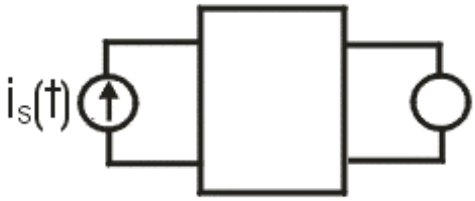
פרק 7: תגובה במצב סינוסי עמיד

במערכות רבות נרצה לנתח את התגובה לעירור רק לאחר זמן רב, ובכך לנטרל את השפעתם של גורמים חולפים במערכת (כמו המצב ההתחלתי). מצב זה נקרא **המצב העמיד** של המערכת.
בפרק זה נתמקד בתגובה של מערכות במצב העמיד לעירור סינוסואידלי.
מלבד היותם של האותות הסינוסואידליים נפוצים מאוד במערכות חשמליות, ישנה סיבה נוספת להתמקדות בהם: כל עירור שהוא ניתן לפרק לסכום של פונקציות סינוסואידליות (בעזרת התמרת פורייה שאותה תלמדו בהמשך). לפי משפט הסופר פוזיציה, כדי למצוא תגובה לעירור נוכל לפרקו לעירורים סינוסואידליים, למצוא את התגובה לכל אחד מתת-העירורים, ולחבר את התגובות.

ניזכר (מפרק 2) שגל סינוסי הוא גל בעל תדירות מעגלית קבועה w. הגל הוא פונקציה של הזמן:



$$f(t) = A\cos(wt+\varphi)$$

לצורך המשך הפרק ניזכר גם במושג הפאזור:

$$A_m\cos(wt+\varphi) = \mathrm{Re}\left[A_m e^{j(wt+\varphi)}\right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{A}e^{jwt}\right]$$

הגודל הבא נקרא פאזור: $\tilde{A} = A_m e^{j\phi}$.

לדוגמא: $A_m\sin(wt+\varphi) = A_m\cos\left(wt+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$

במקרה זה הפאזור הוא: $\tilde{A} = A_m e^{j\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}$.

<u>משפט עיקרי:</u>
סכום אלגברי של מספר פונקציות סינוסיאודליות בעלות אותה תדירות w וסכום כלשהו של נגזרותיהן מכל סדר שהוא, הוא בעצמו גם פונקציה סינוסיאודלית בעלת אותו תדר w.

<u>משפטי עזר</u>:

Lemma 1:

$$\mathrm{Re}[Z_1(t)+Z_2(t)] = \mathrm{Re}[Z_1(t)] + \mathrm{Re}[Z_2(t)]$$
$$\mathrm{Re}[\alpha Z_1(t)] = \alpha\,\mathrm{Re}[Z_1(t)]$$

Lemma 2:

אם: $\mathrm{Re}\left[\tilde{B}e^{jwt}\right] = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[\tilde{A}e^{jwt}\right]$

אז: $\tilde{B} = jw\tilde{A}$

תוך שימוש ב: $\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[\tilde{A}e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\tilde{A}e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[jw\tilde{A}e^{jwt}\right]$ ובלמה 3.

Lemma 3:

$$\forall t: \mathrm{Re}\left[\tilde{A}e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{B}e^{jwt}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A} = \tilde{B}$$

הערה: יש לשים לב שאם: $\mathrm{Re}\left[\tilde{A}\right]=\mathrm{Re}\left[\tilde{B}\right]$ זה לא אומר בהכרח ש: $\tilde{A}=\tilde{B}$.

<u>הוכחת המשפט העקרי:</u>

נסמן את האותות הסינוסואידליים הבאים בהצגתם הפאזורית:

$$x(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{A}e^{jwt}\right]$$
$$y(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{B}e^{jwt}\right]$$
$$z(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{C}e^{jwt}\right]$$

כל האותות הם בעלי אותה תדירות w.
נסכם שניים מהאותות ונגזרת ראשונה של האות השלישי:

$$x(t)+y(t)+\frac{dZ(t)}{dt}=\mathrm{Re}\left[\tilde{A}e^{jwt}\right]+\mathrm{Re}\left[\tilde{B}e^{jwt}\right]+\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[\tilde{C}e^{jwt}\right]$$

לפי למה 2: $=\mathrm{Re}\left[\tilde{A}e^{jwt}\right]+\mathrm{Re}\left[\tilde{B}e^{jwt}\right]+\mathrm{Re}\left[jw\tilde{C}e^{jwt}\right]$

ע"י שימוש בלמה 1: $=\mathrm{Re}\left[\left(\tilde{A}+\tilde{B}+jwC\right)e^{jwt}\right]=\mathrm{Re}\left[\tilde{S}e^{jwt}\right]$

ע"י שימוש בלמה 3: $\tilde{S}=S_m e^{j\varphi_S}=\tilde{A}+\tilde{B}+jw\tilde{C}$

נכתוב כל פאזור בקואורדינטות קרטזיות:

$$\tilde{A}=A_r+jA_i$$
$$\tilde{B}=B_r+jB_i$$
$$\tilde{C}=C_r+jC_i$$

ונקבל:

חלקים ממשיים $\rightarrow$ $S_r=A_r+B_r-wC_i$

חלקים מדומים $\rightarrow$ $S_i=A_i+B_i+wC_r$

כעת נביע את $\tilde{S}=S_m e^{j\varphi_S}$ בקואורדינטות פולאריות:

$$S_m=\sqrt{\left(A_r+B_r-wC_i\right)^2+\left(A_i+B_i+wC_r\right)^2}$$

$$\varphi_S=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{A_i+B_i+wC_r}{A_r+B_r-wC_i}\right)$$

סה"כ מהחיבור הנ"ל קיבלנו שוב אות סינוסואידלי עם פאזור $\tilde{S}$ ותדירות w.
ניתן להרחיב את המשפט לכל מספר סכומים ולכל דרגה של נגזרת.

<u>שימוש ברישום הפאזורי למשוואות דיפרנציאליות:</u>

נתונה המד"ר: $a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+a_2x^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}x^{(1)}+a_nx=A_m\cos(wt+\varphi)$

כאשר: $x^{(n)}=\frac{d^nx}{dt^n}$, ואנו רוצים למצוא לה פתרון פרטי.

נסמן: $\tilde{A} = A_m e^{j\varphi}$, $\tilde{X} = X_m e^{j\psi}$

וננסה את הפתרון הפרטי הבא שהוא מצורת העירור באגף ימין: $x(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{X} e^{jwt}\right]$

נציב במד״ר: $a_0 \dfrac{d^n \mathrm{Re}\left(\tilde{X} e^{jwt}\right)}{dt^n} + \ldots + a_n \mathrm{Re}\left(\tilde{X} e^{jwt}\right) = \mathrm{Re}\left(\tilde{A} e^{jwt}\right)$

מלמה 2: $\dfrac{d^n}{dt^n} \mathrm{Re}\left(a_0 \tilde{X} e^{jwt}\right) = \mathrm{Re}\left[a_0 (jw)^n \tilde{X} e^{jwt}\right]$

מלמה 1: $\mathrm{Re}\left\{\left[a_0 (jw)^n + a_{n-1}(jw)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(jw) + a_n\right] \tilde{X} e^{jwt}\right\} = \mathrm{Re}\left[\tilde{A} e^{jwt}\right]$

ומתקבל מלמה 3: $\tilde{X} = \dfrac{\tilde{A}}{a_0 (jw)^n + \ldots + a_{n-1} jw + a_n}$

$$X_m = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\tilde{X}) + \mathrm{Im}^2(\tilde{X})} = \frac{A_m}{\sqrt{\left(a_n - a_{n-2} w^2 + a_{n-4} w^4 + \ldots\right)^2 + \left(a_{n-1} w - a_{n-3} w^3 + \ldots\right)^2}}$$

$$\Psi = \angle \tilde{X} = \varphi - \mathrm{tg}^{-1} \frac{a_{n-1} w - a_{n-3} w^3 + a_{n-5} w^5 + \ldots}{a_n - a_{n-2} w^2 + a_{n-4} w^4 + \ldots}$$

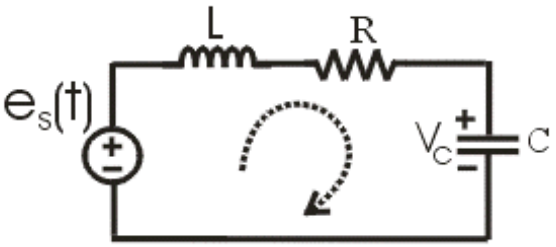
<u>הערה חשובה:</u>

גישת פתרון זו נכונה עבור כל w מלבד ערכי w המהווים פתרון הומוגני למשוואה, שכן אז היינו מקבלים אפס במכנה של $\tilde{X}$ (אותה w מאפסת את הפולינום האופייני של המד״ר).

עבור אותם ערכי w יש לנסות כפתרון אפשרי את הפונקציה: $t\tilde{x}e^{jwt}$, משום שאז w הוא פתרון מרובה (גם פתרון פרטי וגם פתרון הומוגני).

אם במשוואה יש ערור שמכיל פולינום אז נקבל: $\tilde{X} = \dfrac{\tilde{A}\left[b_0 (jw)^m + b_1 (jw)^{m-1} + \ldots + b_m\right]}{a_0 (jw)^n + a_1 (jw)^{n-1} + \ldots + a_n}$

<u>דוגמא:</u>



$$i = C \frac{dV_C}{dt}$$

$$LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} + RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = e_S(t) = E_m \cos(wt + \varphi)$$

העירור הוא: $e_S(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{E} e^{jwt}\right\}$

ולכן ננחש את הפתרון: $V_C = \mathrm{Re}\left\{\tilde{V} e^{jwt}\right\}$

ונקבל לפי השיטה שלעיל: $\tilde{V} = \dfrac{\tilde{E}}{LC\left(-w^2\right) + RCjw + 1}$

$$V_m = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - LCw)^2 + (wRC)^2}} \quad , \quad \Psi = \varphi - \mathrm{tg}^{-1} \frac{wRC}{1 - w^2 LC}$$

כעת נפתור עבור הנתונים: $L = \dfrac{1}{2}$, $R = \dfrac{3}{2}$, $C=1$, $e_S(t) = \cos(2t)u(t)$

$V_C(0^-) = 1_V$ $\qquad$ $i(0^-) = 2_{Am}$

נרצה למצוא את מתח הקבל בכל רגע.

פתרון הומוגני: $V_h(t)=k_1e^{S_1t}+k_2e^{S_2t}$

כאשר S_1,S_2 הם פתרונות המשוואה ההומוגנית:

$$LCS^2+RCS+1=0$$
$$\frac{1}{2}S^2+\frac{3}{2}S+1=0$$
$$S^2+3S+2=0 \quad \Rightarrow \quad S_1=-1\,,\,S_2=-2$$

פתרון פרטי: $V_p(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{V}^{j2t}\right]$

נשים לב שמהעירור הנתון מקבלים: $E_m=1,\varphi=0$.

נציב בפתרון:

רדיאנים מעלות

$$\tilde{V}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(-w^2\right)+\frac{3}{2}jw+1}\Bigg|_{w=2}=\frac{1}{1-2+3j}=\frac{1}{-1+3j}=\frac{1}{3.16e^{j108.4}}=0.316e^{-j108.4}=0.316e^{-j1.89}$$

הפתרון הכללי: $V_C(t)=V_h(t)+V_p(t)$

עבור $t>0$ $\quad V_C(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{-2t}+0.316\cos(2t-1.89)$

למציאת המקדמים נציב ת"ה ראשון ב - $t=0$: $\quad V_C(t)=k_1+k_2-0.1=1v$

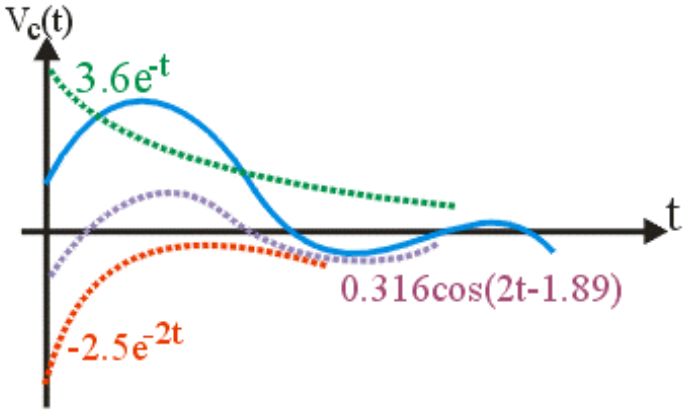
נציב ת"ה שני ב - $t=0$:

$$i(0)=C\frac{dV_C}{dt}\Bigg|_{t=0}=\frac{dV_C}{dt}\Bigg|_{t=0}=-k_1e^{-t}-2k_2e^{-t}-0.632\sin(2+-1.89)\Big|_{t=0}=$$
$$=-k_1-2k_2-0.632\sin(-1.89)=-k_1-2k_2+0.6=2$$

לכן:

$$\left.\begin{aligned}k_1+k_2&=1.1\\-k_1-2k_2&=1.4\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}k_2&=-2.5\\k_1&=3.6\end{aligned}$$

ומצאנו אם כן את הפתרון הכולל: $V_C(t)=3.6e^{-t}-2.5e^{-2t}+3.16\cos(2t-1.89)$



מה היו צריכים להיות תנאי ההתחלה כדי שלא יהיה מצב מעבר אלא רק מצב סינוסי יציב?

כלומר מתי: $k_1=k_2=0$?

$$V_C(t) = 0.316\cos(2t - 1.89)$$
$$V_C(0) = 0.316\cos(-1.89) = -0.1v$$
$$i(0) = C\frac{dV_C(t)}{dt}\Big|_{t=0} = -0.316 \cdot 2\sin(-1.89) = 0.6$$
Am

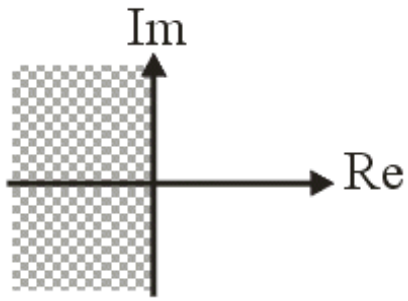
<u>התגובה היציבה של האות הסינוסי</u>

נתון לנו מעגל עם עירור סינוסואידלי, ונרצה לדעת את התגובה הכוללת <u>במצב העמיד</u>, כלומר כאשר: $t \to \infty$.
ראינו שבמקרה הכללי התגובה הכוללת היא:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = k_1 e^{S_1 t} + k_2 e^{S_2 t} + \ldots + k_m e^{S_m t} + A_m \cos(wt + \psi)$$

כעת, אם כל השורשים S_k הם ממשיים שליליים או שהחלק הממשי שלהם שלילי:

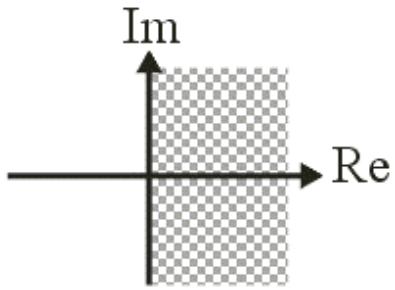
$$Re[S_k] < 0$$



אז כשנשאף ל- $t \to \infty$ נקבל דעיכה של כל האקספוננטים: $\lim_{t\to\infty} y(t) = A_m \cos(wt + \psi)$
מערכת כזו נקראת מערכת יציבה אסימפטוטית. במערכת כזו תגובת ה ZIR שואפת ל 0 עבור $t \to \infty$.

אם לפחות אחד השורשים הוא חיובי וממשי או שהחלק הממשי שלו חיובי:

$$Re[S_k] > 0$$



אז אומרים שהמערכת אינה יציבה.

מה המצב עבור שורשים מדומים? כלומר עבור שורשים המקיימים: $Re[S_k] = 0$?
נניח כי התדר במבוא הוא: $w \neq w_0$.
עבור שורשים פשוטים, למשל: $S^2 = -w_0^2 \quad \Rightarrow \quad S_{1,2} = \pm jw_0$
נקבל פתרון: $y_h = k_1 e^{jw_0 t} + k_2 e^{-jw_0 t} = k\cos(w_0 t + \varphi)$ ופתרון זה על סף חוסר היציבות.

עבור שורשים כפולים נקבל פתרון: $y_h(t)=(k_1+k_2t)e^{jw_0t}$

רואים כי המערכת אינה יציבה: $y_h \to \infty$ עבור $t \to \infty$.

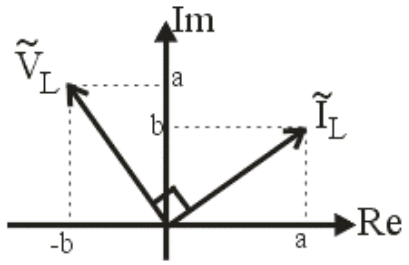
<u>מושג האימפדנס (עכבה) בזרם או מתח חילופין</u>

ראינו בפרק 5 שהעכבה של סליל היא: $\tilde{V}_L = jwL\tilde{I}_L = Z_L\tilde{I}_L$

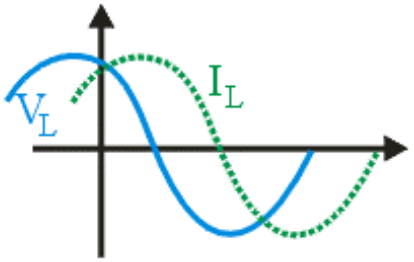
והעכבה של קבל היא: $\tilde{V}_C = \frac{1}{jwC}\tilde{I}_C = Z_C\tilde{I}_C$

כעת נניח שהזרם הפאזורי בסליל הוא: $\tilde{I}_L = a+jb$. אז לפי הקשר שלעיל נקבל: $\tilde{V}_L = jwL(a+jb) = wL(ja-b)$

כלומר: הפאזור של המתח מוזז ב- 90 מעלות יחסית לפאזור של הזרם באופן הבא:



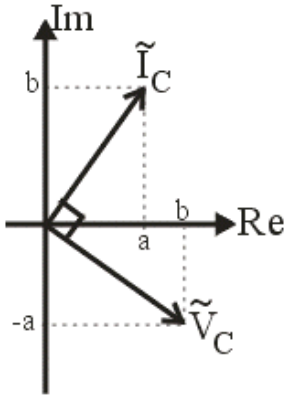
ולכן עבור סליל המתח מקדים את הזרם:



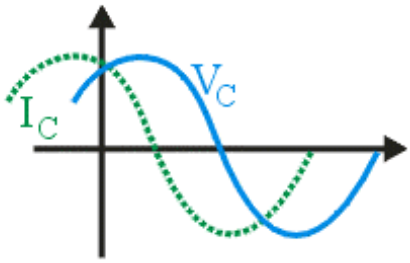
באופן דומה, נניח שהזרם הפאזורי בקבל הוא: $\tilde{I}_C = a+jb$. אז לפי הקשר שלעיל נקבל:

$$\tilde{V}_C = \frac{1}{jwC}(a+jb) = \frac{1}{wC}(b-ja)$$

כלומר: הפאזור של המתח מוזז ב- (-90) מעלות יחסית לפאזור של הזרם באופן הבא:



ולכן עבור קבל הזרם מקדים את המתח:



<u>מצב מתמיד של מעגלים פשוטים בערור סינוסי</u>

חוקי קירכהוף נכונים בכל רגע ורגע לכן ניתן לרשום אותם ע"י פאזורים:

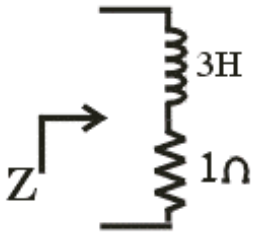
$$\Sigma v = 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma \tilde{V} = 0$$
$$\Sigma i = 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma \tilde{I} = 0$$

שכן מלמה 1:
$$\sum_n V_n = \sum_n \mathrm{Re}\left(\tilde{V}_n e^{jwt}\right) = \mathrm{Re}\left[\left(\sum \tilde{V}_n\right) e^{jwt}\right] = 0$$

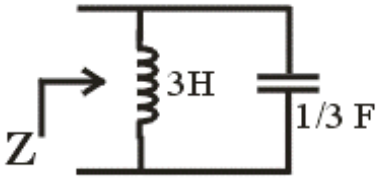
לכן ניתן ליישם את כל חוקי החיבור של נגדים לגבי האימפדנסים המרוכבים כאשר מדובר בעירור סינוסואידלי.

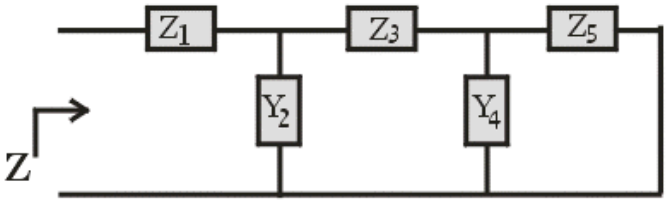
<u>דוגמאות</u>

1) $Z = 1 + jw3$



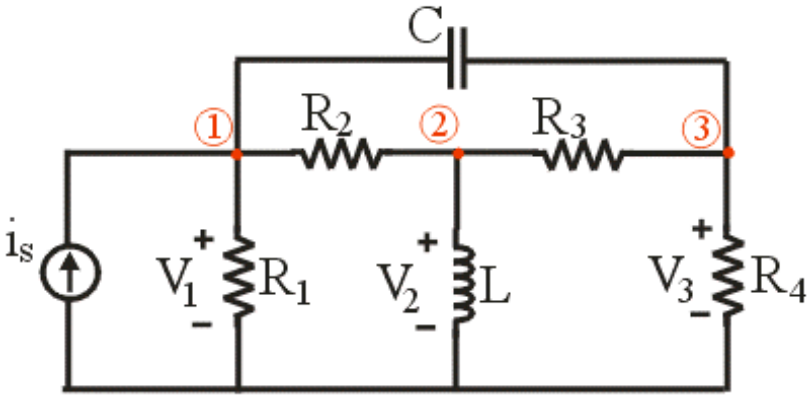
2) $$Z = \frac{(jw3)\cdot\dfrac{1}{jw\frac{1}{3}}}{jw3 + \dfrac{1}{jw\frac{1}{3}}} = \frac{jw3}{1 - w^2}$$





3)
$$Z = Z_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{y_4 + \cfrac{1}{Z_5}}}}$$

4) דוגמא לאנליזת רשת: נרצה למצוא את המתח על R_4 .



פתרון: נרשום את משוואות הזרמים

עבור שלושת הצמתים המסומנים:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{צומת 1} & \dfrac{\tilde{V}_1}{R_1} + \dfrac{\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2}{R_2} + \dfrac{\tilde{V}_1 - \tilde{V}_3}{\frac{1}{jwC}} = \tilde{I}_S \\[2ex]
\text{צומת 2} & \dfrac{\tilde{V}_2 - \tilde{V}_1}{R_2} + \dfrac{\tilde{V}_2}{jwL} + \dfrac{\tilde{V}_2 - \tilde{V}_3}{R_3} = 0 \\[2ex]
\text{צומת 3} & \dfrac{\tilde{V}_3 - \tilde{V}_2}{R_3} + \dfrac{\tilde{V}_3}{R_4} + \dfrac{\tilde{V}_3 - \tilde{V}_1}{\frac{1}{jwC}} = 0
\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{V}_1\left[\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + jwC\right] - \tilde{V}_2 \cdot \dfrac{1}{R_2} - \tilde{V}_3 \cdot jwC = \tilde{I}_S \\[2ex]
\tilde{V}_1\left(-\dfrac{1}{R_2}\right) + \tilde{V}_2\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{jwL}\right) + \tilde{V}_3 \cdot \left(-\dfrac{1}{R_3}\right) = 0 \\[2ex]
\tilde{V}_1(-jwC) + \tilde{V}_2 \cdot \left(-\dfrac{1}{R_3}\right) + \tilde{V}_3\left(\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + jwC\right) = 0
\end{array}\right\}$$

נציב את הנתונים הבאים: $w=2$ $L=2H$ $C=2F$ $R_4 = 2\Omega$ $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$

$$i_S(t) = 10\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

כדי לחלץ את $\tilde{V}_3$ מתוך מערכת המשוואות הלינאריות, נשתמש בכלל קרמר:

$$\tilde{V}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2+4j & -1 & I_S \\ -1 & 2+\frac{1}{4j} & 0 \\ -j4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j4 & -1 & -j4 \\ -1 & 2+\frac{1}{j4} & -1 \\ -j4 & -1 & 3/2+j4 \end{vmatrix}} = \frac{2+j\cdot 8}{6+j11.25}\tilde{I}_S$$

ולכן: $\tilde{V}_3 = \frac{8.24\angle 1.32}{12.75\angle 1.08}\cdot 10\angle 0.524 = 6.46\angle 0.764$

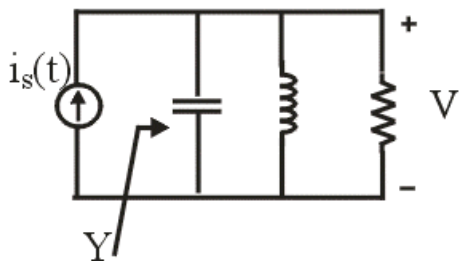
<u>הערה</u>:
כדי להגיע למתח הרגעי מתוך הפאזור, ניעזר בקשר הבא:

$$V(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{V}e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[(V_R + jV_i)e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[V_m e^{j\varphi}e^{jwt}\right] = V_m\cos(wt+\varphi)$$

כאשר:

$$\tilde{V} = V_R + jV_i$$
$$V_m = \left|\tilde{V}\right| = \sqrt{V_R^{\,2} + V_i^{\,2}}$$
$$\varphi = tg^{-1}\frac{V_i}{V_R}$$

<u>מעגלי תהודה</u>



נתבונן במעגל התהודה המקבילי הבא:

$$Y = jwC + G + \frac{1}{jwL} = G + j\left(wC - \frac{1}{wL}\right)$$

נסמן:
$B(w)$ תהיה הפונקציה הבאה של התדר:

$$Y(jw) = G + jB(w) \;\Rightarrow\; B(w) = wC - \frac{1}{wL}$$

ואז: $\mathrm{Re}[Y(jw)] = G$

$$\mathrm{Im}[Y(jw)] = B(w)$$

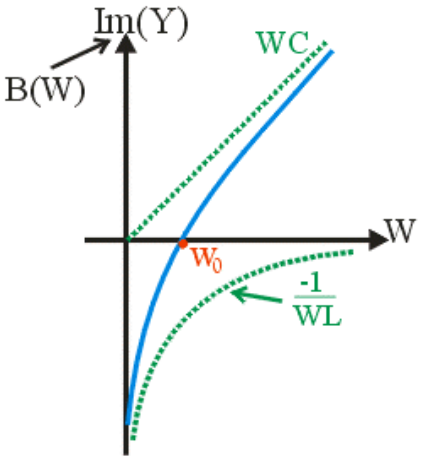
מצב תהודה (resonance) במעגל יוגדר כמצב שבו המתח שיספק מקור סינוסי חיצוני למעגל השקול והזרם שייכנס למעגל השקול, יהיו <u>באותה פאזה</u>. נובע מזה שההתנגדות השקולה של המעגל (ולכן גם המוליכות השקולה) היא <u>ממשית</u>.

ברוב המעגלים הפשוטים דרישה זו מביאה את המוליכות Y למינימום ובהתאם את ההתנגדות Z למקסימום.

נחזור לדוגמה שלנו:

מתי האדמיטנס Y מקבל מינימום? כאשר החלק המדומה שלו מתאפס:

$$\mathrm{Im}[Y(jw)] = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



לתדר זה קרואים **תדר התהודה** של המעגל, ונהוג לסמנו ב - w_0.

בתדר זה $B(w)$ מתאפס, כפי שניתן לראות מהגרף הבא:

מתוך הגרף ניתן לראות גם שכאשר: $w \to 0$ אז: $B \to -\infty$,

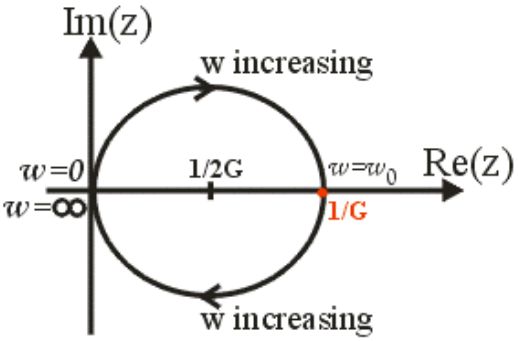
וכאשר: $w \to \infty$ אז: $B \to +\infty$.

אפשר לחשב גם את האימפדנס:

$$Z(jw) = \frac{1}{Y(jw)} = \frac{1}{G + jB(w)} = \frac{G}{G^2 + B^2(w)} + j\frac{-B(w)}{G^2 + B^2(w)}$$

נשרטט את Z על המשור המורכב:

מתקבל המעגל הבא:



נסביר מדוע זהו המעגל המתקבל.

נוסחת המעגל המשורטט להלן (בעל רדיוס $\frac{1}{2G}$) היא הבאה:

$$\left(\mathrm{Re}(Z)-\frac{1}{2G}\right)^2+\left(\mathrm{Im}(Z)\right)^2=\left(\frac{1}{2G}\right)^2=\frac{1}{4G^2}$$

נבדוק האם היא מתאימה לערכי Z שקיבלנו בחישוב האימפדנס, כלומר האם מתקיים השוויון הבא:

$$\left(\frac{G}{G^2+B^2}-\frac{1}{2G}\right)^2+\frac{B^2}{\left(G^2+B^2\right)^2}=\frac{1}{4G^2}$$

נפתח את הריבועים של אגף שמאל:

$$\frac{G^2}{\left(G^2+B^2\right)^2}-\frac{1}{\left(G^2+B^2\right)}+\frac{1}{4G^2}+\frac{B^2}{\left(G^2+B^2\right)^2}=\frac{G^2+B^2}{\left(G^2+B^2\right)^2}-\frac{1}{\left(G^2+B^2\right)}+\frac{1}{4G^2}=\frac{1}{4G^2}$$

ולכן השוויון אכן מתקיים, כלומר המעגל המשורטט אכן מתאר את Z.

משמעות התהודה יכולה להיות ברורה יותר מתוך התבוננות בגרף של Z במישור המרוכב:
גודל העכבה, $|Z(jw)|$, כפונקציה של התדר w מתחיל באפס עבור $w=0$, עולה מונוטונית עד לנקודה $w=w_0$, שבה הוא מקבל את ערכו המקסימלי. בתהודה $Z(jw_0)$ נקרא התנגדות טהורה משום שמבחינה פיזיקלית, כל הזרם במעגל יעבור רק דרך הנגד. עבור $w>w_0$ גודל העכבה יורד מונוטונית עד לאפס כאשר $w\to\infty$.

כעת נפתור את מעגל התהודה עצמו:

ברישום פאזורי: $\tilde{I}_R+\tilde{I}_C+\tilde{I}_L=\tilde{I}_S \quad , \quad \tilde{I}_R=G\tilde{V} \quad , \quad \tilde{I}_C=jwC\tilde{V} \quad , \quad \tilde{I}_L=\frac{1}{jwL}\tilde{V}$

ניקח למשל את הנתונים הבאים: $\tilde{I}_S=1\angle 0^\circ \quad , \quad w=1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{I}_S=\cos(t)$

$$R=1\Omega \qquad C=1F \qquad L=\frac{1}{4}H$$

פתרון:

$$\tilde{Y}(j\cdot 1)=G+j\left(wC-\frac{1}{wL}\right)\Big|_{w=1}=1+j\left(1-\frac{1}{1/4}\right)=1-j\cdot 3=\sqrt{10}\angle -71.6^\circ$$

$$\tilde{Z}(j\cdot 1)=\frac{1}{\tilde{Y}(j\cdot 1)}=\frac{1}{\sqrt{10}}\angle +71.6^\circ$$

$$\tilde{V}=\tilde{Z}\cdot\tilde{I}_S=\frac{1}{\sqrt{10}}\angle 71.6\cdot 1\angle 0=\frac{1}{\sqrt{10}}\angle 71.6$$

$$\tilde{I}_R=\frac{\tilde{V}}{R}=\frac{1}{\sqrt{10}}\angle 71.6$$

$$\tilde{I}_L=\frac{\tilde{V}}{jwL}=\frac{1}{\sqrt{10}\cdot\frac{1}{4}}\cdot\angle 71.6^\circ-90^\circ=\frac{4}{\sqrt{10}}\angle -18.4^\circ$$

$$\tilde{I}_C = \tilde{V} \cdot jwC = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle 71.6^o + 90^o = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle 161.6^o$$

תדר התהודה של המעגל הוא: $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2$

לכן נחשב כעת את הגדלים בתדר התהודה - w_0 :

$$\tilde{I}_S = 1\angle 0^o \quad , w=2$$
$$Y(j \cdot 2) = G + j \cdot 0 = G = 1mho$$
$$Z(j \cdot 2) = \frac{1}{Y(j \cdot 2)} = 1\Omega$$
$$\tilde{V} = Z \cdot \tilde{I}_S = 1\angle 0^o \quad \Rightarrow \quad \tilde{I}_R = \frac{\tilde{V}}{R} = 1\angle 0^o \quad \Rightarrow \quad I_R = I_S$$
$$Z_L = jw \cdot \frac{1}{4} = j \cdot \frac{1}{2} \quad , \quad I_L = \frac{\tilde{V}}{jwL} = \frac{1}{1/2} \angle 0^o - 90^o = 2\angle -90^\circ$$
$$\tilde{I}_C = jwC \cdot \tilde{V} = 1\angle 90^o \cdot 2\angle 0^o = 2\angle 90^o$$

רואים ש - $\tilde{I}_C = -\tilde{I}_L$. זה אופייני למצב תהודה: הקבל והסליל משחקים "פינג פונג" (מוסרים ומקבלים את אותו זרם ביניהם) והנגד מבזבז הספק מקסימלי (כזכור Y מינימלי).

<u>פונקצית המערכת - "network function"</u>

פונקצית המערכת היא מנת פאזור המוצא לפאזור המבוא (פאזור הכניסה).
נהוג לסמנה ב - $H(jw)$, כי לרוב היא תלויה בתדירות w.
אם, לדוגמה, מתעניינים ביציאה בזרם הנגד אז פונקצית המערכת תהיה:

$$H(jw) = \frac{\tilde{I}_R}{\tilde{I}_S} = \frac{GV}{\tilde{I}_S} = GZ(jw) = \frac{G}{G + j\left(wC - \frac{1}{wL}\right)} = \frac{1}{1 + jR\left(wC - \frac{1}{wL}\right)}$$

כדי למצוא באופן מעשי את פונקצית המערכת, יש למדוד את היציאה , בדוגמה שלנו $I_R(wt)$, עבור כל תדר ומתוך $I_R(wt)$ מוצאים את הפאזור $\tilde{I}_R(jw)$ ע"י מדידת הפרש המופע והאמפליטודה של $I_R(wt)$. נחלק בפאזור הכניסה ונקבל את פונקצית המערכת המבוקשת.

נשים לב שבתהודה מתקיים: $\tilde{I}_C = -\tilde{I}_L$, והסיבה היא:

$$\tilde{I}_C = \tilde{V}_S \cdot jw_0C = \tilde{V}_S \cdot j\frac{1}{\sqrt{LC}}C = \tilde{V}_S \cdot j\sqrt{\frac{C}{L}}$$
$$\tilde{I}_L = \tilde{V}_S \cdot \frac{1}{jw_0L} = \tilde{V}_S \cdot \frac{\sqrt{LC}}{jL} = -\tilde{V}_S \cdot j\sqrt{\frac{C}{L}}$$

ולכן: $\tilde{I}_S = \tilde{I}_C + \tilde{I}_L + \tilde{I}_R = \tilde{I}_R$, ומכאן נובע שבמקרה שלנו: $H(jw) = \frac{\tilde{I}_R}{\tilde{I}_S} = 1$.

מקדם האיכות

נהוג במעגלים עם עירור סינוסואידלי הנמצאים בתהודה לאפיין את המעגל לפי 'מקדם האיכות':

$$Q=\left|\frac{\tilde{I}_L}{\tilde{I}_S}\right|=\left|\frac{\tilde{I}_C}{\tilde{I}_S}\right|$$

כלומר:

$$Q=\frac{\left|\tilde{I}_L\right|}{\left|\tilde{I}_S\right|}=\frac{\left|\frac{V}{jw_0L}\right|}{\left|\frac{V}{R}\right|}=\frac{R}{w_0L},$$

כאשר נזכור ש: $w_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ ולכן: $Q=\frac{R}{L\sqrt{\frac{1}{LC}}}=R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

וכעת אפשר לכתוב את פונקצית המערכת בצורה הבאה:

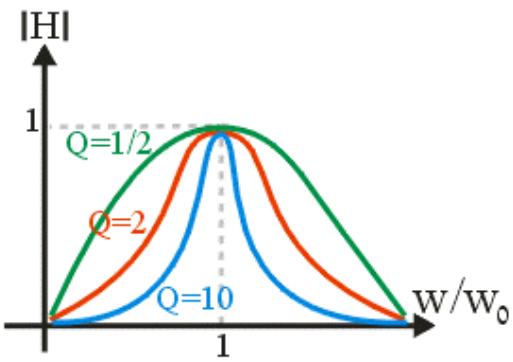
$$H(jw)=\frac{1}{1+jR\left(wC-\frac{1}{wL}\right)}=\frac{1}{1+jQw_0L(wC-\frac{1}{wL})}=\frac{1}{1+jQ\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)}$$

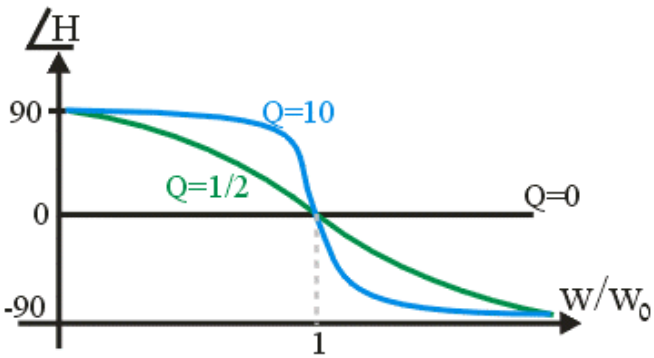
כלומר Q ו - w_0 מאפיינים באופן חד ערכי את פונקצית הרשת H.

נחשב גם את הגודל והזווית של פונקצית המערכת כתלות ב - Q ו - w_0:

$$|H(jw)|=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)^2}}\qquad \angle H(jw)=0-tg^{-1}\left[Q\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)\right]=-tg^{-1}\left[Q\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)\right]$$

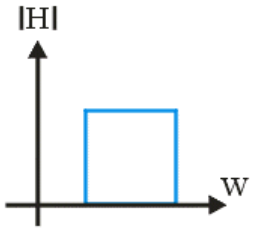
הגרף של H נקרא תגובת התדר של המערכת, ובעצם מורכב משני גרפים:



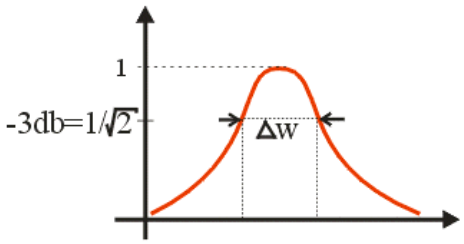


לפי הגדרת פונקצית המערכת, אם $H(jw)=1$ אז פאזור היציאה זהה לפאזור הכניסה.
אם $H(jw)=0$ אז פאזור היציאה הוא אפס. במקרה של מעגל התהודה שאנו מנתחים, $H(jw)=1$ בתדר התהודה ו- $H(jw)=0$ בתדרים $w\to 0, w\to\infty$. לכן אומרים שמעגל זה מעביר תדרים שבאזור תדר התהודה כמעט בשלמותם ואינו מעביר תדרים נמוכים / גבוהים. למעגל בעל התכונות האלה קוראים **bandpass filter**.

למסנן bandpass filter אידיאלי יש פונקצית מערכת כזו:



כלומר, יש לו טווח תדרים מוגדר (שנקרא רוחב הפס של המסנן) שמחוץ לו הוא ממש <u>מאפס</u> את הכניסה.
אבל במקרה שלנו המצב הוא פחות אידיאלי:



אנו בכל זאת נרצה להגדיר טווח תדרים מקורב למסנן הלא-אידיאלי.
נגדיר את רוחב הפס ע"י הגדרת נקודות 3dB-. לפי הגדרה זו, קצות רוחב הפס הם הנקודות שבהן $|H(jw)|$ הוא $\frac{1}{\sqrt{2}}$ מערכו המקסימלי של הפילטר. נקודות אלו נקראות נקודות **3- dB**.

הגדרה זו קשורה בסקלת מדידה לוגריתמית: $dB=20\cdot\log\left(\left|\frac{H(jw)}{H_{max}}\right|\right)$.

איך נמצא את נקודות ה 3-dB? ראינו שערכו המקסימלי של הפילטר הוא 1 (בתדר התהודה). לכן נפתור את השוויון הבא:

$$|H(jw)|=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\ Q^2\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)^2=1$$

$$\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}=\pm\frac{1}{Q}\ \Rightarrow\ \left(\frac{w}{w_0}\right)^2\pm\frac{1}{Q}\frac{w}{w_0}-1=0$$

$$\frac{w}{w_0}=\pm\frac{1}{2Q}\pm\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}$$

עבור: $\frac{w}{w_0}>0$ נקבל: $\frac{w}{w_0}=\pm\frac{1}{2Q}+\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}$

עבור $Q>>1$ ניתן להשתמש בקירוב הבא: $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+...$

ולכן נקבל: $\frac{w}{w_0}=\pm\frac{1}{2Q}+\left(1+\frac{1}{8Q^2}-...\right)\cong 1\pm\frac{1}{2Q}+\frac{1}{8Q^2}$

והפתרונות הם: $w_1=w_0\left(1-\frac{1}{2Q}+\frac{1}{8Q^2}\right)\qquad w_2=w_0\left(1+\frac{1}{2Q}+\frac{1}{8Q^2}\right)$

אלו הן שתי הנקודות שתוחמות את רוחב הפס של המסנן (ראה הגרף שלעיל),

ורוחב הפס שהתקבל הוא: $\Delta w=w_2-w_1=\frac{w_0}{Q}\quad\Rightarrow\quad \Delta f=\frac{\Delta w}{2\pi}=\frac{w_0}{2\pi Q}[Hz]$

התדר w_1 (וכמובן גם w_2) נקרא "**תדר הקיטעון**" ולעיתים גם "**תדר הברך**".

עבור מעגל RLC טורי ומעגל RLC מקבילי ה- Q שהגדרנו כאן מתלכד עם מקדם האיכות Q שהגדרנו בפרק 5:

נבדוק לגבי RLC מקבילי. קיבלנו בפרק 5 שהמד"ר המתארת את המעגל היא: $i_L''+\frac{1}{RC}i_L'+\frac{1}{LC}i_L=0$

וסימנו: $\frac{1}{LC}=w_0^2\quad,\quad \frac{1}{RC}=2\alpha$.

בדיקה: $Q=\frac{R}{w_0L}=\frac{1}{2\alpha CLw_0}=\frac{w_0^2}{2\alpha w_0}=\frac{w_0}{2\alpha}$,

כאשר השתמשנו ב: $\frac{1}{2\alpha C}=\frac{RC}{C}=R$ בשוויון השני ו: $w_0^2=\frac{1}{LC}$ בשוויון השלישי.

אכן ניתן לראות שהגענו למקדם האיכות האמור.

ניתן גם להגדיר את רוחב הפס כתלות ב- α:

$$\Delta f=\frac{\frac{w_0}{Q}}{2\pi}=\frac{2\alpha}{2\pi}=\frac{\alpha}{\pi}\quad\Rightarrow\quad \Delta w=2\pi\Delta f=2\alpha$$

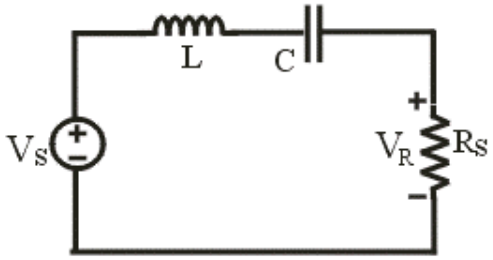
ובמקרה של תת ריסון (נזכיר שזהו המקרה עבור: $\alpha<w_0$ או $Q>\frac{1}{2}$) ניתן גם לקשר בין w_d ל- Q:

$$w_d = \sqrt{w_0^{\,2} - \alpha^2} = w_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\alpha = \frac{w_0}{2Q}$$

נסכם את שני מעגלי התהודה הנפוצים:

מעגל RLC טורי:



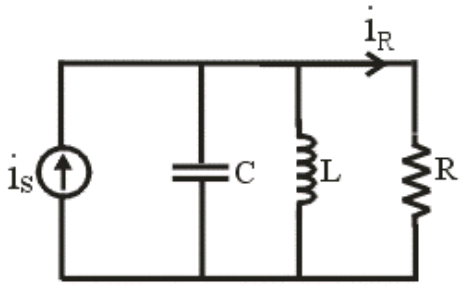
$$Q=\frac{w_0}{2\alpha}=\frac{w_0L}{R}=\frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$

$$H(jw)=\frac{V_R}{V_S}$$

$$Z(jw)=\frac{V_S}{I}=\frac{V_SR}{V_R}=\frac{R}{H(jw)}$$

מעגל RLC מקבילי:



$$Q=\frac{w_0}{2\alpha}=w_0CR=\frac{R}{w_0L}=\frac{R}{\sqrt{L/C}}$$

$$\alpha=\frac{1}{2RC}$$

$$H(jw)=\frac{I_R}{I_S}$$

$$Y(jw)=\frac{I_S}{V}=\frac{1}{RH(jw)}$$

עבור שני המעגלים:

$$Q=\frac{w_0}{2\alpha}$$

$$w_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$H(jw)=\frac{1}{1+jQ\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)}$$

$$w_1=w_0\left(1-\frac{1}{2Q}+\frac{1}{8Q^2}\right) \qquad w_2=w_0\left(1+\frac{1}{2Q}+\frac{1}{8Q^2}\right)$$

$$\Delta W=\frac{w_0}{Q}=2\alpha$$

<u>הספק במצב סינוסי עמיד</u>

הספק רגעי: $P(t) = V(t)\cdot i(t)$

אנרגיה: $W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt$

נחזור לרישום הפאזורי: $V(t) = Re\left[\tilde{V}e^{jwt}\right]$ $\quad \tilde{V} = V_m\angle\varphi_v$

$i(t) = Re\left[\tilde{I}\,e^{jwt}\right]$ $\quad \tilde{I} = I_m\angle\varphi_i$

נרשום את ההספק מחדש, הפעם עבור אותות סינוסואידליים:

$$V(t)\cdot i(t) = V_m\cdot I_m\cos(wt+\varphi_v)\cos(wt+\varphi_i) = \frac{1}{2}V_m\cdot I_m\cos(\varphi_v-\varphi_i)+\frac{1}{2}V_m\cdot I_m\cos(2wt+\varphi_v+\varphi_i)$$

נגדיר הספק ממוצע למחזור:

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t')dt'$$

מכיוון שהביטוי הראשון הוא קבוע בזמן, והביטוי השני הוא סינוסואידלי ויתאפס באינטגרציה ע"פ מחזור שלם, נקבל:

$$P_{av} = \frac{1}{2}V_m\cdot I_m\cos(\varphi_v-\varphi_i)$$

P_{av} הינו ממוצע למחזור והוא תלוי ב- $\varphi_v-\varphi_i$. אם $\varphi_v-\varphi_i = \frac{\pi}{2}$ אזי $P_{av}=0$, כלומר אין הספק ממוצע.

נגדיר: $\tilde{P} = \frac{1}{2}\tilde{V}\tilde{I}^* = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}\right|\left|\tilde{I}\right|e^{j(\varphi_v-\varphi_i)}$

ואז: $P_{av} = Re\left[\tilde{P}\right] = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}\right|\left|\tilde{I}\right|\cos(\varphi_v-\varphi_i)$

$$P_{av} = \frac{1}{2}\left|\tilde{I}\right|^2 Re[Z] = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}\right|^2 Re[Y]$$

תכונת הסיכום של הספק ממוצע:
אם זרם או מתח מעוררים בתדירויות שונות:

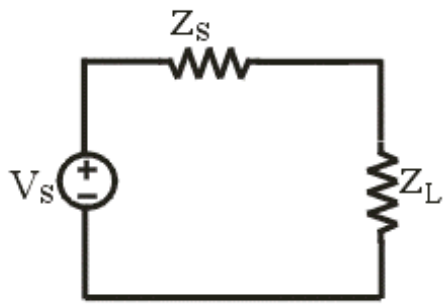
$$i(t) = I_1\cos(w_1t+\varphi_1)+I_2(w_2t+\varphi_2)$$
$$V(t) = V_1\cos(w_1t+\theta_1)+V_2\cos(w_2t+\theta_2)$$

אז ההספק הוא:

$$P(t) = \frac{1}{2}V_1I_1\cos(\varphi_1-\theta_1)+\frac{1}{2}V_2I_2\cos(\varphi_2-\theta_2)+\frac{1}{2}V_1I_1\cos(2w_1t+\theta_1+\varphi_1)+\frac{1}{2}V_2I_2\cos(2w_2t+\theta_2+\varphi_2)+$$
$$+\frac{1}{2}I_1V_2\cos((w_1-w_2)t+\varphi_1-\theta_2)+\frac{1}{2}I_1V_2\cos((w_1+w_2)t+\varphi_1+\theta_2)+\frac{1}{2}I_2V_1\cos((w_2-w_1)t+\varphi_2-\theta_1)+$$
$$+\frac{1}{2}I_2V_1\cos((w_1+w_2)t+\varphi_2+\theta_1)$$

ניתן לראות שההספק הרגעי איננו הסכום של שני ההספקים הרגעיים הנובעים משני הזרמים I_1, I_2, אבל לגבי ההספק הממוצע זה כן מתקיים: כאשר נבצע ממוצע של $p(t)$ על פני מחזור שלם, כל האיברים המכילים cos עם תלות זמנית יתאפסו ונישאר רק עם שני האיברים הראשונים. כלומר:

$$P_{av} = \frac{1}{2}V_1I_1\cos(\varphi_1-\theta_1)+\frac{1}{2}V_2I_2\cos(\varphi_2-\theta_2) = P_{av1}+P_{av2}$$



<u>העברת הספק אופטימלית:</u>

נתבונן במעגל הבא:

ההספק הממוצע על Z_L: $P_{av} = \frac{1}{2}\left|\tilde{I}\right|^2 \mathrm{Re}[Z_L]$

נציב: $\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_S}{Z_S + Z_L}$

ונקבל:

$$P_{av} = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}_S\right|^2 \frac{\mathrm{Re}[Z_L]}{\left|Z_S + Z_L\right|^2} = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}_S\right|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_S)^2 + (X_L + X_S)^2}$$

$$Z_L = R_L + jX_L$$
$$Z_S = R_S + jX_S$$

עבור $X_L = -X_S$ מקבלים: $P_{av} = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}_S\right|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_S)^2}$

כדי למצוא את ההספק המקסימלי לפי R_L נגזור ונשווה לאפס:

$$\frac{\partial P_{av}}{\partial R_L} = 0$$

$$\frac{(R_L + R_S)^2 - 2R_L(R_L + R_S)}{(R_L + R_S)^4} = 0$$

$$R_L = R_S$$

ואז ההספק המקסימלי הוא: $(P_{av})_{max} = \frac{1}{8}\left|\tilde{V}_S\right|^2 \cdot \frac{1}{R_S}$

כאשר: $Z_L = Z_S^*$ כלומר, $R_L = R_S$ ו- $X_L = -X_S$.

ההספק הנמסר ע״י המקור במקרה זה הוא:

$$(P_{av})_{source} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\left|V_S\right|^2 \frac{1}{Z_C + Z_S}\right\} = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}_S\right|^2 \frac{1}{R_L + R_S} = \frac{1}{2}\frac{\left|\tilde{V}_S\right|^2}{2R_S} = \frac{\left|\tilde{V}_S\right|^2}{4R_S}$$

לכן הניצול של ההספק של Z_L ביחס להספק המסופק ע״י המקור הוא: $\eta = 50\%$.

<u>תאור אנרגטי של פקטור Q בתהודה</u>

בתהודה מתקיים: $Q = \frac{w_0}{2\alpha} = w_0 CR = w_0 \cdot \frac{\frac{1}{2}C\left|\tilde{V}\right|^2}{\frac{1}{2}G\left|\tilde{V}\right|^2}$ (במעגל RLC מקבילי).

נוכיח ש - $\frac{1}{2}C\left|\tilde{V}\right|^2$ הוא האנרגיה האגורה בקבל + סליל בתהודה:

$$\frac{1}{2}CV_C{}^2 + \frac{1}{2}Li_L{}^2 = \frac{1}{2}C\left[\mathrm{Re}\left\{\tilde{V}e^{jw_0t}\right\}\right]^2 + \frac{1}{2}L\left[\mathrm{Re}\left\{\frac{\tilde{V}e^{jw_0t}}{jw_0L}\right\}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}C\left[\left|\tilde{V}\right|\cos(w_0t+\varphi)\right]^2 + \frac{1}{2}L\left[\frac{\left|\tilde{V}\right|}{w_0L}\sin(w_0t+\varphi-\frac{\pi}{2})\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}C\left|\tilde{V}\right|^2\cos^2(w_0t+\varphi) + \frac{1}{2}L\frac{\left|\tilde{V}\right|^2}{(w_0L)^2}\sin^2(w_0t+\varphi) = \frac{1}{2}C\left|\tilde{V}\right|^2$$

$$w_0{}^2 = \frac{1}{LC}$$

ולכן בתהודה ניתן לפרש את Q באופן הבא:

$$Q = w_0 \cdot \frac{\text{אנרגיה אגורה}}{\text{הספק ממוצע שמתבזבז בנגד}} = 2\pi\frac{\text{אנרגיה אגורה}}{\text{אנרגיה מבוזבזת במחזור יחיד}}$$