שאלה 1

הסימון LT מסמן התמרת לפלס

א. $$h(t)=y_\delta(t)=\frac{dy_u(t)}{dt}=\left(2e^{-t}-e^{-t}+te^{-t}\right)u(t)+0\delta(t)=\left(e^{-t}+te^{-t}\right)u(t)$$

$$G(s)=LT\{h(t)\}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}=\frac{s+2}{(s+1)^2}$$

ב. $$G(s)\overset{\Delta}{=}\frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$(s+1)^2Y=(s+2)X$$

אבל s משמש גם כאופרטור גזירה, ולכן $\ddot{y}+2\dot{y}+y=\dot{x}+2x$

ג. ע"פ סעיף ב', צד ימין של המד"ר מכיל רק נגזרת ראשונה. לכן עירור רציף יגרום (לכל היותר) למדרגה במד"ר. בשל איזון ההלמים ההכרחי, הנגזרת השנייה היא לכל היותר בעל אי רציפות מסדר ראשון, ולכן תנאי ההתחלה עוברים בצורה רציפה מ 0^- ל 0^+.

$$y(0^-)=y(0^+)=\lim_{t\to 0}y(t)=...=1$$

$$\dot{y}(0^-)=\dot{y}(0^+)=\lim_{t\to 0}\frac{dy(t)}{dt}=...=2$$

ד. נפתור ע"י לפלס $$X(s)=LT\{5\sin(3t)u(t)\}=5\frac{3}{s^2+9}=\frac{15}{s^2+9}$$

$$[s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)]+2[sY(s)-y(0)]+Y(s)=2X(s)+sX(s)$$

$$Y(s)[s^2+2s+1]-s-2-2=(s+2)X(s)=(s+2)\frac{15}{s^2+9}$$

$$Y(s)=\frac{15(s+2)}{(s^2+9)(s+1)^2}+\frac{s+4}{(S+1)^2}=...=\frac{s^3+4s^2+24s+6s}{(s^2+9)(s+1)^2}$$

פירוק לשברים חלקיים:

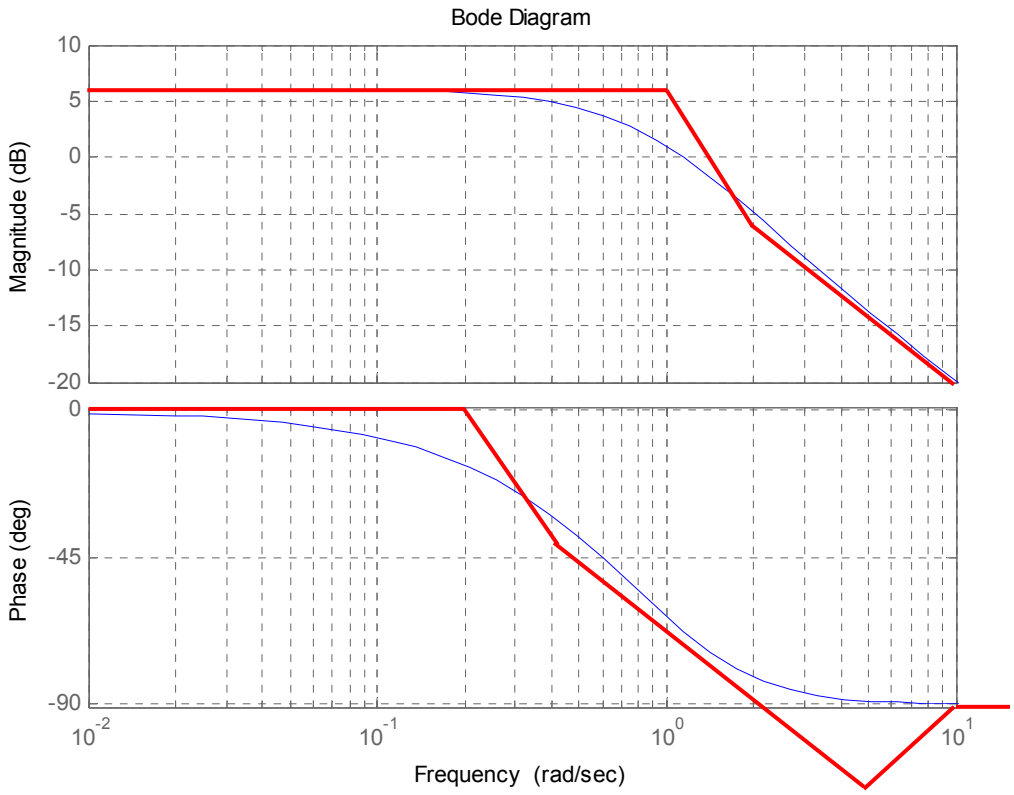
$$Y(s)=\frac{As+B}{s^2+9}+\frac{C}{(s+1)^2}+\frac{D}{s+1}=.....=\frac{-1.8s+0.3}{s^2+9}+\frac{4.5}{(s+1)^2}+\frac{2.8}{s+1}$$

$$y(t)=LT^{-1}\{Y(s)\}=...=\left[-1.8\cos(3t)+0.1\sin(3t)+4.5te^{-t}+2.8e^{-t}\right]u(t)$$

ה. בפונקצית התמסורת שמצאנו יש אפס ב s=-2, קוטב פשוט כפול ב s=-1, וקבוע 2.

$$G(s)=\frac{s+2}{(s+1)^2}=2\frac{1+s/2}{(s+1)^2}$$

בכחול: גרפים אמיתיים. באדום: גרפים אסימפטוטיים (מה שהיה צריך במבחן).



ו. עכבת כניסה היא v_{in}/v_{out}, לכן נוח כאן להשתמש ב-t parameters.

$$G(s)=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}=\frac{\left.V_1/V_2\right|_{I_2=0}}{\left.I_1/V_2\right|_{I_2=0}}=\frac{t_{11}}{t_{21}}=\frac{s+2}{(s+1)^2}$$

$$Z_{SC}(s)=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0}=\frac{\left.-V_1/I_2\right|_{V_2=0}}{\left.-I_1/I_2\right|_{V_2=0}}=\frac{t_{12}}{t_{22}}=\frac{(s+1)^2}{2s^3+7}$$

לכן פתרון <u>אפשרי</u> (אך לא הכרחי) יכול להיות:

$$t_{11}=s+2$$
$$t_{21}=(s+1)^2$$
$$t_{12}=(s+1)^2$$
$$t_{22}=2s^3+7$$

שאלה 2

א. נגדיר

$$Z_1 \overset{\Delta}{=} R_1 \parallel (R_2 + Z_{C_1}) = R_1 \parallel \left(R_2 + {}^{1}\!/_{SC_1} \right) = \ldots = \frac{R_1(SR_2C_1+1)}{SR_1C_1 + SR_2C_1 + 1}$$

$$G(s) = \frac{V_O(t)}{V_I(t)} = \frac{Z_1}{Z_1 + R_3} = \ldots = \frac{sR_1R_2C_1 + R_1}{s\left[R_1R_2C_1 + R_3(R_1+R_2)C_1\right] + (R_1+R_3)}$$

ב. לאחר הצבת ערכים

$$G(s) = \frac{s+1}{3s+2}$$

$$v_s(t) = 10u(t) \Rightarrow V_s(s) = {}^{10}\!/_{s}$$

$$V_{out}(s) = G(s)V_s(s) = \ldots = 10\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{3s+2}\right) = \ldots = 10\left(\frac{0.5}{s} - \frac{{}^{0.5}\!/_{3}}{s + {}^{2}\!/_{3}}\right)$$

$$v_{out}(t) = LT^{-1}\{V_{out}(s)\} = 10\left[0.5 - \frac{0.5}{3}e^{-\frac{2}{3}t}\right]u(t) = 5\left(1 - \frac{1}{3}e^{-\frac{2t}{3}}\right)u(t)$$

ג. עבור $t \to 0$

ע"י משפט הערך ההתחלתי : $v_o(t \to 0^+) = \lim_{s\to\infty} sV_o(s) = \ldots = {}^{10}\!/_{3}$

ע"י השאפת t: $v_0(t \to 0^+) = \lim_{t\to 0^+} v_o(t) = \ldots = {}^{10}\!/_{3}$

עבור $t \to \infty$

ע"י משפט הערך הסופי $v_0(t \to \infty) = \lim_{s\to 0} sV_0(s) = \ldots = 5$

ע"י השאפת t: $v_0(t \to \infty) = \lim_{t\to\infty} v_0(t) = \ldots = 5$

ד. לאחר המשוב, פונקצית התמסורת הכוללת המתקבלת:

$$H(s)=\frac{K(s^2+2s+1)G(s)}{1+K(s^2+2s+1)G(s)}=\ldots=\frac{K(s^3+3s^2+3s+1)}{Ks^3+3Ks^2+(3K+3)s+(K+2)}$$

משתמשים בקריטריון Routh:

s^3	K	3K+3
s^2	3K	K+2
s^1	$\frac{8K+7}{3}$	
s^0	K+2	

יש 2 אופציות ליציבות:

I) תנאים: K>0 ; K>-7/8 ; K>-2
כלומר K>0

II) תנאים: K<0 ; K<-7/8 ; K<-2
כלומר K<-2

מסקנה: המערכת יציבה עבור K=1, ולא יציבה עבור K=-1