כללי

מספרים מרוכבים:
הקבוצה $\mathbb{C}$ לא כוללת מספרים אינסופיים.
הקבוצה $\overline{\mathbb{C}}$ כוללת מספרים אינסופיים (מיוצגת ע"י ספירת רימן).

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

שורש יחידה:
כל Z שיקיים - $z^n = 1$ נקרא שורש יחידה מדרגה n.

חוקי מספרים מרוכבים:
$\overline{\overline{z}} = z$, $z\cdot\overline{z} = |z|^2$, $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

$\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

$|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right) \le |z_1|^2+|z_2|^2+2\left|z_1\cdot\overline{z_2}\right|$

$z^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

$z = r\cdot e^{i\theta} \Rightarrow r=|z|$

$\overline{z} = r\cdot e^{-i\theta}$

$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ $\quad \tan\theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$

ארגומנט של מספר מרוכב:
$z = re^{i\cdot\alpha}$

$\arg(z) = \alpha$

$|z| = r$

$\arg(z_1\cdot z_2) = \arg(z_1)+\arg(z_2)+2\pi k$

ערך עיקרי של ארגומנט:
$Arg(z) = \alpha + \beta\pi k \quad k=0,1,2,\ldots$

1

נוסחת אוילר:
$e^{i\cdot\alpha} = \cos\alpha + i\cdot\sin\alpha$

נוסחת דה מואבר:
$(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)^n = (\cos(n\alpha)+i\cdot\sin(n\alpha))$

$(e^{i\cdot\alpha})^n = e^{i\cdot\alpha\cdot n}$

פונקציה מרוכבת:
$f(z) = u(x,y)+i\cdot v(x,y)$, $u,v\in\mathbb{R}$

$u = \operatorname{Re}(f(z))$, $v = \operatorname{Im}(f(z))$

תחומים מישוריים

מעגל פתוח:
אוסף כל הנקודות המקיימות:
$|z-z_0| < r$

מעגל סגור:
אוסף כל הנקודות המקיימות:
$|z-z_0| \le r$

טבעת:
אוסף כל הנקודות המקיים:
$R < |z-z_0| < r$

קבוצה פתוחה:
קבוצה נקראת פתוחה אם לכל נקודה קיימת לפחות סביבה אחת שכולה מוכלת בקבוצה (ללא שפה).

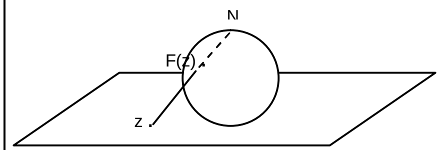
קבוצה סגורה:
קבוצה נקראת סגורה אם המשלים שלה הוא פתוח.

קבוצה חסומה:
קבוצה נקראת חסומה אם ניתן לכלוא אותה בתוך מעגל כלשהו.

קבוצה קשירה:
קבוצה נקראת קשירה אם ניתן לחבר כל 2 נקודות בתחום בעזרת עקום שיעבור כולו בתוך התחום.

תחום:
קבוצה פתוחה וקשירה (קו בין 2 נקודות מהתחום יעבור כולו בתוך התחום).

תחום פשוט קשר (ללא חורים)
ניתן לכווץ כל עקומה סגורה לנקודה בודדת ולהשאר בתחום.

ספירת רימן:


נגדיר אינסוף בקודקוד הספירה העליון ואפס בקודקוד הספירה התחתון (שמשיק למישור האינסופי).

כל נקודה על הספירה מועתקת לנקודה על המישור בצורה חד-חד ערכית.

ההעתקה מתבצעת כך: מחברים את הנקודה שרוצים להעתיק למישור עם נקודת האינסוף בקו ישר, הנקודה שבה הישר חותך את המישור היא הנקודה אליה תועתק הנקודה מהספירה.

גבולות

הגדרת הגבול:
אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שקיום $|z-z_0|<\delta$ גורר קיום $|f_{(z)}-w|<\varepsilon$ אז: $\lim_{z\to z_0} f_{(z)} = w$.

כתיב מתמטי לגבולות מסוגים שונים:
$\lim_{z\to z_0} f_{(z)} = w$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall z\ |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f_{(z)}-w|<\varepsilon$

$\lim_{z\to\infty} f_{(z)} = w$

$\forall\varepsilon>0\ \exists R>0 : \forall z\ |z|>R \Rightarrow |f_{(z)}-w|<\varepsilon$

$\lim_{z\to z_0} f_{(z)} = \infty$

$\forall M>0\ \exists\delta>0 : \forall z\ |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f_{(z)}|>M$

ניתן לשלול קיום של גבול לפונקציה מרוכבת ע"י:
1. מניחים ש- $y=k\cdot x$ ואם הגבול תלוי ב- k אז הוא לא קיים.
2. (בהקשר לנגזרות) מניחים פעם ש- $\Delta y=0$, ופעם ש- $\Delta x=0$, ואם לא מקבלים את אותו הגבול אז הוא לא קיים.

רציפות
1. לכל ε קיים δ כך שאם $|z-z_0|<\delta$ אז $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.
2. פונקציה f רציפה בנקודה **אמ"מ** u ו- v רציפות בנקודה.

נגזרות
פונקציה $f:U\to\mathbb{C}$ גזירה בנקודה z_0 אם:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$$

או אם קיים הגבול:

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

דוגמא:

$f_{(z)} = \overline{z}$

$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f_{(z_0+\Delta z)}-f_{(z_0)}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z_0+\Delta z}-\overline{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$

$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}} = re^{-2i\varphi}$

הגענו לתוצאה שאין ביכולתנו לפתור ישירות.
ידוע ש- z היא פונק' של 2 נעלמים.
ע"מ לראות אם לפונק' 2 נעלמים יש גבול ניתן לבחור אחד מהנעלמים קבוע ולבצע אינטגרל ולחזור על התהליך עבור המשתנה השני.
אם נקבל תוצאות שונות ז"א שאין גבול.
אם נקבל תוצאות זהות זה לא אומר דבר.
בדוגמא נבחר פעם את הזווית אפס ופעם 90 מעלות ונקבל תוצאות שונות לכן אין גבול.

$\varphi=0 \Rightarrow re^{-2i0}=r$, $\varphi=45 \Rightarrow re^{-2\cdot45 i} = -r$

הערה: כל נוסחאות הגזירה שמוכרות לנו לא השתנו.

משפט קושי - רימן:
אם פונקציה $f:U\to\mathbb{C}$ גזירה בנק' z_0 אז הפונקציות u, v בעלות נגזרות חלקיות ביחס ל- x ול- y, ומתקיימת משוואת קושי רימן.

משוואת קושי – רימן (CR):
$f'(z_0) = u'_x + i\cdot v'_x = v'_y + \frac{1}{i}u'_y \Rightarrow \begin{cases}u'_y=-v'_x\\ u'_x=v'_y\end{cases}$

משפט:
אם מתקיימת משוואת CR אז פונקציה f גזירה.

פונקציות אנליטיות (הולומורפית)

הגדרה:
אם $f:U\to\mathbb{C}$ גזירה (באופן מרוכב) בכל נקודה $z_0\in U$ אז f אנליטית ב- U.

אם 2 פונקציות אנליטיות אז גם חיבור, חיסור, כפל, חילוק והרכבה של שתיהן ביחד יתנו פונקציות אנליטיות.

פונקציות לא אנליטיות
פונקציה הכוללת $|z|$ או $\overline{z}$ אינה אנליטית.

פונקציות שלמות:
אם $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ואנליטית (בכל התחום) אז f היא פונקציה שלמה.
- פונקציית אקספוננטה היא פונקציה שלמה:

$\exp(z) = e^z = e^x(\cos x + i\cdot\sin x)$

- פולינום הוא פונקציה שלמה.

משפט לאוביל:
אם פונקציה $f:U\to\mathbb{C}$ שלמה וחסומה אז $f=const$.
פונקציה חסומה - כל התמונות יהיו בתוך עיגול עם רדיוס M: $|f(z)|<M$.

המשפט יסודי של אלגברה:
לפולינום מסדר n, כאשר $n\ge1$ יש לפחות שורש אחד.

משפט ביגו:
פולינום מתחלק ב- $z-a$ אמ"מ a הוא שורש של הפולינום.

משפטים:
1. אם $f:U\to\mathbb{C}$ ואנליטית, U קבוצה קשירה בתחום ו- $f'(z)=0$ לכל $z\in U$ אז f פונקציה קבועה.
2. אם $f:U\to\mathbb{C}$ אנליטית אז יש לה אינסוף נגזרות אנליטיות.
3. אם $f:U\to\mathbb{C}$ רציפה בתחום U, ולכל עקום סגור ב- U, מתקיים: $\int_C f(z)dz=0$ אז f אנליטית בתחום.

פונקציות הרמוניות

הגדרת פונקציה הרמונית:
פונקציה ממשית $f:U\to\mathbb{R}$ נקראת הרמונית אם גזרות חלקיות עד וכולל סדר שני קיימות ורציפות ומקיימות את משוואת לפלס.

משוואת לפלס (לפלסיאן):
$u'_{xx}+u'_{yy}=0 \Rightarrow \Delta u = 0$

משפטים:
1. בפונקציה אנליטית u, v הן פונקציות הרמוניות.
2. - **אם U תחום פשוט קשר אז לפונקציה u קיימת פונקציה קדומה.**
3. בפונקציה אנליטית – החלק הממשי הוא פונקציה הרמונית, וגם החלק המדומה הוא פונקציה הרמונית.

פונקציות צמודות:
פונקציות המקיימות את משוואות קושי רימן (CR).
- אם U תחום פשוט אז לכל פונקציה הרמונית קיימת פונקציה הרמונית צמודה.
- אם התחום לא פשוט קשר - לא ידוע אם יש פונקציה צמודה או לא.

סד"פ מציאת פונקציה צמודה:
1. בדיקה אם הפונקציה הנתונה היא הרמונית ע"י לפלס.
2. בדיקה אם התחום הוא פשוט קשר.
3. ע"פ אחת ממשוואות CR נמצא את הנגזרת של הפונקציה הצמודה.
4. נמצא את הפונקציה הקדומה של הנגזרת.

פונקציית אקספוננטה

$e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad , \quad z \in \mathbb{C} - 0$

$z = x + i\cdot y \Rightarrow e^z = e^{z+2\pi k \cdot i} = e^x\left(\cos y + i\cdot \sin y\right)$

$u = e^x \cos y$

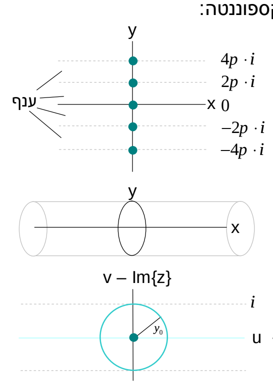
$v = e^x \sin y$

$\mathrm{Arg}(e^z) = y$

$\arg(e^z) = y + 2\pi k \quad k = 0,1,2,\ldots$

$\left|e^z\right| \le e^{|z|}$

העתקת אקספוננטה:



הערות:
- הנקודות הירוקות עוברות לנקודה במרכז הצירים.
- ציר y עובר למעגל סביב 0 ברדיוס 1.
- ציר x נשאר כמו שהוא לאחר ההעתקה.

פונקציית לוגריתם

$\log : \mathbb{C} - 0$

$\log z = w \Leftrightarrow e^w = z$

פונק' לוג קטן - רב ערכית:

$z \in \mathbb{C}$

$\log(z) = \ln(R) + i\cdot(\theta + 2\pi k) = \ln|z| + i\cdot \arg(z)$

פונק' לוג קטן מוגדרת לכל x.

פונק' לוג גדול - חד ערכית:

$z = x + i\cdot y \Rightarrow x > 0$

$Log(z) = \ln|z| + i\cdot Arg(z)$

פונק' לוג גדול לא מוגדרת לערכים שליליים.

$log(z) = Log(z) + 2\pi k\cdot i$

הערה: הפכנו את לוג לחד ערכית ואנליטית ע"י צמצום תחום ההגדרה שלה – הצאנו את הציר השלילי של x.

$log(z) = Log(z) + 2\pi k\cdot i$

תכונות לוגריתם מרוכב:

$log(z_1\cdot z_2) = log(z_1) + log(z_2)$

$log(z_1 / z_2) = log(z_1) - log(z_2)$

$\frac{d}{dz}(log(z)) = \frac{1}{z}$

$e^{\log(z)} = z$

הערה: לפונקציה, שהפונקציה הקדומה שלה רב ערכית - לא ניתן לעשות אינטגרל.

חזקה עם מעריך מרוכב

$z^C = e^{C\cdot\log(z)} = e^{C\cdot Log(z)}\cdot e^{2\pi\cdot i\cdot k\cdot c} \quad , \quad c \in \mathbb{C}$

כאשר c מספר ממשי שלם:

$e^{2\pi\cdot i\cdot k\cdot c} = 1$

כאשר c שורש יחידה:

$\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k\cdot C}\right)^n = 1$

אז מספר ערכים של z^C הוא n.

פונקציות טריגונומטריות

$\sin z = \frac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2}$

סינוס וקוסינוס: פונקציות שלמות בעלות מחזור של 2π.

$\sin z = \sin(z + 2\pi)$

$\cos(z) = \cos(z + 2\pi)$

$\cos(z) = \sin(\frac{\pi}{2} - z)$

$(\cos z)' = -\sin z$

$(\sin z)' = \cos z$

$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$

$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \sin z_1$

$\tan z$:

פונקציה אנליטית ב- $\cos z \ne 0$ (לא פונקציה שלמה).

$\cot z$:

פונקציה אנליטית ב- $\sin z \ne 0$ (לא פונקציה שלמה).

פונקציות היפרבוליות (שלמות):

$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \ldots$

$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \ldots$

$\sinh^2(z) - \cosh^2(z) = 1$

$\tanh(z) = \sinh(z)/\cosh(z)$

$\coth(z) = \cosh(z)/\sinh(z)$

מחזור סינוס וקוסינוס היפרבולי - $2\pi\cdot i$.

כפל ה- i מסובב צירים ב- 90 מעלות:

$\sinh(i\cdot z) = i\cdot\sin(z)$

סיבוב משתנה z ואח"כ סיבוב סינוס:

$\sinh(iz) = i\sin z \, , \, \cosh(iz) = \cos z \, , \, \sinh(z) = -i\sin(iz)$

נגזרות:

$(\sinh(z))' = \cosh(z) \quad , \quad (\cosh(z))' = \sinh(z)$

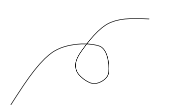
אינטגרלים מרוכבים

$w_{(t)} = u_{(t)} + iv_{(t)} \Rightarrow \int_a^b w_{(t)}dt = \int_a^b u_{(t)}dt + i\int_a^b v_{(t)}dt$

$\left|\int_a^b w_{(t)}dt\right| \le \int_a^b \left|w_{(t)}\right|dt$

עקומות:

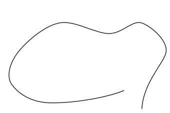
נקודה כפולה:



$w_{(t)} = w_{(\tilde t)}$

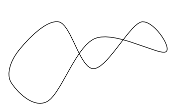
$t \ne \tilde t$

עקום פשוט:
עקום ללא נקודות כפולות.

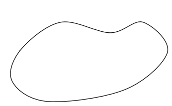


עקום סגור:
יכול לכלול נקודות כפולות.

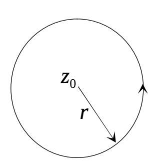
$w_{(a)} = w_{(b)}$



עקום סגור ופשוט:
יש כפל נקודה רק בנקודות סיום והתחלה.



פרמטריזציה פולרית של מעגל:

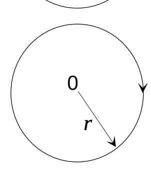


$w_{(t)} = z_0 + r\cdot e^{it}$

$0 \le t \le 2\pi$

כיוון העקומה הוא חיובי – נגד כיוון השעון.

דוגמא:



$w_{(t)} = 0 + r\cdot e^{-2it}$

$0 \le t \le 2\pi$

כיוון העקומה הוא שלילי – עם כיוון השעון, ומרכז המעגל ב- 0. ה- 2 באקספ' גורם לסיבוב פי 2 יותר מהר מבדוגמא הקודמת.

אורך של עקום:

$L = \int_a^b \left|w'_{(t)}\right|dt = \int_a^b \sqrt{u'^2_{(t)} + v'^2_{(t)}}\,dt$

אינטגרל קווי:

נתון עקום c ופונקציה $f : U \to \mathbb{C}$. האינטגרל הקווי:

$\int_C f_{(z)}dz = \int_a^b f(w_{(t)})\cdot w'_{(t)}\,dt$

דוגמא:

$I = \int_{|z|=2} \bar z\, dz \quad , \quad z = 2\cdot e^{i\theta} \quad , \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

$dz = 2i\cdot e^{i\theta}d\theta \Rightarrow I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cdot e^{-i\theta}\cdot 2i\cdot e^{i\theta}d\theta = \ldots$

פונקציה קדומה:

אם נתונה פונקציה רציפה $f : U \to \mathbb{C}$, ו- U הוא תחום, אז 3 הטענות הבאות **שקולות:**
1. **קיימת פונקציה קדומה ל- f.**
2. **אינטגרל לאורך עקומה תלוי רק בנקודות הקצה.**
3. **אינטגרל של f עבור כל עקום סגור הוא 0.**

הערה:
אינטגרל על עקומה סגורה עם נקודת אי-רציפות, ייתן תמיד את אותה התוצאה, **גם אם נשנה את צורת העקומה.**

משפט קושי:

אם $f : U \to \mathbb{C}$ **פונקציה אנליטית**, אז עבור כל **עקום סגור ופשוט**, אשר כל הנקודות בתוכו ועל השפה מוכלות בתוך U, מתקיים:

$\oint_C f(z)dz = 0$

(כלומר, קיימת פונקציה קדומה)

משפט:

אם $f : U \to \mathbb{C}$ **פונקציה אנליטית** ו- U **תחום פשוט קשר**, אז עבור כל **עקום סגור** אשר כל הנקודות בתוכו ועל השפה מוכלות בתוך U, מתקיים:

$\int_C f(z)dz = 0$

(כלומר, קיימת פונקציה קדומה)

נוסחת קושי

אם $f : U \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית **(או בעלת נקודה סינגולרית מבודדת סליקה)** על **עקום פשוט וסגור c**, ואנליטית גם בנקודות הפנים שלו, $z \in \mathbb{C}$ נקודת פנים של c, אז:

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\cdot i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$

$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\cdot i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$

הערות:
- z_0 לא יכול להיות על השפה.
- z_0 נקודה סינגולרית **מבודדת**.

דוגמא:

$I = \int_C \frac{z}{(9 - z^2)\cdot(z + i)}dz = ?$

$f(z) = \frac{z}{(9 - z^2)} \Rightarrow I = \int_C \frac{f(z)}{(z + i)}dz = 2\pi\cdot i\cdot f(-i)$

$2\pi\cdot i\cdot f(-i) = 2\pi\cdot i\cdot\frac{-i}{(9+1)} = \frac{\pi}{5} = I$

משפט:

אם U תחום מישורי ופונקציה $f : U \to \mathbb{C}$ אנליטית בתחום U, אז אינטגרל על השפה החיצונית של עקום c שווה לסכום האינטגרלים על השפות הפנימיות.

כיוון חיובי – נגד כיוון השעון על כל העקומות.

$\int_C f(z)dz - \int_{C1} f(z)dz - \int_{C2} f(z)dz - \int_{C3} f(z)dz = 0$

הערה: המשפט לא נכון במקרה שהעקומות הפנימיות הן נקודות.

אינטגרל ממשי לא אמיתי
הערה:
האינטגרל הוא על פונקציה **ממשית** מ- $-\infty$ עד ∞ !
ניתן להעזר בנוסחאות פונקציה זוגית ע"מ להפוך את האינטגרל לתחום המבוקש.

מוסיפים לאינטגרל הקווי, קשת (בעל רדיוס אינסופי) ע"מ שנוכל לעשות אינטגרל על עקומה סגורה – ואז פותרים בעזרת משפט השארית:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{CR} f(z)\,dz}_{=0} = 2\cdot p\cdot i\cdot\sum \operatorname{Res} f(z)$$

תנאים לבדיקה + הערות חשובות:
1. יש לבדוק שהמכנה של הפונקציה המקורית לא מתאפס לאף x ממשי.
2. ע"מ שהגבול יהיה בטוח אפס, על הפולינום במונה בפונקציה המקורית צריך להיות קטן ב- 2 סדרים מהפולינום במכנה.
3. **חובה להוכיח: האינטגרל על הקשת האינסופית הוא אפס:**
$$\left|\int_{CR} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{CR}\frac{z^2}{z^6+3z^3+1}dz\right| \le \frac{R^2}{z^6-3z^3-1}\cdot\int_{CR}dz$$
$$\le \frac{R^2}{z^6-3z^3-1}\cdot p\cdot R \xrightarrow{R\to\infty} 0$$
שימו לב: האיברים במכנה מקבלים מינוס חוץ מהראשון.

פונקציה זוגית ואי-זוגית:
פונקציה זוגית: $f(-x)=f(x)$
פונקציה אי-זוגית: $f(-x)=-f(x)$

פונקציה זוגית מקיימת:
$$\int_{-L}^{L} f_{(x)}dx = 2\cdot\int_0^L f_{(x)}dx$$

טורים
התכנסות:
טור מתכנס אם קיים הגבול:
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} Z_n$$
אם טור מתכנס אז האיבר הכללי Z_n שואף ל- 0 (אך לא בהכרח להיפך).

הערה: בתוך מעגל ההתכנסות ניתן לפתח טור חזקות עבור פונקציה קדומה, ולגזור את הטור איבר איבר ע"מ שנקבל את הטור של הפונקציה המקורית. **דוגמא:**
$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^n = ?\quad,\quad z<1$$
$$\sum_{n=0}^\infty z^n = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^\infty z^n = \sum_{n=0}^\infty n\cdot z^{n-1} = -\frac{1}{(1-z)^2}$$
$$z\cdot\sum_{n=0}^\infty n\cdot z^{n-1} = \sum_{n=0}^\infty n\cdot z^n = -\frac{z}{(1-z)^2}$$

התכנסות בהחלט:
טור $\sum_n Z_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_n |Z_n|$.
אם טור מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס.

קריטריון קושי:
תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות $\sum_{n=1}^\infty Z_n$ הוא שלכל $e>0$ קיים N טבעי כך שעבור $m\ge N$ ולכל $k>0$ מתקיים $|Z_m+Z_{m+1}+\ldots+Z_{m+k}|<e$

טור טיילור:
נתונה פונקציה אנליטית בתחום $|z-z_0|<R$, אז בכל נקודה z בתוך התחום מתקיים:
$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)\cdot(z-z_0)+..+\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\cdot(z-z_0)^n$$

טורי לורן
פונקציה f אנליטית בתחום $R_1<|z-z_0|<R_2$ (טבעת)
אז מתקיים:
$$f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^\infty b_n(z-z_0)^{-n}\quad n=0,1,2,\ldots$$
$$a_n=\frac{1}{2p i}\int_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ ,\ b_n=\frac{1}{2p i}\int_c f(z)\cdot(z-z_0)^{n-1}dz$$

החלק העיקרי: כל האיברים בעלי חזקות שליליות של z בטור לורן נקראות החלק העיקרי.

הערה:
מספר האיברים בחלק העיקרי של טור לורן נקבע לפי סדר הסינגולריות של f(z) (ראה נקודות סינגולריות).

נוסחאות פיתוח טורי חזקות:
$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\ldots$$
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^\infty x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$$
$$\frac{x}{1-x}=\sum_{n=1}^\infty x^n=x+x^2+x^3+x^4+\ldots$$
$$e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+..+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$
$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^\infty\frac{x^n}{n}$$
$$\sin x=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2\cdot n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$
$$\cos x=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2\cdot n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$
$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$$
$$\cot x=\frac1x-\frac x3-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}+\ldots$$

נוסחה להכפלת טורים:
$$\left(\sum_{n=0}^\infty a_n\cdot x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^\infty a_n\cdot x^n\right)=\sum_{n=0}^\infty(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)\cdot x^n$$

סכום של סדרה הנדסית - כפי שנשתמש לפיתוח טורים:
$$S=\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$$
סכום של סדרה הנדסית – נוסחה כללית:
$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}\Rightarrow S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$
הסדרה תמיד מתכנסת כאשר q<1.
דוגמא:
$$\frac{1}{z-2}=\frac1z\cdot\frac{1}{1-\frac2z}=\frac1z\left[1+\frac2z+\left(\frac2z\right)^2+\ldots\right]\quad |z|>2$$
$$\frac{1}{z-2}=-\frac12\cdot\frac{1}{1-\frac z2}=-\frac12\left[1+\frac z2+\left(\frac z2\right)^2+\ldots\right]\quad |z|<2$$

התכנסות בהחלט של טורי חזקות:
הגדרת מעגל התכנסות של טור חזקות:
- בכל נקודה z בתוך המעגל - הטור מתכנס בהחלט.
- בכל נקודה z מחוץ למעגל - הטור מתבדר.
- בכל נקודה z על שפת המעגל - לא ניתן לדעת.

הערה:
טור חזקות מתכנס הוא פונקציה. פונקציה זו אנליטית רק במעגל ההתכנסות של הטור.

משפט:
אם טור החזקות $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ מתכנס בנקודה $z=z_1$, אז הוא **מתכנס בהחלט** בכל נקודה z המקיימת: $|z-z_0|<|z_1-z_0|$.

גזירות איבר איבר:
אם פונקציה $s(z)$ אנליטית במעגל ההתכנסות אז מתקיים:
$$s(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n\cdot(z-z_0)^n\Rightarrow s'(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n\cdot n\cdot(z-z_0)^{n-1}$$
$$a_n=\frac{s^{(n)}(z_0)}{n!}$$
הערה: אם יש נקודה ב- כל הנגזרות הן אפס, אז כל המקדמים אפס, ואז הפונקציה היא תמיד 0.

נקודות סינגולריות
הגדרות:
- **נקודה סינגולרית:** נקודה שבה הפונקציה מתבדרת.
- נקודה סינגולרית **מבודדת:** נקודת סינגולרית שניתן לסגור מסביבה מעגל ברדיוס e.
- **אפס (Zero):** נקודה הגורמת למונה להתאפס.
- **קוטב:** נקודה הגורמת למכנה להתאפס.
- **סדר האפס / הקוטב:** גוזרים את הביטוי, ומציבים את הנקודה הסינגולרית. סדר הנגזרת שבה הביטוי **לא** מתאפס הוא סדר האפס / הקוטב.
- **סדר סינגולריות של פונקציה:** אם למונה יש אפס מסדר n ולמכנה קוטב מסדר m אז לפונקציה (המנה ביניהם) יש אפס מסדר m פחות n.

מיון נקודות סינגולריות:
1. **קוטב מסדר m**

נקודה z=a היא קוטב אמ"מ: $\lim_{z\to a}f(z)=\infty$.
$b_n=0$ **עבור כל** $n>m$:
$$f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^m b_n(z-z_0)^{-n}\quad n=0,1,2,\ldots$$
z_0 קוטב מסדר m:
$$f(z)=\frac{j(z)}{(z-z_0)^m}\quad,\quad j(z)|_{z=0}\ne0$$
$$\operatorname{Res} f(z)=\frac{j(z_0)^{(m-1)}}{(m-1)!}=b_1$$
$j(z)$ אנליטית.

קוטב פשוט: **אם m שווה 1.**

2. **נקודה סינגולית עיקרית**

אינסוף מקדמים $b_n\ne0$ **שונים מ- 0.** במקרה זה z_0 נקראת **נקודה סינגולית עיקרית** של הפונקציה.

3. **נקודה סינגולרית סליקה**

$b_n=0$ **לכל n.**
אם קיים הגבול: $\lim_{z\to z_0}f(z)$, אז z_0 **-** נקודה סינגולית סליקה.
$$F(z)=\begin{cases}f(z)&,\ z\ne z_0\\C_0&,\ z=z_0\end{cases}$$
הערה: אם לפונקציה יש נקודה סינגולרית סליקה – אז סדר הסינגולריות של הפונקציה הוא 0.

שארית
פיתוח לורן סביב נקודה סינגולרית z_0 הוא:
$$f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^\infty b_n(z-z_0)^{-n}\quad n=0,1,2,\ldots$$
הגדרת השארית
$$b_1=\operatorname{Res}_{z=z_0}f(z)=\frac{1}{2p\cdot i}\int_C f(z)\,dz$$
(z_0 נקודה סינגולרית מבודדת)

משפט השארית:
c - עקום פשוט וסגור, ו- f(z) פונקציה אנליטית על c ובתוך c פרט למספר סופי של **נקודות מבודדות**, אז:
$$\int_C f(z)\,dz=2p i\cdot\sum\operatorname{Res} f(z)$$

שיטות למציאת השארית:
1. ע"פ נוסחה (פירוק לגורמים) - **במצב של מספר סופי של מקדמי b:**
$$f(z)=\frac{j(z)}{(z-z_0)^m}\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=z_0}f(z)=\left.\frac{j(z)^{(m-1)}}{(m-1)!}\right|_{z=z_0}=b_1$$
2. ע"י **פיתוח לטור** וחילוץ b_1.

שונות

דוגמא פשוטה אך חשובה:

$e^z = \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}\cdot e^{2p\cdot i\cdot k} = e^{\ln\sqrt{2}}\cdot e^{2p\cdot i\cdot k} = e^{\ln\sqrt{2}+2p\cdot i\cdot k}$

$z = \ln\sqrt{2} + 2p\cdot i\cdot k$

נוסחת טיילור:

$$f(z-z_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)^n$$

נוסחאות שונות:

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$(a+b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

הבינום של ניוטון:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$(a+b)^n = a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+...+\binom{n}{n-1}ab^n+b^n$

$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+b^{n-1})$

זהויות טריגונומטריות:

$\sin(-a) = -\sin a$

$\cos(-a) = \cos a$

$\tan(-a) = -\tan a$

$\tan a\cdot\cot a = 1$

$\sin^2 a+\cos^2 a = 1$

$1+\tan^2 a = 1/\cos^2 a$

$1+\cot^2 a = 1/\sin^2 a$

$\sin(2a) = 2\sin a\cos a$

$\cos(2a) = \cos^2 a-\sin^2 a$

$\cos(2a) = 2\cos^2 a-1$

$\cos(2a) = 1-2\sin^2 a$

$\tan(2a) = 2\tan a/(1-\tan^2 a)$

$\sin(3a) = 3\sin a-4\sin^3 a$

$\cos(3a) = 4\cos^3 a-3\cos a$

$\sin a+\sin b = 2\sin(a/2+b/2)\cos(a/2-b/2)$

$\sin a-\sin b = 2\sin(a/2-b/2)\cos(a/2+b/2)$

$\cos a+\cos b = 2\sin(a/2+b/2)\cos(a/2-b/2)$

$\cos a-\cos b = -2\sin(a/2-b/2)\cos(a/2+b/2)$

$\sin a\cos b = 1/2\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$

$\sin a\sin b = 1/2\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$

$\cos a\cos b = 1/2\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b-\cos a\sin b$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b+\sin a\sin b$

$\tan(a+b) = (\tan a+\tan b)/(1-\tan a\tan b)$

$\tan(a-b) = (\tan a-\tan b)/(1+\tan a\tan b)$

$\tan(a+b)-\tan a-\tan b = \tan(a+b)\tan a\tan b$

$\arcsin a+\arccos a = p/2$

נגזרת מסדר גבוה:

$(f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F^{(k)}\cdot g^{(n-k)}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!}$

נגזרות מיידיות:

$\sin' x = \cos x$

$\cos' x = -\sin x$

$\sinh' x = \cosh x$

$\cosh' x = \sinh x$

$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$arc\cot'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(a^x)' = a^x\ln a$

$(\log_a^x)' = \frac{1}{x\ln a}$

אינטגרלים מיידים:

$\int\frac{1}{x}dx = \ln x+c$

$\int\ln x dx = x\ln x-x+c$

$\int\sin x = -\cos x+c$

$\int\frac{1}{\cos^2 x} = \tan x+c$

$\int\frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x+c$

$\int\tan x dx = -\ln(\cos x)+c$

$\int\cot x dx = \ln(\sin x)+c$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$

$\int\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x+c$

$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$

$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)+c$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$

$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+c$

$\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln(x-a)+C$

$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx = A\cdot\frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n}+C$

$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$

נוסחאות שימושיות:

1. $|a+b|\le|a|+|b|$

   $|a\cdot b|\le|a|\cdot|b|$

2. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

3. $\frac{a_1+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot...\cdot a_n}\ ,\quad a_1,...,a_n\ge 0$

4. $|\sin a|\le|a|\qquad|\sin b-\sin a|\le|b-a|$

5. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\ ,\ 0<a<c<b$

6. $\sqrt[n]{Const}\xrightarrow{n\to\infty}1\qquad\sqrt[n]{n}\xrightarrow{n\to\infty}1$

7. $b^n\ge n^b\quad b>1$

   $\frac{n^b}{b^n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

8. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

9. $\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$

10. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

11. $\cos(90-a)<a\qquad\cos(a)<a-90$

12. $\ln x<x$

13. $\sqrt[n]{a^n+b^n}\to a\qquad a>b$

14. **לופיטל:**

במצב של $\frac{0}{0},\frac{\pm\infty}{\pm\infty},0\cdot\pm\infty$: $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

אם ע"י לופיטל לא מקבלים גבול הדבר אינו אומר שבאמת אין גבול, אלא צריך לנסות אחרת.

15. במצב של ∞^0 או 0^0 בלבד:

$\lim_{x\to0}x^x\Rightarrow y = x^x\Rightarrow\ln y = x\ln x\Rightarrow\lim_{x\to0}x\ln x = 0\Rightarrow$

$\lim_{x\to0}\ln y = 0\Rightarrow\ln(\lim_{x\to0}y) = \ln 1\Rightarrow\lim_{x\to0}y = 1\Rightarrow\lim_{x\to0}x^x = 1$

או:

$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$

16. 1^∞ - a, b – כפונקציה של x: $\lim_{x\to0}a^b = e^{\lim_{x\to0}(a-1)\cdot b}$

17. $(a^{x^a})' = a\cdot x^{a-1}\cdot a^{x^a}\cdot\ln a$

18. $a = \lim a_n\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)\cdot b_n+a\cdot\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

19. $\ln a+\ln b = \ln(a\cdot b)$

20. $\ln(x)<x\quad,\quad\ln(x+1)<x$

21. $x\ge3\Rightarrow\ln(x)>1$

22. $n!<n^n$

מקרים ותגובות

סד"פ מציאת שארית:

1. מציאת סדר הקוטב.
2. בודקים אלו מהקטבים (שורשי המכנה) **מאפסים גם את המונה.**
3. לגבי הקטבים שמאפסים את המונה:
   - מחשבים את <u>**סדר הסינגולריות m**</u> **של כל הפונקציה** (סדר הקוטב פחות סדר האפס).
   - מוצאים את השארית ע"י הנוסחה:

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)\cdot(z-z_0)^m\right)}{(m-1)!}$$

4. לגבי קטבים שלא מאפסים את המונה, סדר הקוטב הוא סדר הסינגולריות של הפונקציה, ולכן פשוט מוצאים את השארית ע"י הנוסחה הנ"ל.

דוגמא:

$$f(z)=\frac{1}{z\cdot(e^z-1)}$$

$$(z\cdot(e^z-1))'\big|_{z=0}=0$$

$(z\cdot(e^z-1))''\big|_{z=0}\neq 0 \Rightarrow$ קוטב מסדר 2

$$\text{Res}_0\, f(z)=\frac{\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z\cdot(e^z-1)}\cdot(z-0)^2\right)}{1!}\Bigg|_{z=0}=-\frac{1}{2}$$

אינטגרלים:

1. <u>אינטגרל קווי</u>

$$\int_C f(z)\,dz$$

שיטות לפתרון:

- לנקודה סינגולרית אחת – נוסחת קושי.

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$$

$$\int_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}dz=2p\cdot i\cdot g^{(n-1)}(z_0)$$

g(z) – חלק **אנליטי** של הפונקציה f(z).

- למספר נק' מבודדות - משפט השארית.

$$\int_C f(z)\,dz=2pi\cdot\sum \text{Res}\ f(z)$$

- פרמטריזציה / פרמטריזציה הפוכה.

2. <u>אינטגרל ממשי לא אמיתי</u>
   - כללי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\Rightarrow\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\underbrace{\int_{CR} f(z)\,dz}_{=0}=2\cdot p\cdot i\cdot\sum\text{Res}\ f(z)$$

תנאים לבדיקה + הערות חשובות:

א. יש לבדוק שהמכנה של הפונקציה המקורית לא מתאפס לאף x ממשי.

ב. ע"מ שהגבול יהיה בטוח אפס, על הפולינום במונה בפונקציה המקורית צריך להיות קטן ב- 2 סדרים מהפולינום במכנה.

ג. **חובה להוכיח: האינטגרל על הקשת האינסופית הוא אפס:**

$$\left|\int_{CR} f(z)\,dz\right|=\left|\int_{CR}\frac{z^2}{z^6+3z^3+1}dz\right|\le\frac{R^2}{z^6-3z^3-1}\cdot\int_{CR}dz$$

$$\le\frac{R^2}{z^6-3z^3-1}\cdot p\cdot R\xrightarrow{R\to\infty}0$$

שימו לב: האיברים במכנה מקבלים מינוס חוץ מהראשון.

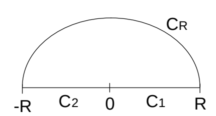
- אם הפונקציה זוגית:

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

- אם הפונקציה לא זוגית:

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx=\int_{C1}+\int_{C2}+\int_{CR}=2pi\sum\text{Res}\ f(z)$$

$$\int_{C2}=k_1+k_2\int_{C1}\Rightarrow k_1+(k_2+1)\int_{C1}=2pi\sum\text{Res}\ f(z)$$



3. אינטגרל על q:

$$z=e^{iq}\Rightarrow dq=\frac{1}{i\cdot z}dz$$

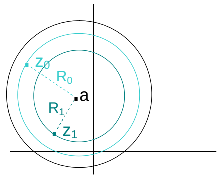
$$\int_0^{2p} f(q)\,dq=\int_{|z|=1} f(z)\frac{1}{i\cdot z}dz$$

- אם הפונקציה זוגית:

$$\int_0^{\infty} f(q)\,dq=\frac{1}{2}\int_0^{2p} f(q)\,dq$$

פיתוח לטור סביב הנקודה a:

1. פירוק הפונקציה לגורמים.
2. סימון הנקודות הסינגולריות על מערכת צירים.
3. חלוקה לתחומים אנליטיים.



4. **העבעת כל איבר ע"י z-a.**
5. פיתוח כל איבר (בפירוק לגורמים) לטור לורן או טיילור ע"פ התחום האנליטי.

לדוגמא: אם אחד האיברים לא מוגדר ב- z_0 אז:

- פיתוח עבור $z<R_0$ יהיה פיתוח טיילור.
- פיתוח עבור $z>R_0$ יהיה פיתוח לורן.

ע"מ לפתח לטור טיילור יש להביא את האיבר לצורה:

$$k_1\cdot\frac{1}{1-k_2(z-a)}=1+(k_2(z-a))+(k_2(z-a))^2+\ldots$$

ע"מ לפתח לטור טיילור יש להביא את האיבר לצורה:

$$k_1\cdot\frac{1}{1-k_2\frac{1}{z-a}}=1+\left(k_2\frac{1}{z-a}\right)+\left(k_2\frac{1}{z-a}\right)^2+\ldots$$

הערות:

- אסור שהביטוי שאותו פותחים לטור לפי נוסחת סדרה הנדסית יהיה עם z מסדר יותר גבוה מ- 1.
- k – קבוע כלשהו.