ד"ר ש. נבו 83-211-01 מועד א'

21.2.06

מבחן בפונקציות מרוכבות למהנדסים

ענה על 5 מ-6. לא תימר עצר. נמק תשובותיך, שרטטים ורקע.

1. מצא כל המספרים $z \in \mathbb{C}$ כך ש $z^2 = \bar{z}$.

2. מצא היכן גזירה $f(z)=x^2+iy^2$ והיכן היא אנליטית.

3. חשב $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(e^z-1)}$

4. מצא כל טורי לורן של $f(z)=\frac{2z+1}{z(z-1)^2}$ בטבעת סביב $z=1$.

5. א. נניח כי ל-$f(z)$ קטב מסדר 3 ב-z_0 וכי ל-$h(z)$ ול-$r(z)$ קטב מסדר 2 ב-z_0. איזה סינגולריות יש ל-$\frac{f(z)+h(z)}{f(z)-r(z)}$ ב-z_0.

ב. נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה ומקיימת $|f(z)|$ לכל $z \in \mathbb{C}$. הוכח כי f קבועה.

6. הוכח כי $f(z)=6e^z+z^2-1$ אינה מתאפסת ב-$\{|z|<1\}$.

בהצלחה!

נוסחאות עזר:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$$

משוואות קושי-רימן $f=u+iv$ $\quad u'_x=v'_y \ , \ u'_y=-v'_x$

ענף ראשי של הלוגריתם $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\arg z$, $-\pi<x\le\pi$, $z \in \mathbb{C}$

אם ל-f קוטב מסדר m ב-z_0 אז

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$$

יעדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

פתרון מועד א' ל' מרוכבים - מתמשים 21.2.06

1. $z=re^{i\theta}$ $\quad r^2e^{2i\theta}=re^{-i\theta} \Leftarrow [r=0]$ או $[r=1,\ e^{3i\theta}=1]$

כלומר $z^3=1$ לכן $z=1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$ או

$$\boxed{z=0,1,-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

דרך אחרת: קורדינטות קרטזיות $z=x+iy$ $\quad (x+iy)^2=x-iy$

$\Leftarrow x^2-y^2+2ixy=x-iy \Leftarrow x^2-y^2=x$ (1) ; $2xy=-y$ (2) ; מתמשוואה: $y=0$

(1) מתמשוואה: $y=0$ ו $x=0$ או $x=1$. $z=0,1$ הם פתרונות

מתמשוואה (2) אפשרות אחרת היא $x=-\frac{1}{2}$ ומהדרך

מהשוואה (1) $(-\frac{1}{2})^2-y^2=-\frac{1}{2} \Leftarrow y^2=\frac{3}{4} \Leftarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ ומקבלים

$\boxed{z=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 5 נק'

2. $f(z)$ דיפרנציבילית לכן גזירה ב $z=x+iy$ $\Leftarrow$ מתקיים

משוואות קושי רימן. $u(x,y)=x^2$ $\quad v(x,y)=y^2$ מהשוואת חלקי הן

$2y=2x$, $0=0$ כלומר $y=x$. לכן $f(z)$ גזירה על הקו

$y=x$. הוא אינה אנליטית בשום נקודה ב $\mathbb{C}$ שכן לשם

כך הוא צריך להיות גזירה בסביבה של נקודה.

3. δ חיובית כך $\frac{1}{z(e^z-1)}$ $f(z)$ קולטת מקום ב $\bar{\Delta}$ $z=0$ ו $|z|<\delta$

שם אחרים הם כאשר $z=2\pi i$, $k=\pm1,\pm2,\dots$ $|z|<\delta$

נמצאים מחוץ ל $\bar{\Delta}$. בנוסף $f(z)=\frac{1}{z^2(e^z-1)/z}$

ומאחר ו $\frac{e^z-1}{z}\xrightarrow[z\to0]{}1$ נובע כי $f(z)$ חולק מסדר 2 ב $z=0$.

(אפשר לראות גם אם גזירה בנעלים של $z(e^z-1)$)

לכן לפי הנוסחה $\operatorname{Res}(f,0)=\frac{1}{1}\lim_{z\to0}\left(z^2\frac{1}{z(e^z-1)}\right)'=\lim_{z\to0}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)'=$

$$=\lim_{z\to0}\frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{z\to0}\frac{-ze^z}{2(e^z-1)e^z}=-\frac{1}{2}$$

לכן $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(e^z-1)} = 2\pi i \, res\left(\frac{1}{z(e^z-1)}, 0\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\pi i}$

4. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{2z+1}{z} = \frac{1}{(z-1)^2}\left(2+\frac{1}{z}\right)$. נסתכל ב $\frac{1}{z}$ סביב $z=1$.

שני אזורים: I $0<|z-1|<1$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z-1} = \sum_0^\infty (z-1)^n(-1)^n$$

ואז

$$f(z) = (z-1)^{-2}\left[2+\sum_0^\infty (z-1)^n(-1)^n\right] = \boxed{\frac{3}{(z-1)^2} + \sum_1^\infty (z-1)^{n-2}(-1)^n}$$

II $|z-1|>1$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+1/z-1} = \frac{1}{z-1}\sum_0^\infty (z-1)^{-n}(-1)^n$$

ואז

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\left[2+\sum_0^\infty (z-1)^{-n-1}(-1)^n\right] = \boxed{\frac{2}{(z-1)^2} + \sum_0^\infty (z-1)^{-n-3}(-1)^n}$$

5. אם $f(z) = f_1(z)/(z-z_0)^3$, $h(z) = h_1(z)/(z-z_0)^2$, $r(z) = r_1(z)/(z-z_0)^2$

כאשר f_1, h_1, r_1 אנליטיות ב z_0 ולא מתאפסות ב z_0.

מתקיים בסביבת z_0

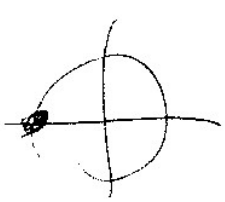
$$\frac{f(z)+h(z)}{f(z)-r(z)} = \frac{f_1(z)/(z-z_0)^3 + h_1(z)/(z-z_0)^2}{f_1(z)/(z-z_0)^3 + r_1(z)/(z-z_0)^2} = \frac{f_1(z)+(z-z_0)h_1(z)}{f_1(z)+(z-z_0)r_1(z)}$$

ומאחר ו $f_1(z_0) \neq 0$ הנגזרת של הביטוי הנ"ל כש $z \to z_0$ הוא 1 [ו"טעות הדפסה]

0 לדוגמה.

ב. $f(z) \neq 0$ לכן $\frac{1}{f(z)}$ גם כן אנליטי ומתקיים $\left|\frac{1}{f(z)}\right| < \frac{1}{\delta}$ לכן לפי משפט ליוביל $\frac{1}{f(z)}$ פונקציה קבועה לכן $f(z)$ פונקציה קבועה.

6. שים $|z|<1$ כלומר $|z|=r$ ושים ב $|6e^z| < |6e^{-1}|$ לכן $|f(z)-6e^z| = |z^2-1| \le |z^2|+1 = 2 < |6e^z|$. לכן לפי משפט רושה $f(z)$ ו $6e^z$ אותו מס' אפסים ב $|z|<1$ ואחרי $6e^z$ לא מתאפס שם (כי $6e^z \neq 0$) גם ב $f(z)$.



$$|f(z)-6e^z| \ge |6e^z| - |z^2-1|$$

$$> 6e^{-1} - 2 > 0$$