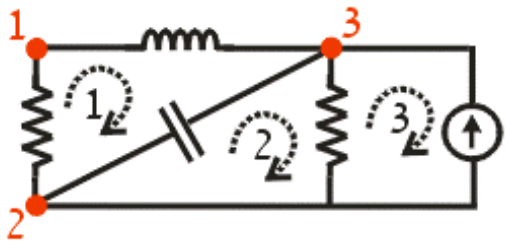
פרק 9 : תורת הרשתות

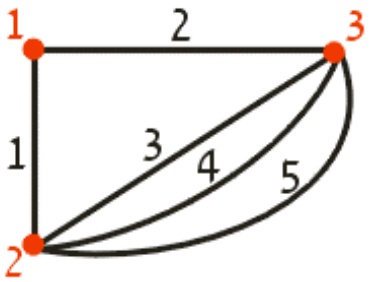
עד כה עסקנו בעיקר במעגלים פשוטים יחסית, עם מספר קטן של אלמנטים בכל מעגל, שניתנים לתיאור ע״י משוואות דיפרנציאליות עד סדר שני.
במציאות ישנם מעגלים מורכבים יותר, שכוללים עשרות אלמנטים, ונרצה גישה מערכתית שתעזור לנו לנתח גם מעגלים כאלו.
תורת הרשתות היא כלי שנלמד לצורך זה ונעסוק בו בפרקים הבאים.
לפי תורה זו נייצג מעגל חשמלי ע״י גרף ונבצע עליו ניתוח מתמטי שפתרונו יהיה מקביל לפתרון המעגל החשמלי.

מונחי יסוד :

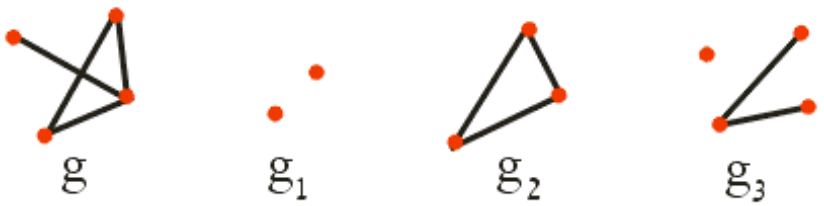
גרף : קבוצה של צמתים המקושרים ע״י ענפים :



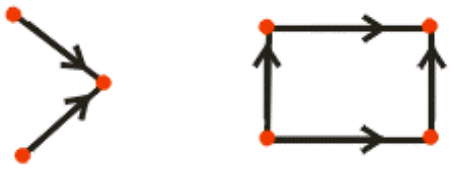
כל ענף מסתיים בצומת :



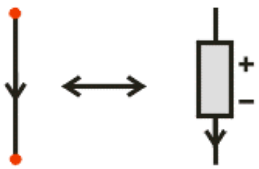
תת גרף : נתון גרף g. g_1 הוא תת גרף של g אם ורק אם כל צומת וכל ענף של g_1 שייכים ל g.
לדוגמא גרף g ותת הגרפים שלו g_1, g_2, g_3 :



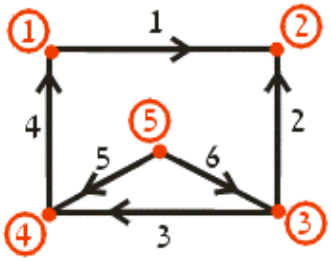
גרף מכוון : גרף שבו לכל ענף מיוחס גם כיוון :



בחשמל אם עובדים בשיטה מתואמת, מכיוון הענפים ניתן להסיק את כיוון הזרם והמתח :



<u>מטריצת הפגיעה</u> :
ניתן לייצג גרף בעזרת מטריצה. מטריצה זו נקראת מטריצת הפגיעה.
לדוגמא, נניח שנתון לנו הגרף הבא :



מטריצת הפגיעה (או מטריצה ה״צמתים - ענפים״) של הגרף היא הבאה :

$$
\begin{array}{c|c}
 & \text{ענפים (k)} \\
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\text{צמתים (i)} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [A]_{ik}
\end{array}
$$

כאשר החוקיות היא :

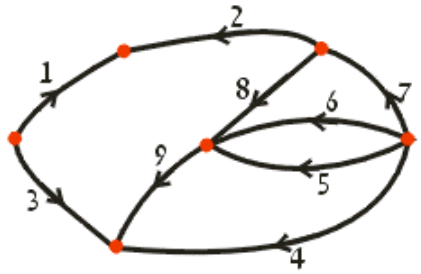
$$
(A)_{ik} = a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{אם ענף k יוצא מצומת i ,} \\ -1 & \text{אם ענף k נכנס לצומת i ,} \\ 0 & \text{אם ענף k לא פוגע בצומת i,} \end{cases}
$$

מטריצה זו מייצגת את הגרף בשלמותו, באופן חד חד ערכי. אפשר לשמור אותה בזיכרון המחשב.

<u>גרף קשור</u> : גרף בו כל שני צמתים קשורים ביניהם ע״י מסלול אחד לפחות.

<u>קבוצת חיתוך בגרף קשור</u> :
קבוצת ענפים בתוך גרף קשור המקיימת את התנאים הבאים :
א. אם נסיר את ענפי הקבוצה, הגרף הקשור ייהפך לגרף לא קשור.
ב. הסרת כל ענפי הקבוצה מלבד אחד מהם, עדיין משאירה את הגרף קשור.

דוגמא :



קבוצות חיתוך אפשריות בגרף זה:
(2,3) (2,4,9) (4,5,6,7) (1,8,7) ועוד.

מחוק גאוס ניתן להכליל את חוק KCL:

סכום כל הזרמים העוברים דרך כל <u>קבוצת חיתוך</u> שווה לאפס.

ואז נקבל את הקשרים הבאים בין הזרמים במעגל שמייצג הגרף:

$$i_2 - i_3 = 0$$
$$i_7 - i_6 + i_5 + i_4 = 0$$
$$i_2 + i_8 - i_7 = 0$$
$$i_7 + i_9 + i_4 = 0$$

ניתן לראות כי אם אחד הגרפים המבודדים ע"י קבוצת החיתוך הוא צומת בודדת, מקבלים חזרה את חוק הזרמים KCL בצורה המוכרת שלו.

<u>חוג</u>:
נתון גרף g. תת גרף בתוכו נקרא חוג אם:
א. הוא קשור.
ב. כל צומת בו משותפת לשני ענפים בלבד.

זה הזמן להיזכר בחוק המתחים של קירכהוף KVL: סכום המתחים על כל הענפים של חוג כלשהו שווה לאפס.

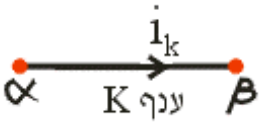
משפט Tellegen

נתון גרף מכוון בעל b ענפים שבו הזרמים מקיימים את KCL והחוגים מקיימים את KVL.

אזי מתקיים: $\sum_{k=1}^{b} V_K i_K = 0$.

<u>הוכחה</u>

נסמן את הצמתים באותיות יווניות:



נסמן מתח יחיד ביחס לצומת ייחוס e_α, ולפי KVL מפל המתח בכל ענף יהיה: $V_K = e_\alpha - e_\beta$.

נסמן: $i_K = i_{\alpha\beta}$, כאשר: $i_{\alpha\beta} = 0$ אם אין ענף בין α ל- β,

ונקבל: $\sum_{k=1}^{b} V_K i_K = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}(e_\alpha - e_\beta) i_{\alpha\beta}$

כאשר n הוא מספר הצמתים בגרף. שים לב שכל ענף נמנה פעמיים ($i_{\alpha\beta} = i_{\beta\alpha}$) ולכן יש $\frac{1}{2}$ לפני הסכימה.

נפשט את הביטוי שקיבלנו ע"י הפרדה לשני סכומים:

$$\sum_{k=1}^{b} V_k i_k = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha \sum_{\beta=1}^{n} i_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{n} e_\beta \sum_{\alpha=1}^{n} i_{\alpha\beta}$$

עבור β קבוע, $\sum_{\alpha=1}^{n} i_{\alpha\beta}$ הוא סכום הזרמים הנכנסים לצומת β,

ובאותו אופן עבור α קבוע, $\sum_{\beta=1}^{n} i_{\alpha\beta}$ הוא סכום הזרמים היוצאים מצומת α.

מחוק KCL נובע לכן ש: $\sum_{\alpha=1}^{n} i_{\alpha\beta} = \sum_{\beta=1}^{n} i_{\alpha\beta} = 0$.

נציב חזרה: $\sum_{k=1}^{b} V_k i_k = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha \cdot 0 - \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{n} e_\beta \cdot 0 = 0$.

לכן הוכחנו את המשפט.

מסקנה:

מקיום KCL ו KVL נובע חוק שימור האנרגיה:

אם נסמן: $V_K \cdot i_K$ - הספק שנצרך ע"י אלמנטים פסיביים,

$V_m \cdot i_m$ - הספק שמסופק ע"י מקורות,

נקבל:

$$\sum_m V_m i_m + \sum_K V_K i_K = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sum_m V_m i_m = \sum_K V_K i_K$$

המשפט היסודי של תורת הגרפים

(נושא זה מופיע בספר הלימוד בפרק 11)

מוטיבציה:

ידוע שכאשר מבצעים אנליזה לפי צמתים אזי אם נלקחים בחשבון $n-1$ מתוך n צמתים, מקבלים $n-1$ משוואות בלתי תלויות. כנ"ל לגבי עניבות. נניח שרוצים לרשום משוואה נוספת, כיצד נדע לבחור חוג או צומת כאלו שנקבל עבורם משוואה בלתי תלויה בשאר?

עץ:

נתון גרף קשור G ובתוכו תת גרף T. T הוא עץ של G אם מתקיימים התנאים הבאים:

1) T הנו גרף קשור.

2) T מקשר את כל הצמתים של g.

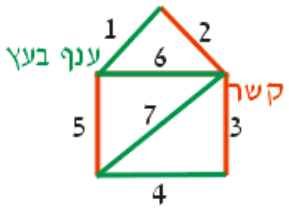
3) ל T אין חוגים.

לדוגמא: שני הגרפים בצד ימין הם עצים של הגרף השמאלי:

אם נתון גרף G ועץ T בתוכו, אזי ענפי הגרף מתחלקים לשני סוגים:

1) אם $K \in T$ נקרא לו ענף בעץ.

2) אם $K \notin T$ נקרא לו קשר.



המשפט היסודי של תורת הגרפים

נתון גרף g בעל n צמתים ו b ענפים. יהי T עץ בתוך g. אזי:

א. ישנו מסלול אחד בלבד דרך T המקשר בין שתי צמתים.

ב. מספר הענפים ב T הוא n-1 ומספר הקשרים הוא $b-(n-1)$.

ג. לכל קשר הנוצר ע"י T אפשר לייחס חוג אחד ויחיד המכיל רק את הקשר וענפי העץ. חוג זה נקרא חוג יסודי והוא נוצר ע"י הקשר וענפי T.

ד. לכל ענף ב T אפשר לייחס קבוצת חיתוך אחת ויחידה הכוללת רק ענף עץ יחיד (הוא עצמו). קבוצה זו נקראת קבוצת חיתוך יסודית.

ה. הפעלת KCL על קבוצת חיתוך יסודית נותנת $n-1$ משוואות בלתי תלויות.

ו. הפעלת KVL על החוגים היסודיים נותנת $b-n+1$ משוואות בלתי תלויות.

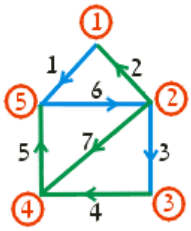
הבהרות ודוגמאות

א. אם היו שני מסלולים דרך T לקשר בין שתי צמתים, ניתן היה ליצור מהם עניבה בניגוד להגדרת העץ T.

ב. ניתן להראות שבעץ בעל n צמתים תמיד יהיו בדיוק n-1 ענפים. לא נביא כאן את ההוכחה.
כמובן שהקשרים הם שאר הענפים ולכן מספרם הוא מספר כל ענפי הגרף פחות מספר ענפי העץ.
בדוגמא שלפנינו:

מספר הענפים בעץ: $n-1$ (2,4,5,7)

מספר הקשרים: $b-n+1$ (1,3,6)



ג. נניח שהצמתים משני צדי הקשר הם j,k. מכיוון שהעץ כולל את כל צמתי הגרף, הוא כולל גם את j,k. לכן יש רק דרך אחת להגיע מ-j ל-k בתוך העץ (לפי סעיף א של המשפט). אם נוסיף למסלול זה את הקשר, נסגור חוג מעגלי.
כיוון שיש רק דרך אחת להגיע מצומת לצומת דרך העץ הרי שהחוג נקבע באופן חד ערכי ולכן הוא יחיד.
חוגים יסודיים בדוגמא:
נסמן ב = את הקשר:
(1,2,7,5) (6,5,7) (3,4,7)

ד. לא נוכיח סעיף זה. ניתן דוגמא:
קבוצות חיתוך יסודיות:
נסמן ב = את הענף בעץ:
(2,1) (7,1,6,3) (5,6,1) (4,3)

ה. כל קבוצת חיתוך מסעיף קודם נותנת משוואת KCL אחת שהיא בלתי תלויה בשאר. מספר קבוצות החיתוך הוא כמספר ענפי העץ, כלומר $n-1$, ולכן סה"כ מקבלים $n-1$ משוואות KCL ב"ת.
מדוע כל קבוצת חיתוך נותנת משוואה שאינה תלויה באחרות? כי בכל משוואה ישנו נעלם אחד שמופיע רק בה (ענף העץ שמופיע רק בקבוצת החיתוך הזו).

ו. באופן דומה, כל קשר יוצר חוג יסודי שנותן משוואת KVL אחת שבה מופיע נעלם ב"ת (הקשר עצמו). לכן יש משוואות KVL ב"ת שמספרן כמספר החוגים היסודיים, כלומר כמספר הקשרים: $b-n+1$.

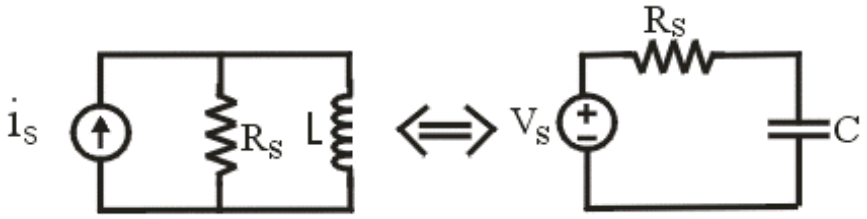
בחזרה למוטיבציה - מציאת כל הנעלמים בגרף: אם ניקח את כל המשוואות שהזכרנו בסעיפים ה, ו, נקבל בדיוק b משוואות ב"ת כך שנוכל למצוא את כל הנעלמים.

<u>דואליות</u>
(נושא זה מופיע בספר הלימוד בפרק 10)

כזכור, בפרק 5 הראינו שקיימת דואליות בין מעגל RLC טורי למעגל RLC מקבילי, אם משתמשים בהחלפות הבאות:

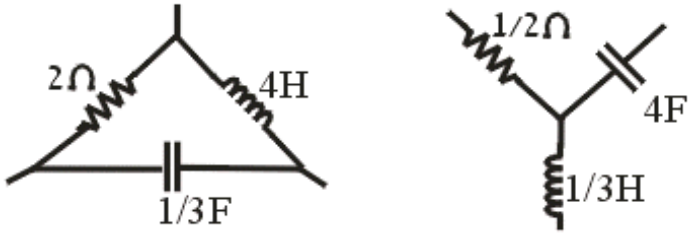
זרם	⇔	מתח
R	⇔	G
C	⇔	L
עניבה	⇔	צומת

ניתן להשתמש בעיקרון זה על מעגל כלשהו, ולקבל מעגל דואלי שלעיתים קל יותר לנתח.
לדוגמה, המעגלים הבאים הם דואליים:



אלגוריתם לבניית מעגל דואלי:
1. מציינים נקודה במרכז כל עניבה, כולל העניבה החיצונית. סה"כ מקבלים $b-n+2$ נקודות.
2. מקשרים נקודות בתוך עניבות סמוכות דרך הענפים המשותפים ויוצרים ע"י כך את ענפי המעגל הדואלי.
3. בכל ענף דואלי שהתקבל מציבים אלמנטים דואליים עם הערכים המתאימים.

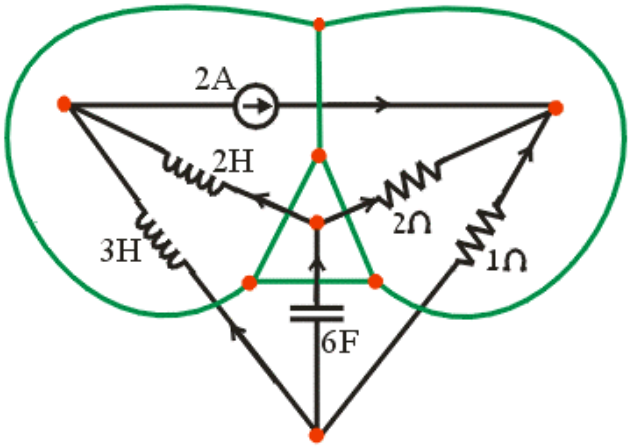
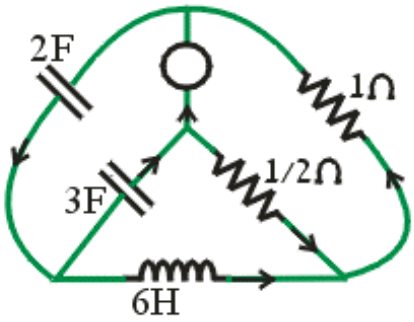
לדוגמה:



כיוונים:
אנו נקבע את כיווני הענף הדואלי באופן הבא:
כיוון הזרם יוצא מהצומת במעגל המקורי ↔ כיוון מתח עם כיוון השעון בענף השקול
כיוון הזרם לתוך הצומת במעגל המקורי ↔ כיוון המתח נגד כיוון השעון בענף השקול

מכיוון שראינו שניתן לייצג מעגל ע"י גרף, אז ניתן כמובן ליצור גרפים דואליים:

הגרף הנתון:



הגרף הדואלי: