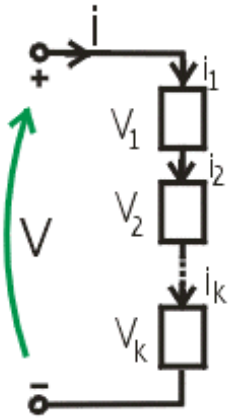
פרק 3: מעגלים פשוטים חיבורים מקביליים וטוריים

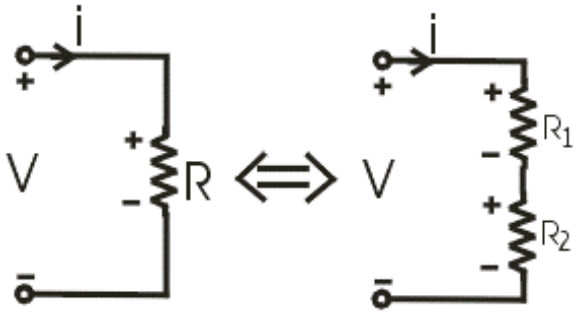
חיבורים טוריים



באופן כללי:

$$i = i_1 = i_2 = ... = i_k$$
$$v = v_1 + v_2 + ... + v_k$$

נגדים:



$$(*)\begin{cases} i = i_1 = i_2 \\ v - v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad v = v_1 + v_2$$

עבור נגדים לינאריים:
נרצה להחליף את שני הנגדים המחוברים בטור לנגד אחד שקול.
על הנגד השקול ייפול מתח V ויזרום זרם I, לכן:

$$R = \frac{v}{i} = \frac{v_1 + v_2}{i} = \frac{v_1}{i} + \frac{v_2}{i} = \frac{v_1}{i_1} + \frac{v_2}{i_2} = R_1 + R_2 \quad \rightarrow \quad \text{הנגד האקוויוולנטי}$$

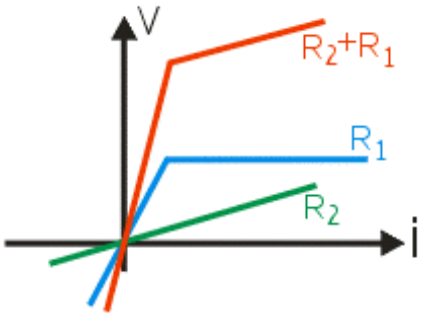
הראינו, אם כן, ש: $R = R_1 + R_2$. ניתן להכליל גם ליותר מ- 2 נגדים: $R = R_1 + R_2 + ...$ וכן למקרה התלוי בזמן

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t) + ...$$

נסכם ונאמר שבאופן כללי ההתנגדות השקולה לחיבור טורי של נגדים היא סכום ההתנגדויות:

$$\boxed{R = \sum_k R_k}$$

אם הנגדים אינם לינאריים ויש להם אופיין $v(i)$, איך נחשב התנגדות שקולה?
נניח שנתונים שני אופיינים $v_1(i_1)$ ו- $v_2(i_2)$. המשוואות המסומנות ב- * עדיין מתקיימות ולכן ניתן לחבר את האופיינים:

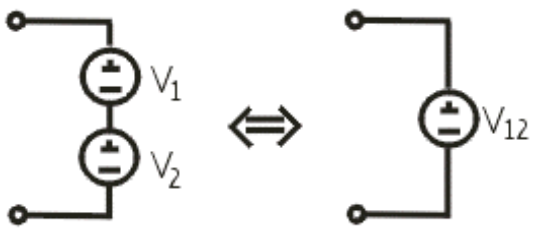


באופן אנליטי: אם $v_1 = f_1(i_1)$, $v_2 = f_2(i_2)$

אזי: $v_{1+2} = f_1(i) + f_2(i)$

<u>מקורות מתח:</u>

מתקיימת השקילות: $v_{12} = v_1 + v_2$

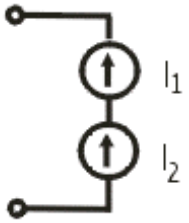


וניתן להכליל: $\boxed{V = \sum_n V_n}$

עבור חיבור מספר כלשהו של מקורות מתח בטור.

<u>מקורות זרם</u>:

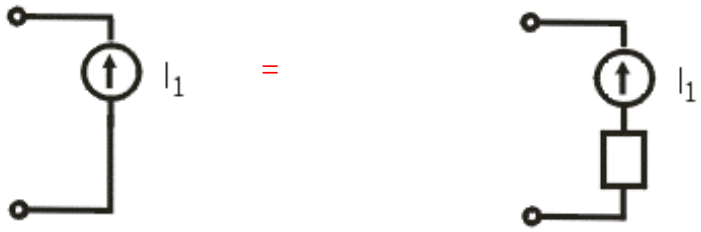
עבור מקורות זרם בטור:



מבחינה פיזיקלית, מצב זה יתכן רק אם $i_1 = i_2$.

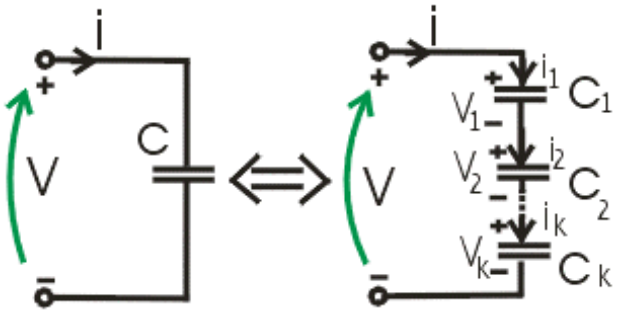
כלומר, באופן כללי לא מחברים מקורות זרם בטור.

מקור זרם המחובר בטור לאלמנט אחר שקול למקור זרם בלבד:



<u>קבלים</u>:

$$\begin{cases} v = v_1 + v_2 \\ i = i_1 = i_2 \end{cases}$$

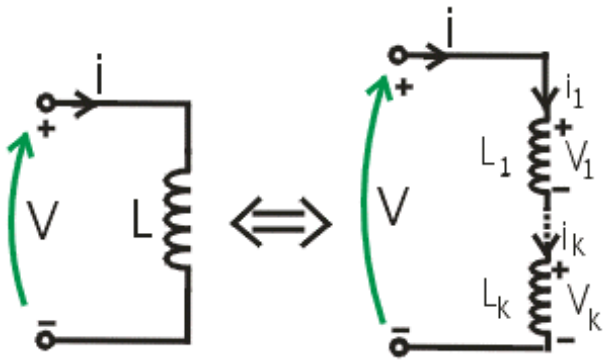


ידוע כי על הקבל ה-k-י: $v_k(t) = v_k(0) + \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(t')dt'$

ולכן $v(t) = \sum_k v_k = \sum_k v_k(0) + \sum_k \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(t')dt' = v(0) + \left(\sum_k \frac{1}{Ck}\right)\cdot\int_0^t i_k(t')dt'$

נובע מכך:

$$\boxed{\begin{gathered} v(0) = \sum_k v_k(0) \\ 1/C = \sum_k \frac{1}{Ck} \ , \quad S = \sum_S S_k \end{gathered}}$$



סלילים:

עבור סלילים לינאריים:

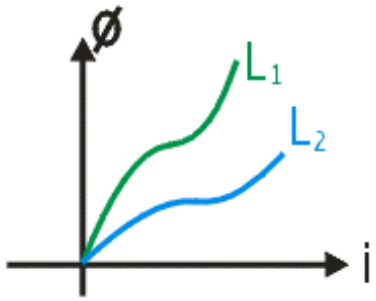
$$v_k = L_k \frac{di_k}{dt} \qquad i = i_1 = i_2 = \ldots = i_k$$

$$v = \sum_k V_k = \sum_k L_k \frac{di_k}{dt} = \left(\sum_k L_k\right)\frac{di}{dt}$$

נובע מכך:

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \Sigma L_k \\ i(0) &= i_k(0) \end{aligned}}$$

עבור המקרה של סלילים לא לינאריים הנתונים ע"י אופיין הזרם-שטף שלהם:



נזכור כי המתח הוא הנגזרת של השטף התלוי בזרם.

לכן:

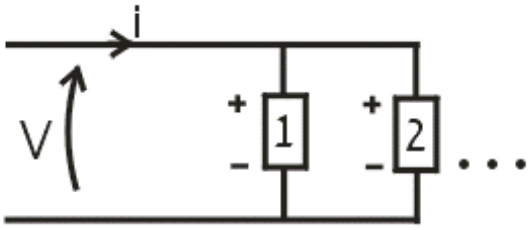
$$V = \sum_k V_k = \sum_k \frac{d}{dt}\phi_k(i_k) = \frac{d}{dt}\sum_k \phi_k(i) = \frac{d}{dt}\phi(i)$$

$$\phi(i) = \sum_k \phi_k(i)$$

כלומר יש לחבר את השטפים בכדי לקבל את השטף השקול דרך כל הסלילים.

חיבורים מקביליים:

באופן כללי:



$$i = i_1 + i_2 + \ldots$$
$$v = v_1 = v_2 = \ldots$$

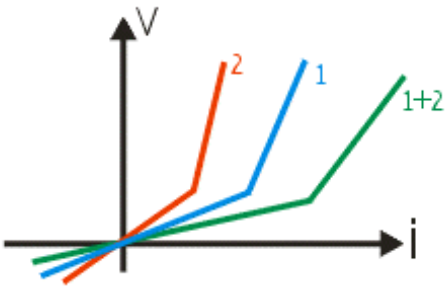
נגדים:

כאמור מתקיים הקשר בין הזרמים:

$$i = \Sigma i_k$$

בנגדים לינאריים:

$$i_k = G_k V_k = \frac{V_k}{R_k} = \frac{V}{R_k}$$



לכן:

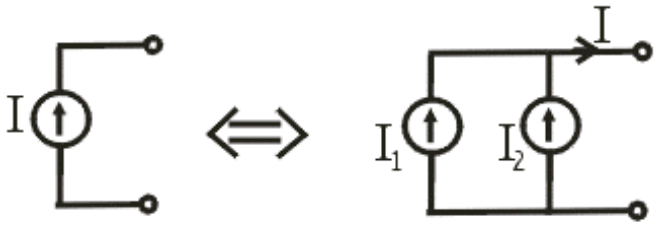
$$G = \Sigma G_k$$

או באופן שקול:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \Sigma \frac{1}{R_k}}$$

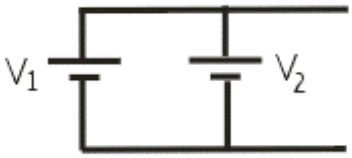
מקורות זרם:

$$i = i_1 + i_2$$



מקורות מתח:

עבור מקורות מתח במקביל:



מבחינה פיזיקלית, מצב זה יתכן רק אם $v_1 = v_2$.
כלומר, באופן כללי לא מחברים מקורות מתח במקביל.

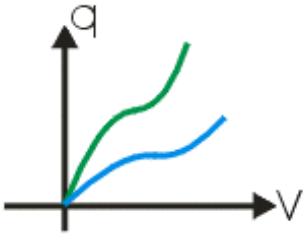
קבלים:

בקבלים מתקיים הקשר: $i_k = C_k \dfrac{dv_k}{dt}$

שוב נציב בסכום הזרמים ונקבל: $i = \Sigma i_k = \sum_k C_k \left(\dfrac{dv_k}{dt}\right) = \sum_k C_k \left(\dfrac{dv}{dt}\right) = \left(\dfrac{dv}{dt}\right) \sum_k C_k$

לכן עבור הקבל השקול מתקיים:

$$\boxed{\begin{aligned} C &= \Sigma C_k \\ v(0) &= v_1(0) = \ldots v_k(0) \end{aligned}}$$



בקבל לא לינארי:

$$i = \sum_k i_k = \sum_k \frac{dq_k}{dt} = \frac{d\Sigma q_k}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

כלומר גם במקרה זה נבצע חיבור אנכי של המטענים.

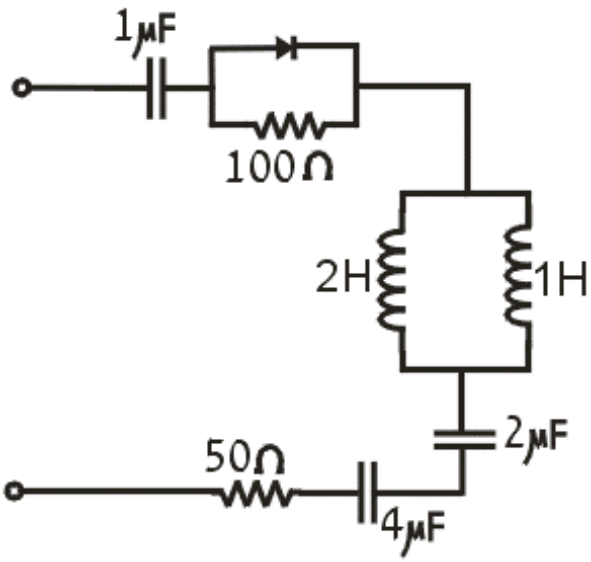
סלילים:

בסלילים מתקיים הקשר: $i_k = i_k(0) + \dfrac{1}{L_k}\displaystyle\int_0^t v_k(t')dt'$

ולכן: $i = \Sigma i_k = \Sigma i_k(0) + \sum_k \dfrac{1}{L_k}\displaystyle\int_0^t v_k(t')dt = \Sigma i_k(0) + \int_0^t v_k(t')dt\left(\sum_k \dfrac{1}{L_k}\right)$

נובע מכך שהסליל השקול יקיים:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{L} &= \sum_k \frac{1}{L_k} \\ i(0) &= \Sigma i_k(0) \end{aligned}}$$



<u>דוגמא</u>: פשט את המעגל הבא:

פתרון:
תחילה נמצא את הקבל השקול לשלושת הקבלים במעגל. מכיוון שהקבלים מחוברים בטור:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

וקיבלנו את הקבל השקול: $C=\frac{4}{7}\ \mu F$

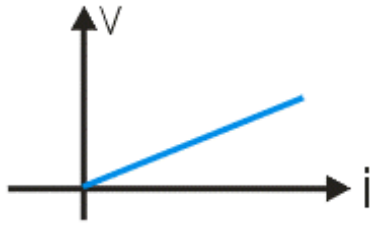
כעת, נמצא את הסליל השקול לשני הסלילים שבמעגל. הסלילים מחוברים במקביל:

$$\frac{1}{L}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{3}{2}$$

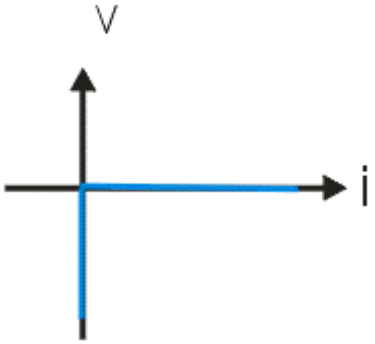
ולכן הסליל השקול הוא: $L=\frac{2}{3}\ \text{H}$

נעבור לפשט את חיבור הדיודה ושני הנגדים:

תזכורת:

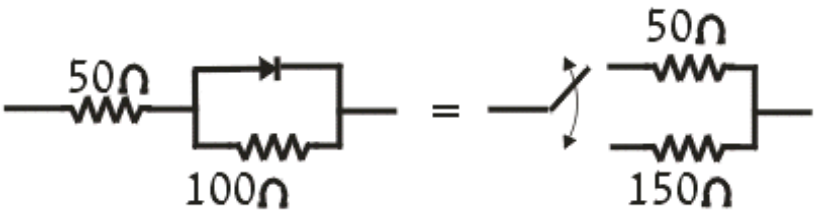


דיודה

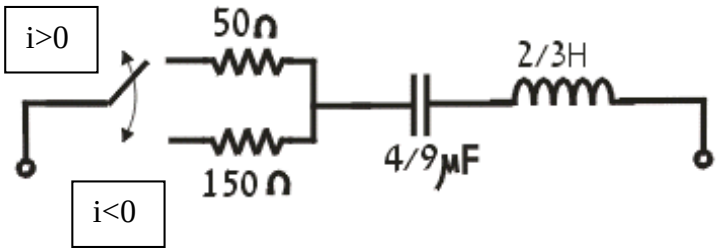


דיודה אידיאלית

ישנם שני מצבים אפשריים לפעולת הדיודה: כאשר הזרם עליה חיובי הדיודה היא קצר (בהנחה שהיא אידיאלית) ולכן היא מקצרת את הנגד 100 Ω, כלומר לא זורם עליו זרם. כאשר הזרם שלילי, הדיודה היא נתק ולכן הזרם לא יכול לזרום דרכה. אז נקבל חיבור רגיל של שני נגדים בטור שנותן נגד שקול של 150 Ω:



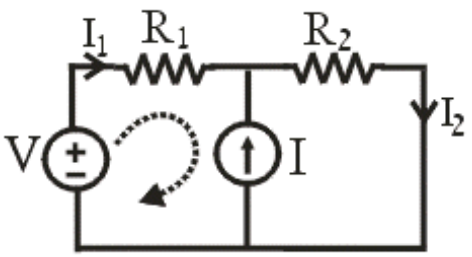
לכן המעגל המפושט הוא:



עקרון הסופר-פוזיציה:

כאשר יש קשר לינארי בין ערור ותוצאותיו, השפעת מספר ערורים הפועלים יחד הינה שווה לסכום כל ערור הפועל לחוד כאשר שאר מקורות המתח מקוצרים ומקורות הזרם מנותקים.

דוגמא:



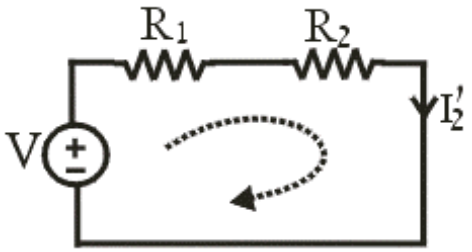
ניתן לראות ישירות מהמעגל (לפי חוקי קירכהוף) שמתקיים:

$$v = (I_2 - I)R_1 + I_2 R_2$$

$$\Downarrow$$

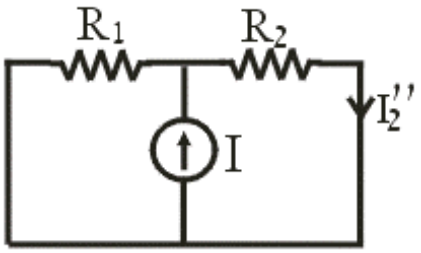
$$I_2 = \frac{V}{R_1+R_2} + I\frac{R_1}{R_1+R_2} = I_2' + I_2''$$

נפתור לפי עקרון הסופר-פוזיציה:
תחילה נבחן את השפעת מקור המתח.
לכן ננתק את מקור הזרם ונקבל:



$$I_2' = \frac{V}{R_1+R_2}$$

כעת נבחן את השפעת מקור הזרם.
לכן נקצר את מקור המתח ונקבל:



$$I_2'' = I\cdot\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}\cdot\frac{1}{R_2} = I\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

וכמובן שקיבלנו את אותה תוצאה בשתי השיטות.
נשים לב: עבור הספקים עקרון הסופר-פוזיציה לא פועל.
נתבונן למשל על ההספק על הנגד R_2:

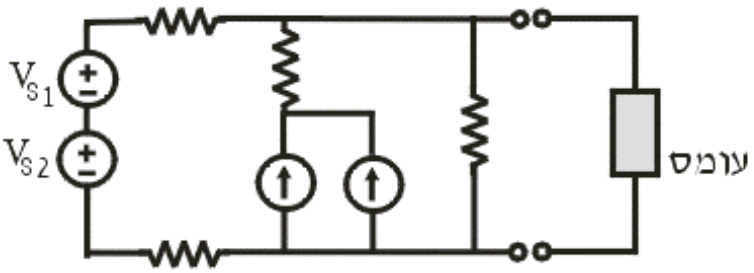
מהמעגל הראשון של השפעת מקור המתח נקבל: $P_v = \left(\frac{V}{R_1+R_2}\right)^2 R_2$

מהמעגל השני של השפעת מקור הזרם נקבל: $P_i = I^2\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2 R_2$

ורואים כי $P_i + P_v \neq P_T = \left(\frac{V}{R_1+R_2} + I\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2 R_2$

כלומר עקרון הסופר-פוזיציה עובד בזרמים ומתחים אך **לא** בהספקים.

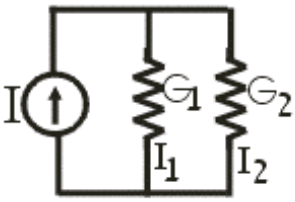
הסבר לעקרון הסופר-פוזיציה:
נניח שהמערכת הנתונה
בדוגמה שלפנינו היא לינארית.



כדי לטפל בענף מקורות המתח, מנתקים את מקורות הזרם.
מוצאים את השפעת V_{s1} על העומס ואת השפעת V_{s2} , ומחברים. על העומס נקבל קשר מתח-זרם לינארי כלשהו
שכן כל תגובה היא לינארית וחיבור תגובות לינאריות גם הוא לינארי.
כנ"ל לגבי מקורות הזרם בקיצור מקורות המתח. כלומר: עקרון הסופר פוזיציה הינו למעשה חיבור אופני התגובה הלינאריים כתוצאה מהמקורות השונים.
התגובה הכללית היא סופר-פוזיציה של כל ארבעת התגובות.

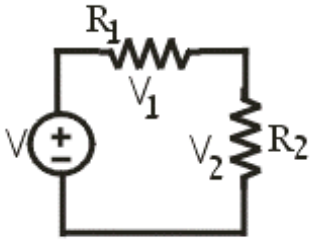
בנקודה זו נציין שתי שיטות נוספות שיעזרו לנו בפישוט מעגלים:

מחלק זרם:



$$I_1 = I \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

מחלק מתח:



$$V_1 = V \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

משפט תבנין עבור רשתות אקטיביות - Thevenin s Theorem

עבור עומס ספציפי, ניתן להמיר רשת של אלמנטים לינאריים ומקורות בחיבור טורי של מקור אידיאלי V_T בטור עם נגד R_T , כאשר V_T הוא מתח הנתק על האלמנט ו - R_T הוא היחס בין V_T לזרם הקצר.

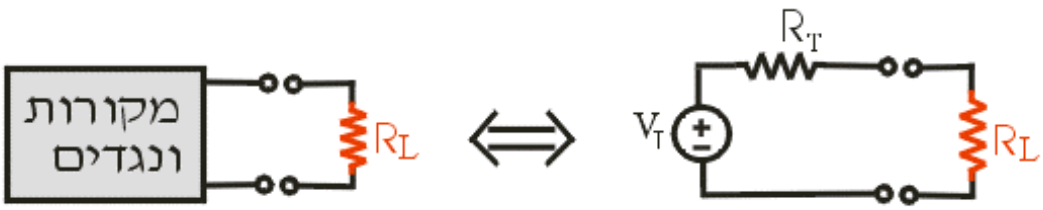
כלומר, כדי למצוא את V_T ננתק את העומס מהמעגל ונחשב את המתח על ההדקים של העומס. כדי למצוא את R_T נקצר את העומס, נחשב מהו הזרם שעובר דרכו, נחלץ את R_T ונמיר את הרשת במקור המתח עם ההתנגדות:

open curcuit

$$v_T = v_{oc}$$

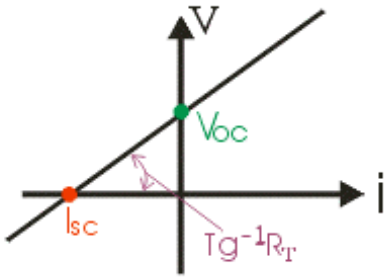
$$R_T = \frac{v_T}{I_{sc}}$$

short circuit

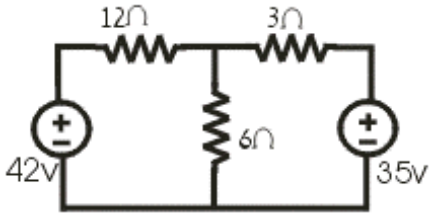


מעגל מקורי שקול תבנין

הסבר: סכום השפעת מקורות הוא סכום קשרים לינאריים וגם הוא לינארי. קשר זה הוא גרף לינארי כללי שעלינו למצוא את הפרמטרים שלו. לכן תמיד ניתן לתאר את המקרה הכללי ביותר ע"י מקור יחיד אשר עבורו מתקבל אותו קשר לינארי:



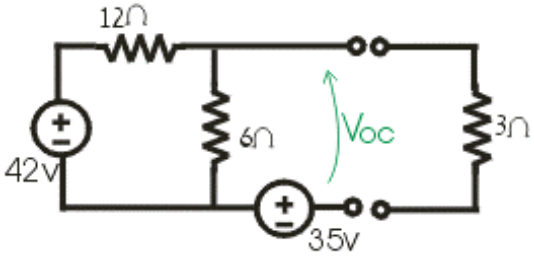
<u>דוגמא:</u>
נתונה הרשת הבאה:
עבור המעגל הנתון, מצא רשת אקוויוולנטית לפי תבנין, עבור הנגד 3Ω.



פתרון:
תחילה נמצא את מתח הנתק:

$$V_T = V_{oc} = 42 \cdot \frac{6}{6+12} - 35 = 14 - 35 = -21_v$$

ע"י מחלק מתח



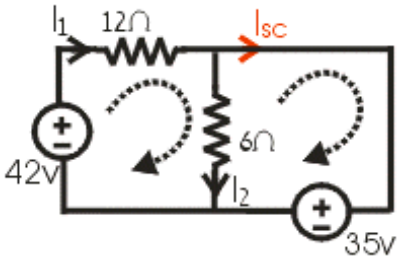
כעת נמצא את זרם הקצר:

מהחוג השמאלי: $12I_1 + 6I_2 = 42$

מהחוג הימני: $-6I_2 = -35 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{35}{6}$

נציב במשוואה העליונה ונקבל:

$$I_1 = \frac{42 - \frac{6 \cdot 35}{6}}{12} = \frac{7}{12}$$

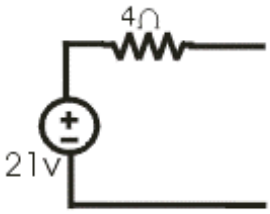


לפי חוק קירכהוף עבור הזרמים בצומת: $I_{sc} = I_1 - I_2 = \frac{7}{12} - \frac{70}{12} = -\frac{63}{12} = -\frac{21}{4}$

לבסוף נחלץ את ההתנגדות:

$$R_T = \frac{-21}{-\frac{21}{4}} = 4\Omega$$

ולכן המעגל השקול לפי תבנין (ללא ציור העומס של 3Ω) הוא:



הערה: עבור רשתות נגדים פשוטות ניתן למצוא את R_T ע"י מציאת ההתנגדות שרואים לתוך הרשת כאשר מקצרים את כל מקורות המתח ומנתקים את מקורות הזרם. בדוגמא שלנו נקבל: $6\Omega \| 12\Omega = 4\Omega$

משפט נורטון עבור רשתות אקטיביות - Norton s theorem

עבור עומס ספציפי ברשת של אלמנטים ליניאריים ומקורות, ניתן להמיר את הרשת בחיבור מקבילי של מקור זרם אידיאלי I_N ומוליכות G_N, כאשר I_N הוא זרם הקצר על האלמנט ו - G_N הוא היחס בין זרם הקצר למתח הנתק.

$$I_N = I_{sc}$$
$$G_N = I_N / V_{oc}$$

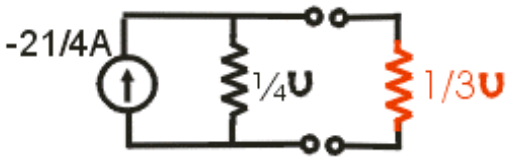
מעגל מקורי — שקול נורטון

כלומר, כדי למצוא את I_N נקצר את האלמנט ונחשב את הזרם דרכו. כדי למצוא את G_N ננתק את האלמנט מהמעגל, נמצא את המתח על הדקיו ונחלק את המוליכות לפי היחס ביניהם. אז נוכל להמיר את הרשת בחיבור המקבילי של מקור הזרם עם המוליכות.

נחזור לדוגמא הקודמת:

מצאנו קודם ש: $V_{oc} = -21_v$, $I_{sc} = -\frac{21}{4}_A$, לכן: $G_N = \frac{-\frac{21}{4}}{-21} = \frac{1}{4} mho$

ולכן המעגל השקול לפי נורטון (כולל העומס) הוא:



בדיקה: הבה נשווה את הזרם דרך העומס I_L.

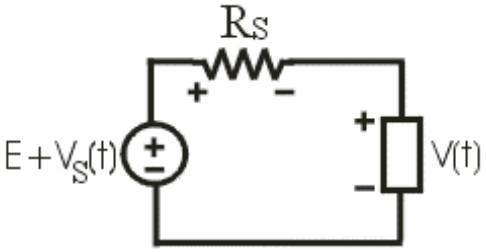
בתבנין: $I_L = \frac{-21}{7} = -3_A$.

בנורטון: $I_L = \frac{-21}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{21}{4} \cdot \frac{1}{\frac{7}{12}} \cdot \frac{1}{3} = -3_A$

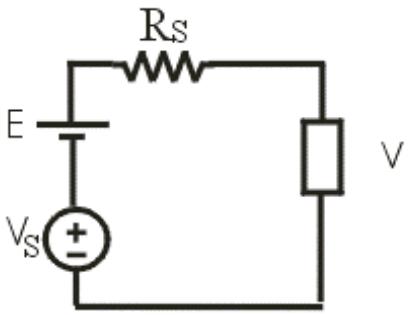
<u>מסקנה</u>: כפי שראינו קודם, כל מקור מתח V עם נגד טורי R ניתן להחלפה עם מקור זרם בגודל $I = \frac{V}{R}$ עם אותו נגד R בחיבור מקבילי.

רכיבים לא ליניאריים:

רכיבים עבורם הקשר בין הזרם למתח עליהם אינו קשר לינארי.
נתבונן למשל במעגל הבא, שאופיין הזרם-מתח שלו מובא בהמשך:



עבור שינויי מתח קטנים (V_S) סביב נקודת מתח קבועה (E), כלומר עבור $V_S << E$, ניתן לבצע את ה"מתכון" הבא (שנקרא קירוב לאותות קטנים):



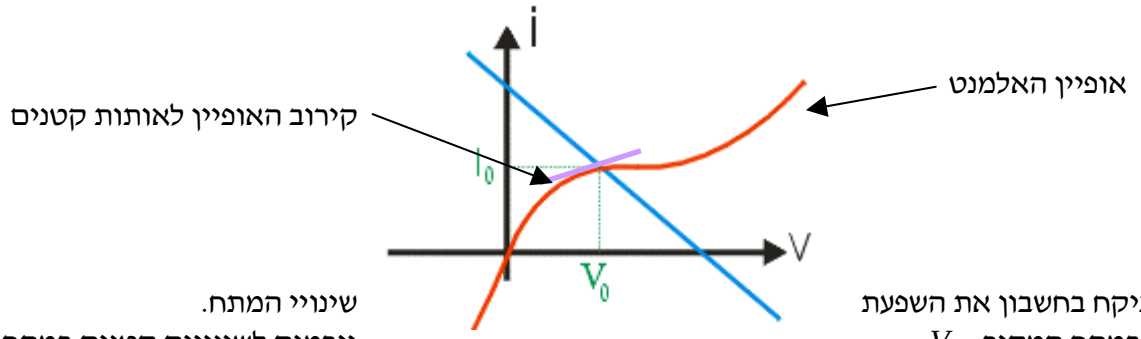
$$\begin{cases} i = g(v) & (1) \\ E + V_S = iR_S + V & (2) \end{cases}$$

כאשר משוואה (1) היא הקשר הלא לינארי על האלמנט, ומשוואה (2) היא חוק kvl בחוג היחיד במעגל.
העיקרון הוא: באותות קטנים נקרב את האופיין הלא לינארי לאופיין לינארי, אך בכל אזור באופיין הקירוב יהיה שונה.
כעת נראה את שלבי הפתרון:

<u>שלב א'</u> מציאת נקודת העבודה: מניחים שאין שינויי מתח, כלומר: $V_S = 0$.

$$\begin{cases} I_0 = g(V_0) \\ E = I_0 R_S + V_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_0 \ , \ V_0$$

מחלצים מתוך שתי המשוואות את המתח והזרם על האלמנט הלא לינארי בנקודת העבודה:
ממשוואה 2 עבור $V_S = 0$ נובע כי $i = \frac{E - V}{R_S}$. זהו הישר הכחול בגרף הבא.
לכן הפתרון של (1)+(2) הוא נקודת החיתוך בין הישרים.
זוהי נקודת העבודה שלנו ונשתמש בה בהמשך חישובינו לקירוב האופיין הלא לינארי.



<u>שלב ב'</u> כעת ניקח בחשבון את השפעת שינויים קטנים במתח המקור V_S גורמים לשינויים קטנים במתח שינויי המתח.
של האלמנט, נסמנם V_1, ושינויים קטנים בזרם על האלמנט, נסמנם I_1:

נתבונן באיזור נקודת העבודה: $I_o + I_1(t)$, $V_0 + V_1(t)$ ונקרב את האופיין באופן הבא:

$$I_0 + i_1 = g(V_0 + V_1) \approx g(V_0) + V_1 \frac{\partial g(V)}{\partial V}\Big|(v = v_0)$$

לפי קירוב טיילור

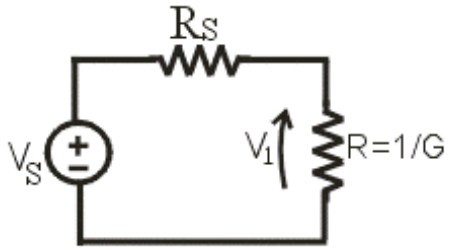
ומכיוון ש: $I_0 = g(V_0)$

אז: $$i_1 = V_1 \frac{\partial g}{\partial V}\Big|(v = v_0) = GV_1 \quad \Rightarrow \quad G = \frac{\partial g}{\partial V}\Big|_{(v = v_0)} = \frac{1}{R}$$

כעת נקרב את האלמנט שלנו לנגד לינארי שערכו R.

חשוב לציין: הקירוב נכון רק לנקודת העבודה V_0 שמצאנו.

שלב ג' - נחליף את האלמנט בנגד שמצאנו, ונפתור את המעגל למציאת v_1, i_1:



$$\Leftarrow \quad V_1 = V_s \cdot \frac{R}{R_s + R} \quad , \quad i_1 = \frac{v_s}{R_s + R}$$

יש לשים לב ש- R יכול להיות שלילי.
שוב נציין שהקירוב תקף אך ורק בנקודת העבודה I_0, V_0.
לפתרון האות הקטן נוסיף עתה את נקודת העבודה.

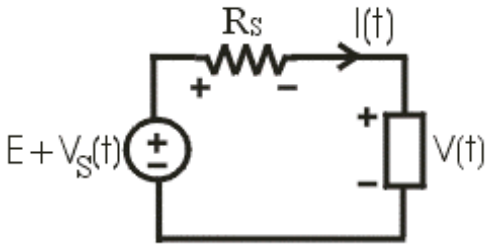
לסיכום: א - פותרים עבור E בלבד ומוצאים נקודת עבודה $I_0(E)$, $V_0(E)$.

ב מחשבים את השיפוע: $1/R = \frac{\partial g}{\partial V}\Big|(v = v_0)$

ג מחליפים את האלמנט הלא לינארי בנגד R ומוצאים את v_1, i_1.

ד - מחברים את תוצאות א', ג' לקבלת הפיתרון הכללי: $I(t) = I_0 + I_1(t)$, $V(t) = V_0 + V_1(t)$

דוגמא:
נתון:

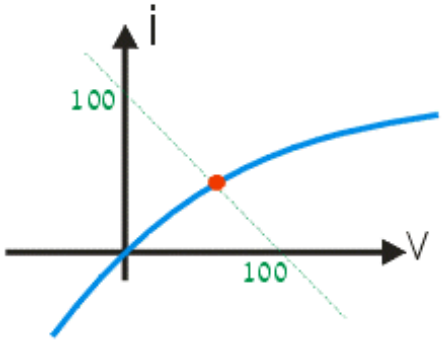


$E = 100\text{volt}$, $v_s(t) = \sin(2\pi t)\text{volt}$

$R_S = 1\Omega$

נתון גם אופיין האלמנט:

$$i(v) = 100\left(1 - e^{-\frac{V}{100}}\right) = g(v)$$



צ"ל: $v(t), i(t) = ?$
פתרון:
א - עבור המעגל, בכל רגע ורגע מתקיים:

$$(1) \quad i(t) = g(v(t))$$

$$(2) \quad E + V_S(t) = i(t) \cdot R_S + V(t)$$

מציאת נקודת העבודה:

כאמור, אנו מניחים $V_S = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & I_0 = 100\left(1-e^{-\frac{V_0}{100}}\right) \\ (2) & 100 = I_0 \cdot 1 + V_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 100 - V_0 = 100\left(1-e^{-\frac{V_0}{100}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$v_0 = 100e^{-\frac{V_0}{100}}$$

נפתור את המשוואה ע"י הוצאת ln משני הצדדים ונקבל:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_0 = 56.7volt \\ \Downarrow \\ I_0 = 43.3A \end{array}}$$

כאשר הצבנו חזרה את v_0 שהתקבל במשוואה (1) כדי למצוא את i_0.

ב - נתבונן בשינויים קטנים במתח המקור, כלומר מניחים $V_S(t) << E$ (והנחה זו מתקיימת במקרה זה כי לפי הנתונים: $|Vs(t)|<1<<100=E$).

התגובה הכללית תהיה כאמור: $V_0 + V_1(t) \quad , \quad I_0 + I_1(t)$

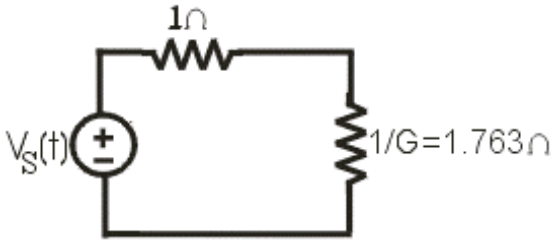
$$I_0 + I_1 = g(v_0 + v_1) \approx g(v_0) + v_1 \cdot \frac{\partial g(v)}{\partial v}$$

בדוגמה שלנו: $\frac{\partial g(v)}{\partial v} = e^{-\frac{V}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g(v)}{\partial v}\Big|_{v=v_0} = e^{-\frac{V_0}{100}} = 0.5672 = G$

הצבת v_0

ולכן: $i_1(t) = v_1(t) \cdot G$

ג - מעגל התמורה לאות קטן:



$$\Leftarrow \quad v_1 = v_s \cdot \frac{\frac{1}{G}}{R_S + \frac{1}{G}} = 0.6381V_S(t)$$

הצבת G

$$i_1 = \frac{V_S}{R_S + \frac{1}{G}} = 0.3619V_S(t)$$

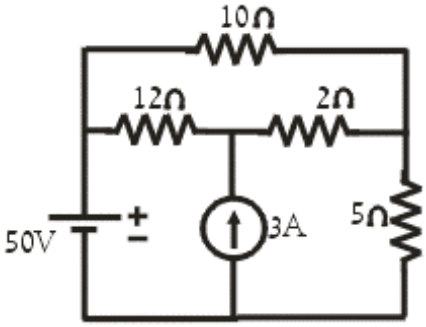
ד - לכן התוצאה הסופית:

$$v(t) = v_0 + v_1(t) = 56.7 + 0.6381 \cdot \sin(2\pi t)$$
$$i(t) = I_0 + I_1(t) = 43.3 + 0.3619 \cdot \sin(2\pi t)$$

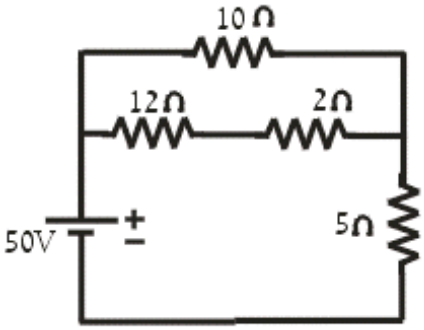
דוגמאות לסיום הפרק:

דוגמא 1:

חשב את הזרם על הנגד 2Ω.



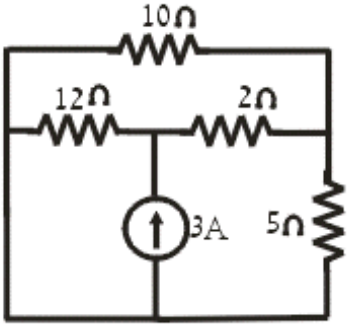
פתרון:
נשתמש בעקרון הסופר-פוזיציה:
תחילה, ננתק את מקור הזרם ונחשב את תרומת מקור הזרם:



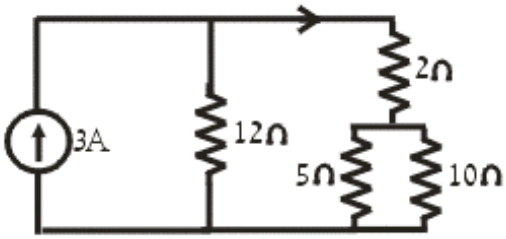
$$i_v = \frac{50}{5+10\|14}\cdot\frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{14}} = \frac{50}{5+\frac{140}{24}}\cdot\frac{10}{24} = \frac{500}{260}\,A$$

הנגד השקול לארבעת הנגדים — מחלק זרם

כעת נעבור לחשב את תרומת מקור הזרם ע"י קיצור מקור המתח:



=



$$i_A = 3\cdot\frac{12}{12+(2+10\|50)} = \frac{54}{26}\,A$$

מחלק זרם

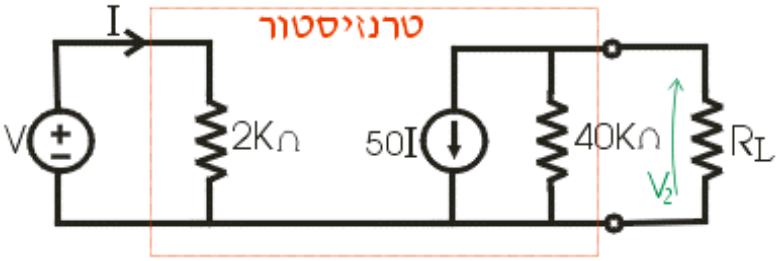
והתגובה הכללית היא הסכום:

$$I = i_v + i_A = 4_A$$

דוגמא 2:

בהינתן המעגל שבציור,

מצא את $\frac{V_2}{V}$ עבור $R_L = 3k\Omega$:



פתרון:

מהחוג השמאלי של המעגל רואים ש: $I = \frac{V}{2_{k\Omega}}$.

המשוואה המתארת את החוג הימני של המעגל:

$$V_2 = (-50I)\cdot 40k \| 3k = -(I50)\frac{1}{\frac{1}{40}+\frac{1}{3}} = -(I50)\cdot\frac{40\cdot 3}{43}$$

נציב את I ונקבל:

$$\frac{V_2}{V} = \frac{-\frac{V\cdot 50}{2k}\cdot\frac{40\cdot 3}{43}}{V} = -\frac{120\cdot 50}{2\cdot 43} = -\frac{3000}{43}$$

כלומר, יש כאן הגברת מתח הכניסה V פי $\frac{3000}{43}$.