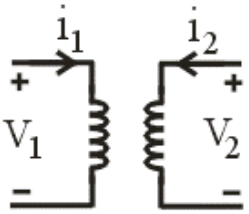
פרק 8 : אלמנטים מצומדים

בניגוד לקבלים, סלילים, נגדים ומקורות רגילים ישנם אלמנטים שהתנהגותם קשורה במתרחש בענפים אחרים של המעגל. אלמנטים אלו מכונים **אלמנטים מצומדים**.
אנו נדון בשני מקרים : סלילים ומקורות. אולם אם ניזכר כי מקור לא אידיאלי הינו בעל התנגדות פנימית, הרי שהטיפול במקורות מבוקרים כולל גם נגדים מצומדים.

סלילים מצומדים

סלילים מצומדים הם שני סלילים שקבועים בקירבה פיסית (עם או בלי ליבה מגנטית משותפת) :



הצימוד מתבטא בכך שהשטף שכל אחד מהסלילים יוצר משפיע גם על חברו ולכן תלוי גם בזרם של הסליל השני, ולא רק בזרם של עצמו :

$$\phi_1(t) = L_{11}i_1(t) + M_{12}i_2(t)$$
$$\phi_2(t) = M_{21}i_1(t) + L_{22}i_2(t)$$

מינוחים : L_{11}, L_{22} - השראות עצמית, self inductance.
$M_{12},\ M_{21}$ השראות הדדית, mutual inductance.
ברוב המקרים $M = M_{12} = M_{21}$, כלומר ההשפעה ההדדית של הסלילים אחד על השני היא זהה.
הגורם M יכול להיות חיובי או שלילי לפי כיוון הליפוף וההצבה של הסלילים אחד ביחס לשני.

המתח על הסלילים : $V_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$ $\qquad$ $V_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$

או בפאזורים : $\tilde{V}_1 = jwL_{11}\tilde{I}_1 + jwM\tilde{I}_2$ $\qquad$ $\tilde{V}_2 = jwM\tilde{I}_1 + jwL_{22}\tilde{I}_2$

האנרגיה האגורה בסלילים המצומדים :

$$\varepsilon(i_1,i_2) = \int_0^t V_1(t')i_1(t')dt' + \int_0^t V_2(t')i_2(t')dt' =$$

$$= \int_0^t \left[L_{11}\underbrace{\frac{di_1}{dt'}\cdot i_1}_{\frac{d(i_1^2)}{2dt'}} + M\left(i_1\frac{di_2}{dt'} + \underbrace{i_2\frac{di_2}{dt'}}_{\frac{d(i_1\cdot i_2)}{dt'}} \right) + L_{12}\frac{di_2}{dt'}\cdot i_2 \right]dt' = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2(t) + Mi_1(t)i_2(t) + \frac{1}{2}L_{22}i_1^2(t) =$$

$$= \varepsilon(i_1,0) + Mi_1i_2 + \varepsilon(i_2,0)$$

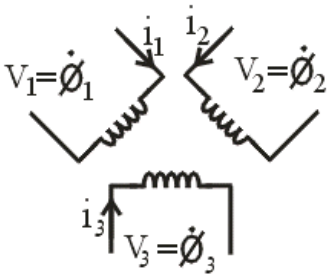
כלומר, האנרגיה האצורה בסלילים המצומדים היא סכום האנרגיות האצורות בכל אחד מהסלילים, וגורם נוסף שהוא מכפלת הזרמים והפקטור M.
לפיכך M יכול להגדיל או להקטין את האנרגיה האגורה.

נהוג לסמן : $K = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$ בתור **מקדם הצימוד**.

במקרה שיש הרבה סלילים שמצומדים ביניהם:

$$\phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + L_{13}i_3 + \ldots$$
$$\phi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 + L_{23}i_3 + \ldots$$
$$\vdots$$

למשל במקרה של שלושה סלילים:



נגדיר: $\bar{\bar{L}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{21} & L_{23} \\ L_{31} & L_{31} & L_{33} \end{pmatrix}$ מטריצת ההשראות,

ואז ברישום מטריציאלי ניתן לרשום: $\bar{\phi} = \bar{\bar{L}}\,\bar{I}$, כאשר $\bar{I}$ הוא וקטור הזרמים.

ניתן גם לרשום: $\bar{I} = \bar{\bar{L}}^{-1}\bar{\phi} = \bar{\bar{\Gamma}}\,\bar{\phi}$.

ל- Γ קוראים מטריצת ההשראות ההפוכה reciprocal inductance matrix.

נתבונן במקרה הדו-ממדי:

$$i_1 = \Gamma_{11}\phi_1 + \Gamma_{12}\phi_2$$
$$i_2 = \Gamma_{21}\phi_1 + \Gamma_{22}\phi_2$$

כאשר מתוך הקשר הבא:

$$\Gamma = L^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} L_{22} & -L_{12} \\ -L_{21} & L_{11} \end{bmatrix}}{\left|\bar{\bar{L}}\right|} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$$

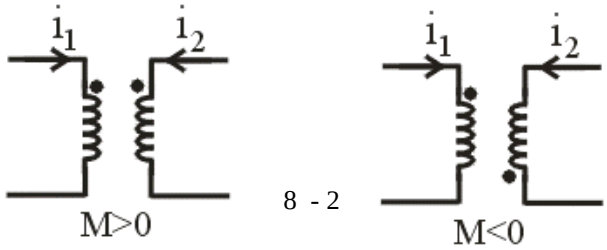
נמצא את איברי מטריצת ההשראות ההפוכה: $\Gamma_{12} = \frac{-L_{12}}{\left|\bar{\bar{L}}\right|}$, $\Gamma_{22} = \frac{L_{11}}{\left|\bar{\bar{L}}\right|}$, $\Gamma_{11} = \frac{L_{22}}{\left|\bar{\bar{L}}\right|}$.

עבור זרמים סינוסואידליים נוכל לרשום:

$$\tilde{I}_1 = \frac{\Gamma_{11}}{jw}\tilde{V}_1 + \frac{\Gamma_{12}}{jw}\tilde{V}_2 + \ldots$$
$$\tilde{I}_2 = \frac{\Gamma_{21}}{jw}\tilde{V}_1 + \frac{\Gamma_{22}}{jw}\tilde{V}_2 + \ldots$$
$$\vdots$$

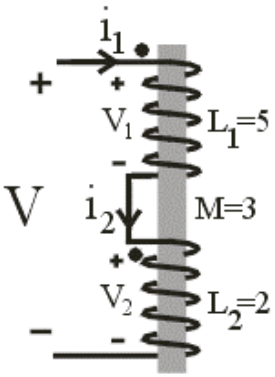
או ברישום מטריציאלי: $\bar{\tilde{I}} = \bar{\bar{\Gamma}} \cdot \frac{1}{jw} \cdot \bar{\tilde{V}}$.

אמרנו ש-M יכול להיות חיובי או שלילי. כיצד, אם כן, נזהה את סימונו של M מתוך התבוננות במעגל?
ע"י ציור של נקודה: אם שני הזרמים נכנסים או יוצאים מהצד עם הנקודה אז M חיובי, אחרת M שלילי:



<u>חיבורים מקבילייים וטוריים של סלילים מצומדים:</u>

חיבור טורי:



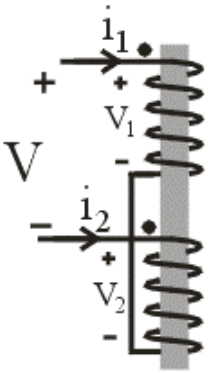
$$i_1 = i_2 = i$$
$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = 8i$$
$$\phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 = 5i$$

בחיבור טורי מתקיים: $V = V_1 + V_2$ אז:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 \quad \Rightarrow \quad \phi = 13i$$

ונוכל למצוא את המוליכות השקולה של החיבור המקבילי: $L_{total} = \frac{\phi}{i} = 13$.

חיבור טורי הפוך:



$$i = i_1 = -i_2$$
$$V = V_1 - V_2 \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_1 - \phi_2$$
$$\phi_1 = 5i_1 + 3i_2 = 5i_1 - 3i_1 = 2i_1$$
$$\phi_2 = 2i_2 + 3i_1 = -2i_1 + 3i_1 = i_1$$
$$\phi = 2i_1 - i_1 = i_1 = i$$

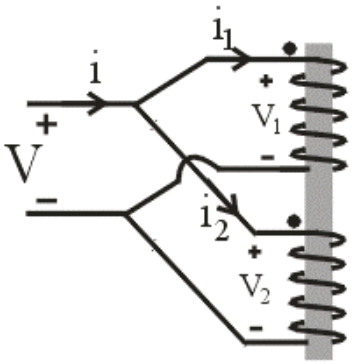
$$L_{total} = \frac{\phi}{i} = 1$$

נסכם את צורת החיבור הטורי:

$$L_{total} = L_{11} + L_{22} \pm 2|M|$$

כאשר סימן המחובר האחרון תלוי בסוג החיבור, כאמור לעיל.

חיבור מקבילי:



כמו קודם, מטריצת ההשראות היא: $L = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

ולכן מטריצת ההשראות ההפוכה היא: $\Gamma = L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$$i_1 = \Gamma_{11}\phi_1 + \Gamma_{12}\phi_2 = 2\phi_1 - 3\phi_2$$
$$i_2 = \Gamma_{21}\phi_1 + \Gamma_{22}\phi_2 = -3\phi_1 + 5\phi_2$$
$$V = V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = \phi_2$$

$$i_1 = 2\phi_1 - 3\phi_1 = -\phi_1 = -\phi$$
$$i_2 = -3\phi_1 + 5\phi_1 = 2\phi_1 = 2\phi$$
$$i = i_1 + i_2 = 2\phi - \phi = \phi$$

$$L_{total} = \frac{\phi}{i} = 1$$

ישנו, כמובן, גם חיבור מקבילי הפוך (בדומה למקרה הטורי).
נסכם את צורת החיבור המקבילי:

$$\Gamma = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} \pm 2|\Gamma_{12}|$$

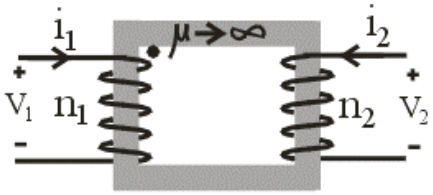
כאשר סימן המחובר האחרון תלוי בסוג החיבור.

שנאי אידיאלי Ideal transformer

שנאי אידיאלי הוא התקן המקיים:

1. אין בזבוז אנרגיה.
2. אין דליפת שטף מגנטי מהליבה. זה מוביל לעובדה ש - $K = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{12}}} = 1$ (יוכח בהמשך) ומצב זה נקרא **צימוד מלא**.
3. ההשראות העצמית של כל ענף היא גדולה מאוד.

תנאים אלו מושגים תוך שימוש בליבה בעלת חדירות מגנטית (magnetic permeability) ששואפת לאינסוף: $\mu \to \infty$.
במצב זה, כל כריכה בליפוף 1 מצומדת במלואה לכל כריכה בליפוף 2.



אם נסמן:
ϕ - השטף המגנטי דרך ליפוף יחיד של הסליל על הליבה,
n_1 - מספר הליפופים על גליל 1,
n_2 - מספר הליפופים על גליל 2,
ϕ_1 - השטף המגנטי דרך גליל 1,
ϕ_2 - השטף המגנטי דרך גליל 2,

אז נקבל: $\phi_1 = n_1\phi$
$\phi_2 = n_2\phi$

מכיוון ש: $V_1 = \frac{d\phi_1}{dt} = n_1\frac{d\phi}{dt}$, $V_2 = \frac{d\phi_2}{dt} = n_2\frac{d\phi}{dt}$
מסיקים את היחס בין המתחים:

$$\boxed{\frac{V_1(t)}{V_2(t)} = \frac{n_1}{n_2}}$$

אמרנו שבשנאי אין איבוד אנרגיה, לכן מתקיים בו חוק שמור האנרגיה.
הספק נכנס בליפוף 1 - $i_1(t)V_1(t)$,

הספק נכנס בליפוף 2 - $i_2(t)V_2(t)$,

ולכן צריך להתקיים: $i_1(t)V_2(t)+i_2(t)V_2(t)=0$

מכאן נובע היחס בין הזרמים:

$$\boxed{\frac{i_1(t)}{i_2(t)}=-\frac{n_2}{n_1}}$$

כעת נוכל להוכיח שתחת התנאים שמתקיימים בשנאי אידיאלי, מקדם הצימוד שווה ל - 1:

$$\varepsilon(i_1,i_2)=\frac{1}{2}L_{11}i_1^{\,2}+Mi_1i_2+\frac{1}{2}L_{22}i_2^{\,2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[L_{11}i_1^{\,2}+2\sqrt{L_{11}L_{22}}i_1i_2+L_{22}i_2^{\,2}\right]+\left[\frac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}-1\right]\sqrt{L_{11}L_{22}}i_1i_2=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{L_{11}}i_1+\sqrt{L_{22}}i_2\right]^2+(K-1)\sqrt{L_{11}L_{12}}i_1i_2$$

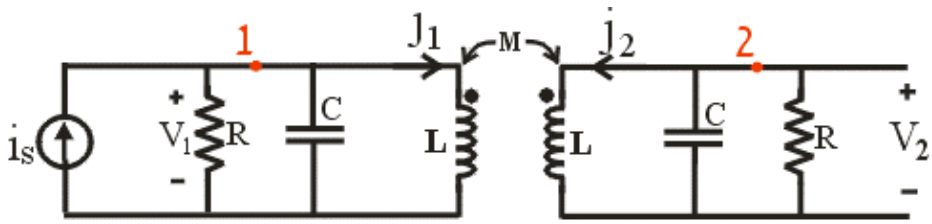
דורשים $\varepsilon=0$, לכן:

1 - $\sqrt{L_{11}}i_1+\sqrt{L_{22}}i_2=0 \quad\Leftarrow\quad \frac{\sqrt{L_{11}}}{\sqrt{L_{22}}}=-\frac{i_2}{i_1} \quad\Leftarrow\quad \frac{L_{11}}{L_{22}}=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$

2 - $K-1=0 \quad\Leftarrow\quad K=\frac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}=1$

<u>מעגל מכוון כפול</u>

מעגל מכוון כפול הוא הצמדה של שני מעגלי תהודה זהים:



מטריצת ההשראות היא: $\begin{pmatrix} L & M \\ M & L \end{pmatrix}=L\begin{pmatrix} 1 & K \\ K & 1 \end{pmatrix}$

מטריצת ההשראות ההפוכה היא: $\Gamma=L^{-1}=\frac{1}{(1-K^2)L^2}\begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}$

כמו כן, מכיוון ש: $L_{11}=L_{22}=L$ אז: $K=\frac{M}{\sqrt{L\cdot L}}=\frac{M}{L}$.

אנו מעוניינים במצב הסינוסי העמיד של המעגל:

נרצה למצוא את פונקצית המערכת:

$$\tilde{H}(jw)=\frac{\tilde{V}_2}{\tilde{I}_S}$$

פתרון:

$$\tilde{V}_1 = jwL\,\tilde{I}_1 + jwM\,\tilde{I}_2$$
$$\tilde{V}_2 = jwM\,\tilde{I}_1 + jwL\,\tilde{I}_2$$

נרשום את זוג המשוואות בצורה מטריציאלית:

$$\left[\tilde{V}\right]=\begin{pmatrix} jwL & jwM \\ jwM & jwL \end{pmatrix}\left[\tilde{I}\right]$$

לפי כלל קרמר:

$$\left[\tilde{I}\right]=\frac{\begin{pmatrix} jwL & -jwM \\ -jwM & jwL \end{pmatrix}}{-w^2\left(L^2-M^2\right)}\cdot\left[\tilde{V}\right]=\frac{\begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}}{jwL\left(1-k^2\right)}\cdot\left[\tilde{V}\right]$$

כלומר:

$$\tilde{I}_1 = \frac{1}{jwL(1-k^2)}(\tilde{V}_1 - k\cdot\tilde{V}_2)$$
$$\tilde{I}_2 = \frac{1}{jwL(1-k^2)}(-k\cdot\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2)$$

נרשום משוואת זרמים עבור צומת 1:

$$\tilde{I}_{R1} + \tilde{I}_{C1} + \tilde{I}_1 = \tilde{I}_S$$

$$\frac{\tilde{V}_1}{R} + jwC\tilde{V}_1 + \frac{1}{jwL(1-k^2)}(\tilde{V}_1 - k\tilde{V}_2) = \tilde{I}_S$$

$$\left[\frac{1}{R} + jwC + \frac{1}{jwL\left(1-K^2\right)}\right]\tilde{V}_1 - \frac{K}{jwL\left(1-K^2\right)}\tilde{V}_2 = \tilde{I}_S \qquad \text{(A)}$$

כנ״ל עבור צומת 2:

$$\tilde{I}_{R1} + \tilde{I}_{C2} + \tilde{I}_2 = 0$$
$$\left(jwC + \frac{1}{R}\right)\tilde{V}_2 + \frac{-K\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2}{jwL\left(1-K^2\right)} = 0$$

$$\frac{-K}{jwL\left(1-K^2\right)}\tilde{V}_1 + \left[\frac{1}{R} + jwC + \frac{1}{jwC\left(1-K^2\right)}\right]\tilde{V}_2 = 0 \qquad \text{(B)}$$

נחבר את המשוואות:

$$\left[\frac{1}{R} + jw + \frac{1}{jwL\left(1-K^2\right)}\right]\left(\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2\right) - \frac{K}{jwL\left(1-K^2\right)}\left(\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2\right) = \tilde{I}_S \qquad \text{(A) + (B)}$$

נפשט ונחלק ב- 2 את שני הצדדים:

$$(1)\qquad \left[\frac{1}{R}+jwC+\frac{1}{jwL(1+K)}\right]\left(\frac{\tilde{V}_1+\tilde{V}_2}{2}\right)=\frac{\tilde{I}_S}{2}$$

כעת נחסר את המשוואות:

$$(A)\quad (B)\qquad \left[\frac{1}{R}+jwC+\frac{1}{jwL(1-K^2)}\right](\tilde{V}_1-\tilde{V}_2)+\frac{K}{jwL(1-K^2)}(\tilde{V}_1-\tilde{V}_2)=\tilde{I}_S$$

נפשט ונחלק ב- 2 את שני הצדדים:

$$(2)\qquad \left[\frac{1}{R}+jwC+\frac{1}{jwL(1-k)}\right]\frac{(\tilde{V}_1-\tilde{V}_2)}{2}=\frac{\tilde{I}_S}{2}$$

נציב ב - (1), (2) את הסימונים הבאים:

$$\tilde{V}^+=\frac{\tilde{V}_1+\tilde{V}_2}{2}\quad,\quad w_+^{\ 2}=\frac{1}{LC(1+k)}\quad,\quad Q_+=w_+CR$$

$$\tilde{V}^-=\frac{\tilde{V}_1-\tilde{V}_2}{2}\quad,\quad w_-^{\ 2}=\frac{1}{LC(1-k)}\quad,\quad Q_-=w_-CR$$

$$(w_+<w_-)$$

ונקבל את המשוואות הבאות:

$$(1)\qquad \tilde{V}^+=\frac{1}{2}\tilde{I}_SR\frac{1}{1+jQ_+\left(\frac{w}{w_+}-\frac{w_+}{w}\right)}$$

$$(2)\qquad \tilde{V}^-=\frac{1}{2}\tilde{I}_SR\frac{1}{1+jQ_-\left(\frac{w}{w_-}-\frac{w_-}{w}\right)}$$

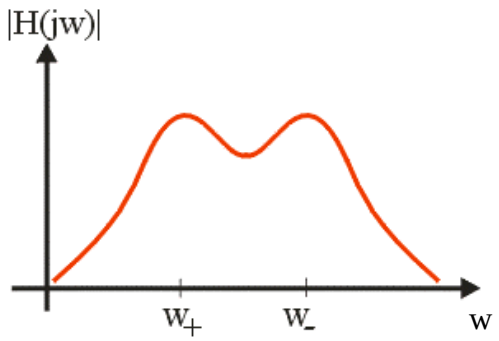
רואים ששתי המשוואות (1) , (2) תואמות בצורתן מעגל תהודה מסדר שני (פרק 7). זה מסתדר עם העובדה שהגדרנו מעגל מכוון כפול בתור הצמדה של שני מעגלי תהודה זהים.

מתח המוצא הוא: $\tilde{V}_2=\tilde{V}^+-\tilde{V}^-$

לכן אנו יכולים למצוא את פונקצית המערכת של מעגל מכוון כפול:

$$\frac{\tilde{V}_2}{\tilde{I}_S}=H(jw)=\frac{1}{2}R\left[\frac{1}{1+jQ_+\left(\frac{w}{w_+}-\frac{w_+}{w}\right)}-\frac{1}{1+jQ_-\left(\frac{w}{w_-}-\frac{w_-}{w}\right)}\right]$$

הגרף שלה הוא הבא:

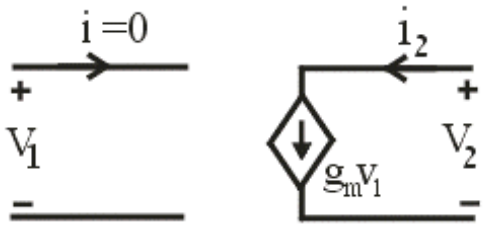


המעגל הנ"ל מאפשר לשלוט על מיקומם של w_-, w_+ ע"י מקדם הצימוד וכך לקבל פונקצית תמסורת בה רוחב תחום התדרים המועברים נשלט. כמובן שלעיתים זו תכונה נחוצה ושימושית, למשל במקלטים, במגברים וכו'.

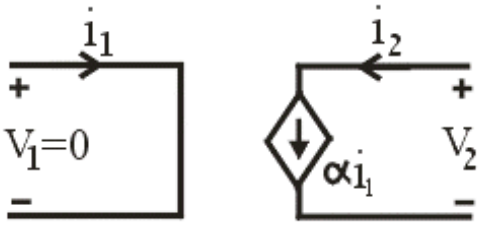
מקורות מבוקרים

בהגדרתו, מקור מבוקר הוא אלמנט בעל שני ענפים, כאשר ענף 2 הוא מקור מתח או זרם וענף 1 הוא רכיב כלשהו (ייתכן גם קצר או נתק).
צורת הגל של המקור בענף 2 היא פונקציה של הזרם בענף 1.
כלומר, המקור בענף 2 מבוקר ע"י הזרם או המתח על ענף 1.

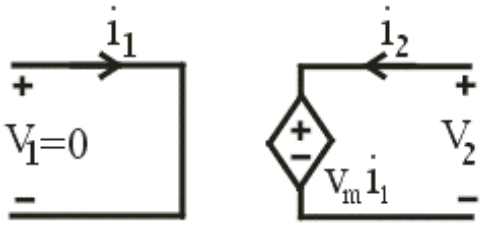
ישנם ארבעה סוגים של מקורות מבוקרים:
מקור זרם מבוקר מתח - כאשר ענף 2 הוא מקור זרם התלוי במתח על פני ענף 1,
מקור זרם מבוקר זרם - כאשר ענף 2 הוא מקור זרם התלוי בזרם על פני ענף 1,
מקור מתח מבוקר זרם - כאשר ענף 2 הוא מקור מתח התלוי בזרם על פני ענף 1,
מקור מתח מבוקר מתח - כאשר ענף 2 הוא מקור מתח התלוי במתח על פני ענף 1.



מקור זרם מבוקר מתח



מקור זרם מבוקר זרם



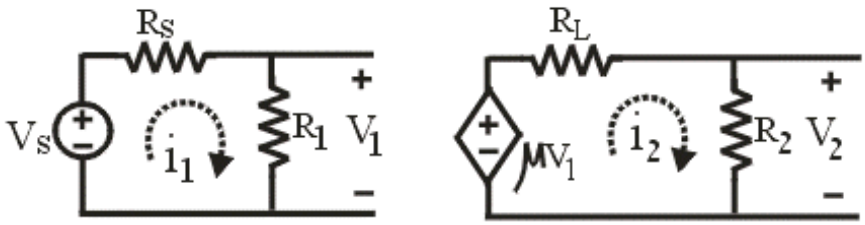
מקור מתח מבוקר זרם

מקור מתח מבוקר מתח

אם α, g_m, μ, v_m הם קבועים בזמן (ראה ציור) הרי שהמקורות הם בלתי תלויים בזמן.
מקורות מבוקרים משמשים לבניית מודלים של רכיבים אלקטרוניים.

דוגמא למקור מתח מבוקר מתח:

מודל של טרנזיסטור FET :



משוואות המתחים בחוגים:

$$(R_1+R_S)i_1=V_S$$
$$(R_2+R_L)i_2=\mu V_1$$

מהן נובע:

$$i_2(R_2+R_L)=\mu V_1=\mu i_1 R_1=\mu\frac{R_1}{R_1+R_S}V_S$$

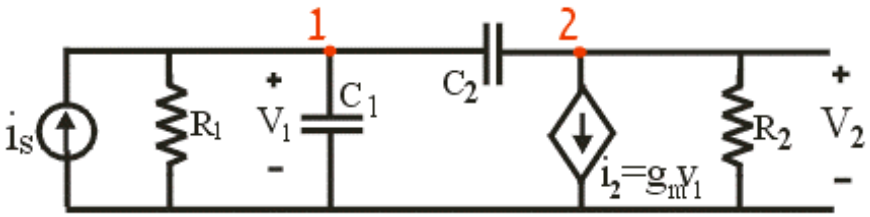
$$i_2=\frac{\mu R_1 V_S}{(R_1+R_S)(R_2+R_L)}$$

$$V_2=i_2R_2=\frac{\mu R_1R_2V_S}{(R_1+R_S)(R_2+R_L)}$$

אם נבחר את R_L באופן מותאם ניתן לקבל $V_2>V_S$, כלומר היינו מקבלים מגבר מתח: מכניסים מתח מסוים בכניסה, וביציאה של המעגל מקבלים מתח גבוה יותר.

דוגמא למקור זרם מבוקר מתח:

מודל של טרנזיסטור בתדירויות גבוהות:



משוואות הזרמים בצמתים המסומנים:

$$\frac{V_1}{R_1}+C_1\frac{dV_1}{dt}+C_2\frac{d(V_1-V_2)}{dt}=I_S \qquad (1)$$

$$C_2\frac{d(V_2-V_1)}{dt}+\frac{V_2}{R_2}=-i_2 \qquad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$C_2\frac{d(V_2-V_1)}{dt}+\frac{V_2}{R_2}+g_mV_1=0 \qquad (3)$$

$$\frac{V_1}{R_1}+C_1\frac{dV_1}{dt}+\frac{V_2}{R_2}+g_mV_1=I_S \qquad (1)+(3)$$

ע"י גזירת שני הצדדים:

$$\frac{dV_2}{dt}=-R_2\left[\frac{dV_1}{dt}\left(g_m+\frac{1}{R_1}\right)+C_1\frac{d^2V_1}{dt^2}-\frac{dI_S}{dt}\right]$$

נציב במשוואה (1):

$$\frac{V_1}{R_1}+C_1\frac{dV_1}{dt}+C_2\frac{dV_1}{dt}+C_2R_2\left(g_m+\frac{1}{R_1}\right)\frac{dV_1}{dt}+C_2C_1R_2\frac{d^2V_1}{dt^2}-C_2R_2\frac{dI_S}{dt}=I_S$$

נחלק במקדם של הנגזרת הגבוהה ביותר:

$$\frac{d^2V_1}{dt^2}+\left(\frac{g_m+\frac{1}{R_1}}{C_1}+\frac{1}{C_2R_2}+\frac{1}{C_1R_2}\right)\frac{dV_1}{dt}+\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}V_1=\frac{1}{C_1}\frac{dI_S}{dt}+\frac{1}{C_1C_2R_2}I_S \qquad (4)$$

נתונים ת״ה:

$$V_1(0)=V_1$$
$$V_2(0)=V_2$$

ממשוואה (3) + (1) נקבל את ת״ה על הנגזרת:

$$\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{C_1}\left[I_S(0)-g_mV_1(0)-\frac{V_2(0)}{R_2}-\frac{V_1(0)}{R_1}\right]=$$
$$=\frac{1}{C_1}\left[i_S(0)-g_mV_1-\frac{V_1}{R_1}-\frac{V_2}{R_2}\right]$$

וכעת הגענו למד״ר מסדר שני עם שני ת״ה שנוכל לפתור.

אם I_S הוא עירור סינוסי אז ניתן לרשום:

$$\tilde{V}_1\left(\frac{1}{R_1}+jwC_1+jwC_2\right)-\tilde{V}_2jwC_2=\tilde{I}_S \qquad (1)$$

$$-\tilde{V}_1jwC_1+\tilde{V}_2\left(\frac{1}{R_2}+jwC_2\right)=-g_m\tilde{V}_1 \qquad (2)$$

נרשום את שתי המשוואות יחד בצורה מטריציאלית:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+jwC_1+jwC_2 & -jwC_2\\ -jwC_2+g_m & \frac{1}{R_2}+jwC_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{V}_1\\ \tilde{V}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{I}_S\\ 0\end{pmatrix}$$

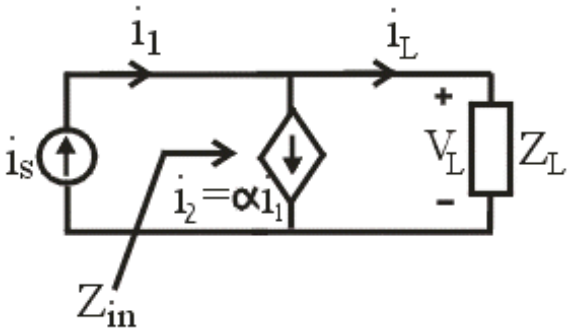
פתרון שתי המשוואות נותן:

$$\tilde{V}_1=\frac{\tilde{I}_S\left(\frac{1}{R_2}+jwC_2\right)}{\left[\frac{1}{R_1}+jw(C_1+C_2)\right]\left[\frac{1}{R_2}+jwC_2\right]+jwC_2(g_m-jwC_2)}=$$

$$= \frac{\tilde{I}_S\left(\frac{1}{R_2} + jwC_2\right)}{\frac{1}{R_1R_2} + jw\left(\frac{C_1 + C_2}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} + C_2 g_m\right) - w^2 C_1 C_2}$$

דוגמא נוספת:

מקור זרם מבוקר זרם:



נתון המעגל שבציור במצב סינוסי עמיד.
מצא את Zin - אימפדנס הכניסה,
כתלות ב - Z_L.

פתרון:
משוואת הזרמים:

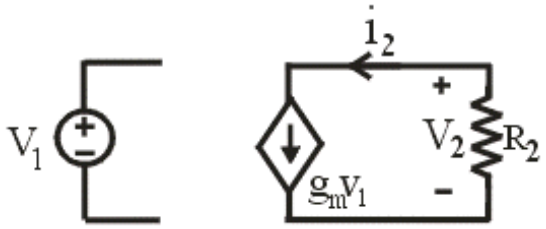
$$I_L = I_1 - I_2 = I_1(1-\alpha)$$

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L}$$

$$Zin = \frac{V}{I_S} = \frac{V_L}{I_1} = \frac{V_L}{I_L}(1-\alpha) = Z_L(1-\alpha)$$

אם למשל $\alpha = 2$, נקבל: $Zin = -Z_L$. כלומר עומס בעל התנגדות שלילית!

<u>הספקים</u>:
תכונה נוספת של מקורות מבוקרים היא הבאה:
מקור מבוקר מהווה אלמנט אקטיבי, כלומר הוא מקור הספק.
נתבונן לדוגמא במקור המבוקר הבא:



ההספק הרגעי הנכנס להתקן הוא:

$$P(t) = i_2(t)V_2(t) = -i_2^{\,2}(t)R_2$$

מכאן רואים, שההספק הרגעי הנכנס להתקן הוא תמיד שלילי. כלומר: בהתקן אין צריכת אנרגיה, להפך: המקור המבוקר מספק לנגד R_2 אנרגיה בכל כמות שצריך. מספיק שנכוון כרצוננו את מתח הכניסה V_1.