

תרגול מספר 6

זרם והתנגדות

הקדמה:

חוק אוהם:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

σ , מוליכות סגולית.

\vec{J} , צפיפות הזרם. ($dI \equiv J da_{\perp}$).

\vec{E} , השדה החשמלי.

חוק אוהם הוא חוק ניסיוני – קיימים בטבע חומרים שמתנהגים לפי חוק אוהם בטווח מתחים מסויים.

התנגדות סגולית:

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma} [\Omega \cdot \text{m}]$$

נגד פשוט:

עבור נגד בעל התנגדות סגולית ρ , שטח חתך קבוע A בניצב לזרם, ואורך L בכיוון הזרם, מתקיים:

$$R = \frac{L\rho}{A}$$

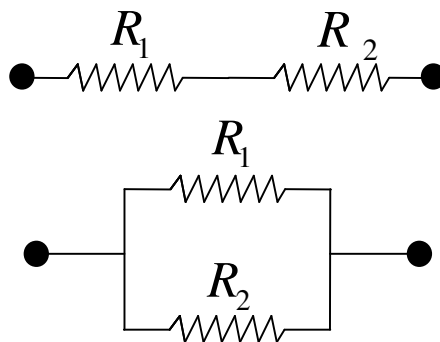
חיבור נגדים:

בטור:

$$R_{total} = R_1 + R_2$$

במקביל:

$$\frac{1}{R_{total}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



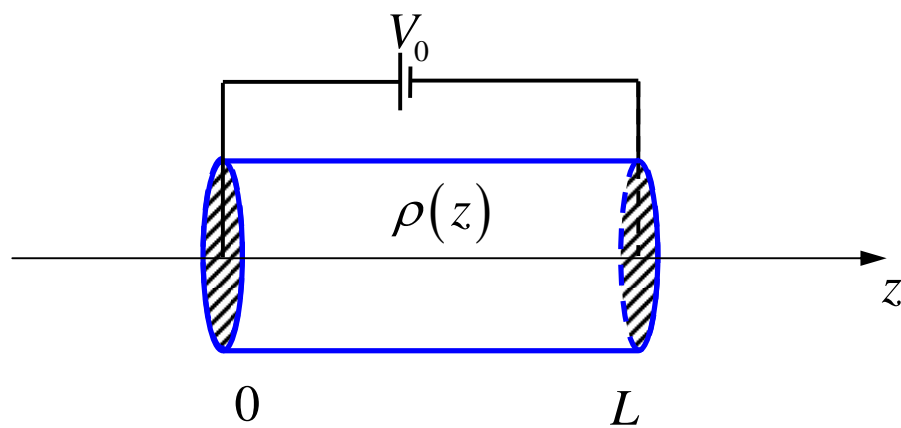
תרגיל 1

נתון גליל בעל אורך L , ורדיוס a , אשר לו התנגדות סגולית המשתנה לאורכו:

$$\rho(z) = \frac{\rho_0 z^5}{L^5}$$

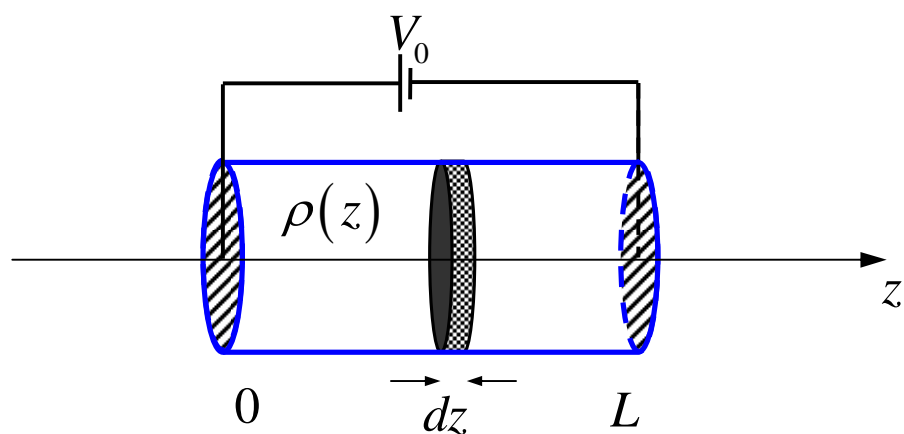
מפעילים מתח V_0 בין הבסיסים של הגליל

- לחשב את הזרם
- לחשב את צפיפות הזרם



פתרון 1

עבור זרם מקביל לציר הגליל כל פרוסה קטנה, dz , מתנהגת כנגד פשוט: בעלת התנגדות סגולית קבועה $\rho(z)$, שטח חתך קבוע πa^2 ואורך dz .



ההתנגדות של פרוסה דקה אחת במקום z היא:

$$dR = \frac{\rho(z) dz}{\pi a^2}$$

לפני שנסכום את ההתנגדויות צריך לזהות האם הנגדים מחוברים בטור או במקביל עבור כיוון הזרם הנתון.
 עבור זרם מקביל לציר הגליל הנגדים הפשוטים (הפרוסות) מחוברים בטור,
 לכן נסכום ההתנגדות עבור נגדים בטור:

$$R_{total} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

$$R = \int dR$$

$$\begin{aligned} R_{total} &= \int dR = \int_0^L \frac{\rho(z) dz}{\pi a^2} = \int_0^L \frac{\rho_0 z^5 dz}{L^5 \pi a^2} = \\ &= \frac{\rho_0}{L^5 \pi a^2} \int_0^L z^5 dz = \frac{\rho_0}{L^5 \pi a^2} \left[\frac{z^6}{6} \right]_0^L = \boxed{\frac{\rho_0 L}{6 \pi a^2}} \end{aligned}$$

הזרם הכולל שעובר דרך הנגד:

$$I = \frac{V_0}{R_{total}} = \boxed{\frac{6 \pi a^2 V_0}{\rho_0 L}}$$

בנגד פשוט צפיפות הזרם היא וקטור אשר גודלו הוא הזרם העובר בנגד לחלק לשטח הניצב לנגד:
 וכינונו בכיוון הזרם. – שימו לב המצב הוא כזה רק בנגד פשוט.
 לכן בכל פרוסה (נגד פשוט):

$$J_{slice} = \frac{I_{slice}}{A_{slice}} = \frac{6 \pi a^2 V_0}{\rho_0 L} \frac{1}{\pi a^2} = \frac{6 V_0}{\rho_0 L}$$

$$\boxed{\vec{J} = \frac{6 V_0}{\rho_0 L} \hat{z}}$$

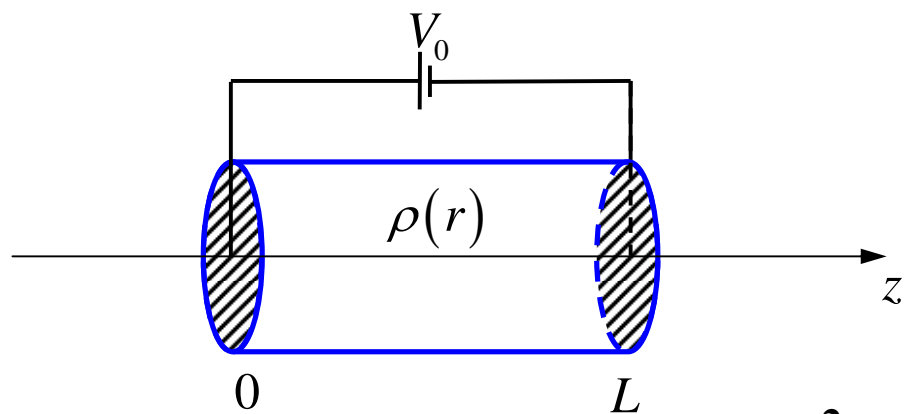
תרגיל 2

נתון גליל בעל אורך L , ורדיוס a , אשר לו התנגדות סגולית המשתנה עם הרדיוס:

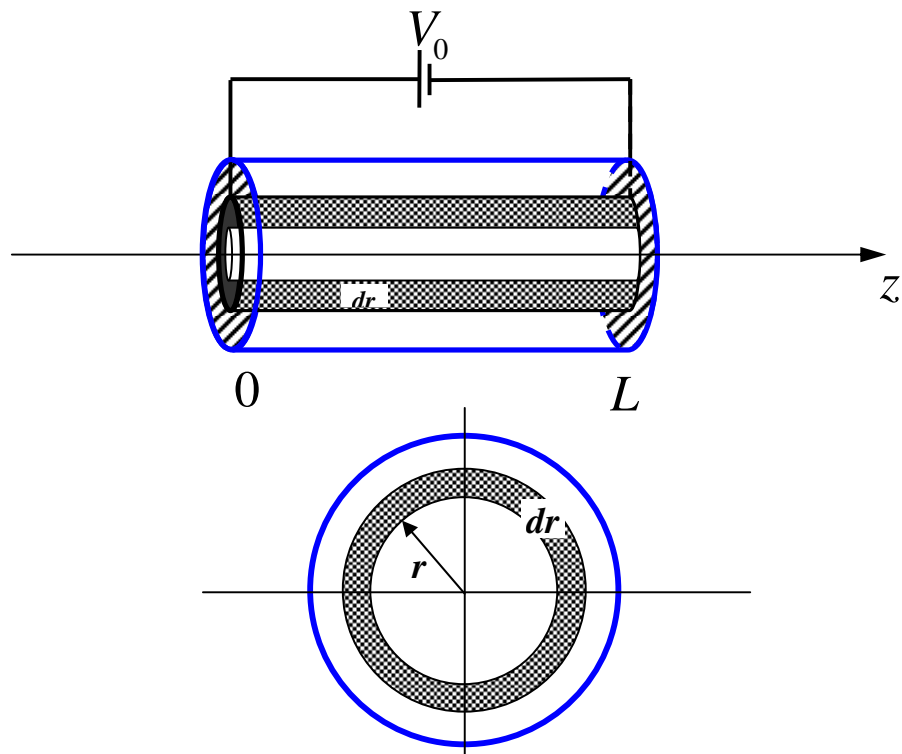
$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r}{a}$$

מפעילים מתח V_0 בין הבסיסים של הגליל

- חשב את הזרם.
- חשב את צפיפות הזרם.



פתרון 2



כל קליפה גלילית בעובי dr מתנהגת כנגד פשוט: ההתנגדות הסגולית קבועה, $\rho(r)$, האורך הוא L , ושטח החתך קבוע $2\pi r dr$.

$$dR = \frac{\rho(r)L}{2\pi r dr}$$

עבור זרם המקביל לציר הגליל הנגדים הפשוטים (הליפות) מחוברות במקביל, לכן נסכום ההתנגדות עבור נגדים במקביל:

$$\frac{1}{R_{total}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

$$\frac{1}{R} = \int \frac{1}{dR}$$

$$\frac{1}{R} = \int \frac{1}{dR} = \int_0^a \frac{2\pi r dr}{\rho(r)L} = \frac{2\pi}{L} \int_0^a \frac{r dr}{\rho_0 r} =$$

$$= \frac{2\pi a}{L\rho_0} \int_0^a dr = \frac{2\pi a^2}{L\rho_0}$$

$$\boxed{R = \frac{L\rho_0}{2\pi a^2}}$$

הזרם דרך הנגד הוא:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{\frac{L\rho_0}{2\pi a^2}} = \boxed{\frac{2\pi a^2 V_0}{L\rho_0}}$$

בנגד פשוט צפיפות הזרם היא וקטור אשר גודלו הוא הזרם העובר בנגד לחלק לשטח הניצב לנגד: וכיוונו בכיוון הזרם. לכן בכל קליפה (נגד פשוט):

$$J = \frac{I_{\text{cylindric shell}}}{A_{\text{Shell area}}}$$

$$I_{\text{cylindric shell}} = \frac{V_0}{dR_{\text{Shell}}} = \frac{V_0}{\frac{\rho(r)L}{2\pi r dr}} = \frac{2\pi r dr V_0}{\frac{\rho_0 r}{a} L} = \frac{2\pi a dr V_0}{\rho_0 L}$$

$$A_{\text{Shell area}} = 2\pi r dr$$

$$J = \frac{2\pi a dr V_0}{\rho_o L} \frac{1}{2\pi r dr} = \frac{a V_0}{\rho_o L r}$$

$$\vec{J} = \frac{a V_0}{\rho_o L r} \hat{z}$$