

מחלקת המבחנים
בית הספר להנדסה
מרצה: פרופ' מרק אגרונובסקי
סמסטר א', מועד א' תשע"א: ד' באדר א' תשע"א (8.2.2011)
משך הבחינה: 150 דקות.

שאלון בחינה בקורס: אנליזה הרמונית (83-210-01)
בית הספר להנדסה
מרצה: פרופ' מרק אגרונובסקי
סמסטר א', מועד א' תשע"א: ד' באדר א' תשע"א (8.2.2011)
משך הבחינה: 150 דקות.

שאלות

- א. נסח תנאי Dini לפונקציה $f \in E(\mathbb{R})$ בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$.
ב. נסח משפט Dirichlet על התכנסות נקודתית של טורי פוריה.

ג. מצא את הסכום של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix} \cos nx dx$

- היה $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ טור פוריה בקטע $[-\pi, \pi]$.

תן הגדרה של התכנסות של הטור פוריה

א. במידה שווה

ב. ב- $L^2(\mathbb{R})$ $[-\pi, \pi]$

ג. טור פוריה של איזה פונקציה או פונקציות הוא לא מתכנס במידה שווה?

(1) $\frac{\sin x}{x}$, (2) $\frac{\sin^2 x}{x^2}$, (3) e^x , (4) e^{x^2} , (5) $|x|$
נמק את התשובה.

הערה: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw$
 $\hat{f}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$

- בנה טור פוריה של פונקציה $\sin x$ בקטע $[-1, 1]$ ובקטע $[0, \pi]$ לפי קוסינוסים.

- א. מצא תנאים למספרים $a, b > 0$ כך שקיימת פתרון $f \in L^2(\mathbb{R})$ של המשוואה

$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos f(x) \cosh x dx$
 $f * e^{\frac{x^2}{a^2}} = e^{\frac{x^2}{b^2}}$
ב. מצא f (תחת התנאים מסעיף א').

- א. כמה פעמים התמרת הפוריה $\hat{f}(w)$ כאשר $f(x) = \frac{\arctan x}{1+x^{2m}}$ היא דיפרנציאבילית ברציפות?

ב. מצא $\hat{f}(w)$ כאשר $f(x) = -2xe^{-x^2}$; $f(x) = \frac{e^{2ix}}{x^2+1}$; $f(x) = x\chi_{(a,b)}$

ד. בעזרת שיוויון פרסבל, חשב $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

$e^{-a|x|} \leftrightarrow \frac{a}{\pi(a^2+w^2)}$
 $e^{-ax^2} \leftrightarrow \frac{1}{\pi(1+w^2)}$

בהצלחה!

$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

$\chi_{|x| \leq 1} = \int_{-1}^1 1 dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$