תרגול מספר 4 – תרגילים באלקטרוסטטיקה

תרגיל

נתונים שני לוחות מוליכים בעלי שטח A במישור x, y. הלוחות מקבילים זה לזה ומרוחקים מרחק d זה מזה.

כמוראה בציור, מתקיים $\sqrt{A} >> d$.

הלוח העליון טעון בצפיפות מטען משטחית σ והתחתון בצפיפות מטען משטחית $-\sigma$.

לחשב את האנרגיה של המערכת.

פתרון

האנרגיה של המערכת שווה לאנרגיה האצורה בשדה חשמלי.

צפיפות האנרגיה האצורה בשדה החשמלית היא:

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\left|\vec{E}\right|^2$$

והאנרגיה היא האינטגרל של צפיפות האנרגיה על כל המרחב.

$$U_E = \iiint\limits_{\text{All space}} u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_{\text{All space}} \left|\vec{E}\right|^2 dV$$

השדה החשמלי במרחב הוא:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z} & \text{between the planes} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ולכן בין הלוחות צפיפות האנרגיה היא

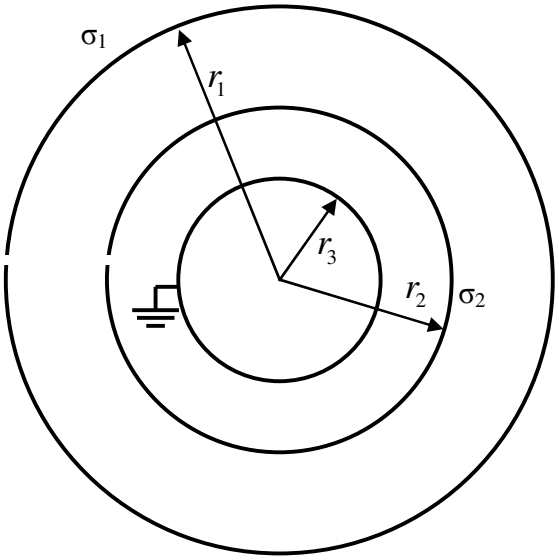
$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\left|\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

כעת יש לסכום את הצפיפות על כל המרחב ולקבל את האנרגיה:

$$U_E = \iiint\limits_{\substack{\text{Between}\\ \text{the planes}}} \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dV + \iiint\limits_{\text{otherwise}} 0 dV = \boxed{\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} Ad}$$

תרגיל 2 (מתוך מועד א' של חורף תש"ע)

נתונות שלוש קליפות כדוריות וקונצנטריות (בעלות מרכז משותף). הקליפה הפנימית מוליכה ואילו הקליפה האמצעית והחיצונית מבודדות. רדיוס הקליפה החיצונית הוא r_1 וצפיפות המטען השטחי עליה הוא σ_1. רדיוס הקליפה האמצעית הוא r_2 וצפיפות המטען השטחי עליה הוא σ_2. את הקליפה הפנימית בעלת רדיוס r_3 חיברו להארקה (לאדמה) באמצעות מוליך דק העובר דרך חרירים בקליפות האחרות. לאחר התייצבות המטענים הוציאו את המוליך הדק. ניתן להניח כי הפוטנציאל באינסוף וכן פוטנציאל האדמה הוא אפס.
מהו המטען הכולל שנמצא על קליפה הפנימית ?



פתרון

נניח שעל הקליפה הפנימית יש מטען Q_3, נקבל ביטוי לפוטנציאל על הקליפה ונשווה ל0.
בהרצאה ראינו שהפוטנציאל החשמלי בתוך ועל קליפה כדורית בעלת רדיוס R הטעונה במטען Q המפולג באופן אחיד הוא

$$\varphi = \frac{kQ}{R}$$

מעקרון הסופרפוזיציה נקבל שהפוטנציאל על הקליפה הפנימית הוא

$$0 = \varphi(r_3) = \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} + \frac{kQ_3}{r_3},$$

כאשר $Q_1 = \sigma_1 4\pi r_1^2$ ו $Q_2 = \sigma_2 4\pi r_2^2$

לכן:

$$0 = \sigma_1 4\pi r_1 + \sigma_2 4\pi r_2 + \frac{1}{r_3} Q_3$$

ולבסוף:

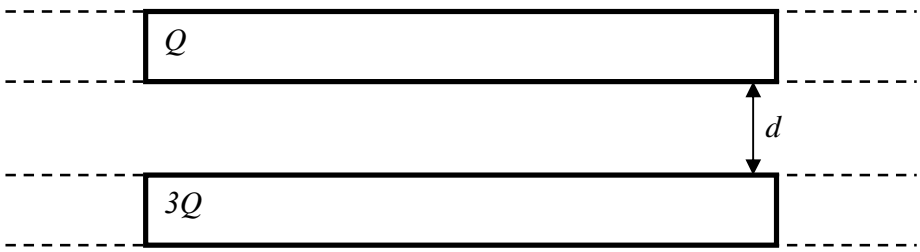
$$\boxed{Q_3 = -4\pi r_3\left(\sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2\right)}$$

תרגיל 3:

נתונות שתי טבלאות מוליכות בעלות שטח A במישור x, y. הטבלאות מקבילות זו לזו ומרוחקות זו מזו מרחק d כמוראה בציור, מתקיים $\sqrt{A} >> d$.

הטבלה העליונה טעונה במטען כולל Q והטבלה התחתונה במטען כולל $3Q$.

לחשב את התפלגות המטען במרחב.



פתרון

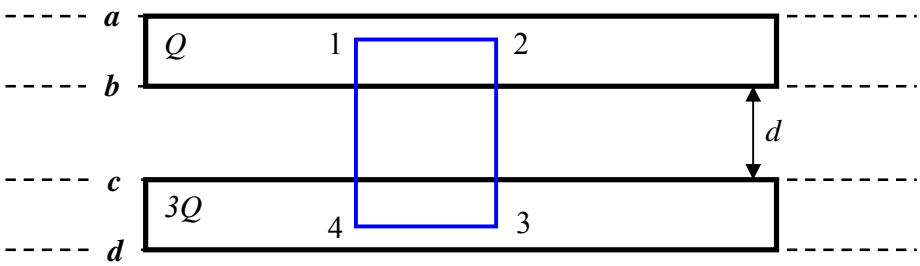
אנו יודעים שהשדה בתוך מוליך הוא 0. ושהמטען מתרכז בשפות המוליך.

כמוכן אנו יודעים שמטעמי סימטריה השדה בין הטבלאות חייב להיות בכיוון הניצב לטבלאות.

לכן נשתמש בחוק גאוס (בכיוון הפוך מבד"כ) על מנת לחשב את ההתפלגות המטען.

נבחר מעטפת גאוס ריבועית (קוביה בעלת שטח פאה S) כמוראה בציור בכחול.

נסמן את שפות המוליך באותיות ***a, b, c, d***.



עפ"י חוק גאוס:

$$\iint\limits_{\substack{\text{Gauss}\\ \text{surface}\\ \text{G}}} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{in G}}$$

נסתכל על צד שמאל של חוק גאוס. על הפאות (1-2) ו(3-4) השדה הוא 0. ועל הפאות (2-3) ו(4-1) השדה ניצב לנורמל למשטח לכן,

$$\iint_{\substack{\text{Gauss}\\\text{surface}}} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_1^2 0\cdot d\vec{a} + \int_3^4 0\cdot d\vec{a} + \int_2^3 E\hat{z}\cdot da\hat{x} + \int_4^1 E\hat{z}\cdot da\left(-\hat{x}\right) = 0 \quad .$$

על הפאות המקבילות למישור הלוח השדה גם כן ניצב לנורמל למשטח - כמו במקרה (2-3) ו(1-4) .

לכן בסכ"ה צד שמאל של חוק גאוס מתאפס. מכאן שסך כל המטען בתוך המעטפת הוא 0

$$Q_{\text{in G}} = S\left(\sigma_b + \sigma_c\right) = 0$$

כלומר $\sigma_b = -\sigma_c$

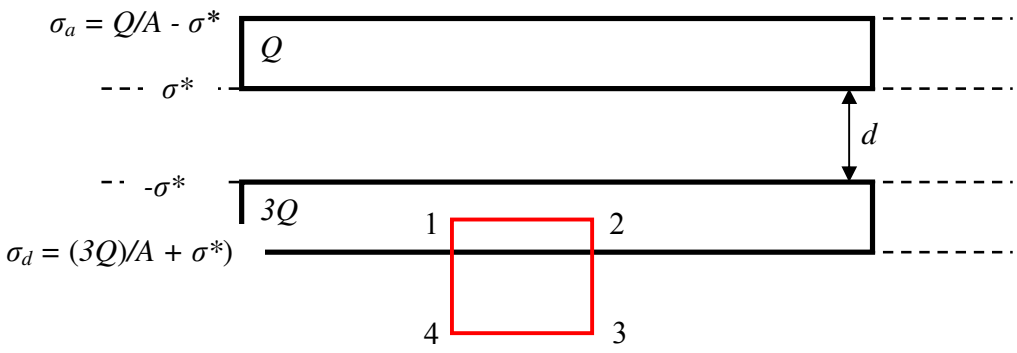
נסמן את $\sigma_b \equiv \sigma^*$ (ולכן $\sigma_c = -\sigma^*$)

מטעמי שימור מטען ניתן כבר לכתוב:

$\sigma_a = \dfrac{Q}{A} - \sigma^*$ וגם

$$\sigma_d = \frac{3Q}{A} + \sigma^*$$

כעת נסתכל על מעטפת גאוס אחרת (מסומנת באדום)



מחוק גאוס נקבל

$ES = \dfrac{\sigma_d S}{\varepsilon_0}$ כאשר S הוא שטח הפאה (3-4).

$$E = \frac{\sigma_d}{\varepsilon_0}$$

מצד שני אנו יודעים מהו השדה החשמלי בפאה (3-4).

מסופרפוזיציה של לוחות אינסופיים.

$$E = \frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0} + \cancel{\frac{\sigma_b}{2\varepsilon_0}} + \cancel{\frac{\sigma_c}{2\varepsilon_0}} + \frac{\sigma_d}{2\varepsilon_0}$$

נשווה את הביטויים ל E

$$\frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_d}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_d}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_a=\sigma_d$$

המשוואות האחרות הן:

$$\sigma_a+\sigma^*=Q/A$$

$$\sigma_d-\sigma^*=(3Q)/A$$

קיבלנו שלוש משוואת לשלשה נעלמים

הפתרון הוא:

$$+\begin{cases}\sigma_d-\sigma^*=(3Q)/A\\ \sigma_a+\sigma^*=Q/A\end{cases}$$

$$2\sigma_a=(4Q)/A$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_a=(2Q)/A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_d=(2Q)/A}$$

$$-\begin{cases}\sigma_d-\sigma^*=(3Q)/A\\ \sigma_a+\sigma^*=Q/A\end{cases}$$

$$-2\sigma^*=(2Q)/A$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_b=-Q/A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_c=Q/A}$$