נערך ונכתב ע"י מתן דישון

תרגול מספר 8

השדה המגנטי שיוצר זרם חשמלי

הקדמה:

אחד המקורות ליצירה של שדה מגנטי הוא מטען חשמלי בתנועה.

שים לב!!! הכוח שפועל על מטען חשמלי בתנועה בנוכחות שדה מגנטי (כוח לורנץ) הוא תופעה נפרדת.

קיימות שתי שיטות לחישוב השדה המגנטי שיוצר חלקיק טעון בתנועה (או זרם חשמלי):

חוק אמפר:

$$\oint_{\text{Loop L}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{in L}} = \mu_0 \oiint_{\substack{\text{S, the area}\\ \text{bound by L}}} \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

ביו-סבר:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{|r|^3}$$

כאשר:

$\vec{r}$ הוא הווקטור שמתחיל ב $d\vec{l}$ ונגמר בנקודה שבה מחשבים את השדה המגנטי.

$d\vec{l}$ מצביע בכיוון הזרם.

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\left[\frac{\text{Newton}}{(\text{Amper})^2}\right]$$

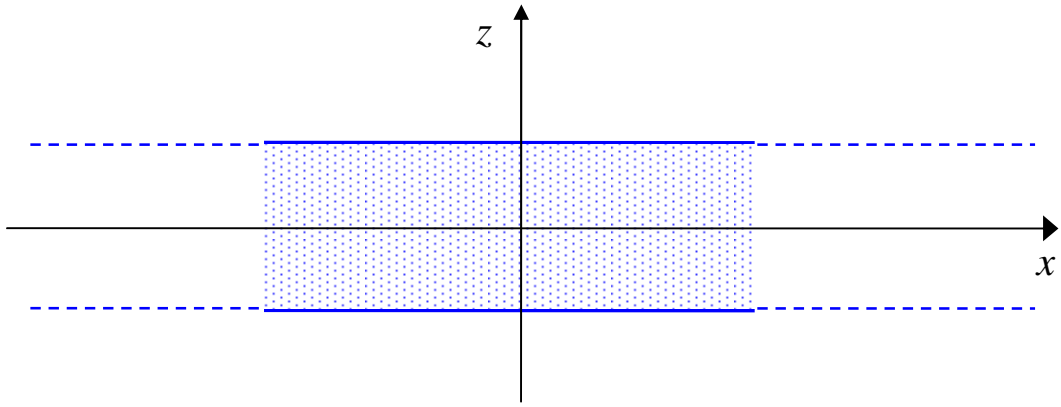
ככלל לפני שנחשב את השדה המגנטי (גודל וכיוון) כדאי מאוד לחשב את הכיוון בעזרת כלל יד ימין.

הסיכוי לטעות קטן יותר וזו דרך טובה לוודא שקיבלנו תוצאה הגיונית בחישוב המתמטי.

תרגיל 1

נתונה טבלה אינסופית בכיוונים x, y בעלת עובי d בכיוון z, אשר דרכה עובר זרם חשמלי בעל צפיפות זרם הנתונה ע"י:

$$\vec{j}(z) = j_0 z^2 \hat{y}$$



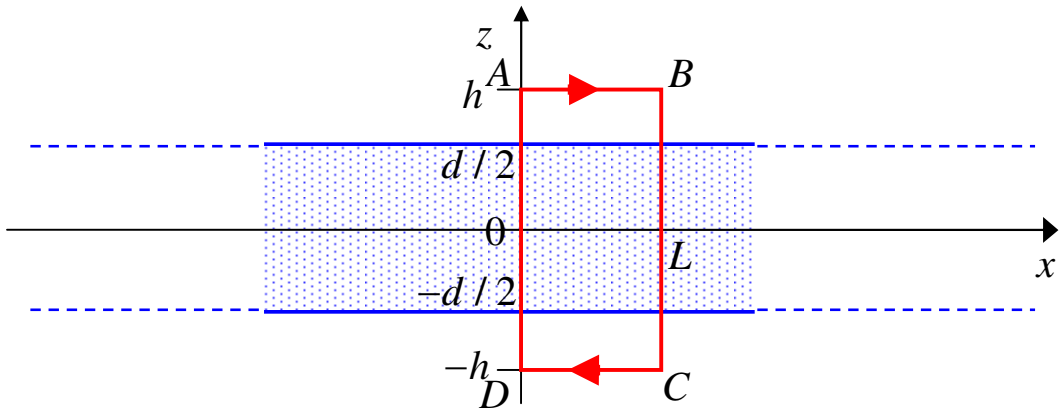
- לחשב את השדה המגנטי במרחב

פתרון 1

מהסימטריה ניתן לראות שהשדה המגנטי במרחק h ובמרחק $-h$ מעל ומתחת מרכז הטבלה שווה. כמוכן, ניתן לראות שהשדה המגנטי מעל הטבלה הוא בכיוון $\hat{x}$ ושהשדה המגנטי מתחת לטבלה הוא בכיוון $-\hat{x}$. (נדמיין את הזרם בטבלה כאוסף של תילים בעלי זרם ונראה שהתרומות לשדה המגנטי בכיוונים y ו z מתבטלות).

נשתמש בחוק אמפר, נבחר לולאת אמפר באדום אשר עוברת ב h וב $-h$ ובעלת רוחב L.

עבור $|z| > d/2$



חוק אמפר:

$$\oint_{\text{Loop ABCD}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{in ABCD}} = \mu_0 \oiint_{\substack{\text{S, the area}\\ \text{bound by ABCD}}} \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

מצד שמאל של חוק אמפר:

$$\oint_{\text{Loop ABCD}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B}\cdot d\vec{l} =$$

$$= \int_0^L B(h)\hat{x}\cdot dx\hat{x} + \cancel{\int_h^{-h} B(z)(\pm\hat{x})\cdot dz\hat{z}} +$$

$$+\int_L^0 B(h)(-\hat{x})\cdot dx\hat{x} + \cancel{\int_{-h}^{h} B(z)(\pm\hat{x})\cdot dz\hat{z}} =$$

$$= B(h)L + 0 + B(h)L + 0 = 2B(h)L$$

מצד ימין של חוק אמפר:

$$\oiint_{\substack{\text{S, the area}\\ \text{bound by ABCD}}} \vec{J}\cdot d\vec{s} = \int_{x=0}^{L}\int_{z=-d/2}^{d/2} j_0 z^2 \hat{y}\cdot dxdz\hat{y} =$$

$$= \int_{x=0}^{L} dx \int_{z=-d/2}^{d/2} j_0 z^2 dz = Lj_0\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-d/2}^{d/2} =$$

$$= Lj_0\left[\frac{d^3}{24} - \left(-\frac{d^3}{24}\right)\right] = \frac{Lj_0}{12}d^3$$

בסך הכל קיבלנו:

$$2B(h)L = \mu_0 \frac{Lj_0}{12}d^3$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{j_0}{24}d^3\hat{x} & z>0 \\ -\mu_0 \dfrac{j_0}{24}d^3\hat{x} & z<0 \end{cases}$$

עבור $|z| < d/2$

מצד שמאל של חוק אמפר:

$$\oint_{\text{Loop ABCD}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2B(h)L$$

מצד ימין של חוק אמפר:

$$\oiint_{\substack{\text{S, the area}\\ \text{bound by ABCD}}} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{x=0}^{L} \int_{z=-h}^{h} j_0 z^2 \hat{y} \cdot dx dz \hat{y} =$$

$$= \int_{x=0}^{L} dx \int_{z=-h}^{h} j_0 z^2 dz = L j_0 \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-h}^{h} =$$

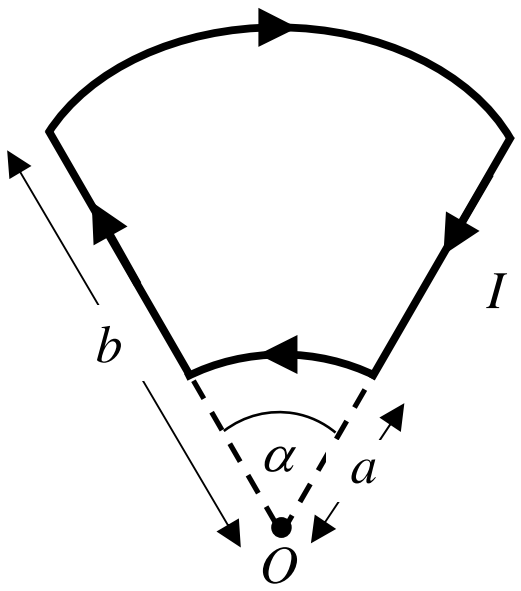
$$= L j_0 \left[\frac{h^3}{3} - \left(-\frac{h^3}{3} \right) \right] = \frac{2 L j_0}{3} h^3$$

$$2B(h)L = \mu_0 \frac{2 L j_0}{3} h^3$$

$$\vec{B}(h) = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{j_0}{3} h^3 \hat{x} & z > 0 \\ -\mu_0 \dfrac{j_0}{3} h^3 \hat{x} & z < 0 \end{cases}$$

תרגיל 2

נתונה מסגרת נושאת זרם I, הבנויה משתי קשתות של מעגל ושני רדיוסים.



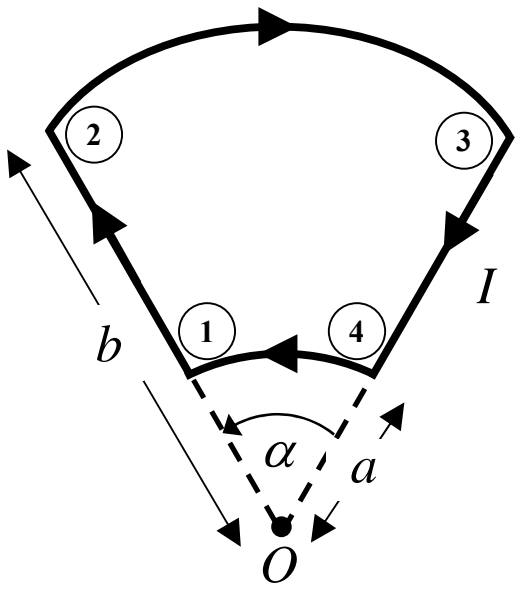
לחשב את השדה המגנטי בנקודה O.

פתרון 2

נבחר מערכת צירים גלילית כך שהחוצה מהדף יהיה הכיוון החיובי של ציר $\hat{z}$.

נחשב את תרומת השדה מכל חלק בתיל.

ראשית נחשב את כיוון השדה הנוצר מכל חלק בתיל.



נשתמש בביו-סבר

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{|r|^3}$$

נזכור ש $d\vec{l}$ הוא בכיוון הזרם ו $\vec{r}$ הוא הווקטור המחבר בין $d\vec{l}$ לבין O.

עבור החלקים $[1,2]$ ו $[3,4]$ $d\vec{l}$ מקביל ל $\vec{r}$, ולכן (כפי שניתן לראות מביו-סבר) אינם תורמים לשדה המגנטי ב O.

הגזרה $[4,1]$ תתרום שדה מגנטי לחוץ הדף.

הגזרה $[2,3]$ תתרום שדה מגנטי לתוך הדף.

$$\vec{B}_{[2,3]}(O)=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{|r|^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int_{\alpha}^{0}\frac{bd\theta\hat{\theta}\times b(-\hat{r})}{|b|^3}=$$

$$=\frac{\mu_0 b^2}{4\pi|b|^3}I\int_{\alpha}^{0}d\theta\left(\hat{\theta}\times(-\hat{r})\right)=\frac{\mu_0}{4\pi b}I(\hat{z})(-\alpha)=\frac{\mu_0}{4\pi b}\alpha I(-\hat{z})$$

$$\vec{B}_{[1,4]}(O)=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{|r|^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int_{0}^{\alpha}\frac{ad\theta\hat{\theta}\times a(-\hat{r})}{|a|^3}=$$

$$=\frac{\mu_0 a^2}{4\pi|a|^3}I\int_{0}^{\alpha}d\theta\left(\hat{\theta}\times(-\hat{r})\right)=\frac{\mu_0}{4\pi a}I(\hat{z})(\alpha)=\frac{\mu_0}{4\pi a}\alpha I(\hat{z})$$

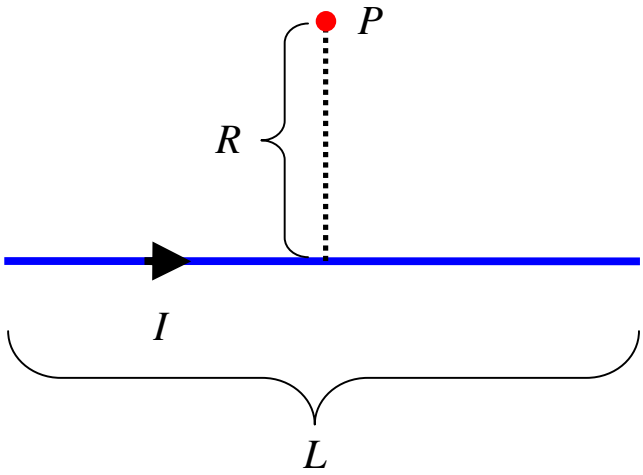
סכ"ה השדה המגנטי ב O:

$$\vec{B}(O)=\frac{\mu_0\alpha I}{4\pi b}(-\hat{z})+\frac{\mu_0\alpha I}{4\pi a}(\hat{z})=$$

$$=\boxed{\frac{\mu_0\alpha I}{4\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)(\hat{z})}$$

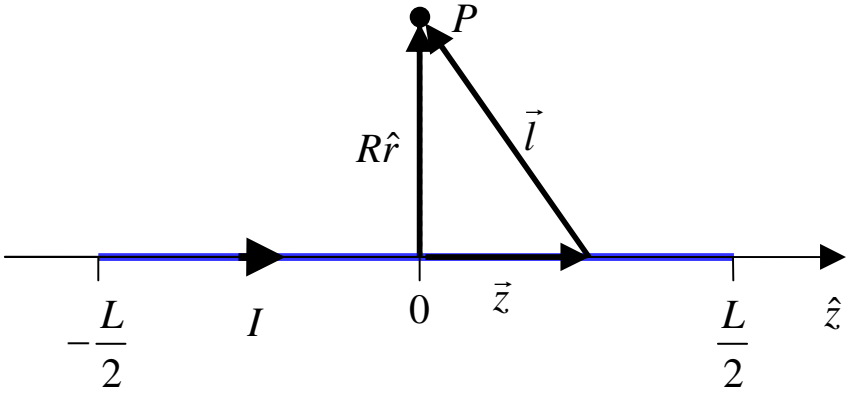
תרגיל 3

לחשב את השדה המגנטי בנקודה P , המרוחקת R ממרכז תיל **סופי** בעל אורך L הנושא זרם I.



פתרון 3

נבחר מערכת צירים גלילית, כך שציר $\hat{z}$ בכיוון הזרם, r הוא המרחק מציר z , וθ היא הזוית.



לפי כלל יד ימין השדה המגנטי מצביע בכיוון $\hat{\theta}$ (בנקודה P זה בכיוון היוצא מהדף).

נחשב את השדה המגנטי לפי ביו-סבר.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times \vec{l}}{|l|^3}$$

במערכת הצירים שלנו:

$$d\vec{l} = dz\hat{z}$$

$$\vec{l} = \left(R\hat{r} - z\hat{z}\right)$$

$$\vec{B}\left(P\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz\hat{z} \times \left(R\hat{r} - z\hat{z}\right)}{\left|R^2 + z^2\right|^{\frac{3}{2}}} \underset{\substack{\hat{z}\times\hat{r}=\hat{\theta} \\ \hat{z}\times\hat{z}=0}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{Rdz\hat{\theta}}{\left|R^2 + z^2\right|^{\frac{3}{2}}}$$

לאינטגרל הזה יש פתרון.

$$\vec{B}\left(P\right) = \hat{\theta}\frac{\mu_0}{4\pi} I \left[\frac{z}{R\sqrt{R^2 + z^2}}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \boxed{\hat{\theta}\frac{\mu_0}{2\pi} I \left[\frac{L}{R\sqrt{4R^2 + L^2}}\right]}$$

נסדר את הביטוי שקיבלנו קצת אחרת.

$$\vec{B}\left(P\right) = \hat{\theta}\frac{\mu_0}{2\pi R} I \left[\frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}\right] = \hat{\theta}\frac{\mu_0}{2\pi R} I \left[\frac{L}{R\sqrt{4 + \left(\frac{L}{R}\right)^2}}\right] =$$

$$\vec{B}\left(P\right) = \hat{\theta}\frac{\mu_0}{2\pi R} I \left[\frac{L}{R}\frac{1}{\sqrt{4 + \left(\frac{L}{R}\right)^2}}\right]$$

נסתכל מה קורה בגבול $R << L \quad \Leftarrow \quad 1 << \frac{L}{R}$

$$\vec{B}_{L>>R}\left(P\right)=\hat{\theta}\frac{\mu_0}{2\pi R}I\left[\frac{L}{R}\frac{1}{\sqrt{4+\left(\frac{L}{R}\right)^2}}\right]\xrightarrow[\frac{L}{R}\to\infty]{}\hat{\theta}\frac{\mu_0}{2\pi R}I\frac{L}{R}\frac{1}{\sqrt{\cancel{4}+\left(\frac{L}{R}\right)^2}}=$$

$$=\hat{\theta}\frac{\mu_0}{2\pi R}I\frac{L}{R}\frac{1}{\frac{L}{R}}=\boxed{\hat{\theta}\frac{\mu_0}{2\pi R}I}$$

קיבלנו את השדה המגנטי במרחק R מתיל **אינסופי** הנושא זרם I.

תיל אינסופי $\equiv R << L$