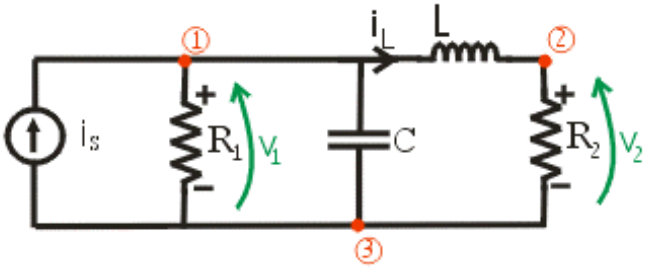
פרק 6: מערכות לינאריות קבועות בזמן

מערכות לינאריות קבועות בזמן (Linear Time Invariant), הן מערכות שכל רכיביהן הם אלמנטים לינאריים בלתי משתנים בזמן, כלומר: הקשר בין מתח לזרם על כל הרכיבים הוא לינארי וקבוע.

חוקי קירכהוף, שיטות מתחי הצמתים וזרמי החוגים

בבעיה הבאה נסכם את מה שלמדנו ואת השיטות שהוצגו בתרגולי הכיתה בנושא שלעיל. נשים לב לשלבי הפתרון החוזרים ברוב המקרים. נשתמש בשיטות אלו לצורך מציאת המד"ר המתארת את המעגל הנתון לנו.



נתבונן במעגל הבא:

נתונים ת"ה: $I_L(t=0)=I_0$

$V_C(t=0)=V_0$

צ"ל: מהו המתח על R_2?

פתרון:

<u>ניתוח לפי שיטת מתחי צמתים:</u>

מגדירים צומת יחוס ומחפשים את המתח של כל צומת נמדד ביחס לצומת הייחוס.

במקרה שלנו צומת מס' 3 היא צומת הייחוס.

כמה נעלמים יש בבעיה שלנו?

עקרונית יש שמונה: ארבעה אלמנטים (C, L, R_1, R_2) שעל כל אחד מהם המתח והזרם הם נעלמים.

מכיוון שהקשר בין המתח לזרם על כל אלמנט ידוע, הבעיה מצטמצמת לארבעה נעלמים, נניח ארבעת המתחים.

שנים מהמתחים הם שווים (המתח על R_1 זהה למתח על C), ואת המתח על L ניתן למצוא מהפרש המתחים: $V_L = V_C - V_{R_2}$. לכן אנו נותרים עם שני משתנים, המתח על R_1 והמתח על R_2. נסמנם V_1, V_2, בהתאם.

נרשום שתי משוואות KCL בלתי תלויות:

$$\text{I)}\quad I_{R_1}+I_C+I_L=I_S \;\Rightarrow\; \frac{V_1}{R_1}+C\frac{dV_1}{dt}+I_0+\frac{1}{L}\int_0^t (V_1-V_2)dt=i_S(t)$$

$$\text{II)}\quad I_L=I_{R_2} \;\Rightarrow\; -I_0-\frac{1}{L}\int_0^t (V_1-V_2)dt+\frac{V_2}{R_2}=0$$

$$\text{I + II)}\quad C\frac{dV_1}{dt}+\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_2}=i_S(t)$$

נגזור את משוואה II:

$$-\frac{V_1}{L}+\frac{V_2}{L}+\frac{1}{R_2}\frac{dV_2}{dt}=0 \;\Rightarrow\; V_1=V_2+\frac{L}{R_2}\cdot\frac{dV_2}{dt}$$

נציב תוצאה זו ב I + II:

$$C\frac{dV_2}{dt}+\frac{CL}{R_2}\frac{d^2V_2}{dt^2}+\frac{V_2}{R_1}+\frac{L}{R_1R_2}\frac{dV_2}{dt}+\frac{V_2}{R_2}=i_S(t)$$

$$LCV_2''+\left(R_2C+\frac{L}{R_1}\right)V_2'+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)V_2=R_2i_S(t)$$

נמצא ת.ה. ממשוואה II: $V_2(t=0)=I_0R_2$ → ללא גזירה

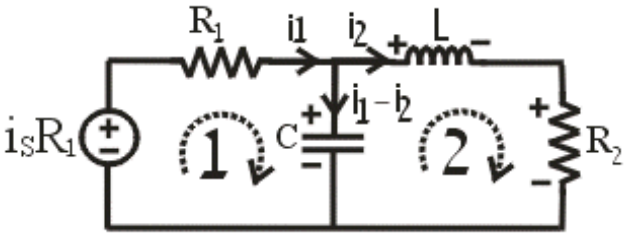
$$\left.\frac{dV_2}{dt}\right|_0=\frac{R_2}{L}(V_1-V_2)\Big|_{t=0}=\frac{R_2}{L}(V_0-I_0R_2)$$ → עם גזירה

$V_1(0)=V_0$

קיבלנו לבסוף מד״ר מסדר שני עבור V_2, עם שני ת״ה המתאימים.

<u>כעת ננתח את הבעיה ניתוח לפי שיטת זרמי חוגים:</u>

לצורך זה נעביר את המעגל שבבעיה לצורת תבנין:



נרשום משוואה עבור כל חוג:

עבור חוג 1: $R_1i_1+V_0+\frac{1}{C}\int_0^t(i_1-i_2)dt=i_S(t)R_1$ I)

עבור חוג 2: $-V_0-\frac{1}{C}\int_0^t(i_1-i_2)dt+L\frac{di_2}{dt}+R_2I_2=0$ II)

נתון כי: $i_2(0)=I_0$

נחבר משוואות:

$$R_1i_1+L\frac{di_2}{dt}+R_2i_2=i_S(t)R_1 \quad\rightarrow\quad i_1=-\frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt}-\frac{R_2}{R_1}i_2+i_S(t)$$

נגזור את משוואה II: $\frac{1}{C}(i_2-i_1)+Li_2''+R_2i_2'=0$

נציב את i_1 שקיבלנו: $LCi_2''+\left(R_2C+\frac{L}{R_1}\right)i_2'+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)i_2=i_S(t)$

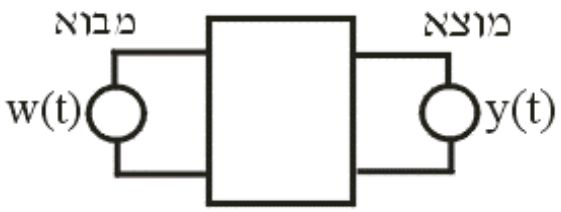
ת.ה. ממשוואה II:

$$\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0}=\frac{V_0}{L}-\frac{R_2}{L}I_2\Big|_{t=0}=\frac{V_0}{L}-\frac{R_2}{L}I_0$$

$i_2(0)=I_0$

במקרה זה נצטרך תחילה לפתור מד״ר מסדר שני עבור הזרם, ובאמצעותו למצוא את המתח.

הכללה - מציאת תגובה עבור מעגלים מסדר גבוה



במקרה של מערכת LTI (Linear Time Invariant),
הקשר הכללי ביותר בין המבוא w(t)
למוצא y(t) הוא:

$$y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_ny=$$
$$b_0w^{(m)}+b_1w^{(m-1)}+\ldots+b_mw$$

כאשר: $n>m$.

פתרון ה - ZIR :

מאפסים את המבוא: w=0 ומקבלים משוואה הומוגנית.

אז הפתרון הוא: $y=\sum_{i=1}^{n}k_ie^{S_it}$, כאשר S_i הם הפתרונות של המשוואה האופיינית:

$S^n+a_1S^{n-1}+a_2S^{n-2}+\ldots+a_{n-1}S+a_n=0$.

אם הפתרון S_j הוא פתרון מריבוי k, אז האיברים שהוא תורם לסכימה שלעיל הם:

$$y=\ldots+a_{j1}e^{S_jt}+a_{j2}te^{S_jt}+\ldots+a_{jk}t^{k-1}e^{S_jt}+\ldots$$

בכל מקרה יש לרשום n תנאי התחלה: $y(0),y^{(1)}(0),\ldots,y^{(n-1)}(0)$ כדי למצוא את n המקדמים $k_1,\ldots,k_n$.

פתרון ה - ZSR :

להלן מוצעת שיטת פתרון כללית אשר לקראת סוף הפרק יתברר ההגיון העומד מאחוריה.
תחילה, אנו נדרשים למצוא את תגובת ההלם של המעגל. כלומר, פותרים עבור כניסת הלם: $w(t)=\delta(t)$.

מציאת תגובת ZSR לפונקצית הלם:

עבור t>0 הפתרון הוא בעל אותו מבנה כמו פתרון ה - ZIR (שהרי עבור $t>0$ מתקיים $\delta(t)=0$):

$$y(t)=(\sum_{i=1}^{n}k_ie^{S_it})u(t)$$

כיצד נמצא את המקדמים k_i?

נציב את הפתרון $y(t)=\left(\sum_t k_ie^{S_it}\right)u(t)$ באגף שמאל של המשוואה, ובאגף ימין נציב: $w(t)=\delta(t)$.

נכנס איברים המכילים δ',δ (פונקצית הלם ונגזרותיה) ונשווה מקדמים של האיברים המתאימים בצד ימין ושמאל.

דוגמא 1:

נתונה המד"ר: $y''+4y'+3y=2w+w'$ המתארת מעגל.
צ"ל: את תגובת ההלם של המעגל.
פתרון:
כדי למצוא את תגובת ההלם, נפתור את המשוואה האופיינית: $S^2+4S+3=0$ ונקבל: $S_1=-3$ $S_2=-1$.

לכן:

$$y(t)=\left(k_1e^{-3t}+k_2e^{-t}\right)u(t)$$
$$y'(t)=\left(-3k_1e^{-3t}-k_2e^{-t}\right)u(t)+(k_1+k_2)\delta(t)$$

$$y''(t)=\left(9k_1e^{-3t}+k_2e^{-t}\right)u(t)-(3k_1+k_2)\delta(t)+(k_1+k_2)\delta'(t)$$

לאחר הצבה במשוואה ופישוט נקבל:

$$-(3k_1+k_2)\delta(t)+(k_1+k_2)\delta'(t)+4(k_1+k_2)\delta(t)=2\delta(t)+\delta'(t)$$
$$(k_1+3k_2)\delta(t)+(k_1+k_2)\delta'(t)=2\delta(t)+\delta'(t)$$

כעת נשווה את המקדמים:

$$\left.\begin{array}{l}k_1+k_2=1\\ k_1+3k_2=2\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{k_2=\frac{1}{2}\ ,\ k_1=\frac{1}{2}}$$

לכן סה"כ קיבלנו שהתגובה להלם היא: $y(t)=h(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{-3t}\right)u(t)$.

בכדי להשתכנע בנכונות הפתרון ניתן להציב את $y(t)$ במד"ר ולוודא קבלת שוויון כאשר: $w(t)=\delta(t)$.

<u>דוגמא 2:</u>

מצא את תגובת ההלם של המעגל המתואר ע"י: $y''+2y'+y=w'+2w$

פתרון: משוואה אופיינית: $S_{1,2}=-1 \Leftarrow S^2+2S+1=0$

$$y=(A+Bt)e^{-t}u(t)$$
$$y'=Be^{-t}u(t)-(A+Bt)e^{-t}u(t)+A\delta(t)$$
$$y''=-Be^{-t}u(t)-Be^{-t}u(t)+(A+Bt)e^{-t}u(t)+(B-A)\delta(t)+A\delta'(t)$$

נציב את הפתרון ונגזרותיו במשוואה:

$$y''+2y'+y=2A\delta(t)+(B-A)\delta(t)+A\delta'(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

$$\left.\begin{array}{l}2A+B-A=2\\ A=1\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{A=1\quad,\quad B=1}$$

לכן במקרה זה תגובת ההלם היא: $y=(1+t)e^{-t}u(t)$.

<u>דוגמא 3:</u>

הבעיה זהה לדוגמאות הקודמות, אך הפעם המד"ר היא: $y'+2y=w''+3w'+3w$.

פתרון:

מקרה זה הוא שונה מהמקרה הכללי שהצגנו, משום שהנגזרת הכי גבוהה באגף ימין היא גדולה יותר מהנגזרת באגף שמאל. לכן לא מספיק לנחש פתרון מהצורה: $y(t)=(\sum_{i=1}^{n}k_ie^{S_it})u(t)$, משום שכאשר נציב באגף ימין $w(t)=\delta(t)$ נקבל נגזרת <u>שניה</u> של פונקצית הלם, ואילו באגף שמאל נקבל עד נגזרת אפס בלבד (פונקצית ההלם עצמה).

לכן ננחש פתרון כללי יותר: $y=Ae^{-2t}u(t)+B\delta(t)+C\delta'(t)$,

כאשר את המעריך בחזקה של האקספוננט נמצא כרגיל ע"י פתירת המשוואה האופיינית. נקווה שאכן נצליח להשוות מקדמים.

נציב את הפתרון במד"ר:

$$-2Ae^{-2t}u(t)+A\delta(t)+B\delta'(t)+C\delta''(t)+2Ae^{-2t}u(t)+2B\delta(t)+2C\delta'(t)=\delta''(t)+3\delta'(t)+3\delta(t)$$

$$(A+2B)\delta(t)+(B+2C)\delta'(t)+C\delta''(t)=3\delta(t)+3\delta'(t)+\delta''(t)$$

נשווה מקדמים:

$$\left.\begin{array}{r} C=1 \\ B+2C=3 \\ A+2B=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B=1 \quad , \ A=1 \quad ,C=1}$$

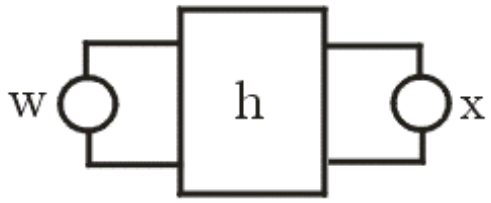
לכן סה"כ קיבלנו את תגובת ההלם: $y=e^{-2t}u(t)+\delta(t)+\delta'(t)$.

<u>מציאת תגובת ZSR לכניסה כלשהי:</u>

נחזור כעת לפתרון ה - ZSR הכללי.

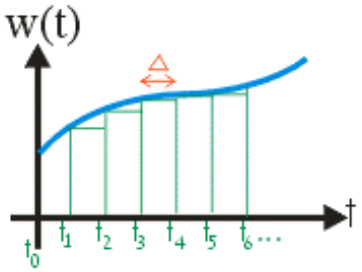
מציאת תגובת ZSR למבוא כל שהוא, לאחר שמצאנו את תגובת ההלם $h(t)$:

מניחים מעגל לינארי בלתי תלוי בזמן ומצב התחלתי אפס.



עבור כניסה $w(t)$, אנו מקרבים את הכניסה בעזרת פונקציות פולס באופן הבא:

$$w(t)\cong\sum_{i=0}^{n-1}w(t_i)\cdot P_\Delta(t-t_i)\cdot\Delta$$



כאשר מוגדר:

$$P_\Delta(t-t_i)=\begin{cases} 0 & t<t_i \\ \dfrac{1}{\Delta} & t_i<t<t_i+\Delta \\ 0 & t>t_i+\Delta \end{cases}$$

ומגדירים גם את התגובה לכניסת פולס בודדת: $h_\Delta(t)$.

בגלל אי התלות בזמן, התגובה לפולס מוזז, $p_\Delta(t-t_i)$, היא: $h_\Delta(t-t_i)$.

בגלל הלינאריות של רכיבי המערכת נקבל שהתגובה הכללית היא:

$$x(t)\cong\sum_{i=0}^{n-1}w(t_i)\cdot h_\Delta(t-t_i)\cdot\Delta$$

עבור $\Delta\to 0$, כל פולס שואף לפונקצית הלם: $P_\Delta(t-t_i)\to\delta(t-t')$

ולכן גם כל תגובה לפולס שואפת לתגובה להלם: $h_\Delta(t-t_i)\to h(t-t')$

וסה"כ כשמשאיפים: $\Delta\to 0$, $t_n\to t'$ מקבלים:

$$\boxed{x(t)=\int_{t_0}^{t_n}w(t')h(t-t')dt'}$$

זוהי פעולת ה**קונבולוציה** המסומנת: $x(t)=w(t)*h(t)$

נסיק שאם ידועה תגובת ההלם של המעגל הלינארי, ניתן בעזרתה לחשב תגובה לכל מבוא אחר:

נבצע את פעולת הקונבולוציה בין תגובת ההלם למבוא המבוקש.

נלמד מספר תכונות של פעולת הקונבולוציה:

א. סימטרייה: $x(t)=\int_0^t w(t')h(t-t')dt' \underset{\substack{t''=t-t' \\ dt''=-dt'}}{=} -\int_t^0 w(t-t'')h(t'')dt'' = \int_0^t w(t-t'')h(t'')dt''$

ולכן: $w*h=w*h$.

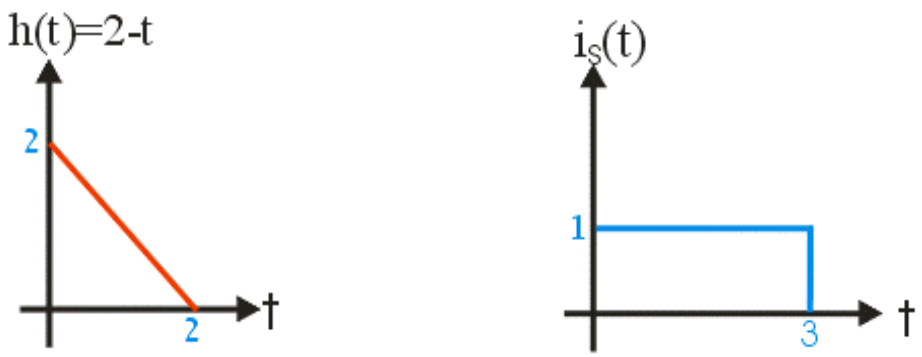
ב. $w*(h_1+h_2)=w*h_1+w*h_2$

ג. כזכור, $w(t)=\int \delta(t')w(t-t')dt'$ לכן נשים לב ש: $w=w*\delta$.

<u>קונבולוציה גרפית</u>

בבעיות של פתרון מעגלים חשמליים, ברוב המקרים האותות מוגבלים בזמן ולכן לעיתים נוח לבצע את פעולת הקונבולוציה באופן גרפי, ללא צורך בחישובים.
נלמד את אופן הפעולה בדוגמה הבאה:

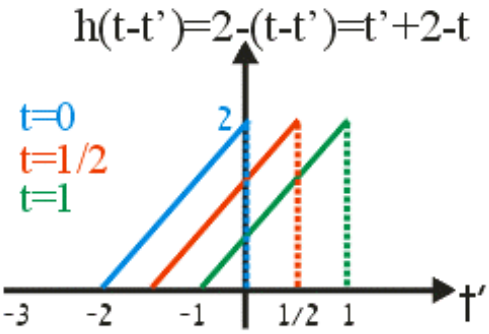
נתונות שתי פונקציות: $h(t), i_S(t)$ ונרצה לבצע ביניהן קונבולוציה.



נסמן את תוצאת הקונבולוציה ב- $V(t)$.

לפי הגדרת הקונבולוציה: $V(t)=\int_0^t i_S(t')h(t-t')dt'$.

נצייר את $h(t-t')$ על ציר t':

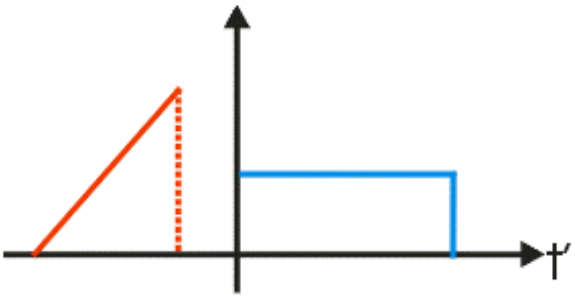


הסבר:

$h(-t')$ הוא תמונת ראי של h(t) לעומת הציר האנכי.

$h(t-t')$ הוא אותה תמונת ראי מוזזת ימינה ב t.

הפתרון יתחלק למספר תחומים:



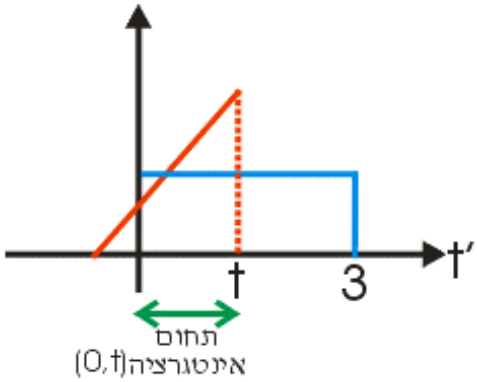
<u>עבור t<0</u>

בתחום זה אין חפיפה בין השטחים, כלומר אין תחום בו תוצאת האינטגרל שונה מאפס (כפי שניתן לראות מהציור).

לכן:

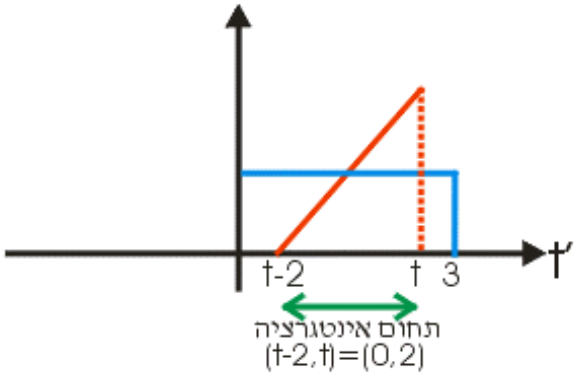
$$V(t)=\int i_s(t')h(t-t')dt'=0$$

<u>עבור 0<t<2</u>



בתחום זה ישנה חפיפה מסוימת והיא מהווה את תחום האינטגרציה: $V(t)=\int_0^t (t'-t+2)dt'$

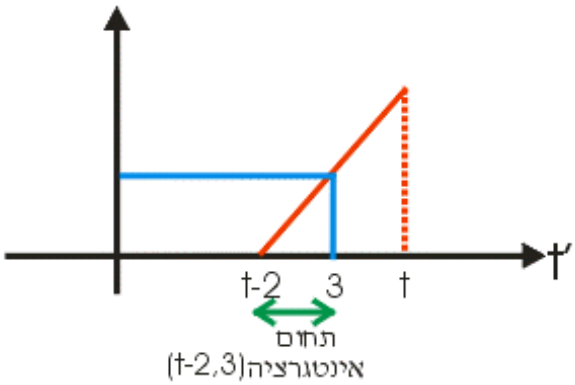
<u>עבור 2<t<3</u>



בתחום זה כל הבסיס של המשולש נמצא בחפיפה עם המלבן. אורך הבסיס של המשולש הוא 2, וגובה המלבן הוא 1,

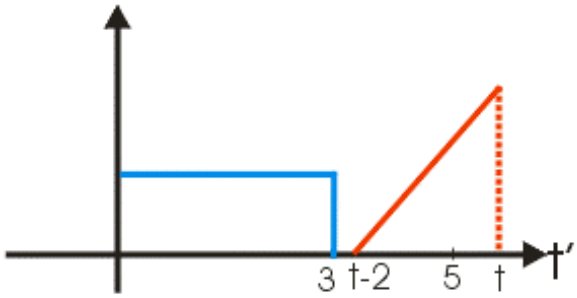
לכן: $V(t)=\int_{t-2}^{t}(t'-t+2)dt'=\int_{0}^{2}(t'-t+2)dt'$

<u>עבור 3<t<5</u>



גם בתחום זה ישנה חפיפה מסוימת שמהווה את תחום האינטגרציה: $V(t)=\int_{t-2}^{3}(t'-t+2)dt'$

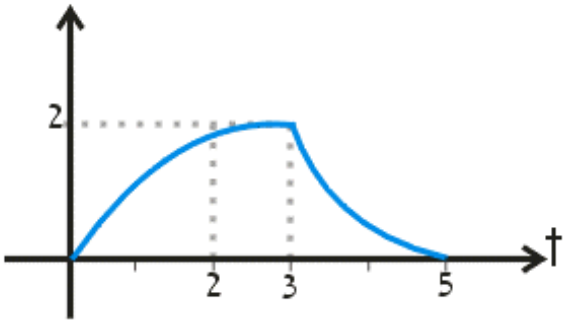
<u>עבור 5<t</u>



בתחום זה אין חפיפה בין השטחים, כלומר אין תחום אינטגרציה (כפי שניתן לראות מהציור). לכן שוב:

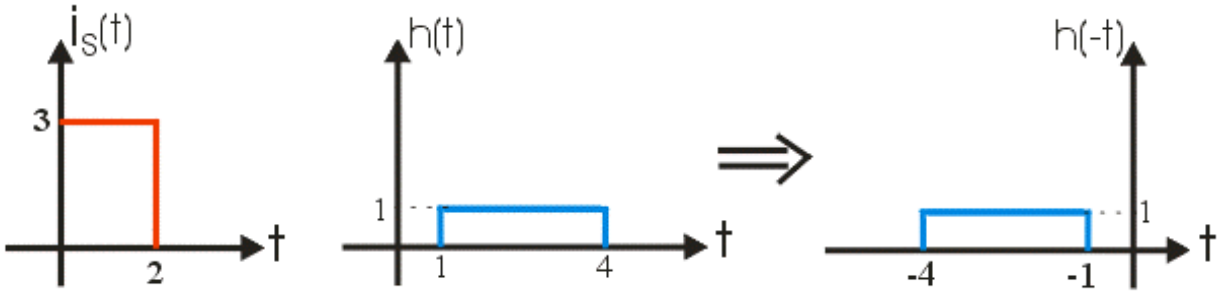
$$V(t)=\int i_S(t')h(t-t')dt'=0$$

תוצאת הקונבולוציה:

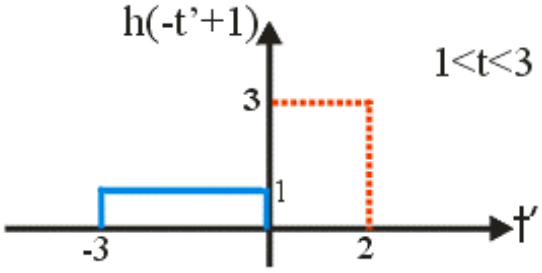


<u>דוגמא נוספת:</u>

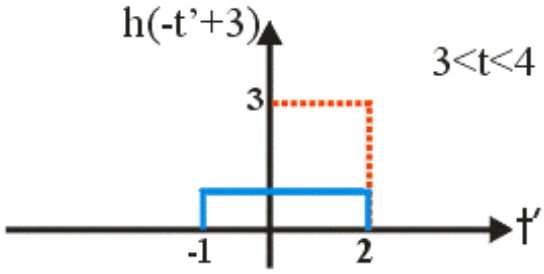
נרצה לבצע את הקונבולוציה הבאה: $g(t)=\int_0^t i_S(t')h(t-t')dt'$, כאשר נתונות הפונקציות:



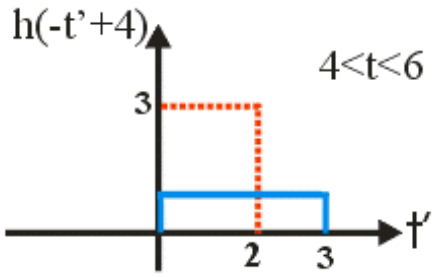
פתרון: כמו בדוגמא הקודמת, נפריד לתחומים:



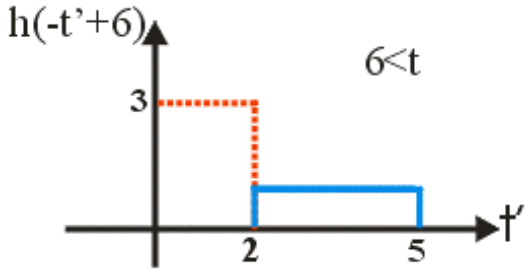
$$g(t)=\int_0^{t-1} i_S(t')h(t-t')dt'=\int_0^{t-1}(3\cdot 1)dt'=3t-3$$



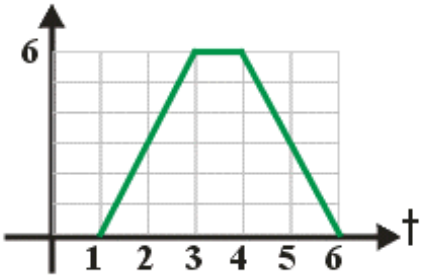
$$g(t)=\int_0^{2} i_S(t')h(t-t')dt'=\int_0^{2}(3\cdot 1)dt'=6$$



$$g(t)=\int_{t-4}^{2} i_S(t')h(t-t')dt' = \int_{t-4}^{2}(3\cdot 1)dt' = 6-3(t-4)=18-3t$$



בתחום זה אין חפיפה. נצייר את הפתרון שקיבלנו:



<u>דוגמא אחרונה בנושא הקונבולוציה הגרפית:</u>

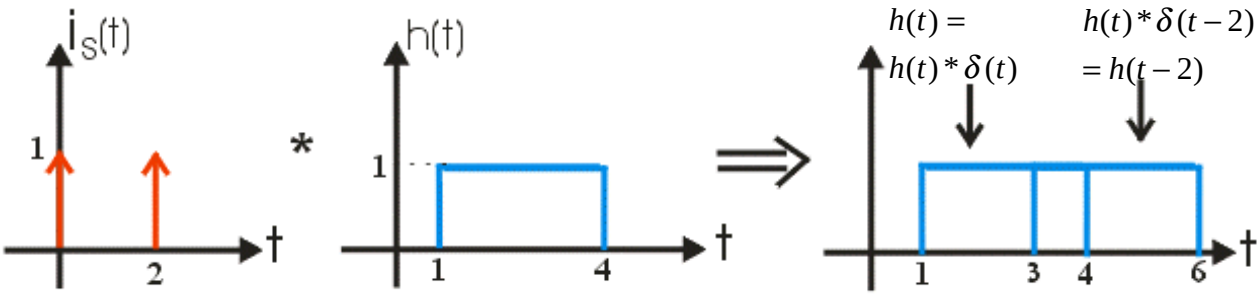
נרצה לבצע קונבולוציה בין פונקציה מלבנית h(t) ובין פונקציה המורכבת משני הלמים.

תחילה תזכורת מחוק הדגימה:

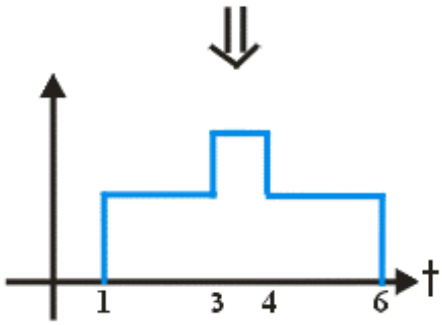
$$\int \delta(t')h(t-t')dt' = h(t)$$

$$\int \delta(t'-t_0)h(t-t')dt' = h(t-t_0)$$

כעת נבצע את הקונבולוציה של h(t) עם שני הלמים:



לאחר החיבור נקבל:



<u>הערה לגבי תכונת הדגימה של נגזרת של פונקצית הלם:</u>

$$\delta'(t)=\frac{d\delta}{dt}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\delta(t+\varepsilon)-\delta(t)}{\varepsilon}\right\}$$

לכן:

$$f(t)\delta'(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{f(-\varepsilon)\delta(t+\varepsilon)-f(0)\delta(t)}{\varepsilon}\right\}=$$

הוספנו החסרנו

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{f(0)\delta(t+\varepsilon)-f(0)\delta(t)}{\varepsilon}-\frac{f(0)\delta(t+\varepsilon)-f(-\varepsilon)\delta(t+\varepsilon)}{\varepsilon}\right\}=$$

$$=f(0)\delta'(t)-\delta(t+\varepsilon)\cdot f'(0)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$

אם כן, ראינו שעבור פונקצית הלם מתקיימים הקשרים הבאים:

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$
$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$
$$f'(t)\delta(t)+f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)$$