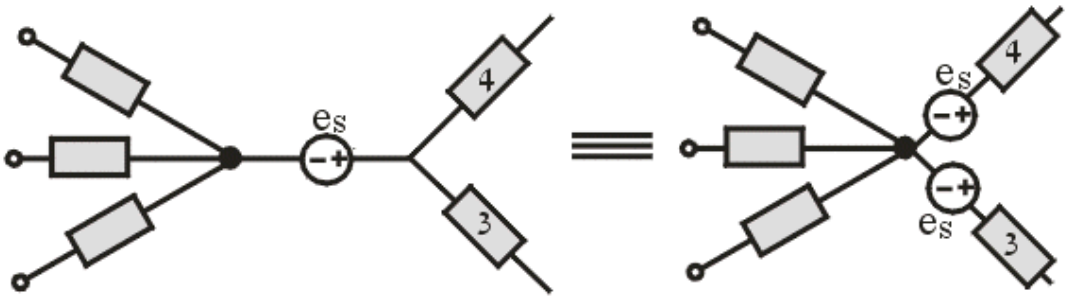
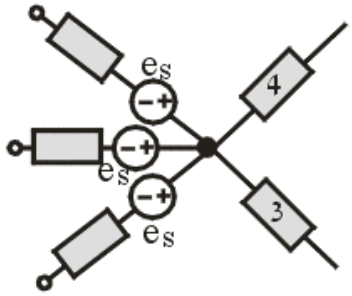
פרק 10 : ניתוח מעגלים לפי צמתים ועניבות

בפרק זה נלמד שתי שיטות ניתוח למעגלים המיוצגים ע״י גרפים.
כדי להשתמש בשיטות אלו, נרצה להביא את המעגל למבנה אחיד שלא יהיו בו ענפים עם מקורות בלבד. נרצה לקבל ענפים שתמיד מחובר אליהם נגד בטור (במקרה של מקור מתח) או נגד במקביל (במקרה של מקור זרם). ניתן להשיג זאת ע״י תהליך הנקרא **התמרת מקורות**.
נדגים את ההתמרה בשתי הדוגמאות הבאות :

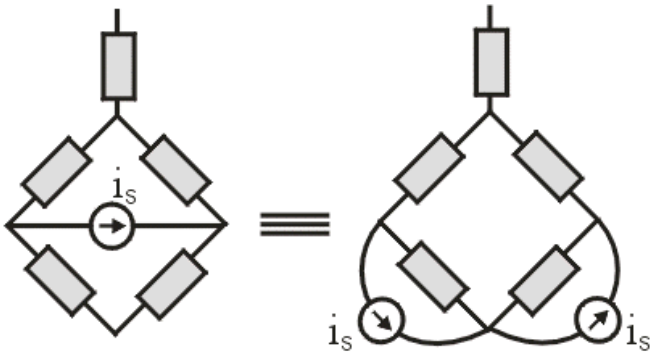
עבור מקורות מתח בענף בודד :



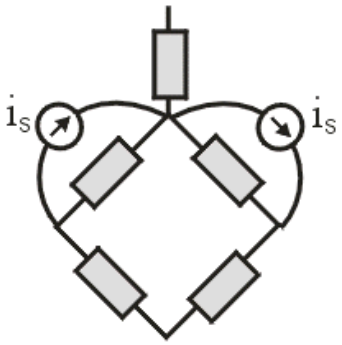
או :



עבור מקורות זרם בענף בודד :



או :



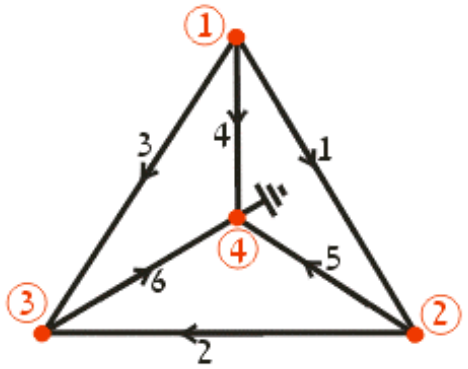
ניתוח שיטתי של מעגלים לפי צמתים

משפט: נתון מעגל קשור בעל n צמתים ו b ענפים. אזי:

א. משוואות KCL המופעלות על כל הצמתים מהוות מערכת של n משוואות התלויות ליניארית.

ב. אם נסיר צומת אחת מהמערכת נקבל $n-1$ משוואות בלתי תלויות.

הוכחה: נוכיח על מקרה פרטי:



נכתוב את משוואות KCL על הצמתים:

$$(1)\quad i_1+i_3+i_4=0$$
$$(2)\quad -i_1+i_2+i_5=0$$
$$(3)\quad -i_2-i_3+i_6=0$$
$$(4)\quad -i_4-i_5-i_6=0$$

משוואות אלו מהוות את המערכת הבאה:

$$\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}\quad \begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\-1&1&0&0&1&0\\0&-1&-1&0&0&1\\0&0&0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\i_2\\i_3\\i_4\\i_5\\i_6\end{pmatrix}=0$$

ונסמן:

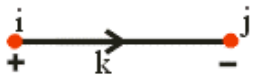
$$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{j}=0$$

ניתן לראות שהשורות של המטריצה A תלויות ליניארית שכן חיבור כל השורות נותן 0. לעומת זאת הסרת שורה אחת תגרום לפחות לעמודה אחת להכיל רק $+1$ או רק -1.
ניתן להוכיח שבמקרה זה השורות הן בלתי תלויות, ובכך הוכחנו את המשפט במקרה הפרטי.

כאמור, השורה שהוסרה מתייחסת לצומת מסוימת. אותה צומת מוגדרת כצומת יחוס ושאר מתחי הצמתים הם יחסיים אליה: e_1, e_2, e_3.

כיצד e_i יבטא את מתח הענף?

אם יש ענף כגון:



אזי: $V_K=e_i-e_j$.

אם j הוא צומת הייחוס אז $V_K=e_i$,

אם i הוא צומת הייחוס אז $V_K=-e_j$.

בכל מקרה, מתחי הענפים $\{V_K\}$ ניתנים לביטוי בעזרת קומבינציה ליניארית של $\{e_i\}$.

המטריצה $\underline{\underline{A}}$ לאחר הסרת צומת הייחוס, נקראת מטריצת הפגיעה המצומצמת.
בדוגמה שלנו צומת הייחוס שנבחרה היא צומת 4 , לכן מטריצת הפגיעה המצומצמת היא:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ניתן להביע את מתחי הענפים $\{V_K\}$ כפונקציה של $\{e_i\}$ באופן הבא:

$$\begin{aligned} V_1 &= e_1 - e_2 \\ V_2 &= e_2 - e_3 \\ V_3 &= e_1 - e_3 \\ V_4 &= e_1 \\ V_5 &= e_2 \\ V_6 &= e_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

נזכר בהגדרת המטריצה המשוחלפת (transposed): $\left(A^T\right)_{ij} = A_{ij}$

ולכן: $\text{KVL} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{V} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{e}$

מימדים: $b \times 1 \quad b \times (n-1) \quad (n-1) \times 1$

$$\text{KCL} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{j} = 0$$

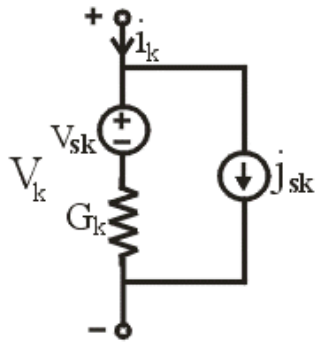
במאמר מוסגר נציין שעתה ניתן להראות בכתב מטריציאלי את הוכחת משפט Tellegen:

$$\sum V_K i_K = \underline{V}^T \cdot \underline{j} = \left(\underline{A}^T \underline{e}\right)^T \underline{j} = \left(\underline{e}^T \underline{\underline{A}}\right)\underline{j} = \underline{e}^T \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{j}\right) = 0$$

0 מתוך מה שראינו לעיל.

כעת יש להכניס את המשוואות האופייניות לענפים השונים:

אנו נשתמש במבנה ענף הכללי ביותר המכיל מקור מתח, מקור זרם ונגד. המתח על פני הענף הוא V_K והזרם דרכו הוא i_K. אנו מחפשים קשר בין V_K ל- i_K.



מתוך ציור הענף הכללי נכתוב את הקשר הבא:

$$i_K = \left(V_K - V_{SK}\right)G_K + j_{SK} = G_K V_K - V_{SK} G_K + j_{SK}$$

או באופן שקול:

$$V_K = V_{SK} + R_K \left(i_K - j_{SK}\right)$$

כעת נכתוב סט של b משוואות לא הומוגניות (אחת עבור כל ענף) המקשרות בין i_K ו- V_K.

נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\underline{j} = \underline{\underline{G}}\,\underline{V} - \underline{G}\,\underline{V_S} + \underline{j_S} \qquad (*)$$

כאשר G היא מטריצת הולכת הענפים:

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G_b \end{bmatrix}$$

הוקטור $\underline{j}$ הוא וקטור הזרמים: $\underline{j}=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_b \end{bmatrix}$, הוקטור $\underline{V}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$ הוא וקטור המתחים, הוקטור $\underline{j}_S$ הוא וקטור מקורות הזרם והוקטור $\underline{V}_S$ הוא וקטור מקורות המתח.

כעת נכפיל את (*) ב- $\underline{\underline{A}}$ משני הצדדים:

$$\underline{\underline{A}}\underline{j}=\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}-\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}_S+\underline{\underline{A}}\underline{j}_S$$

אבל מכיוון ש: $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{j}=0$

אז: $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}-\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}_S+\underline{\underline{A}}\underline{j}_S=0$

נציב: $\underline{V}=\underline{\underline{A}}^T\underline{e}$

ונקבל: $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{\underline{A}}^T\underline{e}=\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}_S-\underline{\underline{A}}\underline{j}_S$

נסמן: $Y_n=\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{\underline{A}}^T$ כמטריצת הולכת הצמתים (מטריצה nxn) וכן: $\underline{i}_S=\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}_S-\underline{\underline{A}}\underline{j}_S$

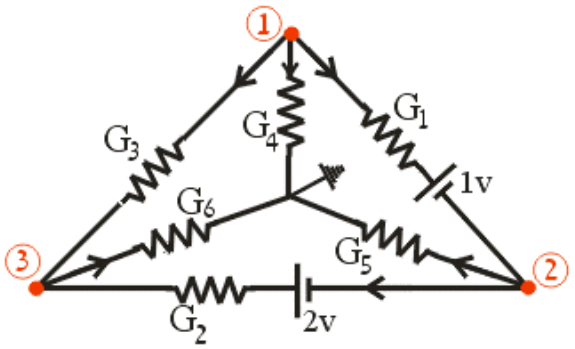
ונקבל את מערכת המשוואות:

$$\boxed{\underline{\underline{Y}}_n\underline{e}=\underline{i}_S}$$

מכאן נוכל למצוא את $\{e_i\}$ ולכן גם את כל המתחים והזרמים.

<u>דוגמא:</u>

נתון המעגל הבא:



$G_1=1\text{mho}$

$G_2=2\text{mho}$

$G_3=3\text{mho}$

$G_4=4\text{mho}$

$G_5=5\text{mho}$

$G_6=6\text{mho}$

נרצה למצוא את כל המתחים והזרמים במעגל.

פתרון:

תחילה נרשום את מטריצת הפגיעה המצומצמת:

$$\underline{\underline{A}}=\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מטריצת הולכת הענפים:

$$\underline{\underline{G}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

וקטור מקורות המתח (אין מקורות זרם במעגל):

$$V_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{AG}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{Y_n}} = \underline{\underline{AGA}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3+4 & -1 & -3 \\ -1 & 1+2+5 & -2 \\ -3 & -2 & 2+3+6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{i_S} = \underline{\underline{AG}}\,\underline{V_S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

לכן מערכת המשוואות שיש לפתור היא:

$$\underline{\underline{Y_n}} \cdot \underline{e} = \underline{i_S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -1 & 8 & -2 \\ -3 & -2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ומהפתרון נקבל את $\underline{e}$.

את המתחים והזרמים במעגל, $\underline{V}$ ו - $\underline{J}$, נקבל ע"י:

$$\underline{V} = \underline{\underline{A}}^T \underline{e}$$

$$\underline{J} = \underline{\underline{G}}\,\underline{V} - \underline{\underline{G}}\,\underline{V_S} + \underline{J_S}$$

<u>סיכום שלבי הפתרון</u>:

1. מתוך הגרף המכוון מתקבלת המטריצה $\underline{\underline{A}}$ $((n-1)\times b)$
2. מתוך האלמנטים השונים מקבלים מטריצה אלכסונית $\underline{\underline{G}}$ $(b\times b)$ וכן וקטורי מקורות $\underline{V_s}$ $(b\times 1)$, $\underline{J_s}$ $(b\times 1)$
3. א. מחשבים את מטריצת הולכת הצמתים: $\underline{\underline{Y_n}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{A}}^T$

   ב. מחשבים את וקטור המקורות: $\underline{i_s} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{V_s} - \underline{\underline{A}}\,\underline{J_s}$

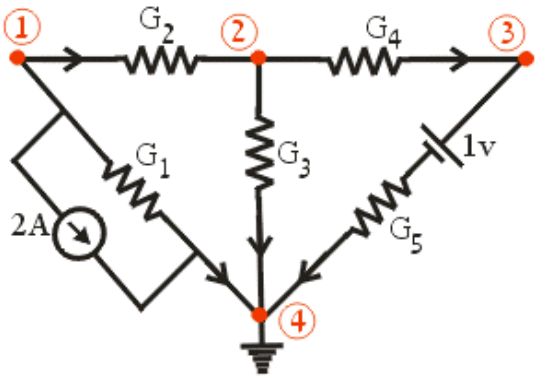
   ג. פותרים את מערכת המשוואות: $\underline{\underline{Y_n}}\,\underline{e} = \underline{i_s}$, כאשר הנעלמים הם איברי הוקטור $\underline{e}$.

   ד. מוצאים את $\underline{V}$ ע"י: $\underline{V} = \underline{\underline{A}}^T\underline{e}$

   ואת $\underline{j}$ ע"י: $\underline{j} = \underline{\underline{G}}\,\underline{V} - \underline{\underline{G}}\,\underline{V_s} + \underline{J_s}$

<u>דוגמא נוספת</u>:

נתון המעגל הבא:



$G_1 = 2\text{mho}$
$G_2 = 1\text{mho}$
$G_3 = 3\text{mho}$
$G_4 = 1\text{mho}$
$G_5 = 1\text{mho}$

גם כאן, נרצה למצוא את כל המתחים והזרמים במעגל בעזרת ניתוח לפי צמתים.

פתרון:

תחילה נמצא מתוך המעגל את מטריצת הפגיעה, וקטורי המקורות ומטריצת הולכת הענפים:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{J_s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{V_s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כעת נחשב את מטריצת הולכת הצמתים:

$$\underline{\underline{Y_n}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

נחשב את וקטור המקורות:

$$i_s = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{V_s} - \underline{\underline{A}}\,\underline{j_s} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

והמשוואה שיש לפתור היא:

$$\underline{\underline{Y_n}} \cdot \underline{e} = \underline{i_S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

התוצאה היא:

$$\underline{e} = \underline{\underline{Y_n}}^{-1} \underline{i_S} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -17 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

ומתוך הוקטור $\underline{e}$ נחלץ את המתחים והזרמים:

$$\underline{J} = \underline{\underline{G}}\,\underline{V} + \underline{J_S} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 16 \\ -16 \\ -3 \\ -13 \\ -13 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{V} = \underline{\underline{A}}^T e = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -17 \\ -16 \\ -1 \\ -13 \\ 12 \end{bmatrix} \quad ,$$

כעת נדון במעגלים במצב סינוסי עמיד.
מה מהניתוח השיטתי משתנה במעגל הנמצא במצב סינוסי עמיד?

המטריצה $\underline{\underline{A}}$ אינה משתנה,

המטריצה $\underline{\underline{G}}$ עוברת למטריצה $\underline{\underline{Y_b}}$ המכילה את האדמיטנסים של האלמנטים השונים,

$\underline{V_S},\underline{J_S}$ הם וקטורי מקורות פאזורים,

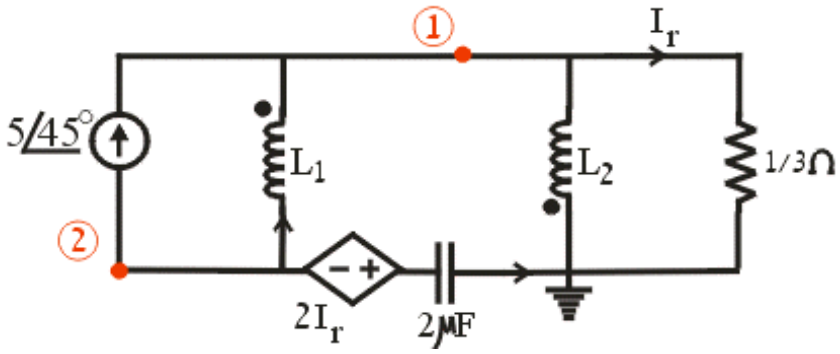
$\underline{V},\underline{J},\underline{E}$ גם הם פאזורים.

באופן דומה לפיתוח הקודם, יתקיים:

$$\underline{\underline{Y_n}}\,\underline{E} = \underline{I_S}$$
$$\underline{V} = \underline{\underline{A}}^T\underline{E}$$
$$\underline{J} = \underline{\underline{Y_b}}\,\underline{V} + \underline{J_S} - \underline{\underline{Y_b}}\,\underline{V_S}$$

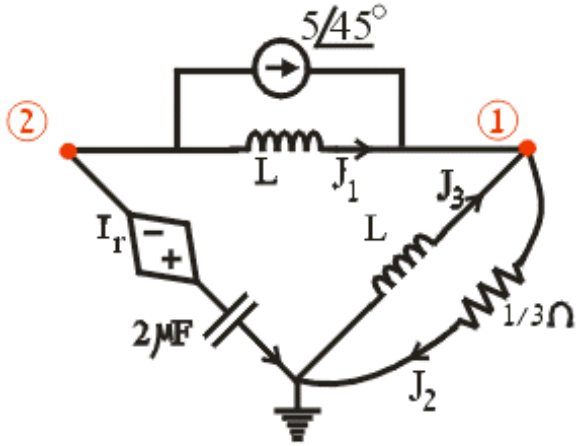
<u>דוגמא:</u>

נתון המעגל הבא, כולל מטריצת ההשראות.
נבצע עליו את הניתוח עבור מצב סינוסי עמיד.



$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

נרשום את המטריצה מתוך המעגל:



$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{J_S} = \begin{pmatrix} 5\angle 45^\circ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מטריצת ההשראות ההפוכה:

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{L}}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

זרמי הסלילים:

$$\underline{V_L} = jw\underline{\underline{L}} \cdot \underline{J_L}$$
$$\underline{J_L} = \underline{\underline{\Gamma}}\,\underline{V_L} \cdot \frac{1}{jw}$$

לכן:

$$J_1 = j_{L1} + j_S = \frac{5}{jw}V_1 + \frac{2}{jw}V_2 + j_S$$

$$J_2 = j_{L2} = \frac{2}{jw}V_1 + \frac{1}{jw}V_2$$

בענף 3 יש רק את הנגד שערכו $\frac{1}{3}\Omega$:

$$J_3 = 3V_3$$

בענף 4 יש קבל שערכו $2_{\mu F}$ וסכום של שני מתחים :

$$2\cdot 2\cdot 3$$

$$J_4 = 2jw(V_4 + 2J_3) = 2jwV_4 + 12jwV_3$$

מקור המתח המבוקר ע״י הזרם על הנגד

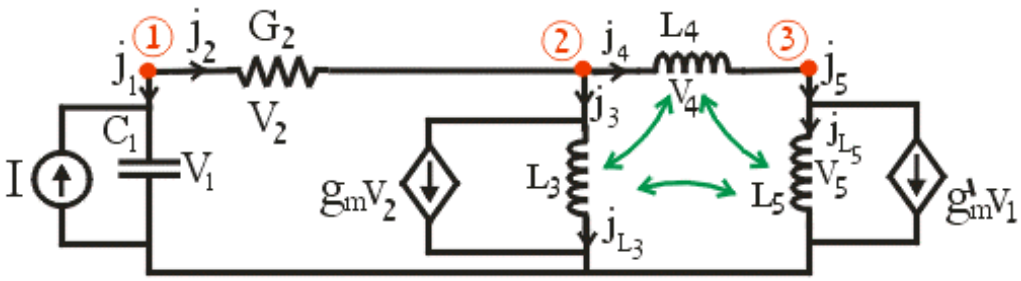
סה״כ מקבלים את מטריצת האדמיטנסים הבאה :

$$\underline{\underline{Y_b}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{jw} & \frac{2}{jw} & 0 & 0 \\ \frac{2}{jw} & \frac{1}{jw} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12jw & 2jw \end{bmatrix}$$

ומכאן ממשיכים כמו קודם.

<u>דוגמא נוספת :</u>

נתון המעגל הבא במצב סינוסי עמיד :



ונתונה מטריצת ההשראות של שלושת הסלילים :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5/3 & -4/3 \\ 1 & -4/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

ראשית נמצא את מטריצת הפגישה :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

עכשיו נמצא את מטריצת האדמיטנסים:

בענף 1,2:

$$j_1 = jwC_1V_1 - I$$
$$j_2 = G_2V_2$$

בשאר הענפים יש סלילים, עבורם:

$$\underline{V_L} = jw\underline{\underline{L}}\cdot\underline{J_L}$$

כלומר:

$$\underset{\underline{V_L}}{\begin{bmatrix}V_3\\V_4\\V_5\end{bmatrix}} = jw\underset{\underline{\underline{L}}}{\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 5/3 & -4/3\\ 1 & -4/3 & 5/3\end{bmatrix}}\underset{\underline{J_L}}{\begin{bmatrix}j_{L3}\\j_4\\j_{L5}\end{bmatrix}} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}j_{L3}\\j_4\\j_{L5}\end{bmatrix}\frac{1}{jw}\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_3\\V_4\\V_5\end{bmatrix}$$

בהתחשב במקורות המבוקרים מקבלים:

$$j_3 = g_mV_2 + \frac{3}{jw}V_3 + \frac{1}{jw}V_4 - \frac{1}{jw}V_5$$
$$j_4 = \frac{1}{jw}V_3 + \frac{2}{jw}V_4 + \frac{1}{jw}V_5$$
$$j_5 = g'_mV_1 - \frac{1}{jw}V_3 + \frac{1}{jw}V_4 + \frac{2}{jw}V_5$$

לכן מקבלים סה"כ את מטריצת האדמיטנסים:

$$Y_b = \begin{bmatrix}jwC_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & g_m & \frac{3}{jw} & \frac{1}{jw} & -\frac{1}{jw}\\ 0 & 0 & \frac{1}{jw} & \frac{2}{jw} & \frac{1}{jw}\\ g'_m & 0 & -\frac{1}{jw} & \frac{1}{jw} & \frac{2}{jw}\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{Y_n}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Y_b}}\,\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} jwG_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + g_m & G_2 - g_m + \frac{7}{jw} & -\frac{3}{jw} \\ g'_m & -\frac{3}{jw} & \frac{2}{jw} \end{bmatrix}$$

$$\underline{V_S} = 0 \quad , \quad \underline{I_S} = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{i_S} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{V_S} - \underline{\underline{A}}\,\underline{J_S} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

והמשוואה היא כרגיל: $\underline{\underline{Y_n}}\,\underline{E} = \underline{i_S}$ כאשר מצאנו כבר את $\underline{i_S}, \underline{\underline{Y_n}}$.

<u>משוואות אינטגרודיפרנציאליות integrodifferential Equations</u>

נרצה להכניס בתוך המטריצה $\underline{\underline{G}}$ את האופרטורים של הגזירה והאינטגרציה.

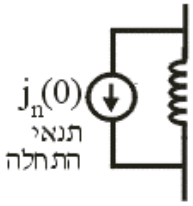
נשתמש לצורך זה בסימון: $D = \frac{d}{dt}$ $\quad D^{-1} = \frac{1}{D} = \int_0^t dt'$.

אם ענף n הוא נגד: אז: $j_n = Y_n V_n$

אם הוא קבל: אז: $j_n = C_n \frac{dV_n}{dt} = C_n \cdot DV_n$

אם הוא סליל: אז:

$$j_n = j_n(0) + \frac{1}{L_n}\int_0^t V_n(t')dt' =$$
$$= j_n(0) + \frac{1}{L_n}\cdot\frac{1}{D}V_K$$



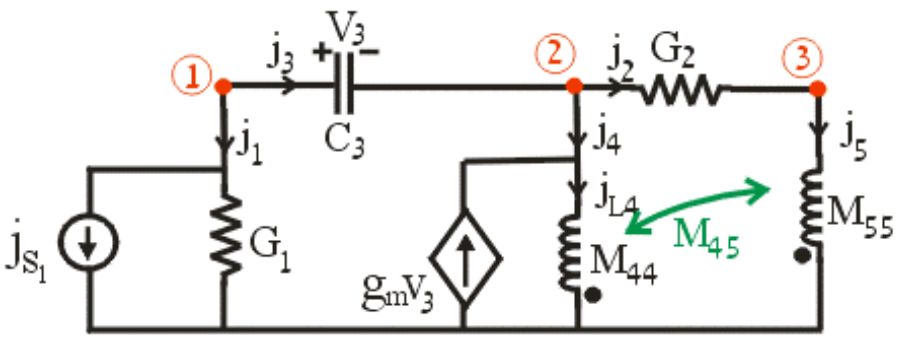
נכנס כאילו היה מקור זרם בלתי תלוי אל וקטור המקורות $\underline{j_S}$.

נשים לב כי לפי הסימון שלנו: $D \cdot D^{-1}f = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(t')dt'\right] = f(t)$

$$D^{-1}\cdot Df=\int_0^t f'(t')dt'=f(t')\Big|_0^t=f(t)-f(0)$$

$$D^mD^n=D^{m+n}$$

דוגמא לשימוש בסימון האופרטורים:



מטריצת הפגישה:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&1&0\\0&-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

מטריצת האדמיטנסים:

$$\underline{\underline{G}}=\begin{bmatrix}G_1&0&0&0&0\\0&G_2&0&0&0\\0&0&G_3D&0&0\\0&0&-g_m&\Gamma_{44}D^{-1}&\Gamma_{45}D^{-1}\\0&0&0&\Gamma_{45}D^{-1}&\Gamma_{55}D^{-1}\end{bmatrix}$$

$$Y_n=\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{A}}^T=\begin{bmatrix}G_1+C_3D&-C_3D&0\\-C_3D-g_m&C_2+C_3D+g_m+\Gamma_{44}D^{-1}&-G_2+\Gamma_{43}D^{-1}\\0&-G_2+\Gamma_{45}D^{-1}&G_2+\Gamma_{55}D^{-1}\end{bmatrix}$$

ויש לפתור את סט המשוואות:

$$\underline{\underline{Y_n}}(D)\cdot\underline{E}=\underline{i_S}$$

לא נראה כאן איך למצוא את וקטור המקורות $\underline{i_S}$.

ניתוח שיטתי של מעגלים לפי עניבות

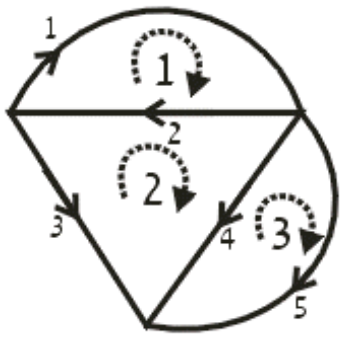
השיטה השניה לניתוח שיטתי של מעגלים המיוצגים ע"י גרפים היא ניתוח לפי עניבות, שמקבילה לניתוח לפי צמתים.
אם נתונות L עניבות בגרף (ללא העניבה החיצונית) אז משוואות KVL המופעלות על עניבות אלו מהוות מערכת משוואות בלתי תלויה.
כמובן שעל מנת לרשות KVL חייבים ראשית לתת כיוון לעניבות.
בדומה למטריצת הפגישה בניתוח לפי צמתים, את מטריצת פגישת העניבות (שמסמנים ב - M) נרשום כך:

אם ענף k שייך לעניבה i וכיווניהם מתלכדים אז : $M_{ik} = 1$

אם ענף k שייך לעניבה i וכיווניהם מנוגדים אז : $M_{ik} = -1$

אם ענף k אינו שייך לעניבה i אז : $M_{ik} = 0$

במעגל לדוגמה שלפנינו :

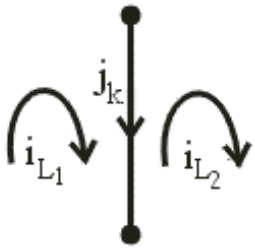


$$\underline{\underline{M}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

מטריצת פגישת העניבות - $\underline{\underline{M}}$

כאשר העמודות הן הענפים והשורות הן העניבות.

כעת ניתן להציג את חוק KVL כך : $\underline{\underline{M}} \cdot \underline{V} = 0$.



מגדירים i_L כזרם בעניבה L , לכן הזרם בענף K יהיה :

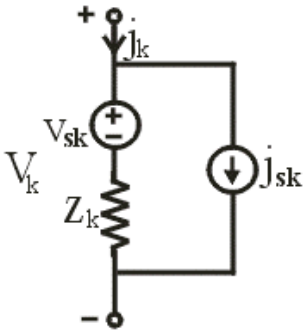
$$j_K = i_{L1} - i_{L2}$$

ולכן ניתן להציג את חוק KCL כך : $\underline{J} = \underline{\underline{M}}^T \underline{i}$.

בדוגמא שלנו :

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{i}$$

גם כאן נניח מבנה כללי לענף באופן הבא :



נכניס את וקטורי המקורות לפתרון :

$$\underline{V} = \underline{\underline{Z}}_b \underline{j} + \underline{V}_S - \underline{\underline{Z}}_b \underline{j}_S$$

נכפיל בצד שמאל ב M ונקבל :

$$\underline{\underline{M}}\underline{V} = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{Z}}_b \underline{j} - \underline{\underline{M}}\underline{\underline{Z}}_b \underline{j}_b + \underline{\underline{M}}\underline{V}_S$$

אבל : $\underline{\underline{M}}\underline{V} = 0$ ולכן :

$$\left(\underline{\underline{M}}\underline{\underline{Z}}_b \underline{j}\right) = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{Z}}_b \underline{j}_b - \underline{\underline{M}}\underline{V}_S$$

$$\left(\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}}_b\,\underline{\underline{M}}^T\underline{I}\right)=\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}}_b\,\underline{j}_b-\underline{\underline{M}}\,\underline{V}_S$$

נציב: $\underline{j}=\underline{\underline{M}}^T\underline{I}$ ונקבל:

נגדיר:

$$\underline{\underline{Z}}_m=\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}}_b\underline{\underline{M}}^T \qquad \underline{E}_S=\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}}_b\underline{J}_S-\underline{\underline{M}}\,\underline{V}_S$$

ואז נקבל:

$$\boxed{\underline{\underline{Z}}_m\cdot\underline{I}=\underline{E}_S}$$

כלומר, סט משוואות שבהם איברי הוקטור $\underline{I}$ הם נעלמים.
מתוכו נוכל כמובן למצוא את כל הזרמים והמתחים של המעגל.

<u>סיכום שלבי הפתרון:</u>

א' חישוב מטריצת האימפדנסים של הענפים: $\underline{\underline{Z}}_b$ וממנה את: $\underline{\underline{Z}}_M=\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}}_b\underline{\underline{M}}^T$

ב מחשבים את וקטור המקורות: $\underline{E}_S=\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}}_b\underline{J}_S-\underline{\underline{M}}\,\underline{V}_S$

ג פותרים את המשוואות $\underline{\underline{Z}}_m\underline{I}=\underline{E}_S$ ומוצאים את $\underline{I}$ (זרמי החוגים).

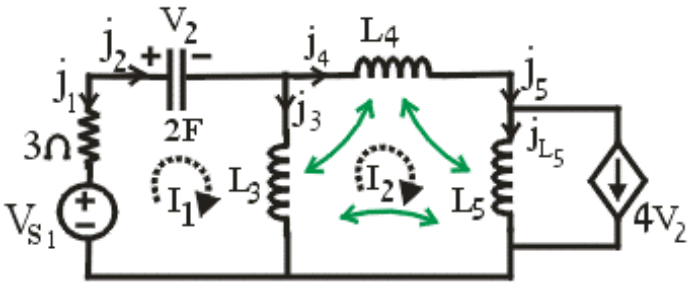
ד' - מוצאים את המתחים והזרמים ע"י:

זרמי הענפים $\rightarrow$ $\underline{J}=\underline{\underline{M}}^T\underline{I}$

מתחי ענפים $\rightarrow$ $\underline{V}=\underline{\underline{Z}}_b\underline{I}-\underline{\underline{Z}}_b\underline{j}_S+\underline{V}_S$

<u>דוגמא</u>:

נתון המעגל הבא במצב סינוסי עמיד:



כמו כן נתונה מטריצת ההשראות:

$$L=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

נרצה למצוא את המתחים והזרמים במעגל.

תחילה נמצא את מטריצת הפגישה עבור שתי העניבות:

$$M=\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

עבור הסלילים מתקיים:

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = jw \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_3 \\ j_4 \\ j_{L5} \end{bmatrix}$$

$$j_{L5} = j_5 - 4V_2 = j_5 - \frac{2}{jw} j_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = jw \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_3 \\ j_4 \\ j_5 - \frac{2}{jw} j_2 \end{bmatrix}$$

לכן:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2jw} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3jw & jw & -jw \\ 0 & -4 & jw & 4jw & 2jw \\ 0 & -10 & -jw & 2jw & 5jw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{S1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

זוהי מטריצת האימפדנסים $\underline{\underline{Z_b}}$. ממנה נחשב את:

$$Z_m = \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z_b}}\,\underline{\underline{M}}^T = \begin{bmatrix} 5 + 3jw + \frac{2}{jw} & -3jw \\ -16 - 3jw & 16jw \end{bmatrix}$$

נחשב את וקטור המקורות: $E_S = \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z_b}}\,\underline{j_S} - \underline{\underline{M}}\,\underline{V_S} = -\underline{\underline{M}}\,\underline{V_S} = \begin{bmatrix} V_{S1} \\ 0 \end{bmatrix}$

ולכן יש לפתור את:

$$\underline{\underline{Z_m}} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{S1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

כדי למצוא את זרמי החוגים I_1, I_2 ומתוכם למצוא את כל הזרמים והמתחים.

סיכום שיטת צמתים ושיטת חוגים לניתוח מעגלים

	חוגים	צמתים
משתני המערכת:	זרמי חוגים - $\underline{I}$	מתחי צמתים - $\underline{e}$
עובדות בסיסיות:		
KCL:	$\underline{j} = \underline{\underline{M}}^T \underline{I}$	$\underline{\underline{A}}\,\underline{j} = 0$

KVL: $\underline{\underline{M}}\underline{I} = 0$ $\qquad$ $\underline{V} = \underline{\underline{A}}^T \underline{e}$

משוואות ענפים: $\underline{V} = \underline{\underline{Z}}_b \underline{j} + \underline{V}_S - \underline{\underline{Z}}_b \underline{j}_S$ $\qquad$ $\underline{j} = \underline{\underline{G}}\underline{V} + \underline{j}_S - \underline{\underline{G}}\underline{V}_S$

$$\uparrow$$

$$\underline{\underline{Y}}_b$$

מטריצות התנגדות/מוליכות:

$\underline{\underline{Z}}_m = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{M}}^T$ $\qquad$ $\underline{\underline{Y}}_n = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{\underline{A}}^T$

וקטור מקורות: $\underline{e}_S = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{R}}\underline{j}_S - \underline{\underline{M}}\underline{V}_S$ $\qquad$ $\underline{i}_S = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}_S - \underline{\underline{A}}\underline{j}_S$

משוואות מערכת: $\underline{\underline{Z}}_m \underline{I} = \underline{e}_S$ $\qquad$ $\underline{\underline{Y}}_n \underline{e} = \underline{i}_S$