



מדור הבחינות

מינהל הסטודנטים

0044209

מספר סידורי

מס' מח: 30

שנת: תשע"א סמסטר: 1 מועד: 1 מטלה: 1

קורס: 01 211 83 פונקציות מורכבות



המחברת נבדקה ביום: _____

הציון: _____

חתימת המרצה: _____

מס' סידורי _____ מתוך _____ מחברות

הוראות לנבחן

1. הבחינה. תלמיד שעזב את האולם אחרי חלוקת השאלונים או לא מסר את מחברתו עד תום הבחינה או מסר מחברת ריקה - דינו כדין נכשל.
2. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשגיח/ה.
3. יש לכתוב את התשובות בדיו, בכתב ברור ונקי על עמוד אחד של כל דף. אין לכתוב בשוליים, הכותב טיוטה יקדיש לה את הצד הימני של המחברת ואת ההעתקה הנקיה יכתוב בצד השמאלי. את הטיוטה יש למחוק בהעברת קו. אסור לתלוש דפים מן המחברת.
4. עבר הנבחן על תקנות הבחינות, תשלל ממנו הרשות להמשיך בבחינה, והוא יועמד לדין משמעתי.
5. משך זמן הבחינה מצויין בראש השאלון. עם הודעת המשגיח/ה כי תם הזמן, על הנבחן להפסיק את הבחינה, למסור את המחברת עם השאלון ולצאת מאולם הבחינה. מחברת שלא נמסרה בתום ההודעה לא תיבדק.
6. אחזקת מכשיר טלפון סלולרי (אפילו סגור) ברשות הנבחן, מביאו מיידית לפסילת הבחינה.

בהל/ה

ועדת המשמעת מזהירה!

נבחן שיימצאו ברשותו חומרי עזר

אסורים או ייתפס בהעתקה,

ייענש בחומרה עד כדי

הרחקתו מהאוניברסיטה.

1. עליך להבחן בחדר בו הנך רשום.
2. הנח ליד המשגיח בבקשה את חפצייך האישיים כגון: תיקים, ספרים, מחברות, מכשירים סלולריים, קלמרים וכו'.
3. אסור להחזיק בהישג יד חומר הקשור לבחינה/לקורס אלא אם הותר הדבר בכתב על ידי המרצה ורק בהתאם למותר.
4. מסור למשגיח/ה על הבחינה תעודת זהות וכרטיס נבחן חתום ותקף לסמסטר בו מתקיימת הבחינה.
5. היציאה לשירותים במהלך הבחינה אסורה בהחלט. נשים בהריון ונבחנים באישור מתאים רשאים לבקש מהמשגיח/ה לצאת. היציאה בליווי המשגיח/ה ובהתאם לנוהלי האוניברסיטה.
6. נבחן היוצא ללא רשות מחברתו תפסל ותועבר לוועדת משמעת.
7. יש להישמע להוראות המשגיח/ה. אין לעזוב את חדר הבחינה ללא קבלת רשות. חל איסור מוחלט לפנות לנבחנים אחרים בכל עניין ודבר. בכל עניין פנה למשגיח/ה.
8. בתחילת הבחינה מלא את פרטיך האישיים ע"ג המחברת. תלמיד שקיבל לידי שאלון ואין ברצונו להיבחן, חייב להמתין 1/2 שעה בכיתה מתחילת

שנה"ל 888 סמסטר 1 מועד 1

מס' קורס 83-211-01

מחלקה 801 תאריך 2011/11/11

המרצה 801

מבחן חלק (אם הבחינה בשני חלקים)

הוראות לנבחן בנושא סריקה:

אין לכתוב במחברת בעפרון. יש לכתוב בעט בצבע כחול כהה או שחור בלבד. אין להשתמש בנוזל מחיקה (טיפקס). אין לכתוב בשוליים משני צידי הדף. מחברת בכתב מרושל משפיעה על תוצאות הסריקה.

16	1
11	2
15	3
17	4
17	5
17	6

93

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{or} \quad z = x + iy \quad \text{or} \quad |z| = 1$$

$$|z| = 1 \quad \text{or} \quad |z|^2 = 1$$

$$x + iy = \frac{1}{x - iy} \rightarrow (x + iy)(x - iy) = 1$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow |z|^2 = 1 \rightarrow |z| = 1 \quad \text{or} \quad |z| = 1$$

$$x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$|z| = 1$$

$$f(z) = \frac{1 + (2 - 3i)z + (4 + i)z^2}{(4 - i) + (2 + 3i)z + z^2}$$

$$|z| = 1 \rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1 + (2 - 3i)z + (4 + i)z^2}{(4 - i) \cdot \bar{z} + (2 + 3i) \bar{z} + 1}$$

$$= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1 + (2 - 3i)z + (4 + i)z^2}{0 \cdot 1 + (2 + 3i) \bar{z} + (4 - i) \bar{z}^2}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$\sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{z_1} \sqrt{z_2}$$

$$|z| = 1$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$$

$$|z| = 1 \rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$\sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{z_1} \sqrt{z_2}$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$

$$(3 + 5i) + (4 + 6i) = 7 + 11i$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1 + (2 - 3i)z + (4 + i)z^2}{1 + (2 + 3i)\bar{z} + (4 - i)\bar{z}^2}$$

$$= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\bar{A}}{A}$$

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{z^2} \right| \cdot \left| \frac{\bar{A}}{A} \right| = \frac{1}{|z|^2} \cdot \frac{|A|}{|A|} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\frac{1}{|z|^2} = 1$$

$$|z|^2 = 1$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$

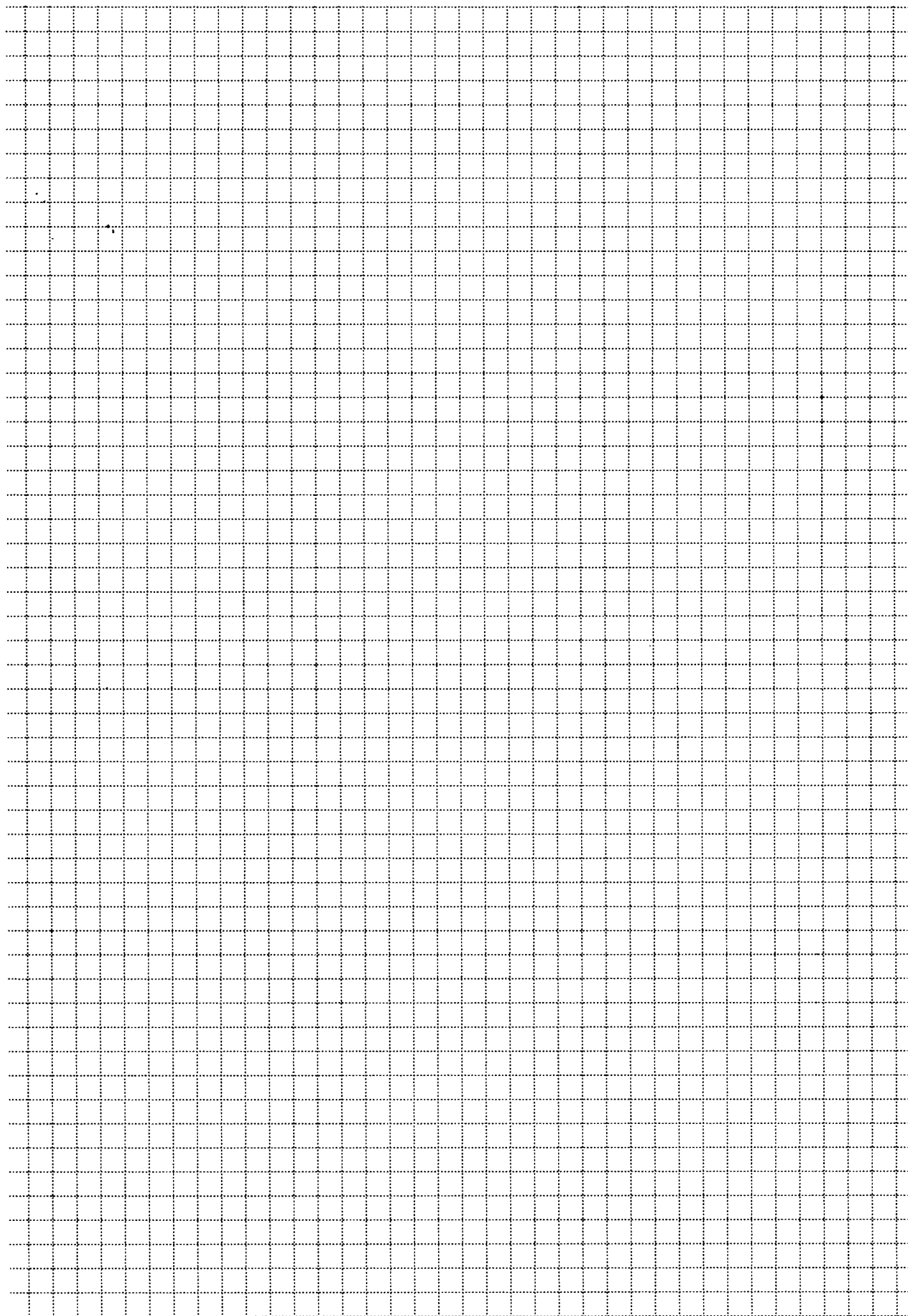
$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 1$$



$$f(z) = \bar{z} \cdot e^{2z}$$

$$f(z) = (x-y)^2 \cdot e^{2x} \cdot e^{2iy}$$

$$= (x^2 - 2xy - y^2) \cdot e^{2x} \cdot (\cos 2y + i \sin 2y)$$

$$u = (x^2 - y^2) \cdot e^{2x} \cdot (\cos 2y + i \sin 2y)$$

$$+ 2ixy (e^{2x} \cdot (\cos 2y + i \sin 2y))$$

$$= (x^2 - y^2) e^{2x} \cos 2y + 2xy \sin 2y e^{2x}$$

$$+ i(x^2 - y^2) e^{2x} \sin 2y - 2xy \cos 2y e^{2x}$$

$$= e^{2x} \cdot [(x^2 - y^2) \cos 2y + 2xy \sin 2y]$$

$$+ i e^{2x} [(x^2 - y^2) \sin 2y - 2xy \cos 2y]$$

$$u_x = 2 e^{2x} [(x^2 - y^2) \cos 2y + 2xy \sin 2y]$$

$$+ e^{2x} [2x \cos 2y + 2y \sin 2y]$$

$$v_y = e^{2x} \cdot [2y \sin 2y - 2x \cos 2y + 2x \cos 2y + 2xy \sin 2y]$$

1.2.1 1.2.2 1.2.3 1.2.4

~~1.2.1~~
1.2.2
1.2.3
1.2.4

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{z}^2 \right) = \frac{1}{2} \dot{z}^2$$

המשוואה היא $\dot{z}^2 = 2z^2$

$$\dot{z}^2 = (x + iy)^2$$

$$= x^2 - 2ixy + y^2$$

$$u_x = 2x$$

$$v_y = -2x$$

$$u_y = -2y$$

$$v_x = -2y$$

המשוואה היא $\dot{z}^2 = 2z^2$ כאשר $x=0, y=0$ נקרא נקודה

המשוואה היא $\dot{z}^2 = 2z^2$ כאשר $x=0, y=0$ נקרא נקודה

$$\dot{z}^2 = 2z^2$$

המשוואה היא $\dot{z}^2 = 2z^2$ כאשר $x=0, y=0$ נקרא נקודה

המשוואה היא $\dot{z}^2 = 2z^2$ כאשר $x=0, y=0$ נקרא נקודה

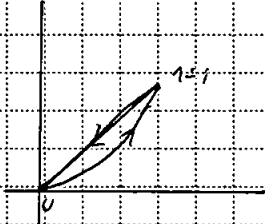
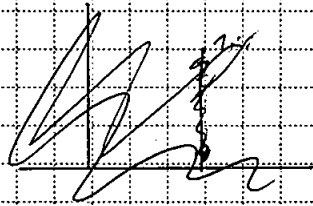
המשוואה היא $\dot{z}^2 = 2z^2$ כאשר $x=0, y=0$ נקרא נקודה

המשוואה היא $\dot{z}^2 = 2z^2$ כאשר $x=0, y=0$ נקרא נקודה

המשוואה היא $\dot{z}^2 = 2z^2$ כאשר $x=0, y=0$ נקרא נקודה

$$\dot{z}^2 = 2z^2$$

$$\int (z^2 - \bar{z}) dz$$



$$z(t) = x + iy = t + it^2$$

$$\bar{z}(t) = t - it^2$$

$$z'(t) = 1 + 2it$$

$$z(t) = x + iy = t + it^2$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$z'(t) = 1 + 2it$$

$$\bar{z}(t) = t - it^2$$

$$z^2(t) = t^2 + 2it^3 - t^4$$

$$I_1 = \int_0^1 (t^2 + 2it^3 - t^4 - t + it^2)(1 + 2it) dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 + 2it^3 - t^4 - t + it^2) + 2it^3 - 4t^4 - 2it^3 - 2it^2 - 2t^3 dt$$

$$= \int_0^1 t^5(-2i) + t^4(-5) + t^3(-2 + 4i) + t^2(1 - i) dt$$

$$= \left[\frac{t^6}{6}(-2i) - \frac{t^5}{5}(5) + \frac{t^4}{4}(-2 + 4i) + \frac{t^3}{3}(1 - i) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}(-2i) - 1 + \frac{1}{4}(-2 + 4i) + \frac{1}{3}(1 - i) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}i$$

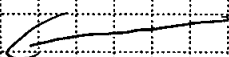
$$z = x + iy = t + it$$

$$z'(t) = 1 + i$$

$$\bar{z} = t - it$$

$$z^2 = t^2 - 2it^2 - t^2 = -2it^2$$

$$I_2 = \int_0^1 (-2it^2 - t + it)(1 + i) dt$$



3. > 10 > 10

$$I_1 = (1+i) \int_1^0 (-t - i(2t^2 + 1)) dt$$

$$= (1+i) \left[-\frac{t^2}{2} - i \left(\frac{2t^3}{3} + t \right) \right]_1^0$$

$$= (1+i) \left[\frac{1}{2} + i \left(\frac{2}{3} + 1 \right) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$$

$$I_T = I_1 + I_2 = \frac{7}{6} + i$$

21e'n n'176 e'

15

$$\sin \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$z=0$$

$$\sin \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin \left(\frac{1}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \cdot (-1)^n$$

$$g(z) =$$

$$g(z) = z^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} z^{2m+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} z^{2m+1+n}$$

$$\int_{|z|=1} g(z) dz$$

$$\int_{|z|=1} g(z) dz = \int_{|z|=1} z^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} z^{2m+1} dz$$

$$2m+1+n = 1$$

$$2m+n = 0$$

$$2m = n$$

$$(1) \quad z = 1$$

$$\frac{1}{(2m+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$1$$

$$\int_{|z|=1} g(z) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot 2\pi i = \frac{2\pi i}{(n+1)!}$$

$$\int_{|z|=1} g(z) = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz$$

$$f(z) = z^{n+1} \cdot \sin \frac{1}{2} = z^{n+1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} z^{2m+1} \cdot (-1)^m$$

$$\sin \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

10,1) בעל מ"ר - ר"ש

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) = a_0$$

10,1) בעל מ"ר - ר"ש

10,1) בעל מ"ר - ר"ש

10,1) בעל מ"ר - ר"ש

$$2m+1-n-1=0$$

$$\rightarrow 2m=n$$

10,1) בעל מ"ר - ר"ש

$$a_0 = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

10,1) בעל מ"ר - ר"ש

$$\int_{|z|=1} g(z) dz = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \cdot a_0 = \frac{2\pi i (-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

17

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4x + 8} dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i2x}}{x^2 + 4x + 8} dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z e^{i2z}}{z^2 + 4z + 8} dz \cdot 5$$

$z=x$
 $dz=dx$

$$= \text{Im} \left[\int_{LR-CR} \frac{z e^{i2z}}{z^2 + 4z + 8} dz + \int_{CR} \frac{z e^{i2z}}{z^2 + 4z + 8} dz \right]$$

$LR-CR$ CR

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{CR} \frac{z e^{i2z}}{z^2 + 4z + 8} dz = 0$

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{LR-CR} \frac{z e^{i2z}}{z^2 + 4z + 8} dz = I_1$

$$I_1 = \int_{LR-CR} \frac{z e^{i2z}}{z^2 + 4z + 8} dz$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-4 \pm 4i}{2} = -2 \pm 2i$$

OF $z e^{i2z}$ (pole) at $z = -2 \pm 2i$ (pole) (pole)

for $z = -2 + 2i$ (pole) (pole) (pole)

for $z = -2 - 2i$ (pole) (pole) (pole)

$$I_1 = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, -2 + 2i) = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow -2 + 2i} (z + 2 - 2i) \cdot \frac{z e^{i2z}}{(z + 2 - 2i)(z + 2 + 2i)}$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow -2 + 2i} \frac{z e^{i2z}}{(z + 2 + 2i)} = \frac{(-2 + 2i) \cdot e^{i(-4 + 4i)}}{4i} \cdot 2\pi i$$

$$= \frac{(-2 + 2i) e^{-4} \cdot e^{-4i}}{4i} \cdot 2\pi i$$

$$= \frac{1}{2} \pi \cdot (-2 + 2i) (e^{-4} \cdot e^{-4i})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4x + 8} dx = \text{Im} \left[\frac{1}{2} \pi (-2 + 2i) (e^{-4} \cdot e^{-4i}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \pi \text{Im} [(-2 + 2i) e^{-4} \cdot [\cos 4 - i \sin 4]]$$

$$= \frac{1}{2} \pi e^{-4} \cdot [2 \sin 4 + 2 \cos 4] = \pi e^{-4} \cdot [\sin 4 + \cos 4]$$

17

המשפט 6.1

נניח f פונקציה אנליטית בדיסק $|z| < R$ ונניח $|f(z)| \leq M$ לכל $|z| < R$.

$$g(z) = (z+2)^4$$

$$|g(z)| \geq 4$$

כלומר, $|g(z)| \geq 4$ לכל $|z| < R$.

נניח $|f(z)| \leq M$ לכל $|z| < R$.

$$|f(z) - g(z)| = |(z+3)e^{3z}| \leq 5 \cdot e^3 < 4 \leq |g(z)|$$

$$g(z) = (z+2)^4$$

כלומר, $|g(z)| \geq 4$ לכל $|z| < R$.

נניח $|f(z)| \leq M$ לכל $|z| < R$.

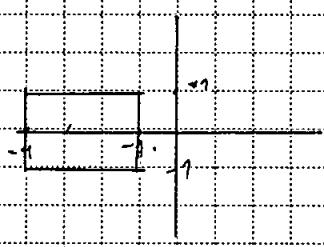
נניח $|f(z)| \leq M$ לכל $|z| < R$.

$$f(z) = (z+3)^2 e^{3z} + (z+2)^4$$

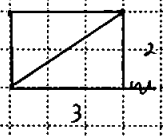
כלומר, $|f(z)| \leq M$ לכל $|z| < R$.

$$|g(z)| \geq 1 \quad \text{p382}$$

17

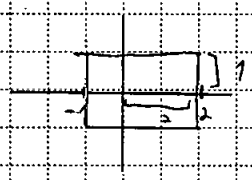


0' 1' 2' 3' 4' 5' 6' 7' 8' 9' 10' 11' 12' 13' 14' 15' 16' 17' 18' 19' 20' 21' 22' 23' 24' 25' 26' 27' 28' 29' 30' 31' 32' 33' 34' 35' 36' 37' 38' 39' 40' 41' 42' 43' 44' 45' 46' 47' 48' 49' 50' 51' 52' 53' 54' 55' 56' 57' 58' 59' 60' 61' 62' 63' 64' 65' 66' 67' 68' 69' 70' 71' 72' 73' 74' 75' 76' 77' 78' 79' 80' 81' 82' 83' 84' 85' 86' 87' 88' 89' 90' 91' 92' 93' 94' 95' 96' 97' 98' 99' 100'



$z' = z + 3$ כאשר z הוא מספר מרוכב, z' הוא מספר מרוכב.

התוצאה היא z' .



כאשר z הוא מספר מרוכב, z' הוא מספר מרוכב.

$|z|^2 \leq 2^2 + 1^2$ כלומר $|z|^2 \leq 5$ כי z הוא מספר מרוכב.

מכאן $|z| \leq \sqrt{5}$ וזהו המרחק בין z לראש הציר.

$|z|^2 = 5$ כאשר $z' = 2 \pm i$ וזהו המרחק בין z לראש הציר.

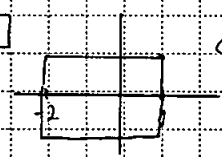
$|z+3|^2 \leq 5$ כלומר $|z+3| \leq \sqrt{5}$ כי z הוא מספר מרוכב.

$|e^{3z}| = e^{\operatorname{Re}(3z)} \leq e^3$ כאשר z הוא מספר מרוכב.

$|z+2|^4 = |(z+2)|^4$ כאשר z הוא מספר מרוכב.

כאשר z הוא מספר מרוכב, z' הוא מספר מרוכב.

$|z+2| \geq 2$ כי z הוא מספר מרוכב.



כאשר z הוא מספר מרוכב, z' הוא מספר מרוכב.

$|z|^2 \geq 2^2 = 4$ כי z הוא מספר מרוכב.

$|z+2|^2 \geq 4$ כי z הוא מספר מרוכב.

$|z+2|^4 \geq 4$ כי z הוא מספר מרוכב.

התוצאה היא z' .

1775 11/8

$(\bar{z} \cdot e^z)^k$
 $= (x-iy) \cdot e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$

$g(z) = \bar{z} e^z = (x-iy) \cdot e^x (\cos y + i \sin y)$
 $= x e^x \cos y + y e^x \sin y + i(x e^x \sin y - y e^x \cos y)$

$u = \cos y (e^x + x e^x)$
 $v = \sin y (e^x + x e^x)$

$|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x$
 $f(z) = \frac{g(z)}{z^{n+1}}$

$g(z) = \frac{f(z)}{z}$
 $f(z) = \frac{z^{n+1} \cdot \sin \frac{1}{z}}{z} = z^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}$

$(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$
 $|z|^2 = x^2 + y^2$
 $2n+1-n-1 = 2n-n$

$u_x = 1$
 $u_y = 0$

$v_x = 0$
 $v_y = 1$

$\bar{z}^2 = x^2 - 2ixy - y^2$

$u_x = 2x$
 $u_y = -2y$

$v_x = -2y$
 $v_y = 2x$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

$g(z) = \frac{f(z)}{z}$
 $f(z) = \sin \frac{1}{z}$
 $g(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{z}$

$(u+iv)^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$

$u = u^2 + v^2$
 $v = 2uv$

$u_x = 2u u_x + 2v v_x$
 $v_y = 2u u_y + 2v v_y$

$u_y = 2u u_y + 2v v_y$
 $v_x = 2u u_x + 2v v_x$

