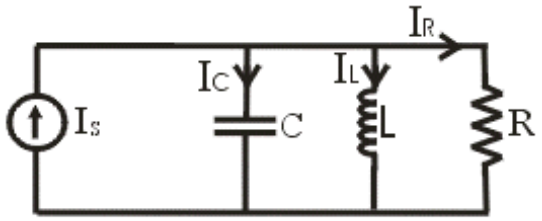
פרק 5: מעגלים מסדר שני

מעגלים מסדר שני הם מעגלים שתגובתם ניתנת לתיאור ע"י משוואה דיפרנציאלית מסדר שני.
כמו במעגלים מסדר ראשון, נפריד את הפתרון לשני חלקים: פתרון ZIR ופתרון ZSR.

נתבונן במעגל הבא:



KVL: $V = V_C = V_L = V_r$

KCL: $i_S = i_C + i_L + i_r$

נרשום את הקשרים הבאים:

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt} \qquad i_L = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t V_L dt' \qquad i_r = \frac{V_r}{R}$$

ונציב במשוואת הזרמים:

$$C\frac{dV}{dt} + i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t V dt + \frac{V}{R} = i_S$$

פתרון ה - ZIR

נתחיל בפתרון ה - ZIR . עבורו העירור הוא אפס, כלומר: $i_S = 0$. לכן המד"ר שצריך לפתור היא:

$$C\frac{dV}{dt} + i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t V dt + \frac{V}{R} = 0$$

או המד"ר הבאה שמתקבלת מגזירת המד"ר שלעיל ויותר נוחה לנו מבחינת ההצגה:

$$C\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} + \frac{1}{L}V = 0$$

$$LCV'' + \frac{L}{R}V' + V = 0$$

וכאמור קיבלנו משוואה דיפרנציאלית מסדר שני המתארת את תגובת המתח במעגל.
אפשרות אחרת היא לרשום משוואה המתארת את תגובת הזרם i_L:

נרשום את הקשרים הבאים:

$$i_C = C\frac{dV}{dt} = CL\frac{d^2 i_L}{dt^2} \qquad i_r = \frac{V}{r} = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}$$

$$V = L\frac{di_L}{dt}$$

וכעת נציב אותם במשוואת הזרמים ונאפס את המקור: $CLi_L'' + \frac{L}{R}i_L' + i_L = i_S = 0$

נתונים גם שני תנאי התחלה: $i_L(0) = I_0$; $L\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = V(0) = V_0$.

אם כן, קיבלנו את המשוואה הדיפרנציאלית מסדר שני: $I_L'' + \frac{1}{RC}i_L' + \frac{1}{LC}i_L = 0$, בנוסף לת"ה הרשומים מעלה.
כאשר המד"ר מוצגת בצורה זו שבה מקדם הנגזרת השנייה של הפונקציה הוא 1, נהוג להגדיר: 2α - מקדם הנגזרת הראשונה, w_0^2 - מקדם הפונקציה עצמה.

ל- w_0 קוראים תדר התהודה של המעגל, ובמקרה שלנו: $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

ל- α קוראים קבוע הדעיכה של המעגל, ובמקרה שלנו: $\alpha = \frac{1}{2RC}$.

בהמשך נדון במשמעות שני הגדלים הנ"ל.

תוך שימוש בהגדרה שלעיל נקבל: $i_L'' + 2\alpha i_L' + w_0^2 i_L = 0$

כמו בפתרון מעגלים מסדר ראשון, נציב לניסיון את הפתרון $i_L = Ae^{st}$:

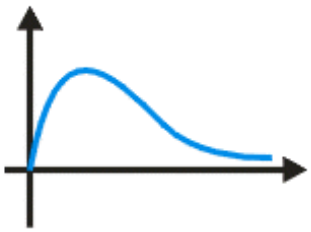
ונקבל: $\left(S^2 + 2\alpha S + w_0^2\right)Ae^{St} = 0$

$$\boxed{S^2 + 2\alpha S + w_0^2 = 0}$$

וזוהי <u>המשוואה האופיינית</u> של המעגל.

למשוואה זו שני פתרונות אפשריים: $S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - w_0^2}$

בהנחה ש: $0 \le L,R,C$ ישנן 3 אפשרויות לאופי הפתרון:



א. $\alpha > w_0 \quad \leftarrow \quad S_1, S_2$ הם שני שורשים ממשיים ושליליים.

הפתרון הוא: $i_L(t) = A_1 e^{S_1 t} + A_2 e^{S_2 t}$

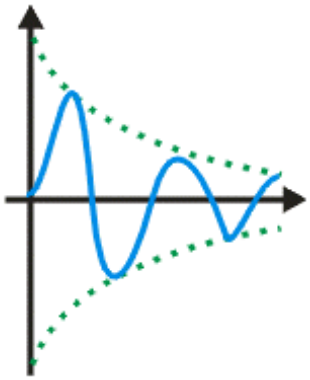
פתרון זה נקרא <u>פתרון בריסון יתר</u>.
משמאל מוצגת התנהגות הפתרון כפונקציה של הזמן.
ריסון היתר מתייחס לעובדה כי הפתרון דועך בצורה מונוטונית.

ב. $\alpha = w_0 \quad \leftarrow \quad S_1 = S_2 = -\alpha$ והפתרון הוא:

$$i_L(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$$

פתרון זה נקרא <u>פתרון בריסון קריטי</u>.
התנהגותו בזמן דומה לזו של ריסון היתר.

ג. $\alpha < w_0 \quad \leftarrow \quad S_1, S_2$ הם שורשים מרוכבים צמודים: $S_1 = -\alpha + jw_d$, $S_2 = -\alpha - jw_d$



כאשר סימנו: $w_d = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2}$

הפתרון במקרה זה הוא:

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= A_1 \exp[(-\alpha + jw_d)t] + A_2 \exp[(-\alpha - jw_d)t] = \\
&= \exp[-\alpha t](A_1 \exp[jw_d t] + A_2 \exp[-jw_d t]) = \\
&= \exp[-\alpha t]((A_1 + A_2)\cos w_d t + j(A_1 - A_2)\sin w_d t) = \\
&= \exp[-\alpha t](B \cdot \cos w_d t + C \cdot \sin w_d t) = \\
&= K \cdot \exp[-\alpha t]\cos(w_d t + \phi)
\end{aligned}$$

המקדמים A_1, A_2 קומפלקסים ובעקבות ת.ה. ממשיים מתקבל גם פתרון ממשי.

פתרון זה נקרא <u>פתרון בתת ריסון</u>. התנהגותו בזמן מוצגת משמאל.
ההתנדנדויות המופיעות בגרף קשורות בעובדה שאנו תת ריסון.

<u>הכנסת תנאי התחלה</u>

כאמור ישנם שני תנאי התחלה $i_L(0)=I_0$ $\qquad L\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0}=V_0(0)=V_0$

הבעיה כעת היא מציאת A_1, A_2 מתוך I_0 ו- V_0.

א. עבור ריסון יתר:

$$i_L(t)=A_1e^{S_1t}+A_2e^{S_2t}$$

ת"ה ראשון:

נציב t=0 : $\quad I)\quad A_1+A_2=I_0$

ת"ה שני:

$$V(0)=L\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0}=LA_1S_1e^{S_1t}\Big|_{t=0}+LA_2S_2e^{S_2t}\Big|_{t=0}$$

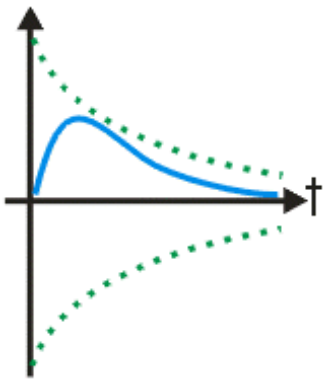
נשווה ל- V_0 : $\quad II)\quad V_0=LS_1A_1+LS_2A_2$

פתרון מערכת המשוואות I+II מוביל ל $\quad A_1=\frac{V_0-LS_2I_0}{L(S_1-S_2)}\quad ;\quad A_2=\frac{I_0LS_1-V_0}{L(S_1-S_2)}$

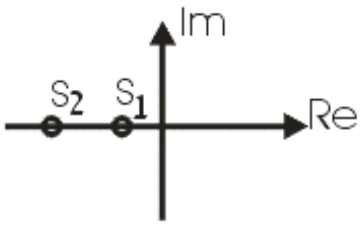
נציב את המקדמים לקבלת הפתרון עבור i_L:

$$i_L(t)=\frac{-I_0}{S_1-S_2}\left(S_2e^{S_1t}-S_1e^{S_2t}\right)+\frac{V_0}{L(S_1-S_2)}\left(e^{S_1t}-e^{S_2t}\right)$$

שרטוט הפתרון כפונקציה של הזמן מוראה משמאל:



נהוג לציין את מיקום השורשים במישור המרוכב בו ציר x הינו החלק הממשי וציר y הינו החלק המדומה של השורש.
עבור ריסון יתר, מיקום שורשי המשוואה האופיינית על פני המישור המרוכב:



ב. עבור ריסון קריטי: $\quad i_L(t)=(A_1+A_2t)e^{-\alpha t}$

$$S_1=S_2=-\alpha$$

ת"ה ראשון:

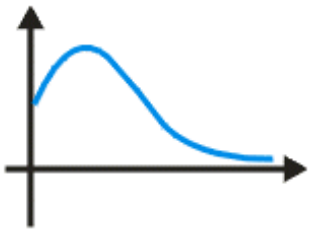
$$\text{I)}\quad I_0 = A_1$$

ת"ה שני:

$$\text{II)}\quad \frac{Ldi_L}{dt}\Big|_{t=0} = LA_2e^{-\alpha t}\Big|_{t=0} + L(-\alpha)(A_1 + A_2t)e^{-\alpha t}\Big|_{t=0} = L(A_2 - \alpha A_1) = V_0$$

פתרון מערכת המשוואות I+II מוביל למקדמים הבאים:

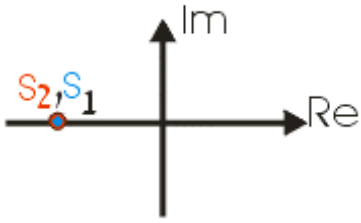
$$\begin{cases} A_1 = I_0 \\ A_2 = \dfrac{V_0}{L} + \alpha I_0 \end{cases}$$



נציב את המקדמים בפתרון:

$$i_L(t) = \left(I_0 + \left(\frac{V_0}{L} + \alpha I_0\right)t\right)e^{-\alpha t}$$

מיקום שורשי המשוואה האופיינית על פני המישור המרוכב:



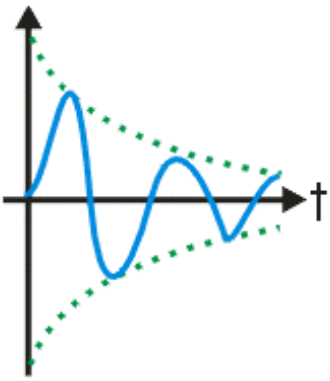
ג. עבור תת ריסון:

$$i_L(t) = A_1e^{S_1t} + A_2e^{S_2t}$$

$$S_{1,2} = -\alpha \pm iw_d$$

$$\Downarrow$$

$$S_2 - S_1 = +2jw_d$$



ת"ה ראשון:

$$\text{I)}\quad A_1 + A_2 = I_0$$

ת"ה שני:

$$\text{II)}\quad \frac{Ldi_L}{dt}\Big|_{t=0} = L(-\alpha + jw_d)A_1 + L(-\alpha - jw_d)A_2 = V_0$$

פתרון מערכת המשוואות I+II מוביל למקדמים הבאים:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{I_0L(\alpha + jw_d) + V_0}{2Ljw_d} \\ A_2 = \dfrac{I_0L(-\alpha + jw_d) - V_0}{2Ljw_d} \end{cases}$$

נציב את המקדמים בפתרון:

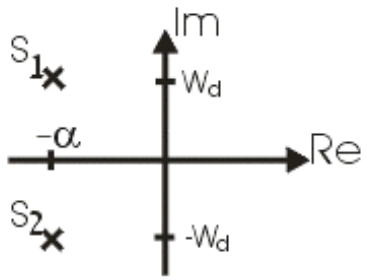
$$i_L(t)=\frac{I_0L(\alpha+jw_d)+V_0}{2Ljw_d}\exp[(-\alpha+jw_d)t]+\frac{I_0L(-\alpha+jw_d)-V_0}{2Ljw_d}\exp[(-\alpha-jw_d)t]=$$

$$=-\frac{I_0}{2jw_d}e^{-\alpha t}\left((-\alpha-jw_d)e^{jw_dt}-(-\alpha+jw_d)^{-jw_dt}\right)+\frac{V_0}{2jLw_d}e^{-\alpha t}\left(e^{jw_d}-e^{-jw_dt}\right)=$$

$$=\frac{I_0}{w_d}e^{-\alpha t}\left(\alpha\sin(w_dt)+w_d\cos(w_dt)\right)+\frac{V_0}{Lw_d}e^{-\alpha t}\sin w_dt$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו בזהויות: $\sin x=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$, $\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$.

מיקום שורשי המשוואה האופיינית על פני המישור המרוכב:



<u>מקדם איכות:</u>

נחזור להצגה הבאה של המד"ר: $i_L''+2\alpha i_L'+w_0^2i_L=0$.

נהוג לסמן: $Q=\frac{w_0}{2\alpha}$. הגורם Q נקרא <u>מקדם האיכות</u> של המערכת.

ניתן לרשום את פתרונות המד"ר בעזרת Q: $S_{1,2}=w_0\left(-\frac{1}{2Q}\pm\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}\right)$

צריך לשים לב ש: $0\le Q\le\infty$.

עבור $Q<\frac{1}{2}$ אנו בריסון יתר.

עבור $Q=\frac{1}{2}$ אנו בריסון קריטי.

עבור $Q>\frac{1}{2}$ אנו בתת ריסון.

עבור המקרה של תת ריסון $\left(Q>\frac{1}{2}\right)$ ניתן לתת את המשמעות הפיזיקלית הבאה:

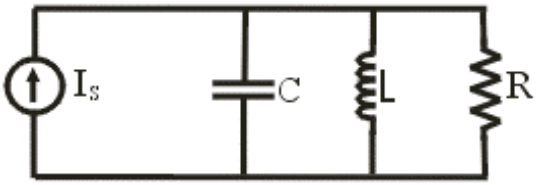
תחת הקירוב: $w_d \approx w_0$ [$1 << Q \Rightarrow 2\alpha << w_0 \Rightarrow w_d = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2} \approx w_0$] מתקיים:

w_0 נותן מידע על תדר התנדנדות המערכת (הקו הכחול בציור של מקרה ג' בעמוד הקודם), ו- α נותן מידע על קצב דעיכת המעטפת (הקו הירוק בציור של מקרה ג' בעמוד הקודם).
לכן במקרה זה:

$$Q = \frac{w_0}{2\alpha} = \frac{\text{תדר התנדנדות}}{\text{קצב דעיכה}} = \frac{\text{זמן דעיכה}}{\text{זמן מחזור}}$$

פתרון ה - ZSR

נעבור כעת לפתרון ה ZSR, כאשר הכניסה למעגל היא כניסת מדרגה: $i_s(t) = u(t)$.
ניזכר שוב במעגל אותו אנו פותרים:



כרגיל בתגובת ZSR, המצב ההתחלתי הוא אפס:

$$i_L(0^-) = 0 \;; \qquad V(0^-) = L\frac{di_L}{dt}(t = 0^-) = 0$$

והמשוואה הדיפרנציאלית היא:

$$LC\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i_S = u(t)$$

הפתרון הוא סכום של פתרון פרטי ופתרון המשוואה ההומוגנית: $i_L = i_h + i_p$.

הפתרון הפרטי (לאחר ניחוש קבוע והצבה במד"ר) עבור $t>0$: $i_p = 1$.

הפתרון ההומוגני - ראינו קודם שמתקיים: $i_h = A_1 e^{S_1 t} + A_2 e^{S_2 t} = Ae^{-\alpha t}\cos(w_d t + \phi)$

עבור ריסון יתר — עבור תת ריסון

לכן פתרון ה ZSR הכולל הוא סכום שני הפתרונות: $i_L = \left(A_1 e^{S_1 t} + A_2 e^{S_2 t} + 1\right)u(t)$.

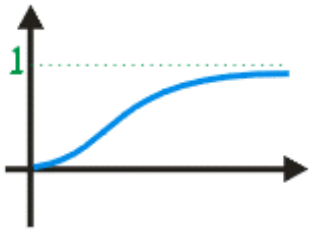
כעת נשתמש בתנאי ההתחלה כדי למצוא את המקדמים:
עבור התנאי $i_L(0^-) = 0$ נקבל: $A_1 + A_2 + 1 = 0$.

עבור התנאי $V(0^-) = 0$ נקבל: $A_1 S_1 + A_2 S_2 = 0$.

מפתרון שתי המשוואות נקבל: $A_1 = \frac{S_2}{S_1 - S_2} \;;\; A_2 = \frac{-S_1}{S_1 - S_2}$.

נציב חזרה את המקדמים בפתרון:

$$i_L(t) = \left[\frac{1}{S_1 - S_2}\left(S_2 e^{S_1 t} - S_1 e^{S_2 t}\right) + 1\right]u(t)$$



וזהו הפתרון עבור ריסון יתר.

השורשים במקרה של תת ריסון הם: $S_{1,2} = -\alpha \pm jw_d$ ולכן הפתרון הוא:

$$i_L(t) = \left\{ \frac{e^{-\alpha t}}{2jw_d} \left[(-\alpha - jw_d)e^{jw_d t} - (-\alpha + jw_d)e^{-jw_d t} \right] + 1 \right\} u(t)$$

$$i_L(t) = \left\{ \frac{e^{-\alpha t}}{2jw_d} \left[-\alpha 2j\sin(w_d t) - (jw_d)2\cos(w_d t) \right] + 1 \right\} u(t)$$

$$i_L(t) = \left\{ -\frac{e^{-\alpha t}}{w_d} \left[w_d \cos(w_d t) + \alpha \sin(w_d t) \right] + 1 \right\} u(t)$$

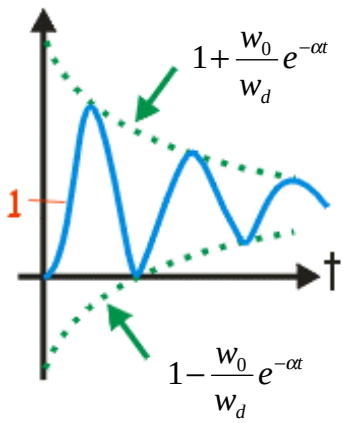
בכדי לשרטט את הפתרון בצורה נוחה יותר, נגדיר φ המקיים:

$$\cos\varphi = \frac{w_d}{\sqrt{w_d^2 + \alpha^2}} = \frac{w_d}{w_0} \quad \Rightarrow \quad = \frac{\alpha}{w_0} \quad \sin\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{w_d^2 + \alpha^2}}$$

ניעזר בזהות: $\cos\varphi \cdot \cos(w_d t) + \sin\varphi \cdot \sin(w_d t) = \cos(w_d t - \varphi)$

ואז נקבל לפי ההגדרה:

$$i_L(t) = \left[-\frac{w_0}{w_d} e^{-\alpha t} \cos(w_d t - \varphi) + 1 \right] u(t)$$



מצאנו, אם כן, את תגובת ה ZSR של הזרם עבור כניסת מדרגה.
כעת נרצה לדעת מהי תגובת המתח על הקבל עבור אותה כניסה.

עבור ריסון יתר:

$$V_C(t) = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{d}{dt}\left\{ \left[\frac{1}{S_1 - S_2}\left(S_2 e^{S_1 t} - S_1 e^{S_2 t}\right) + 1 \right] u(t) \right\} =$$

$$= L\left\{ \frac{S_2 S_1}{S_1 - S_2}\left(e^{S_1 t} - e^{S_2 t}\right) u(t) + \left[\frac{S_2 - S_1}{S_1 - S_2} + 1 \right] \delta(t) \right\} =$$

$$= L\left\{ \frac{S_2 S_1}{S_1 - S_2}\left(e^{S_1 t} - e^{S_2 t}\right) u(t) + [0]\delta(t) \right\} =$$

$$= L\frac{S_2 S_1}{S_1 - S_2}\left(e^{S_1 t} - e^{S_2 t}\right) u(t)$$

עבור תת ריסון:

נציב: $S_{1,2} = -\alpha \pm jw_d \quad , \quad W_d = \sqrt{W_0^{\,2} - \alpha^2}$

$$S_1S_2 = \alpha^2 + w_d^{\,2} = \alpha^2 + w_0^{\,2} - \alpha^2 = w_0^{\,2} \quad , \quad S_1 - S_2 = +2jw_d$$

ונקבל:

$$V_C(t) = L\frac{w_0^{\,2}}{(+2jw_d)}e^{-\alpha t}\left(e^{jw_dt} - e^{-jw_dt}\right) = L\frac{w_0^{\,2}}{w_d}e^{-\alpha t}\sin(w_dt)u(t)$$

נבדוק האם אותה תוצאה מתקבלת כאשר גוזרים ישירות את התוצאה שהתקבלה עבור הזרם במקרה של תת ריסון:

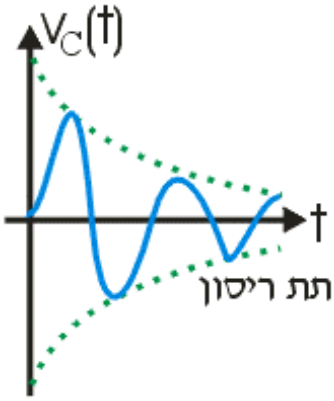
$$i_L(t) = \left[-\frac{w_0}{w_d}e^{-\alpha t}\cos(w_dt - \varphi) + 1\right]u(t)$$

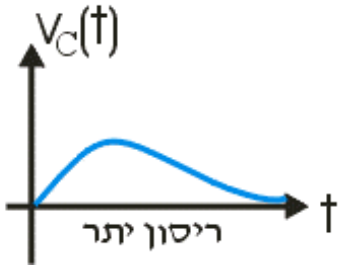
$$V_C(t) = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{w_0}{w_d}\left[\alpha e^{-\alpha t}\cos(w_dt - \varphi) + w_de^{-\alpha t}\sin(w_dt - \varphi)\right]u(t)$$

$$= L\frac{w_0}{w_d}\left[w_0\sin\varphi\cdot e^{-\alpha t}\cos(w_dt - \varphi) + w_0\cos\varphi\cdot e^{-\alpha t}\sin(w_dt - \varphi)\right]u(t) =$$

$$= L\frac{w_0^{\,2}}{w_d}e^{-\alpha t}\sin(w_dt)$$

עבור המתח, קיבלנו בסופו של דבר את צורות הגל הבאות. הן דומות לצורות הזרם, מכיוון שגם הפתרון האנליטי של המתח נראה באותה צורה כמו הפתרון עבור הזרם:





נעבור למציאת תגובת ההלם עבור המתח $V_C(t)$:

עבור ריסון יתר תגובת המדרגה היא: $V_C(t) = L\frac{S_1S_2}{S_1 - S_2}\left(e^{S_1t} - e^{S_2t}\right)u(t)$

נגזור את התגובה למדרגה כדי למצוא את התגובה להלם:

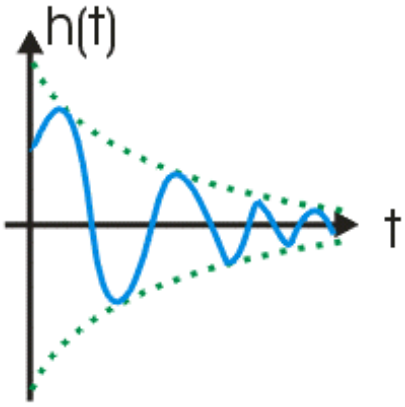
$$h(t) = L\frac{S_1S_2}{S_1 - S_2}\left(S_1e^{S_1t} - S_2e^{S_2t}\right)u(t)$$

עבור תת ריסון תגובת המדרגה היא: $V_C(t) = L\frac{w_0^{\,2}}{w_d}e^{-\alpha t}\sin(w_dt)u(t)$

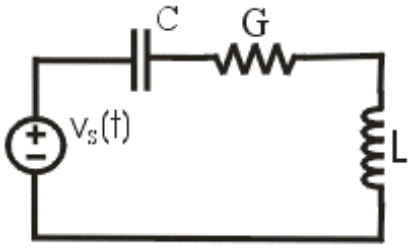
שוב נגזור את התגובה למדרגה כדי למצוא את התגובה להלם:

$$h(t) = L\frac{w_0^{\,2}}{w_d}\left[-\alpha\sin w_dt + w_d\cos(w_dt)\right]e^{-\alpha t}u(t) = L\frac{w_0^{\,3}}{w_d}\cos(w_dt + \varphi)e^{-\alpha t}u(t)$$

כאשר בשוויון השני השתמשנו בהגדרת φ שהוזכרה מעלה.



<u>מעגל RLC טורי מול מקבילי עקרון הדואליות</u>



נתבונן במעגל הטורי הבא:

$$\text{KVL} \qquad V_S = V_G + V_C + V_L$$
$$\text{KCL} \qquad i_G = i_C = i_L$$

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt} \qquad i_L = I_0 + \frac{1}{L}\int V_L dt \qquad i_G = GV_G$$

נזכיר ש: $G = \frac{1}{R}$ היא מוליכות.

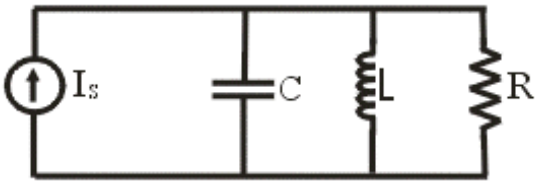
בהינתן V_C מתקיים:

$$V_G = \frac{i}{G} = \frac{C}{G}\frac{dV_C}{dt} \quad ; \quad V_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2V_C}{dt^2}$$

נרשום משוואה עבור V_C לפי KVL:

$$LC\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{C}{G}\frac{dV_C}{dt} + V_C = V_S \; ; \quad \left.\frac{CdV_0}{dt}\right|_{t=0} = I_0, \quad V_C(0) = V_0$$

כזכור עבור מעגל RLC מקבילי קיבלנו:



$$CL\frac{d^2I_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dI_C}{dt} + i_L = i_S(t) \qquad i_L(0) = I_0 \quad ; \quad \left.\frac{Ldi_L}{dt}\right|_{t=0} = V_0$$

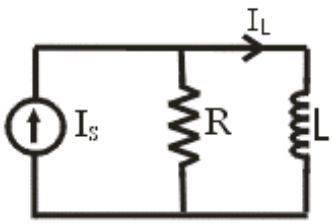
ניתן לראות כי הן המשוואות והן תנאי ההתחלה זהים במבנה שלהם. לכן תוך שימוש בדואליות הבאה ניתן לנתח מעגל אחד מתוך השני:

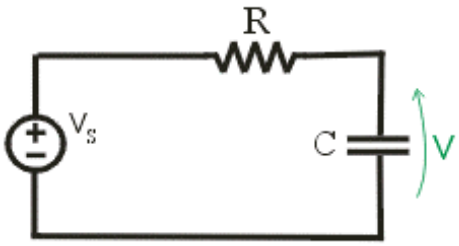
טורי	מקבילי
זרם	מתח
מקור זרם	מקור מתח
C	L
$G=\frac{1}{R}$	R
KCL	KVL
עניבה (חוג)	צומת
קצר	נתק

במילים אחרות: מתח על קבל $\leftrightarrow$ זרם על סליל.
ניתן לראות שאם ניקח את הפתרון עבור המעגל המקבילי ונחליף בו את הגורמים המתאימים לפי הטבלה, נקבל בדיוק את הפתרון למעגל הטורי שהתקבל ע"י חישוב.

דוגמאות נוספות לדואליות:

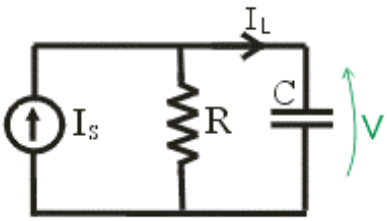
.1



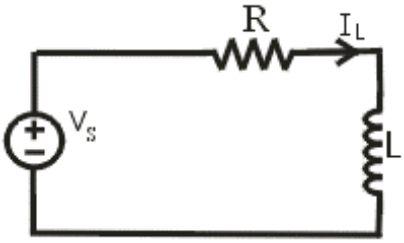


$$\frac{V}{dt}+V=V_s$$

.2

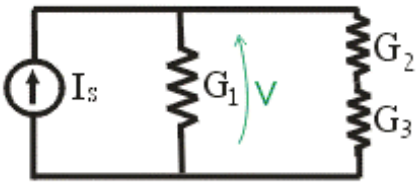


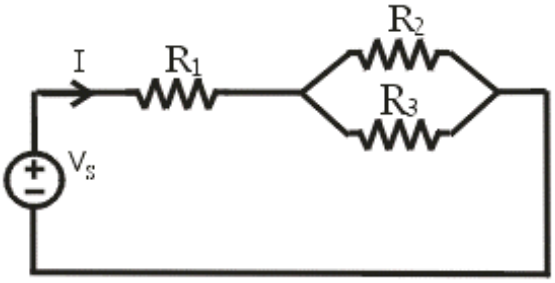
$$\frac{V_C}{R}+C\frac{dV}{dt}=I_S$$



$$Ri_L+L\frac{di_L}{dt}=V_S$$

.3



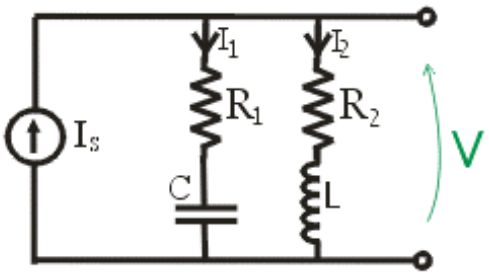


$$I=\frac{V_S}{R_1+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}}=V_S\cdot\frac{R_2+R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

$$V=I_S\cdot\frac{1}{G_1+\frac{G_2G_3}{G_2+G_3}}=$$

$$=I_S\cdot\frac{G_2+G_3}{G_1G_2+G_1G_3+G_2G_3}$$

<u>דוגמא לפתרון ZSR של מעגל מסדר שני:</u>



מהו המתח V כתגובה לכניסת מדרגה?
תנאי ההתחלה הם אפס:

$$i_2(0)=0\ ;\ \frac{di_2(t)}{dt}\Big|(t=0)=0$$

פתרון:
נתחיל במציאת המד"ר עבור הזרם:

מתקיים: $i_S=i_1+i_2$

המתח על הענף השמאלי: $V=i_1R_1+V_0+\frac{1}{C}\int i_1dt'$

המתח על הענף הימני: $V=i_2R_2+L\frac{di_2}{dt}$

לכן מתקיים השוויון: $i_2R_2+L\frac{di_2}{dt}=i_1R_1+V_0+\frac{1}{C}\int i_1dt'$

נגזור את השוויון: $R_2\frac{di_2}{dt}+L\frac{d^2i_2}{dt^2}=R_1\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C}i_1$

נציב: $i_1=i_S-i_2$

נקבל: $L\frac{d^2i_2}{dt^2}+(R_1+R_2)\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C}i_2=R_1\frac{di_S}{dt}+\frac{i_S}{C}$

נציב: $i_S=u(t)$ ונקבל את המד"ר:

$$\boxed{Li_2''+(R_1+R_2)i_2'+\frac{1}{C}i_2=R_1\delta(t)+\frac{1}{C}u(t)}$$

פתרון ישיר למד"ר זו עלול להיות מורכב. מטעמי נוחות, אנו נפתור ראשית עבור אגף ימין הבא: $\frac{1}{C}u(t)$.

המד"ר שתתקבל: $Li_2''+(R_1+R_2)i_2'+\frac{1}{C}i_2=\frac{1}{C}u(t)$

$$i_2'' + \frac{1}{L}(R_1 + R_2)i_2' + \frac{1}{LC}i_2 = \frac{1}{LC}u(t)$$

לפי ההגדרה: $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{2L}$ $\qquad$ $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

נתחיל במקרה של תת ריסון וריסון יתר.
הפתרון ההומוגני:

שורשי המשוואה ההומוגנית הם: $S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - w_0^{\,2}}$ ולכן: $i_h = k_1 e^{S_1 t} + k_2 e^{S_2 t}$

הפתרון הפרטי: $i_p = 1$.

לכן סה"כ הפתרון הוא: $i_2 = 1 + k_1 e^{S_1 t} + k_2 e^{S_2 t}$.

נציב ת.ה. אפס: $k_1 + k_2 + 1 = 0$

$$\left.\frac{di_2}{dt}\right|_0 = k_1 S_1 + k_2 S_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -\frac{S_1}{S_2}k_1$$

$$k_1\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) + 1 = 0$$

$$k_1 = \frac{1}{\frac{S_1}{S_2} - 1} = \frac{S_2}{S_1 - S_2}$$

$$k_2 = \frac{S_1}{S_2 - S_1}$$

נציב את המקדמים: $i_2 = 1 + \frac{S_2 e^{S_1 t}}{S_1 - S_2} + \frac{S_1 e^{S_2 t}}{S_2 - S_1}$

באופן כללי, פתרנו את המשוואה $Ly'' + (R_1 + R_2)y' + \frac{1}{C}y = \frac{1}{C}u(t)$, אבל רצינו לפתור את המשוואה:
$Lx'' + (R_1 + R_2)x' + \frac{1}{C}x = R_1\delta(t) + \frac{1}{C}u(t)$.

מכיוון שהקשר בין אגף ימין של שתי המשוואות הוא:

$$R_1\delta(t) + \frac{1}{C}u(t) = R_1\frac{d\left[C\frac{1}{C}u(t)\right]}{dt} + \frac{1}{C}u(t) = R_1 C\frac{d\left[\frac{1}{C}u(t)\right]}{dt} + \frac{1}{C}u(t)$$

אז מתקיים: $x(t) = R_1 C\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$ כאשר $y(t)$ הוא הפתרון לעירור $\frac{1}{C}u(t)$, ו- $x(t)$ הוא הפתרון לעירור $R_1\delta(t) + \frac{1}{C}u(t)$.

באותו אופן, כדי להגיע לפתרון עבור אגף ימין המקורי, נבצע את אותן פעולות על i_2 שמצאנו:

$$I_2 = i_2 + R_1 C\frac{di_2}{dt} = 1 + \frac{S_2 e^{S_1 t}}{S_1 - S_2} + \frac{S_1 e^{S_2 t}}{S_2 - S_1} + R_1 C\frac{d}{dt}\left[1 + \frac{S_2 e^{S_1 t}}{S_1 - S_2} + \frac{S_1 e^{S_2 t}}{S_2 - S_1}\right] =$$

$$=\left[1+e^{S_1t}\left(\frac{S_2}{S_1-S_2}+\frac{S_1S_2R_1C}{S_1-S_2}\right)+e^{S_2t}\left(\frac{S_1}{S_2-S_1}+\frac{S_1S_2R_1C}{S_2-S_1}\right)\right]u(t)$$

נציב: $S_1S_2=\alpha^2-\left(\alpha^2-w_0{}^2\right)=w_0{}^2=\frac{1}{LC}$

נקבל: $I_2=1+e^{S_1t}\cdot\frac{1}{S_1-S_2}\left[S_2+\frac{R_1C}{LC}\right]+e^{S_2t}\cdot\frac{1}{S_2-S_1}\left[S_1+\frac{R_1C}{LC}\right]u(t)=$

$$=\left[1+e^{S_1t}\cdot\frac{1}{S_1-S_2}\left[S_2+\frac{R_1}{L}\right]+e^{S_2t}\cdot\frac{1}{S_2-S_1}\left[S_1+\frac{R_1}{L}\right]\right]u(t)$$

מצאנו, אם כן, את תגובת הזרם לכניסת מדרגה אבל רצינו למצוא את תגובת המתח. לכן נציב את הפתרון עבור i_2 כדי לקבל את V:

$$V=\frac{LdI_2}{dt}+I_2R_2$$

נחזור על הפתרון עבור המקרה של ריסון קריטי:

$$i_2=k_1e^{St}+k_2te^{St}+1\quad,\quad S=-\alpha=-\frac{R_1+R_2}{2C}$$

$$i_2(0)=0\quad\Rightarrow\quad k_1=-1$$

$$i_2'(0)=0\quad\Rightarrow\quad k_1Se^{St}+k_2e^{St}+k_2Ste^{St}\Big|_0=k_1S+k_2=0\quad\Rightarrow\quad k_2=S$$

ולכן תגובת הזרם (עבור אגף ימין $\frac{1}{C}u(t)$) הינה:

$$i_2=1-e^{St}+Ste^{St}$$

והתגובה הכללית:

$$I_2=i_2+R_1C\frac{di_2}{dt}=1-e^{St}+Ste^{St}+R_1C\left[-Se^{St}+S^2te^{St}+Se^{St}\right]=1-e^{St}+te^{St}\left[S+S^2R_1C\right]$$

$$I_2=\left[1-e^{St}+te^{St}\left(S+S^2R_1C\right)\right]u(t)$$

בריסון קריטי מתקיים:

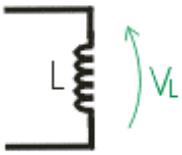
$$S^2=\alpha^2=w_0{}^2\quad\Rightarrow\quad S^2=\frac{1}{LC}=\left(\frac{R_1+R_2}{2L}\right)^2$$

($w_0{}^2$ ↓, α^2 ↓)

ולכן נציב את S^2:

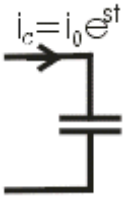
$$I=\left\{1-e^{+St}+te^{St}\left[S+\frac{1}{LC}R_1C\right]\right\}u(t)=\left\{1-e^{+St}+te^{St}\left[S+\frac{R_1}{L}\right]\right\}u(t)$$

תגובה למבוא אקספוננציאלי



נתון זרם: $i_L = i_0 e^{St}$ העובר דרך סליל.

המתח עליו: $V_L = L\frac{di_L}{dt} = LSi_0 e^{St} = LSi_L$



נתון זרם $i_C = i_0 e^{St}$ העובר דרך קבל.

המתח עליו: $V_C = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')dt' = V_0 + \frac{1}{SC}\left(i_0 e^{St} - i_0\right)$

עבור: $V_0 = \frac{i_0}{SC}$ מקבלים: $V_C = \frac{1}{SC} i_C$.

מהתוצאות לעיל ניתן לראות כי עבור סליל וקבל לינאריים שאינם תלויים בזמן, קיים קשר לינארי קבוע בין המתח והזרם, כאשר העירור תלוי בזמן באופן אקספוננציאלי ותנאי ההתחלה מתאימים.

מקדמים לינאריים אלו נקראים **impedance** (אימפדנס) או בעברית עכבה:

העכבה של קבל: $Z_C(S) = \frac{1}{SC}$

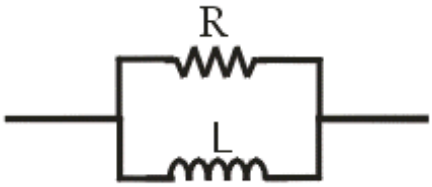
העכבה של סליל: $Z_L(S) = LS$

מתקיים: $V = Z(s)\cdot I$.

אנו רואים שהקשרים זהים לאלה של נגד: $V = R\cdot I$ ונוכל להתייחס לעכבה כאל ההתנגדות של האלמנט.

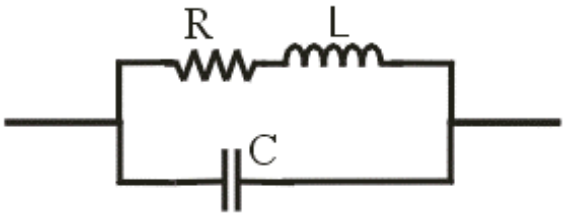
מגדירים גם **admittance** (אדמיטנס): $Y(S) = \frac{1}{Z(S)}$. ניתן להבין מההגדרה שניתן להתייחס לאדמיטנס כאל המוליכות של האלמנט.

אדמיטנסים ואימפדנסים מקיימים את כל חוקי החיבור של הנגד:



$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{LS}$$

$$Z = R + LS + \frac{1}{CS}$$



$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+LS} + SC$$

<u>הכללה:</u>

נתונה רשת של רכיבים לינאריים בלתי תלויים בזמן. נניח פונקצית מבוא אקספוננציאלית: $a(t)=a_0e^{St}$.

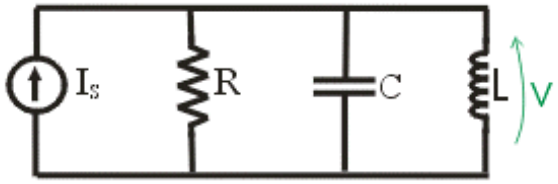
אזי בתנאי התחלה מתאימים יהיה <u>קשר לינארי</u> בין התגובה למבוא.

כלומר, אם $a(t)$ היא פונקצית המבוא, ו - $b(t)$ היא פונקצית המוצא (התגובה), אז יתקיים:

$$b(t)=H(S)\cdot a(t)$$

$H(S)$ מכונה <u>פונקצית הרשת</u>.

<u>דוגמא</u>: מצא את $H(S)$ עבור $i_L(t)$.



נתונה כניסה אקספוננציאלית:

$$I_S=I_0e^{St}$$

פתרון:

נמצא את האדמיטנס השקול:

$$Y=\frac{1}{R}+SC+\frac{1}{LS}$$

$$V=\frac{I_S}{Y}\quad\Rightarrow\quad i_L=V\cdot\frac{1}{LS}=\frac{\frac{1}{LS}}{G+SC+\frac{1}{LS}}I_S$$

כאשר $G=\frac{1}{R}$,

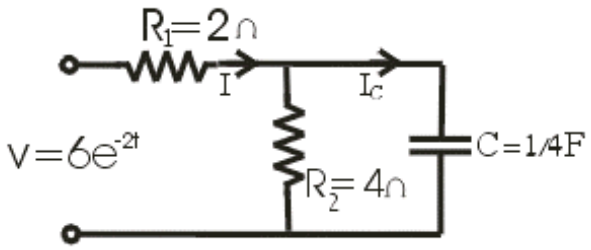
ולכן:

$$H(S)=\frac{I_S}{i_L}=\frac{\frac{1}{LS}}{G+SC+\frac{1}{LS}}=\frac{1}{LGS+S^2LC+1}$$

כלומר: $i_L(t)=I_0\cdot e^{St}\cdot H(S)$.

יש לשים לב שזהו פתרון פרטי בלבד. בכדי לקבל את תגובת ה - ZSR המלאה, צריך למצוא את הפתרון ההומוגני שיקיים את תנאי ההתחלה של תגובת ה ZSR, ולחבר.

<u>דוגמא</u>:



מצא את i_C כאשר:

$$V=6e^{-2t}\quad;\quad S=-2$$

פתרון:

נמצא את אימפדנס הכניסה של המעגל:

$$Z=R_1+\frac{R_2\cdot\frac{1}{SC}}{R_2+\frac{1}{SC}}=R_1+\frac{R_2}{1+SCR_2}=2+\frac{4}{1-2\cdot\frac{1}{4}\cdot 4}=2-4=-2$$

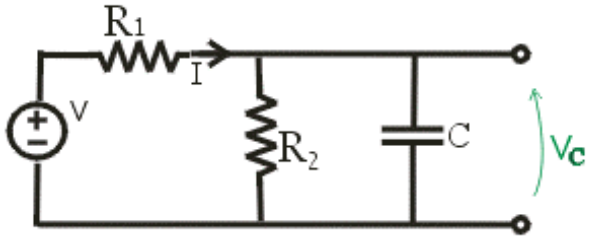
לכן:

$$i(t)=\frac{V}{Z}=\frac{6e^{2t}}{-2}=-3e^{-2t}$$

$$i_C(t)=i(t)\cdot\frac{R_2}{R_2+\frac{1}{SC}}=-3e^{-2t}\cdot\frac{4}{4-\frac{4}{2}}=-6e^{-2t}$$

נשים לב שגם כאן זהו רק הפתרון הפרטי.

הפתרון המלא:



$$i_C=C\frac{dV_C}{dt}\qquad i_{R_2}=\frac{V_C}{R_2}$$

$$V(t)=R_1\left(C\frac{dV_C}{dt}+\frac{V_C}{R_2}\right)+V_C$$

$$R_1CV_C'+\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)V_C=V(t)$$

כאמור מתקיים: $V_C(0)=0\qquad V(t)=6e^{-2t}$

פתרון הומוגני: המשוואה היא: $V_C'+\frac{1+\frac{R_1}{R_2}}{R_1C}V_C=0$

$$(V_C)_h=A\cdot\exp\left\{-\frac{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}{R_1C}t\right\}\Rightarrow(V_C)_h=A\cdot\exp\left\{-\frac{1+\frac{2}{4}}{2\cdot\frac{1}{4}}t\right\}\Rightarrow(V_C)_h=Ae^{-3t}$$

פתרון פרטי:

ננסה את הפתרון הפרטי הבא: $(V_C)_p=Be^{-2t}$ ע"י הצבתו במד"ר:

$$\left[R_1C(-2)+\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\right]Be^{-2t}=6e^{-2t}$$

$$B=\frac{6}{1+\frac{R_1}{R_2}-2R_1C}=12$$

לכן: $(V_C)_p=12e^{-2t}$. כעת נסכם את הפתרונות:

$$V_C(t)=(V_C)_h+(V_C)_p=Ae^{-3t}+12e^{-2t}$$

נציב ת"ה: $V_C(0)=0\Rightarrow A=-12\Rightarrow V_C(t)=12e^{-2t}-12e^{-3t}$

וכדי לקבל את הזרם על הקבל מתוך המתח נגזור ונכפיל בקיבוליות:

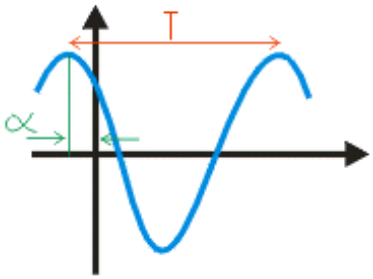
$$i_C(t)=C\frac{dV_C}{dt}=\frac{1}{4}\left[-24e^{-2t}+36e^{-3t}\right]=-6e^{-2t}+9e^{-3t}$$

וזהו הפתרון המלא.

ניתן לראות שהחלק הפרטי בפתרון המלא זהה לחלוטין לזה שנמצא קודם בשיטה המקוצרת.

מתחים וזרמים סינוסואדליים

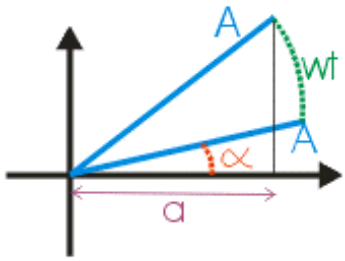
מתח וזרם חילופין הם שמות נרדפים למתח וזרם סינוסואידליים.



באופן כללי, פונקציה סינוסואידלית היא: $a = A\cos(wt+\alpha)$
כאשר:
a - הערך הרגעי של הפונקציה
A - הערך המקסימלי שהפונקציה מקבלת
w - תדירות מעגלית
α - פאזת (מופע) האות

שני גדלים נוספים הם:
T הזמן שלוקח לפונקציה להשלים מחזור אחד [sec]
f מס' המחזורים שעוברת הפונקציה בשניה אחת [Hz]

ומתקיימים הקשרים: $T = \frac{1}{f}$ $\quad f = \frac{w}{2\pi}$

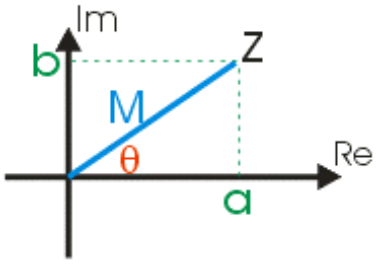


ניתן לפרש את משמעות הגדלים גם כך:

אם יש רדיוס באורך A שנע בתדר מעגלי w נגד כיוון השעון,
אזי ההיטל על הציר האופקי בכל רגע נותן את a.

אם ננסה לחבר ולכפול פונקציות סינוסואידליות בהצגה זו, צפויה לנו עבודה מייגעת.
לצורך זה נלמד כעת הצגה שונה לפונקציות אילו.

תזכורת: מספרים מרכובים



Z הוא מספר מרכוב: $j=\sqrt{-1}\ ;\ Z = a + jb = Me^{j\theta}$
כאשר: a הוא החלק הממשי ו b הוא החלק המדומה.
במישור המרוכב הציר האופקי ממשי, והציר הניצב מדומה (ראה ציור).
הקשר בין שתי ההצגות השונות של Z הוא הבא:

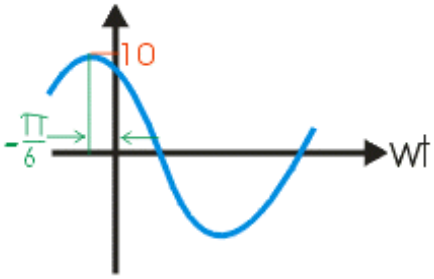
$$M = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

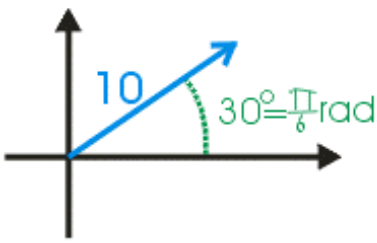
אם ניתן לרדיוס M לנוע בתדירות מעגלית w: $Z = Me^{j(wt+\theta)}$ נקבל שהחלק הממשי של Z הוא בדיוק כמו הסיגנל הסינוסואידלי: $a = Real\{Z\} = M\cos(wt+\theta)$

בחזרה למתח חילופין:
את המתח הסינוסואידלי $V(t) = V\cos(wt+\alpha)$ ניתן לרישום כ: $V(t) = Re\{Ve^{j(wt+\alpha)}\}$
הגודל $Ve^{j\alpha}$ נקרא **פאזור**, ונהוג לסמנו ב- $\tilde{V}$, ואז: $V(t) = Re\{\tilde{V}e^{jwt}\}$.
הפאזור נוח בעיקר לביצוע ארבעת פעולות החשבון הבסיסיות במספרים מרוכבים.

דוגמא:

$$i = 10\cos\left(wt+\frac{\pi}{6}\right) = Re\left\{10e^{j\frac{\pi}{6}}e^{jwt}\right\}$$

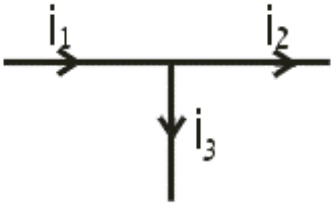




הערה: אם נתונה פונקצית sin ורוצים להפוך אותה ל cos לצורך ההצגה הפאזורית:

$$i = 20\sin\left(wt+\frac{\pi}{6}\right) = 20\cos\left(wt+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right) = 20\cos\left(wt-\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{Re}\left\{20e^{-j\frac{1}{3}}e^{jwt}\right\}$$

<u>דוגמא</u>:



נתון: $i_2 = 2\cos\left(wt-\frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad \tilde{I}_1 = 3-4j$

ורוצים למצוא את i_3.

פתרון: $i_3 = i_1 - i_2$

הפאזור $\rightarrow$ $\tilde{I}_2 = 2e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0-2j$

$$\tilde{I}_3 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2 = (3-4j)-(0-2j) = 3-2j = \sqrt{9+4}\cdot tg^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) = 3.6\angle -33.7^\circ$$

מהפאזור של i_3 אנו יודעים את i_3: $\quad i_3(t) = 3.6\cos(wt-33.7^\circ)$

<u>דוגמא</u>:

מצא את המכפלה $V = Z\cdot I$ עבור $Z = 7.07\angle -45^\circ$, $I = 10\angle 90^\circ$.

פתרון:

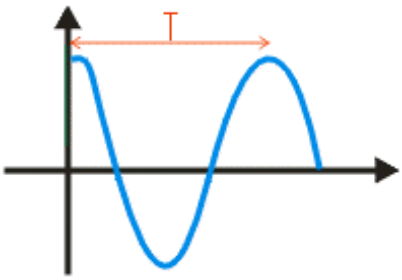
$$V = Z\cdot I = (5-5j)(0+10j) = 50+50j = 70.7\angle 45 \quad \Leftarrow \quad I = 0+10j \ , \ Z = 5-5j$$

כפל של שני פאזורים באופן כללי: $\quad V_1\angle\alpha \ , \ V_2\angle\beta$

$$V_3\angle\gamma = V_1\angle\alpha\cdot V_2\angle\beta = V_1V_2\angle\alpha+\beta$$

לכן יכולנו גם לחשב ישירות ש: $V = 10\cdot 7.07\angle 90-45 = 70.7\angle 45$.

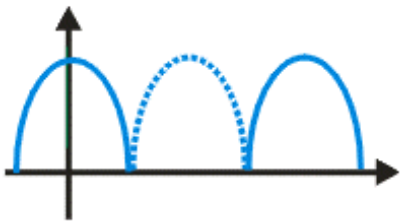
<u>ערך ממוצע</u> של פונקציה סינוסואידלית:



$$I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} i(t')dt' = 0$$

(אינטגרל על סינוס על פני מחזור שלם הוא תמיד אפס.)

עבור מתח מיושר (ערך מוחלט על גל הסינוס):



$$I_{av} = \frac{1}{T/2}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A\cos(wt)dt = \frac{2A}{T}\frac{\sin wt}{w}\Big|_{-T/4}^{T/4}$$

נשתמש בעובדה ש: $w = \frac{2\pi}{T}$

ונקבל: $I_{av} = \frac{2A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot 2\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right) = \frac{2A}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = 0.636A$

כלומר: הערך הממוצע עבור מתח מיושר הוא 0.636 הערך המקסימלי של הגל הסינוסואידלי.

<u>ערך אפקטיבי</u> קשור ביכולת העברת האנרגיה של הגל.

$$Pav = P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)Rdt = I_{eff}{}^2 R$$

כאשר: $I_{eff} = I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$

עבור גל סינוסואידלי:

$$I^2{}_{eff} = \frac{1}{T}\int A^2\cos^2(wt)dt = \frac{A^2}{2T}\int(1+\cos(2wt))dt = \frac{A^2}{2T}\left[T + \frac{\sin 2wt}{2w}\Big|_0^T\right] = \frac{A^2}{2}$$

$$I_{RMS} = \frac{\sqrt{2}}{2}A = 0.707A$$

כלומר: הערך האפקטיבי של אות סינוסואידלי הוא הערך המקסימלי של האות, מחולק בשורש 2.

<u>הרחבה למושג האימפדנס (עכבה)</u>

נרחיב את מושג האימפדנס גם לאותות סינוסואידליים.

עבור נגד מתקיים:

$$i = I_0 e^{jwt} \quad , \quad V = i \cdot R = RI_0 e^{jwt} \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{I} = R$$

עבור אות סינוסואידלי ($i = I_0 e^{jwt}$) נרצה למצוא קשר ליניארי דומה עבור סליל: $V_L = Z_L i_L$, כך ש- Z_L יוגדר כעכבת הסליל.

בסליל מתקיים הקשר: $V_L = L\frac{di}{dt} = (jwL)I_0 e^{jwt}$

ומכיוון ש: $V_L = Z_L i$ נקבל מתוך השוואה: $Z_L = jwL$.

באופן דומה, עבור קבל:

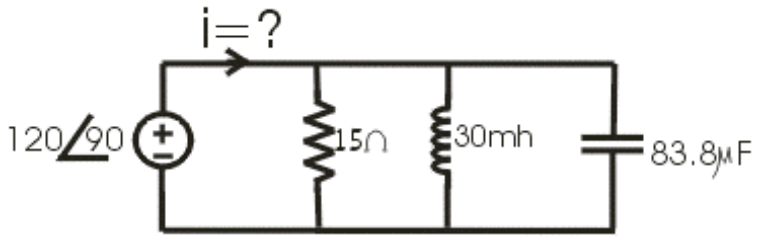
אם המתח הוא: $V = V_0 e^{jwt}$

וכאמור בקבל מתקיים הקשר: $i_C = C\frac{dV}{dt} = CjwV_0 e^{jwt}$

אזי עכבת הקבל היא: $Z_C = \frac{1}{jwc}$

<u>דוגמא</u>:

נתון המעגל הבא עם ערכי האלמנטים מצוינים עליו:



כמו כן נתון:

$$V = 120\angle 90_{volt} \; ; \; w = 1000\frac{rad}{sec}$$

ורוצים למצוא את הזרם I.

פתרון:

$$\text{mho } Y_R = \frac{1}{R} = 0.0677$$
$$\text{mho } Y_C = jwc = j \cdot 1000 \cdot 83.3 \cdot 10^{-6} = j \cdot 0.0833$$
$$\text{mho } Y_L = \frac{1}{jwL} = j \cdot \frac{-1}{1000 \cdot 0.03} = -j \cdot 0.0333$$

$$Y_{in} = Y_L + Y_C + Y_R = 0.0667 + j0.0833 - j0.0333 = (0.0677 + j0.5) = 0.0833\angle 37^\circ$$
$$I = Y_{in} \cdot V = (0.0833\angle 37^\circ)(120\angle 90^\circ) = 10\angle 127^\circ$$

I הוא הפאזור, לכן האות $i(t)$ הוא: $i(t) = 10\cos(1000t + 127^o)$