

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי
עזר אסורים או יתפס בהעתקה
יענש בחומרה עד כדי הרחקתו
מחאוניברסיטה.

31\8\2010

קורס : 83-211-10

מרצה: ש. גול

מבחן בפונקציות מרוכבות למהנדסים

מועד א'

ענו על כל השאלות הבאות, ניקוד כל שאלה 22 נקודות.

כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.

משך הבחינה שעתיים וחצי.

שאלה 1

נתונה $f(x, y) = x \sin y + i \sin y$. האם f גזירה? האם f אנליטית? ✓

שאלה 2

מצא טור לורן כאשר $f(z) = \frac{z-6}{z^2-3z+2}$ כאשר $D = \{|z| > 2\}$. ✓

שאלה 3

תהי $f(z)$ פונקציה שלמה, כך ש- $|f(z)| \leq A|z|$ לכל $z \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{R}$ קבוע חיובי, ✓

הראה ש $f(z) = a_1 z$, כאשר $a_1 \in \mathbb{C}$.

שאלה 4

הראה כי $\int_{-1}^1 z^i dz = \frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i)$, כאשר $z > 0$, $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi$ ✓

שאלה 5

חשב את שני האנטגרלים הבאים:

(א) $\int_C \frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)} dz$, כאשר C מוגדרת על ידי $|z-2|=2$ ✓

(ב) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ ← פקוק: אטו $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ ✓

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$$

א: הוכח שפרור אטו הוא נכסף (הוא אמר: ק-א עבר)

שניה: אטו נכסף דמיסר המכונה (בעלם סניקו).

בהצלחה!

נוסחאות בפונקציות מרוכבות

1. משוואות קושי-רימן: $u_x = v_y$ $u_y = -v_x$.

2. נוסחת קושי:
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{w-z}$$

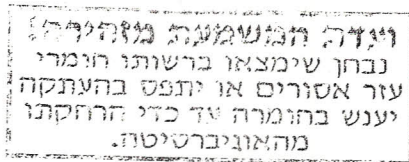
3. טורי טיילור בסיסים:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

4. חישוב שאריות: בקוטב פשוט $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

בקוטב מסדר $m > 1$ נגדיר $\varphi(z) = (z - z_0)^m f(z)$ ואז מתקיים

$$\text{Res}(f, z) = \varphi^{(m-1)}(z_0) / (m-1)!$$



3\10\2010

קורס : 83-211-10

מרצה: ש. גול

מבחן בפונקציות מרוכבות למהנדסים

מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות, ניקוד כל שאלה 22 נקודות.

כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.

משך הבחינה שעתיים וחצי.

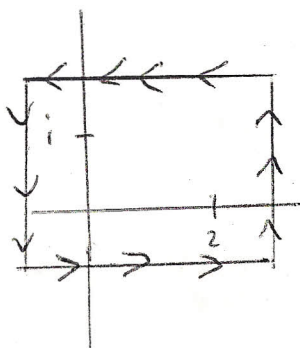
שאלה 1

א. הראה שאם z_1, z_2 ברביע הראשון, כלומר $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ אז $Log(z_1 \cdot z_2) = Log(z_1) + Log(z_2)$.

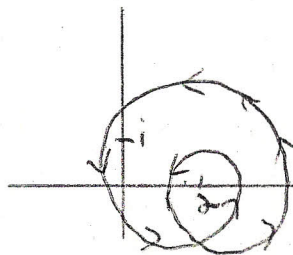
ב. הראה שאם z_1, z_2 ברביע השני, כלומר $\{(x, y) : x < 0, y > 0\}$ השוויון שמצאת בסעיף א' אינו נכון.

שאלה 2

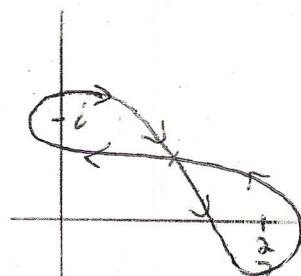
חשב את האנטגרל $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-2)(z-i)}$, כאשר γ נתונה על ידי העקומות הבאות:



(א)



(ב)



(ג)

שאלה 3

נתון כי עקומה C היא משולש שקודקודיו $0, 3i, -4$ (נגד כיוון השעון), הראה כי

$$\left| \int_C (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq 60$$

שאלה 4

נתונה $f(z) = \frac{z}{\sin z}$. מיין הנקודות הסנגולריות של f ומצא 4 איברים ראשונים של הטור לורן שלה עבור $z=0$.

שאלה 5

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$$
 חשב

בהצלחה !