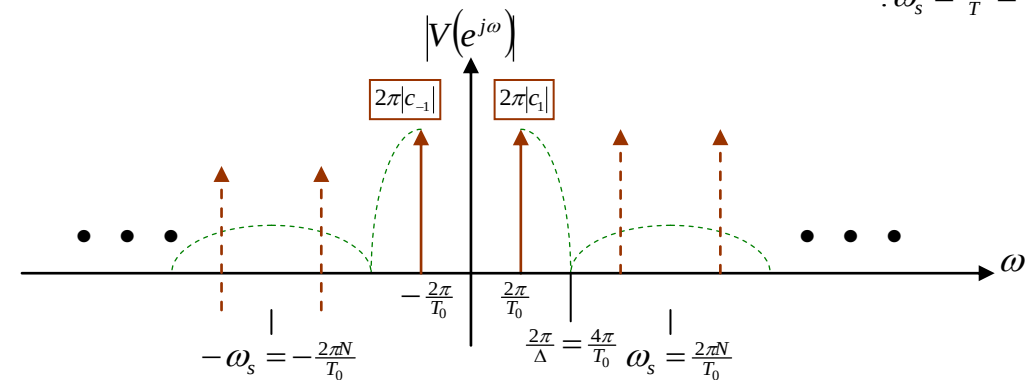


$$V(j\omega) = X(j\omega)G(j\omega) =$$

$$= \frac{4\pi \sin(\omega_0 \frac{\Delta}{2})}{\Delta \omega_0 T_0} F(j\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) + \frac{4\pi \sin(\omega_0 \frac{\Delta}{2})}{\Delta \omega_0 T_0} F(-j\omega_0) \delta(\omega + \omega_0) =$$

$$= \frac{4}{T_0} F(j\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) + \frac{4}{T_0} F(-j\omega_0) \delta(\omega + \omega_0)$$

אם נרצה לדגום את האות במרווח דגימה T במישור הזמן, במישור התדר נקבל שכפולים במרווח
 $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{T_0}$



על מנת שלא יהיו קיפולים נדרוש:
 $\omega_s - \frac{2\pi}{T_0} > \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \frac{2\pi N}{T_0} > \frac{4\pi}{T_0} \Rightarrow N > 2$

3. נתון אות $x[n]$ בעל התמרת פורייה בזמן בדיד (DTFT) המקיים:

$$x[n] = 0 \quad \forall n > N_1, n < -N_1$$

משמע: $x[n]$ מתאפס בהכרח מחוץ לתחום $-N_1 \leq n \leq N_1$.

יוצרים "דגימת הלם" של ה-DTFT על פני מחזור יחיד בנקודות $k = \langle M \rangle$: $\Omega = \frac{2\pi}{M} k$

$$\tilde{X}(e^{j\Omega}) = \frac{2\pi}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right) \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{M}k\right)$$

$$\tilde{x}[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{X}(e^{j\Omega}) \quad \text{נסמן:}$$

א. (9 נק') רשמו את $\tilde{x}[n]$ כתלות ב- $x[n]$ והוכיחו כי הוא אות מחזורי. מהו המחזור של $\tilde{x}[n]$?

ב. (8 נק') מצאו את M הקטן ביותר, שיאפשר שחזור מדויק של ההתמרה $X(e^{j\Omega})$ מתוך $\tilde{X}(e^{j\Omega})$.
 רמז: כדאי לבדק את המתרחש במישור הזמן.

ג. (12 נק') עבור M שמצאתם בסעיף ב', הוכיחו כי נוסחה לשחזור מדויק של ההתמרה $X(e^{j\Omega})$

מתוך דגימותיה - $k = \langle M \rangle$ $X(e^{j\frac{2\pi}{M}k})$ נתונה ע"י:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=\langle M \rangle} X(e^{j\frac{2\pi}{M}k}) \frac{\sin\left[\frac{M}{2}(\Omega - \frac{2\pi}{M}k)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(\Omega - \frac{2\pi}{M}k)\right]}$$

רמז: רשמו, ראשית, את נוסחת השחזור בזמן $x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$.

ד. (6 נק') הסבירו את נוסחת השחזור בסעיף ג' והשוו אותה לנוסחת השחזור של אות בזמן רציף מתוך דגימותיו (נוסחת השחזור של שאנון).

פתרון:

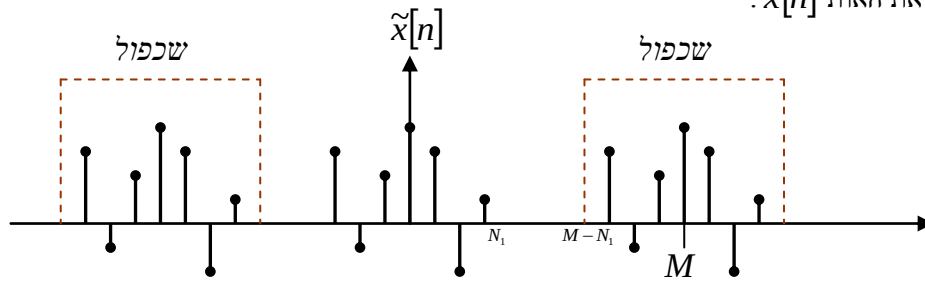
$$\tilde{X}(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{M}k\right) = \frac{2\pi}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right) \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{M}k\right) \quad \text{א. מדף הנוסחאות:}$$

בכל מחזור יש שני הלמים (אחד בתחילת המחזור ואחד בסוף), נקבל:

$$\tilde{X}(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \frac{2\pi}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{M}k\right) = X(e^{j\Omega}) P(j\omega)$$

$$\tilde{x}[n] = x[n] * p[n] = x[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kM]$$

נקבל שכפולים של האות המקורי $x[n]$ במרווחים של M . ברור כי האות $\tilde{x}[n]$ מחזורי M .
 ב. נצייר את האות $\tilde{x}[n]$:



כידוע, האות $x[n]$ חסום בזמן על ידי הנקודה: $n = N_1$, לפיכך על מנת שלא יהיו דריכות בשכפול נדרוש:
 $M - N_1 > N_1 \Rightarrow M > 2N_1$
 לכן ה- M המינימלי יהיה:
 $M = 2N_1 + 1$
 ג. על מנת לשחזר את האות נצטרך להכפיל את $\tilde{x}[n]$ בפונקציית חלון בזמן:

$$x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$$

$$w[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \xrightarrow{DFT} W(e^{j\Omega}) = \frac{\sin[\Omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{\Omega}{2})} \quad N_1 = \frac{M-1}{2}$$

זה יסנן את השכפולים וישאיר את האות במרכז. במישור התדר נקבל קונבולוציה ציקלית:

$$\begin{aligned} x(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{2\pi} \tilde{X}(e^{j\Omega}) \otimes W(e^{j\Omega}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right) \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{M}k\right) \otimes \frac{\sin[\Omega(\frac{M-1}{2} + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{\Omega}{2})} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right) \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{M}k\right) \otimes \frac{\sin(\frac{M}{2}\Omega)}{\sin(\frac{\Omega}{2})} \end{aligned}$$

קונבולוציה ציקלית מתבצעת על פני מחזור אחד בגודל M :

$$\tilde{X}(e^{j\Omega}) \otimes W(e^{j\Omega}) = \sum_{k=\langle M \rangle} X(e^{jk\Omega_0}) W(e^{j(\Omega - k\Omega_0)}) \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{M}$$

כיון שהקונבולוציה היא עם $\delta(\cdot)$ - נקבל הזזה, כלומר:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=\langle M \rangle} \tilde{X}\left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right) \frac{\sin[\frac{M}{2}(\Omega - \frac{2\pi}{M}k)]}{\sin[\frac{1}{2}(\Omega - \frac{2\pi}{M}k)]}$$

ה. במקרה שלנו הדגימה הייתה **בתדר**, ולכן השחזור של האות הבדיד $x[n]$ מתוך האות המחזורי $\tilde{x}[n]$ מתבצע ע"י הכפלה בחלון במישור **הזמן**. בתדר נקבל קונבולוציה עם גרעין דריכלה שהוא מחזורי 2π .

בנוסחת שאנון המקורית (בזמן רציף) הדגימה נעשית בזמן, והשחזור מתבצע ע"י מעבר ב-LPF **בתדר**, כלומר: ע"י פונקציית sinc בזמן, (כאן אי אפשר להשתמש ב-sinc כי הוא לא מחזורי) לכן הנוסחא שקיבלנו היא דואלית לנוסחת שאנון.

דגשים למבחן:

- לנסות לפתור את כל הסעיפים! לא תמיד השאלות יהיו בנויות סעיף על גבי סעיף.
- חלוקת הנקודות זהה בין כל השאלות, בין הסעיפים יש חלוקה שונה