



מדור הבחינות

מינהל הסטודנטים

מספר סידורי 7091581

מס' מח' 17:

שנת: תשע"א סמסטר: 1 מועד: 1 מטלה: 1

קורס: 01 211 83 פונקציות מורכבות



המחברת נבדקה ביום: _____

הציון: _____

חתימת המרצה: _____

מס' סידורי _____ מתוך _____ מחברות

הוראות לנבחן

1. הבחינה. תלמיד שעזב את האולם אחרי חלוקת השאלונים או לא מסר את מחברתו עד תום הבחינה או מסר מחברת ריקה - דינו כדין נכשל.
2. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשיג/ה.
3. יש לכתוב את התשובות בדיו, בכתב ברור ונקי על עמוד אחד של כל דף. אין לכתוב בשוליים, הכותב טיוטה יקדיש לה את הצד הימני של המחברת ואת ההעתקה הנקיה יכתוב בצד השמאלי. את הטיוטה יש למחוק בהעברת קו. אסור לתלוש דפים מן המחברת.
4. עבר הנבחן על תקנות הבחינות, תשלל ממנו הרשות להמשיך בבחינה, והוא יועמד לדין משמעתי.
5. משך זמן הבחינה מצויין בראש השאלון. עם הודעת המשיג/ה כי תם הזמן, על הנבחן להפסיק את הבחינה, למסור את המחברת עם השאלון ולצאת מאולם הבחינה. מחברת שלא נמסרה בתום ההודעה לא תיבדק.
6. אחזקת מכשיר טלפון סלולרי (אפילו סגור) ברשות הנבחן, מביאו מיידית לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

ועדת המשמעת מזהירה!

נבחן שיימצאו ברשותו חומרי עזר

אסורים או ייתפס בהעתקה,

ייענש בחומרה עד כדי

הרחקתו מהאוניברסיטה.

1. עליך להבחן בחדר בו הנך רשום.
2. הנח ליד המשיג/ה בבחינה את חפיצך האישיים כגון: תיקים, ספרים, מחברות, מכשירים סלולריים, קלמרים וכו'.
3. אסור להחזיק בהישג יד חומר הקשור לבחינה/לקורס אלא אם הותר הדבר בכתב על ידי המרצה ורק בהתאם למותר.
4. מסור למשיג/ה על הבחינה תעודת זהות וכרטיס נבחן חתום ותקף לסמסטר בו מתקיימת הבחינה.
5. היציאה לשירותים במהלך הבחינה אסורה בהחלט. נשים בהריון ונבחנים באישור מתאים רשאים לבקש מהמשיג/ה לצאת. היציאה בליווי המשיג/ה ובהתאם לנוהלי האוניברסיטה.
6. נבחן היוצא ללא רשות מחברתו תפסל ותועבר לוועדת משמעת.
7. יש להישמע להוראות המשיג/ה. אין לעזוב את חדר הבחינה ללא קבלת רשות. חל איסור מוחלט לפנות לנבחנים אחרים בכל עניין ודבר. בכל עניין פנה למשיג/ה.
8. בתחילת הבחינה מלא את פרטיך. האישיים ע"ג המחברת. תלמיד שקיבל לידיו שאלון ואין ברצונו להיבחן, חייב להמתין 1/2 שעה בכיתה מתחילת

שנה"ל קורס סמסטר א מועד א

מס' קורס 83-211-83

מחלקה תאריך 20/1/11

המרצה ד"ר הוראח

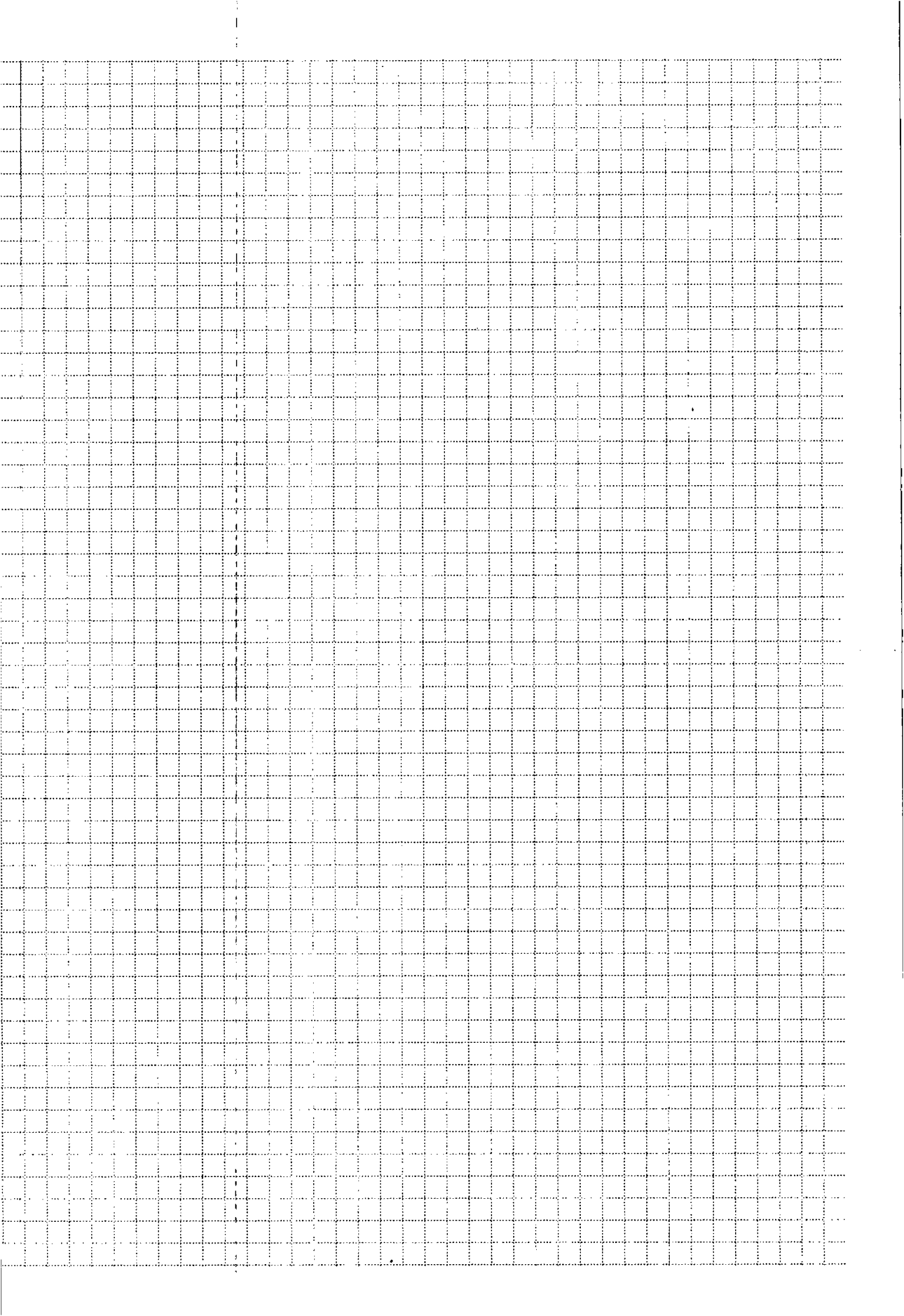
מבחן חלק (אם הבחינה בשני חלקים)

הוראות לנבחן בנושא סריקה:

אין לכתוב במחברת בעפרון. יש לכתוב בעט בצבע כחול כהה או שחור בלבד. אין להשתמש בנוזל מחיקה (טיפקס). אין לכתוב בשוליים משני צידי הדף. מחברת בכתב מרושל משפיעה על תוצאות הסריקה.

17	1
15	2
11	3
14	4
18	5
15	6

90

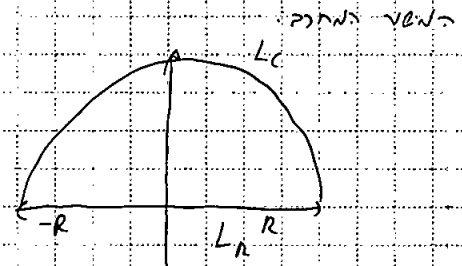


$$e^{2iz} = e^{2i(2+2i)} = e^{4i-4} = e^{-4} \cdot e^{4i}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}\pi i} \quad e^{2iz} = e^{2i(-2+2i)} = e^{-4-4i} = e^{-4} \cdot e^{-4i}$$

$$5) I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4x + 8} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{z \sin 2z}{z^2 + 4z + 8} dz = \text{Im} \left\{ \int_{-R}^R \frac{z e^{2iz}}{z^2 + 4z + 8} dz \right\}$$

$$= \text{Im} \left\{ \int_{L_c} \frac{z e^{2iz}}{z^2 + 4z + 8} dz \right\}$$



$$\int_{L_c} \frac{z e^{2iz}}{z^2 + 4z + 8} dz = 0$$

האינטגרל הוא 0 כי הפונקציה היא אנליטית בתוך ובחוץ לנגר (בין הנקודות הריקות)

כל

$$I = \text{Im} \left\{ \int_{L_c} \frac{z e^{2iz}}{z^2 + 4z + 8} dz \right\}$$

$$z^2 + 4z + 8 = 0 \quad z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{-4 \pm 4i}{2}$$

$$\frac{z e^{2iz}}{z^2 + 4z + 8} = \frac{z e^{2iz}}{(z - (-2 + 2i))(z - (-2 - 2i))}$$

הנקודות הריקות הן $z_1 = -2 + 2i$ ו- $z_2 = -2 - 2i$

$$z_1 = -2 + 2i$$

$$z_2 = -2 - 2i$$

הנקודה z_1 היא הנקודה הנמצאת בתוך הנגר, ולכן רק היא תתרום לאינטגרל.

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z e^{2iz}}{z - (-2 - 2i)} = \frac{z e^{2iz}}{z - (-2 - 2i)} \Big|_{z = -2 + 2i}$$

$$= \frac{(-2 + 2i) e^{-4 - 4i}}{4i}$$

$$= \frac{(-2 + 2i) e^{-4} e^{-4i}}{4i} = 0.013 + 9.44 \cdot 10^{-4} i$$

$$\Rightarrow I_2 = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, -2 + 2i) = 5.93 \cdot 10^{-3} + 0.0811 i$$

$$I = \text{Im} \{ I_2 \} = 0.0811$$

האינטגרל הוא 0.0811
הוא קטן מאוד
הוא קטן מאוד

18

(ח) אף איז פונקטן אן אפערטן געגנט:

$$g(z) = x^2 - 2xyi - y^2$$

(א) אן אפערטן געגנט

$$h(z) = e^{2x+2iy}$$

$\Rightarrow$

פונקטן אן אפערטן געגנט - פונקטן אן אפערטן געגנט

$$g(z) = \frac{x^2 - y^2}{u} - \frac{2xyi}{v}$$

אן אפערטן געגנט

(ג) אן אפערטן געגנט - פונקטן אן אפערטן געגנט

$$u_x = 2x$$

$$u_y = -2y$$

$$v_y = -2x$$

$$-v_x = 2y$$

$$2x = -2x, 2y = -2y$$

אן אפערטן געגנט - פונקטן אן אפערטן געגנט

$$x=y=0$$

אן אפערטן געגנט - פונקטן אן אפערטן געגנט

אן אפערטן געגנט - פונקטן אן אפערטן געגנט

$$f(z) = g(z) \cdot h(z)$$

אן אפערטן געגנט - פונקטן אן אפערטן געגנט

אן אפערטן געגנט - פונקטן אן אפערטן געגנט

אן אפערטן געגנט

אן אפערטן געגנט - פונקטן אן אפערטן געגנט

אן אפערטן געגנט - פונקטן אן אפערטן געגנט

$$2) f(z) = (\bar{z})^2 e^{2z}$$

$$z = x + iy$$

$$= (x - iy)^2 e^{2(x + iy)}$$

$$= (x^2 - 2xyi - y^2) e^{2x + 2iy} = (x^2 - 2xyi - y^2) e^{2x} e^{2iy}$$

$$= (x^2 - 2xyi - y^2) e^{2x} (\cos 2y + i \sin 2y)$$

$$= e^{2x} (x^2 - 2xyi - y^2) (\cos 2y + i \sin 2y)$$

$$= e^{2x} [x^2 \cos 2y + \underline{x^2 \sin 2y \cdot i} - \underline{2xy \cos 2y \cdot i} + 2xy \sin 2y - y^2 \cos 2y - \underline{y^2 \sin 2y \cdot i}]$$

$$= e^{2x} [\underbrace{x^2 \cos 2y + 2xy \sin 2y - y^2 \cos 2y}_u] + e^{2x} [\underbrace{x^2 \sin 2y - 2xy \cos 2y - y^2 \sin 2y}_v]$$

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

$$u_x = e^{2x} [2x \cos 2y + 2y \sin 2y] + 2e^{2x} [x^2 \cos 2y + 2xy \sin 2y - y^2 \cos 2y]$$

$$v_y = e^{2x} [\underline{1x^2 \cos 2y} - \underline{2x \cos 2y} + \underline{2xy \sin 2y \cdot 2} - \underline{2y \sin 2y} - \underline{y^2 \cos 2y \cdot 2}]$$

$$u_x = e^{2x} [\underline{2x \cos 2y} + \underline{2y \sin 2y} + \underline{2x^2 \cos 2y} + \underline{4xy \sin 2y} - \underline{2y^2 \cos 2y}]$$

$$u_x = v_y \Rightarrow 4x \cos 2y + 4y \sin 2y = 0$$

$$x \cos 2y = -y \sin 2y$$

$$\frac{x \cdot y}{x-y} = 1 \quad (x \cdot y)(x-y) = 1 \quad \frac{1}{x-y} = x \cdot y$$

$$1) \quad |z|=1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}} \quad : / \cdot 3 \quad z = re^{i0} \quad \bar{z} = re^{-i0} \quad : / \cdot 2$$

$$1 = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{re^{-i0}} = \frac{1}{r} e^{i0} = z = re^{i0}$$

$$r=1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{r} \Leftrightarrow e^{i0} \left(r - \frac{1}{r}\right) = 0 \quad \frac{1}{r} e^{i0} = re^{i0} \Leftrightarrow$$

$$r=|z|=1 \quad \text{כאשר } r=1 \quad \frac{1}{z} = \bar{z} \quad \text{אם } z \text{ הוא מספר מרוכב}$$

הוכחה: $z = re^{i\theta}$ אז $\bar{z} = re^{-i\theta}$ ו- $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = re^{-i\theta} = \bar{z}$

$$\text{אם } z = re^{i\theta} \neq re^{-i\theta} \quad \text{אז } \frac{1}{z} \neq \bar{z} \quad \text{אם } |z| = r \neq 1 \quad \text{אז } \frac{1}{z} \neq \bar{z}$$

$$2 \quad f(z) = \frac{1 \cdot (2-3i)z + (4+i)z^2}{(4-i)z + (2+3i)z + z^2}$$

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow |z|=1 \quad \text{אם } |z|=1$$

$$\frac{1}{z} = \bar{z} \quad z^2 = z \cdot \bar{z} = \frac{z}{z}$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{2-3i}{z} + \frac{4+i}{z} z}{4-i + \frac{(2+3i)}{z} + \frac{z}{z}} = \frac{\bar{z} + (2-3i) + (4+i)z}{(4-i)\bar{z} + 2+3i + z}$$

$$= \frac{x-iy + 2+3i + (4+i)(x+iy)}{(4-i)(x-iy) + 2+3i + x+iy}$$

$$= \frac{x-iy + 2+3i + 4x+4iy + ix-y}{4x-4iy - ix-y + 2+3i + x+iy} = \frac{5x+ix-y+3iy+2+3i}{5x-ix-y-3iy+2+3i}$$

$$= \frac{(5x-y+2) + (x+3y-3)i}{(5x-y+2) - (x+3y-3)i}$$

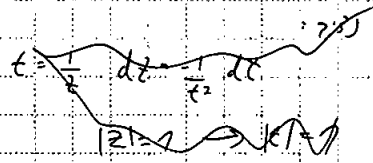
$$= \frac{z}{\bar{z}} = 1$$

17

אם $|z|=1$ אז $\frac{1}{z} = \bar{z}$ ו- $z^2 = z \cdot \bar{z} = 1$

$$4) \quad g_n(z) = z^n \sinh\left(\frac{1}{z}\right) \quad I = \int_{|z|=1} g_n(z) dz = \int z^n \sinh\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

$$I = \left(\frac{1}{z}\right)^n \sinh z = \frac{-1}{z^2} dz$$



$$g(z) = z^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{2k+1}} = z^n \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 \cdot 3!} + \frac{1}{z^5 \cdot 5!} - \dots \right]$$

סדרה של פונקציות

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) \quad \frac{1}{z}$$

הפונקציה קובצת בנקודה

$$b_1 = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$$

הפונקציה קובצת בנקודה

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) \quad \frac{1}{z^2}$$

הפונקציה קובצת בנקודה

$$b_1 = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+2)!}$$

הפונקציה קובצת בנקודה

$$b_1 = \text{Res}(g, 0)$$

$$I = 2\pi i \cdot \text{Res}(g, 0)$$

הפונקציה קובצת בנקודה

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \right]$$

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+2)!} \right]$$

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \right]$$



$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \right]$$

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \right]$$

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \right]$$

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \right]$$

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \right]$$

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \right]$$

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \right]$$

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \right]$$

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \right]$$

$$\left(\text{הפונקציה קובצת בנקודה} \right) = 2\pi i \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} \right]$$

$$3) \int (z^2 - \bar{z}) dz = I$$

357 (200 132)

$$z = x + x^2 i$$

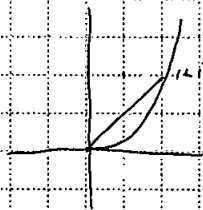
1/2021

$$dz = (1 + 2xi) dx$$

$$z = x + xi$$

2021

$$dz = (1 + i) dx$$



$$I_1 = \int_0^1 (x + x^2 i) (1 + 2xi) dx$$

$$= \int_0^1 (x + 2x^2 i + x^3 i + 2x^4) dx = \int_0^1 (-2x^4 + 3x^3 i + x) dx = \left[-\frac{2x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} i + \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{5} + i + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{10} i = i$$

$$I_2 = \int_1^0 (x + xi) (1 + i) dx = \int_1^0 (x + 2xi - x) dx = \int_1^0 2xi dx = \left[\frac{2x^2}{2} i \right]_1^0 = -i$$

$$I = I_1 + I_2 = i - i = 0$$

2021 12/11

ד"ר הסדר:

$$s|e^{3x}|$$

יפונ

$$s|e^{3x}| = se^{-3}$$

הינה מונולאניר - המקסימלית בתחום היא טוסר $x = -1$ ואל

$$|(x+2+i)^4| = 1$$

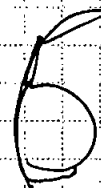
יפונ $(x+2+i)^4$ מקטע אנליטי וזכור $x = 3$ ואל

$$se^{-3} < 1$$

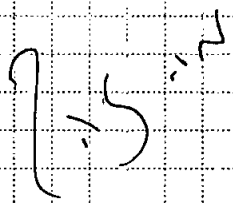
$\Rightarrow$ ליתן / היטן יתר האזנה אאזנה.

(הינה אל סונ א אאא המקסימלית אל סונ 2 בתחום)

$\Leftarrow$ סונ א אאזנה לטונ 2 זכור אל 2 בתחום)



$$6) f(z) = (z+3)^2 e^{3z} + (z+2)^4$$



הנקודה $z=3$ היא נקודה פנימית לריבוע
לכן $|f(z)| < 5$ לכל z בריבוע

$$|(z+3)^2| \leq |(-1+i+3)^2|$$

$$= |(2+i)^2| = |4+4i-1| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

אם $|z+3| < 5$ אז $|f(z)| < 5$ לכל z בריבוע

$$|f(z)|$$

$$|(z+3)^2 e^{3z}| = |(z+3)^2| |e^{3z}| = |(z+3)^2| |e^{3x}| \leq |(z+3)^2| |e^{-3}| \leq 5 e^{-3}$$

$$-4 \leq x \leq -1$$

אם $x < -4$ ו $x > -1$

$$5 |e^{3x}| < |(z+2)^4|$$

אם $x < -4$

$$5 |e^{3x}| < |(x+2+i)^4|$$

$$|f(z) - g(z)| = |(z+3)^2 e^{3z}| \leq 5 |e^{3x}| < |(z+2)^4| = |g(z)|$$

$$|(z+3)^2 e^{3z}| \leq 5 |e^{3x}| < |(z+2)^4|$$

אם z הוא נקודה פנימית לריבוע

$$g(z) = (z+2)^4$$

אם z הוא נקודה פנימית לריבוע

$$f(z) = (z+3)^2 e^{3z} + (z+2)^4$$

$$|f(z) - g(z)| = |(z+3)^2 e^{3z}| \leq 5 |e^{3x}| < |(z+2)^4| = |g(z)|$$

אם z הוא נקודה פנימית לריבוע ו $f(z)$ הוא פונקציה אנליטית

אם $f(z)$ הוא פונקציה אנליטית ו $g(z)$ הוא פונקציה אנליטית

