בס"ד

מינהל הסטודנטים **מדור הבחינות**

אוניברסיטת בר-אילן — מסורת של מצוינות

מספר סידורי 0061746

המחברת נבדקה ביום: ________

הציון: ________

חתימת המרצה: ________

מס' סידורי ____ מתוך ____ מחברות

מס' מח' : 34

שנת :תשע"א סמסטר :1 מועד :1 מטלה : 1

קורס : 01 210 83 אנליזה הרמונית

הוראות לנבחן

1. עליך להבחן בחדר בו הנך רשום.
2. הנח ליד המשגיח בבחינה את חפציך האישיים כגון: תיקים, ספרים, מחברות, מכשירים סלולריים, קלמרים וכו'.
3. אסור להחזיק בהישג יד חומר הקשור לבחינה/לקורס אלא אם הותר הדבר בכתב על ידי המרצה ורק בהתאם למותר.
4. מסור למשגיח/ה על הבחינה תעודת זהות וכרטיס נבחן חתום ותקף לסמסטר בו מתקיימת הבחינה.
5. **היציאה לשירותים במהלך הבחינה אסורה בהחלט.** נשים בהריון ונבחנים באישור מתאים רשאים לבקש מהמשגיח/ה לצאת. היציאה בליווי המשגיח/ה ובהתאם לנוהלי האוניברסיטה.
6. נבחן היוצא ללא רשות מחברתו תפסל ותועבר לועדת משמעת.
7. יש להישמע להוראות המשגיח/ה. אין לעזוב את חדר הבחינה ללא קבלת רשות. חל איסור מוחלט לפנות לנבחנים אחרים בכל עניין ודבר. **בכל עניין פנה למשגיח/ה.**
8. בתחילת הבחינה מלא את פרטיך האישיים ע"ג המחברת. תלמיד שקיבל לידיו שאלון ואין ברצונו להיבחן, חייב להמתין 1/2 שעה בכיתה מתחילת הבחינה. תלמיד שעזב את האולם אחרי חלוקת השאלונים או לא מסר את מחברתו עד תום הבחינה או מסר מחברת ריקה - דינו כדין נכשל.
9. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשגיח/ה.
10. יש לכתוב את התשובות בדיו, בכתב ברור ונקי **על עמוד אחד של כל דף**. אין לכתוב בשוליים, הכותב טיוטה יקדיש לה את הצד הימני של המחברת ואת ההעתקה הנקיה יכתוב בצד השמאלי. את הטיוטה יש למחוק בהעברת קו. אסור לתלוש דפים מן המחברת.
11. עבר הנבחן על תקנות הבחינות, תשלל ממנו הרשות להמשיך בבחינה, והוא יועמד לדין משמעתי.
12. משך זמן הבחינה מצויין בראש השאלון. עם הודעת המשגיח/ה כי תם הזמן, על הנבחן להפסיק את הבחינה, למסור את המחברת עם השאלון ולצאת מאולם הבחינה. מחברת שלא נמסרה בתום ההודעה לא תיבדק.
13. אחזקת מכשיר טלפון סלולרי (אפילו סגור) ברשות הנבחן, מביאו מיידית לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

שנה"ל תשע"א סמסטר א' מועד א'

מס' קורס 83-210-01

מחלקה הנדסה תאריך 8/2

המרצה פרופ' יורדנסקי

מבחן חלק ____ (אם הבחינה בשני חלקים)

ועדת המשמעת מזהירה!

נבחן שיימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או ייתפס בהעתקה, ייענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

הוראות לנבחן בנושא סריקה:

אין לכתוב במחברת בעפרון. יש לכתוב בעט בצבע כחול כהה או שחור בלבד. אין להשתמש בנוזל מחיקה (טיפקס).
אין לכתוב בשוליים משני צידי הדף. מחברת בכתב מרושל משפיעה על תוצאות הסריקה.

שים לב! השוליים יחתכו לפני הסריקה, לכן, חל איסור מוחלט

1 +
2 + -2
3 +
4 +
5 +
2 6 +
7 +

100

$$\left(\frac{\sin^2(x)}{x^2}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{\cancel{2}\cdot \sin(x)\cdot\cos(x)}{\cancel{2}x}\left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{1} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

טיוטה

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\int^{\pi} e^x\cdot\cos(x)\,dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cdot\cos(x)\,dx\cdot\cos(n\pi)$$

טיוטה

$$\frac{e^{\pi}}{2}+\frac{e^{-\pi}}{2}-\frac{e^{\pi}}{2\pi}+\frac{e^{-\pi}}{2\pi} = \frac{\pi\cdot e^{\pi}+\pi\cdot e^{-\pi}-e^{\pi}+e^{-\pi}}{2\pi} =$$

$$= \frac{e^{\pi}(\pi-1)+e^{-\pi}(\pi+1)}{2\pi}$$

$$\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}$$

$$\frac{\pi e^{\pi}}{2\pi}+\frac{\pi e^{-\pi}}{2\pi}-\frac{e^{\pi}}{2\pi}+\frac{e^{-\pi}}{2\pi}$$

$$\frac{e^{\pi}\cdot(\pi-1)+e^{-\pi}(\pi+1)}{2\pi}$$

(1)

(א) נאמר שתנאי דיני מתקיימים בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ אם מתקיימים שני התנאים הבאים

עבור $\delta > 0$:

(א) $$\int_0^{\delta} \left| \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t} \right| dt < \infty$$

(ב) $$\int_0^{\delta} \left| \frac{f(x_0-t) - f(x_0-0)}{t} \right| dt < \infty$$

(ב) אם מתקיימים תנאי דיני בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$, אזי:

$$\cancel{\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cdot\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)+b_n\cdot\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right]\right\}=\lim_{N\to\infty}S_N[(f(x))]=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

במילים: הטור פוריה של הפונק׳ מתכנס לממוצע האריתמטי של הגבולות החד״צ.

(ג) נתון הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cdot\cos(nx)\,dx$$

בקטע $[-\pi,\pi]$

נשים לב שזהו טור פוריה של הפונק׳ e^x, בנקודה π, פחות האיבר a_0.

טור פוריה מלא ל- e^x:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}e^x\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left[e^{\pi}-e^{-\pi}\right]$$

$$f(x)=e^x\sim\frac{1}{2\pi}\cdot\left[e^{\pi}-e^{-\pi}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{\left[\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cdot\cos(nx)\,dx\right]}_{a_n}\cdot\cos(nx)+\underbrace{\left[\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cdot\sin(nx)\,dx\right]}_{b_n}\cdot\sin(nx)\right\}$$

נ״ב $x=\pi$. נקבל:

כאשר $x=\pi$ כל האיבר מתאפס.

$$f(x)=e^x\sim\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\left[\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cdot\cos(nx)\,dx\right]$$

ולכן כל אחרי... קיים

הפונק׳ מקיימת את תנאי דיריכלה (+ רציפות ~~למקוטעין~~ סופיות), ולכן:

לפי משפט דיריכלה להתכנסות נקודתית

$$\frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2}=\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\left[\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cdot\cos(nx)\,dx\right]$$

ולכן:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cdot\cos(nx)\,dx=\frac{e^{\pi}\cdot(\pi-1)+e^{-\pi}(\pi+1)}{2\pi}}$$

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2}\Big|_{x=0} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{2x} = \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{1}} = \frac{1}{1}$$

1:

ה(ו):ג

$$2\cdot\cancel{\sin(x)\cdot\cos(x)}$$

$$\frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot x^2 - 2x\cdot\sin^2(x)}{x^4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty$$

$\sin(\theta)\cdot\cos$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < \infty$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar N \mid \forall n>\bar N\ \sup_{x\in(-\pi,\pi)}[f_n(x) -$

$f(x) = \cancel{\tfrac{1}{\ln}}$

$f(x) = \sqrt{\ln(x-\pi)}$

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2}$$

$$\frac{\cancel{\cos(x)} - x\cdot\sin(x) \cancel{- \cos(x)}}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{-\sin(x) - x\cdot\cos(x)}{2}$$

$|f(x)|^2 = \ln(x-\pi)$

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2}\Big|_{x=0} = \frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{2x} =$$

$\frac{1}{\sqrt{x-\pi}}$

$$\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{x} = \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{x} = \frac{1}{0}$$

$\frac{1}{x-\pi}$

$$\frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot x - 2\cdot\sin^2(x)}{x^3}$$

$$\frac{2\cdot\cos^2(x)\cdot x - 2\cdot\sin^2(x)\cdot x + \cancel{2\cdot\cos(x)\sin(x) - 2\sin(x)\cdot\cos(x)}}{3x^2}$$

$\ln(x-\pi)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$

$$\frac{2\cdot\cos^2(x) - 2\cdot\sin^2(x)}{3x} = 1 \qquad \frac{2\pi k}{T}\cdot x$$

$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cdot\cos(\varphi) + \cos($ $\quad$ $b = a_2$

T

$n=1:$

$\frac{2\pi k}{T} x$

קפ"ץ.

(2)

(א) כדי שטור פוריה יתכנס במ"ש נדרוש שלושה תנאים:

(*) ~~$f\in C(\mathbb{R})$~~ ~~ובנוסף~~ (*) $f\in C[-\pi,\pi]$

(*) ~~$f'\in E(\mathbb{R})$~~ (*) $f'\in E[-\pi,\pi]$

(*) $f(\pi)=f(-\pi)$ (שוויון בקצוות).

ואז נוכל לומר: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\cdot e^{inx}$ ← שווה ממש

(*) הגדרה פורמלית: $\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{N}\in\mathbb{N}\ |\ \forall n>\bar{N}: \sup_{x\in[-\pi,\pi]}[S_n(x)-S(x)]<\varepsilon$ ✓

(ב) נאמר שפונק' $f(x)$ מתכנסת ב- $L^2[-\pi,\pi]$ אם מקיים: ← ([illegible])

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx<\infty$$ הגדרה

(הפונק' $\frac{1}{\sqrt{x-\pi}}$ לדוג', אינה מתכנסת ב- $L^2[-\pi,\pi]$).

ובמילים: הפונק' בעלת אנרגיה סופית בקטע $[-\pi,\pi]$.

(ג) נבדוק עבור כל פונק' את קיום שלושת התנאים שציינתי בסעיף א':

(*) מיד נראה שהפונק' (3) e^x אינה מתכנסת במ"ש, משום שאינה מקיימת את תנאי (3) (שוויון בקצוות): $f(\pi)=e^{\pi}\neq e^{-\pi}=f(-\pi)$ ✓

(*) נבדוק עבור $\frac{\sin(x)}{x}$: הפונק' שייכת ל-$C(\mathbb{R})$ (בנקודה $x=0$ היא נקודה סליקה $=1$).

נגזרת:

$$\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]'=\frac{\cos(x)\cdot x-\sin(x)}{x^2}\Big|_{x=0}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{לופיטל}}{=}\frac{\cos(x)-x\cdot\sin(x)-\cos(x)}{2x}=$$

$$=\frac{-x\cdot\sin(x)}{2x}\Big|_{x=0}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{לופיטל}}{=}\frac{-\sin(x)-x\cdot\cos(x)}{2}=0$$

מתקיים (ג')

נבדוק בנקודה הסינגולרית $x=0$ הלופיטל

אם כן, הנגזרת שייכת ל- $E(\mathbb{R})$. כמו כן הפונק' זוגית:

$$f(\pi)=\frac{\sin(\pi)}{\pi}=\frac{\sin(-\pi)}{-\pi}=f(-\pi)$$

← לכן הפונק' הראשונה מתכנסת במ"ש

(*) עבור $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$: נשים לב שהפונק' נמצאת ב- $C(\mathbb{R})$ (הנקודה $x=0$ היא נקודה סליקה $=1$). נבדוק לגבי הנגזרת:

$$\left[\frac{\sin^2(x)}{x^2}\right]'=\frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot x^2-2x\cdot\sin^2(x)}{x^4}=\frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot x-2\cdot\sin^2(x)}{x^3}\Big|_{x=0}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{לופיטל}}{=}$$

$$=\frac{2\cdot\cos^2(x)\cdot x-2\cdot\sin^2(x)\cdot x+2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)-4\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{3x^2}=$$

$$=\frac{2\cdot\cos^2(x)\cdot x-2\cdot\sin^2(x)\cdot x-2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{3x^2}\Big|_{x=0}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{לופיטל}}{=}$$

המשך ←

המשך.

$$= \frac{-4\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)\cdot x + \cancel{2\cos^2(x)} - 4\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot x \cancel{-2\sin^2(x)} \cancel{-2\cos^2(x)} \cancel{+2\sin^2(x)}}{6x} =$$

$$= \frac{-8\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)\cdot x}{6x} = \frac{-8\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)}{6}\Big|_{x=0} = \underline{\underline{0}}$$

אם כן, $f' \in E(-\pi,\pi)$. כמו כן הפונקציה זוגית, ולכן $F(\pi)=F(-\pi)$ $(=0)$.

לכן $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ מתכנסת במ"ש.

(*) נבדוק עבור e^{x^2}: הפונקציה שייכת ל- $C(\mathbb{R})$.

נגזרת: $f'=2x\cdot e^{x^2}$ ~~...~~ שייכת ל- $C(\mathbb{R})$

(ובפרט ל- $E(\mathbb{R})$) כמו כן היא זוגית, ולכן מתכנסת במ"ש.

(*) עבור $|x|$. אמנם הפונקציה זוגית (ולכן $f(\pi)=f(-\pi)$) ושייכת ל- $C(\mathbb{R})$,

אולם הפונקציה אינה גזירה בנקודה $(x=0)$, ולכן הפונקציה אינה מתכנסת במ"ש.

(הנגזרת אינה שייכת ל- $E[-\pi,\pi]$).

$\boxed{\text{לסיכום: טורי פורייה של הפונק' הבאות לא מתכנסות במ"ש: } e^{x},\ |x|}$

$(-1)^{n+1}-1$

עמ'

3

הקטע הינו קטע סימטרי.

א) הפונק' הינה פונק' אי זוגית, ולכן $\forall n: a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{1-(-1)} \cdot \int_{-1}^{1} \sin(x)\cdot\sin(nx)\,dx = \int_{-1}^{1} \sin(x)\cdot\sin(nx)\,dx =$$

(נוסחה מדף נוסחאות)

$$= \left\{ \sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos(\theta-\varphi) - \cos(\theta+\varphi)\right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\cos[(1-n)x] - \cos[(1+n)x]\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin[(1-n)x]}{1-n} - \frac{\sin[(1+n)x]}{1+n}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin(1-n)}{1-n} - \frac{\sin(1+n)}{1+n} - \frac{\sin(-(1-n))}{1-n} + \frac{\sin(-(1+n))}{1+n}\right] =$$

ראה הערה בנוגע ל- $n=1$ בעמ' שאחרי.

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2\cdot\sin(1-n)}{1-n} - \frac{2\cdot\sin(1+n)}{1+n}\right] = \frac{\sin(1-n)}{1-n} - \frac{\sin(1+n)}{1+n}$$

ולכן:

$$\boxed{x:[-1,1] \qquad \sin(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(1-n)}{1-n} - \frac{\sin(1+n)}{1+n}\right]\cdot\sin(\pi k x)}$$

ב) לפונק' אין סימטריה, לכן נחשב בקטע $[0,\pi]$:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cdot\cos(nx)\,dx = \left\{\begin{matrix} u=\sin(x) \;;\; du=\cos(x) \\ dv=\cos(nx) \;;\; v=\frac{\sin(nx)}{n}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{\sin(x)\cdot\sin(nx)}{n} - \frac{1}{n}\int\cos(x)\cdot\sin(nx)\,dx\right] = \left\{\begin{matrix} u=\cos(x) \;;\; du=-\sin(x) \\ dv=\sin(nx) \;;\; v=\frac{-\cos(nx)}{n}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{\sin(x)\cdot\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(x)\cdot\cos(nx)}{n^2} + \frac{1}{n^2}\int\sin(x)\cdot\cos(nx)\,dx\right];$$

$$\Longrightarrow I = \frac{2\cdot\sin(x)\cdot\sin(nx)}{\pi n} + \frac{2\cdot\cos(x)\cdot\cos(nx)}{\pi n^2} + I\cdot\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{2}{\pi}$$

$$\Longrightarrow I\left(\frac{\pi n^2-2}{\cancel{\pi n^2}}\right) = \frac{2}{\cancel{\pi n^2}}\cdot\left[n\cdot\sin(x)\cdot\sin(nx) + \cos(x)\cdot\cos(nx)\right]$$

$$\longrightarrow I = \frac{2}{(\pi n^2-2)}\cdot\left[n\cdot\sin(x)\cdot\sin(nx) + \cos(x)\cdot\cos(nx)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{(\pi n^2-2)}\cdot\left[(-1)\cdot(-1)^n - 1\cdot 1\right] = \frac{2}{(\pi n^2-2)}\left((-1)^{n+1} - 1\right)$$

המשך בעמוד הבא ←

סעי' ג.

ואם כן, קיבלנו ש:

$$\cancel{a_n = \frac{2\cdot[(-1)^{n+1}-1]}{\pi(n^2-1)}} \qquad a_n = \frac{2\cdot[(-1)^{n+1}-1]}{\pi n^2-2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot[1+1] = \frac{4}{\pi} \;;\; \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$\cancel{f(x) = \sin(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^{n+1}-1]}{\pi(n^2-1)}\cos(nx)}$$

טור פורייה של $\sin(x)$ לפי $\cos(x)$

הערה בונוס: שמתי לב שכאשר $n=1$ יש נקודה סינגולרית.

לכן המקדם b_1 יוצא: $b_1 = 1 - \frac{\sin(2)}{2}$.

בכל זאת, נבדוק זאת בנפרד:

$$b_1 = \int_{-1}^{1}\sin^2(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}\right]dx =$$

$$= \left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}-\frac{\sin(2)}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\sin(-2)}{4} =$$

$$= 1 - \frac{\sin(2)}{2}.$$

(ג)

$$\boxed{f(x) = \sin(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot[(-1)^{n+1}-1]}{\pi n^2-2}\cdot\cos(nx)}$$

$f*f = 2\pi\cdot\hat{f}$

(4) (ב) $a, b > 0$, $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f * e^{-\frac{x^2}{a^2}} = e^{-\frac{x^2}{b^2}}$$

לפי משפט הקונבולוציה:

$$(1) \quad 2\pi \cdot \hat{f}(\omega) \cdot \mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{a^2}}](\omega) = \mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{b^2}}]$$

נחשב $\mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{a^2}}]$

נוסחה כללית: $\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$

אצלנו: $a = \frac{1}{a^2}$

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{a^2}}] = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{a}} \cdot e^{\frac{-\omega^2 a^2}{4}}$$

$$\longrightarrow \mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{a^2}}] = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{\omega^2 a^2}{4}}$$

ובהתאמה:

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{b^2}}] = \frac{b}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{\omega^2 b^2}{4}}$$

נציב ב-(1):

$$2\pi \cdot \hat{f}(\omega) \cdot \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{\omega^2 a^2}{4}} = \frac{b}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{\omega^2 b^2}{4}}$$

$$\longrightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{\omega^2 b^2}{4}}}{e^{-\frac{\omega^2 a^2}{4}}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2 b^2}{4} + \frac{\omega^2 a^2}{4}} =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}(b^2 - a^2)}$$

כאשר $\omega \to \pm\infty$.

אז שיהיה פתרון, נדרוש שהתמונה פורייה תתכנס לאפס ב-∞,

ולכן (אז נקבל חזקה שלילית של ה-e) ✓ $b^2 > a^2 \Leftarrow |b| > |a|$

<u>נמצא את $f(x)$:</u>

לפי מה שאמרנו לעיל:

$$\mathcal{F}[e^{-Ax^2}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi A}} \cdot e^{\frac{-\omega^2}{4A}}$$

אצלנו:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}(b^2 - a^2)} \qquad \left\{ A = \frac{1}{b^2 - a^2} \right\}$$

נרשום את התמונה בצורה הבאה:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \underbrace{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{b^2-a^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{b^2-a^2}}}}_{\text{כפלנו וחילקנו בקבוע}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}(b^2 - a^2)}$$

התמונה פורייה לעיל

ולכן:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\pi} \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{b^2-a^2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{b^2-a^2}}$$

המשך בעמוד הבא:

בסק"ד.

ולאחר "סידור" בקבועים, נקבל:

$$\boxed{f(x) = \frac{b}{a\cdot\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{b^2-a^2}}} \longrightarrow \alpha<(b^2-a^2)$$

נשים לב ש:
לכן ההתמרה של e
תמיד תהיה
שלילית (הסימן "פ-" $\ldots^2$)

(3)(ג)(1)

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^{2m}}$$

נבדוק מתי המומנט המוגדר התכנס בתנאי, לפי הגדרה:

$$M_k := \int_{-\infty}^{\infty}|x^k\cdot f(x)|dx = $$

$$\text{בתנאי} \Leftarrow = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{x^k\cdot\arctan(x)}{1+x^{2m}}\right|dx$$

נשים לב ש:

$$-\frac{\pi}{2}\frac{x^k}{1+\cancel{x^{2m}}} \le \frac{x^k\cdot\arctan(x)}{1+x^{2m}} \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^k}{1+x^{2m}}$$

ולכן, לפי מבחן ההשוואה ב, ההתכנסות של $\frac{x^k\cdot\arctan(x)}{1+x^{2m}}$ היא כמו

ההתנהגות של $\frac{x^k}{1+x^{2m}}$, כלומר להתנהגות של $\frac{x^k}{x^{2m}} = \frac{1}{x^{2m-k}}$

אם שהאינטגרל הנ"ל אמיתי מסוג ראשון, נקבל, ידוע: $\frac{1}{x^\alpha} \to \alpha > 1$

ולכן: $2m-k>1 \longleftarrow 2m-1>k$

כלומר אזורית: $\boxed{k = 2m-2}$

התמרת פוריה $\hat{f}(\omega)$ דיפרנציאבילית ברציפות $(2m-2)$ פעמים.

(ב)

(1) $f(x) = 2\cdot x\cdot e^{-x^2}$

$$\left\{\text{חישוב עזר:}\quad \mathcal{F}[e^{-x^2}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}\right\}$$

$$\hat{f}(\omega) = -2\cdot i\cdot\frac{d}{d\omega}\left[\mathcal{F}[e^{-x^2}]\right] =$$

$$= -2\cdot i\cdot\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}\right] = \frac{-i}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{d\omega}\left(e^{-\frac{\omega^2}{4}}\right) = \frac{-i}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(-\frac{2\omega}{4}\right)\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}} =$$

$$= \boxed{\frac{\omega i}{2\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}} = \hat{f}(\omega)}$$

הערה: נשים לב גם ש- $f(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)$,

ולכן התמרת פוריה: $\hat{f}(\omega) = i\cdot\omega\cdot\mathcal{F}[e^{-x^2}] = \frac{i\cdot\omega}{2\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}$,

בסה"כ, זה נכון.

(2) $f(x) = \dfrac{e^{2i\cdot x}}{x^2+1}$

חשוב לזכור: $\mathcal{F}\left[\dfrac{1}{x^2+1}\right](\omega) = \dfrac{e^{-|\omega|}}{2}$

עפ״י משפט ההזזה בתדר:

$$f(x) = e^{\omega_0 i x}\cdot g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega-\omega_0)$$

ואצלנו: נגדיר: $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

$$f(x) = e^{2ix}\cdot g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega-2) = \boxed{\frac{e^{-|\omega-2|}}{2} = \hat{f}(\omega)}$$ ✓

(3) $f(x) = x\cdot\Psi(x) = x\cdot\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$

$\cancel{\mathcal{F}[\Psi(x)] = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}}$

חשוב לזכור: $\mathcal{F}[\Psi(x)] = \dfrac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

$$\hat{f}(\omega) = i\cdot\frac{d}{d\omega}\cdot\left[\frac{\sin(\omega)}{\pi(\omega)}\right] = i\cdot\left[\frac{\cancel{\pi}\cos(\omega)\cdot\omega - \cancel{\pi}\sin(\omega)}{\pi^{\cancel{2}}\cdot\omega^2}\right]$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{f}(\omega) = \frac{i\cdot[\omega\cdot\cos(\omega) - \sin(\omega)]}{\pi\cdot\omega^2}}$$ ✓

המשך.

③ תרגיל $I=\int\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$ בעזרת שוויון פרסבל

(*) נגדיר: $f(x)=\psi(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$

לפי שוויון פרסבל:

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2d\omega$$

נחשב את אגף שמאל:

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-1}^{1}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot 2=\frac{1}{\pi}$$

כלומר:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2d\omega=\frac{1}{\pi}$$

וגם $\hat{\psi}(\omega)=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$. כפי שראינו:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(\omega)}{\pi^2\cdot\omega^2}d\omega=\frac{1}{\pi}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}d\omega=\frac{\pi^2}{\pi}=\pi$$

$\longrightarrow \{x=\omega\}$

$$\longrightarrow \boxed{I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx=\pi}$$

✓

דפוס
טל. 03-5604070