נערך ונכתב ע"י מתן דישון

תרגול מספר 2

חוק קולון, והשדה החשמלי

הקדמה:

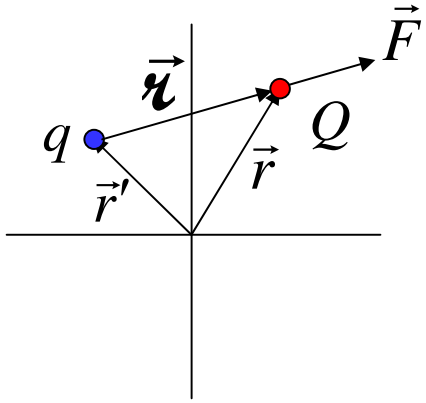
חוק קולון:

הכוח שפועל על מטען "בוחן" Q הנמצא ב $\vec{r}$ כתוצאה ממטען "מקור" q הנמצא ב $\vec{r}'$.

$$\boxed{\vec{F}\left(\vec{r}\right)=k\frac{qQ}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}}\left[\mathrm{N}\right]}$$

כאשר $\vec{\mathscr{r}}\equiv\vec{r}-\vec{r}'$ הוא הווקטור ממטען המקור אל מטען הבחן.

$\mathscr{r}=\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|$ הוא המרחק ממטען המקור אל מטען הבחן.



במונחי $\vec{r}$ ו $\vec{r}'$ חוק קולון נראה כך:

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right)=k\frac{qQ}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$$

$$k\equiv\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}\right]$$

עקרון הסופרפוזיציה:

הכוח שפועל על מטען "בוחן" Q הנמצא ב $\vec{r}$ כתוצאה מ N מטעני "מקור" q_i הנמצאים ב $\vec{r}_i$ מקיים,

$$,\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+...=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

כאשר, $\vec{F}_i\left(\vec{r}\right)=k\frac{q_iQ}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)$.

הוא הכוח שפועל על מטען "בוחן" Q הנמצא ב $\vec{r}$ כתוצאה ממטען "מקור" q_i הנמצא ב $\vec{r}_i$ - **כאילו הוא** (q_i) **מטען המקור היחיד שקיים.**

שדה חשמלי:

השדה החשמלי הוא הכוח ליחידת מטען.

$$\boxed{\vec{E}\equiv\frac{\vec{F}}{Q}\ \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]}$$

השדה החשמלי ב $\vec{r}$ כתוצאה ממטען "מקור" q הנמצא ב $\vec{r}'$.

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right)=k\frac{q}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}}$$

גם השדה החשמלי מקיים את עקרון הסופרפוזיציה.

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\ldots=\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i$$

כאשר

$$\vec{E}_i\left(\vec{r}\right)=k\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)$$

$\vec{E}_i$ שווה לשדה החשמלי ב $\vec{r}$ כתוצאה ממטען "מקור" q_i הנמצא ב $\vec{r}_i$ - **כאילו הוא** (q_i) **מטען המקור היחיד שקיים.**

כל מה שכתבנו למעלה התייחס להתפלגות מטען בדידה קרי מספר סופי של מטענים נקודתיים.

עבור התפלגות מטען רציפה סכום (Σ) הופך לאינטגרל.

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right)=\int\frac{k\cdot dq}{\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)^3}\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$$

כאשר $\vec{r}'$ המיקום של dq. (ממלא מקום של מטען מקור).

או $\boxed{\vec{E}\left(\vec{r}\right)=\int\frac{k\cdot dq}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}}}$

עבור צפיפות מטען קווית: $dq=\lambda\cdot dl$

עבור צפיפות מטען משטחית: $dq=\sigma\cdot ds$

עבור צפיפות מטען נפחית: $dq=\rho\cdot dV$

חוק גאוס:

$$\boxed{\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}}$$

כאשר מתקיים:

$$Q_{in} = \iiint_{\substack{\text{Enclosed}\\ \text{by } S}} \rho dV$$

חישוב השדה החשמלי

נשתמש באחת משלוש אפשרויות:

1. לפי הגדרה – תמיד אפשרי, אך בד"כ קשה לביצוע.
2. בעזרת חוק גאוס - אפשרי רק כאשר תנאים מסוימים בבעיה מתקיימים.
3. בעזרת סופרפוזיציה - ע"י חיבור שדות חשמליים של גופים "מוכרים" (לדוגמא: גליל אינסופי + לוח אינסופי)

הערה חשובה על חוק גאוס:

יש לזכור שעל אף שחוק גאוס **תמיד נכון** (זהו חוק מתמטי) הוא **לא תמיד עוזר**.

חוק גאוס עוזר כאשר בבעיה יש סימטריה:

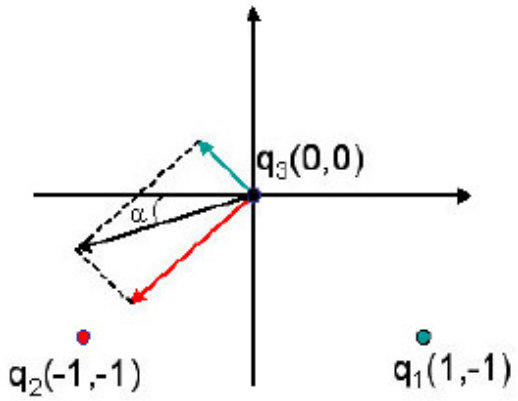
1. סימטריה כדורית – ואז נבנה מעטפת גאוס כדורית בעלת מרכז משותף עם הכדור שבבעיה.
2. סימטריה גלילית – ואז נבנה מעטפת גאוס גלילית בעלת ציר משותף עם הגליל שבבעיה.
3. סימטריה משטחית – ואז נבנה מעטפת גאוס מלבנית רו גלילית החוצה בניצב את המשטח שבבעיה.

תרגיל 1

נתונים שלושה מטענים: $q_1 = q$, $q_2 = -2q$, $q_3 = 3q$, הנמצאים בנקודות: $r_1 = (1,-1)$, $r_2 = (-1,-1)$, $r_3 = (0,0)$ בהתאמה.

- לחשב את הכוח הפועל על מטען q_3 .

פתרון 1



ניתן לחשב ישירות בעזרת חוק קולון, או ע"י חישוב השדה החשמלי בנקודה r_3 לפי עקרון הסופרפוזיציה.

נחשב בעזרת השדה החשמלי

$$\vec{F}_3 = \vec{E}(\vec{r}_3)\cdot q_3$$

$$\vec{E}(\vec{r}_3) = k\frac{q_1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_3-\vec{r}_1) + k\frac{q_2}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_3-\vec{r}_2)$$

נציב $\vec{r}_3 = (0,0)$

$$\vec{E}(\vec{r}_3) = k\left[\frac{q_1}{|\vec{r}_1|^3}(-\vec{r}_1) + \frac{q_2}{|\vec{r}_2|^3}(-\vec{r}_2)\right]$$

נחשב את הרכיבים של $\vec{E}(\vec{r}_3) = \left(E_x(\vec{r}_3), E_y(\vec{r}_3)\right)$ כל אחד בנפרד.

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i)$$

$$E_x(\vec{r}_3) = k\left[\frac{q_1}{\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)^3}(-x_1) + \frac{q_2}{\left(\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)^3}(-x_2)\right]$$

$$E_x\left(\vec{r}_3\right)=k\left[\frac{q_1}{\left(\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}\right)^3}\left(-\left(1\right)\right)+\frac{q_2}{\left(\sqrt{\left(-1\right)^2+\left(-1\right)^2}\right)^3}\left(-\left(-1\right)\right)\right]$$

$$E_x\left(\vec{r}_3\right)=k\left[-\frac{q_1}{2^{3/2}}+\frac{q_2}{2^{3/2}}\right]$$

$$E_x\left(\vec{r}_3\right)=\frac{k}{2^{3/2}}\left[-q+\left(-2q\right)\right]$$

$$\boxed{E_x\left(\vec{r}_3\right)=-\frac{3kq}{2^{3/2}}}$$

באופן זהה ניתן לחשב

$$\boxed{E_y\left(\vec{r}_3\right)=-\frac{kq}{2^{3/2}}}$$

סכ"ה קיבלנו

$$\vec{E}\left(\vec{r}_3\right)=\left(-\frac{3kq}{2^{3/2}},-\frac{kq}{2^{3/2}}\right)=-\frac{kq}{2^{3/2}}\left(3,1\right)$$

או

$$\vec{E}\left(\vec{r}_3\right)=-\frac{3kq}{2^{3/2}}\,\hat{x}-\frac{kq}{2^{3/2}}\,\hat{y}$$

לכן הכוח הפועל על q_3 הוא $\vec{F}_3=\vec{E}\left(\vec{r}_3\right)\cdot q_3$

$$\vec{F}_3=-\frac{3kq\left(3q\right)}{2^{3/2}}\,\hat{x}-\frac{kq\left(3q\right)}{2^{3/2}}\,\hat{y}=\boxed{\frac{9kq^2}{2^{3/2}}\,\hat{x}-\frac{3kq^2}{2^{3/2}}\,\hat{y}}$$

<u>גודל הכוח</u>

$$\left|\vec{F}_3\right|=\frac{kq^2}{2^{3/2}}\sqrt{\left(9\right)^2+\left(3\right)^2}=\frac{kq^2}{2^{3/2}}3\sqrt{10}$$

<u>כיוון הכוח:</u>

$$\tan\alpha=\frac{\left|F_{y3}\right|}{\left|F_{y3}\right|}=\frac{1}{3}$$

תרגיל 2

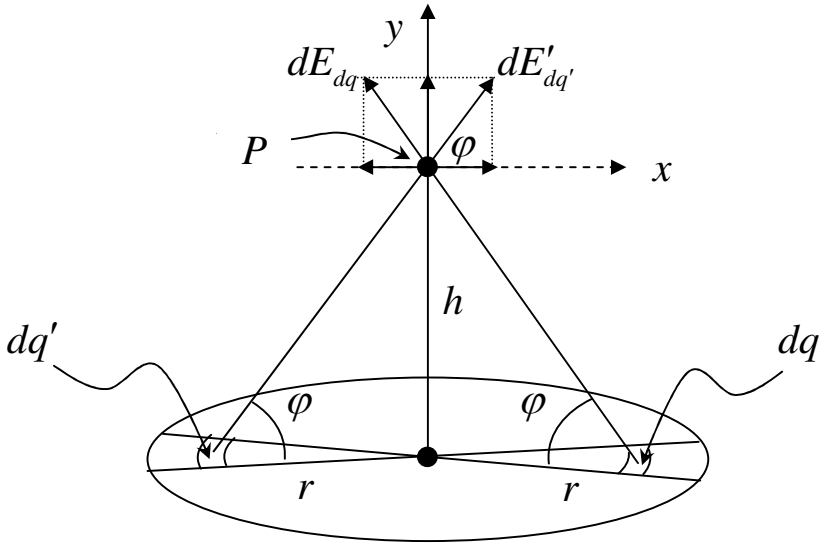
נתונה דיסקה בעלת רדיוס R הטעונה בצפיפות מטען משטחית

$$\sigma(r) = Ar^2,$$

כאשר A קבוע חיובי.

- לחשב את השדה החשמלי בנקודה P הנמצאת במרחק h מעל מרכז הדיסקה.

פתרון 2



מכל שתי יחידות מטען קטנות dq ו dq' הנמצאות על קוטר משותף ובמרחק שווה, r , מהמרכז תישאר רק תרומה בכיוון y לשדה החשמלי, בכיוון x התרומות לשדה יבטלו זה את זה.

כלומר אנחנו כבר יודעים את כיוון השדה החשמלי בנקודה P. נשאר לחשב את גודלו.

כל יחידת מטען קטנה dq, תתרום לשדה בנקודה P:

$$\left|dE\right|_y = \left|dE_{dq}\right| \sin\varphi$$

בכיוון y.

$$\left|dE_{dq}\right| = \frac{kdq}{r^2 + h^2}$$

$$\sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$E_y = \int \left|dE\right|_y = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{khdq}{\left(r^2 + h^2\right)^{3/2}}$$

$$dq = \sigma ds$$

$$\sigma = Ar^2$$

$$ds = rd\theta dr$$

$$dq = \left(Ar^2\right) rd\theta dr = Ar^3 d\theta dr$$

$$E = khA \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{r^3 d\theta dr}{\left(r^2 + h^2\right)^{3/2}}$$

$$E = 2\pi khA \int_{r=0}^{R} \frac{r^3 dr}{\left(r^2 + h^2\right)^{3/2}} = 2\pi khA \left[\frac{r^2 + 2h^2}{\left(r^2 + h^2\right)^{1/2}} \right]_0^R$$

$$E = 2\pi khA \left[\frac{R^2 + 2h^2}{\left(R^2 + h^2\right)^{1/2}} - 2h \right]$$

לא לשכוח את הכיוון השדה אותו כבר גילינו בהתחלה.

$$\boxed{\vec{E} = 2\pi kA \left[\frac{hR^2 + 2h^3}{\left(R^2 + h^2\right)^{1/2}} - 2h^2 \right] \hat{y}}$$

תרגיל 3

נתון כדור בעל רדיוס R ובעל צפיפות מטען נפחית אחידה ρ.

- לחשב את השדה החשמלי במרחב.

פתרון 3

משיקולי סימטריה אפשר להסיק שני דברים:

1. השדה החשמלי הוא בכיוון רדיאלי

$$\vec{E} = \left|E\right| \hat{r}$$

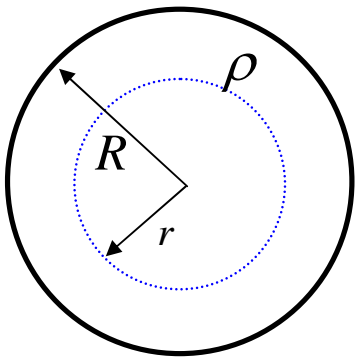
2. השדה החשמלי קבוע בערכו המוחלט במרחק (רדיוס) שווה ממרכז הכדור. (גודל השדה לא תלוי בזויות)

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \vec{E}\left(r\right)$$

כיוון ששני התנאים הנ"ל מתקיימים ניתן לחשב את השדה בעזרת חוק גאוס.

נבחר מעטפת גאוס כדורית (מסומנת בכחול) בעלת רדיוס r אשר מרכזה מתלכד עם מרכז הכדור הטעון.

בשלב ראשון נסתכל על $r < R$



על פי חוק גאוס:

$$\iint\limits_{\substack{\text{Gauss}\\ \text{surface}\\ S}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

כאשר מתקיים:

$$Q_{in} = \iiint\limits_{\substack{\text{Enclosed}\\ \text{by } S}} \rho dV.$$

נסתכל תחילה על צד שמאל של גאוס:

$$\iint\limits_{\substack{\text{Gauss}\\ \text{surface}}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{\substack{\text{Gauss}\\ \text{surface}}} |E|\hat{r}\cdot ds\hat{r} = \iint\limits_{\substack{\text{Gauss}\\ \text{surface}}} |E|ds = |E| \iint\limits_{\substack{\text{Gauss}\\ \text{surface}}} ds =$$

$$= |E| \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta = |E| r^2 \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = |E| 4\pi r^2$$

ובסך הכל

$$\iint\limits_{\substack{\text{Gauss}\\ \text{surface}}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = |E| 4\pi r^2$$

בצד ימין של גאוס עלינו לחשב מהו המטען הכלוא בתוך מעטפת גאוס.

$$Q_{in} = \iiint\limits_{\substack{\text{volume}\\ \text{enclosed by } S}} \rho dV$$

עבור צפיפות מטען קבועה ρ מתקיים

$$Q_{in} = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$$

ולפי חוק גאוס:

$$|E|4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho 4\pi r^3}{3}$$

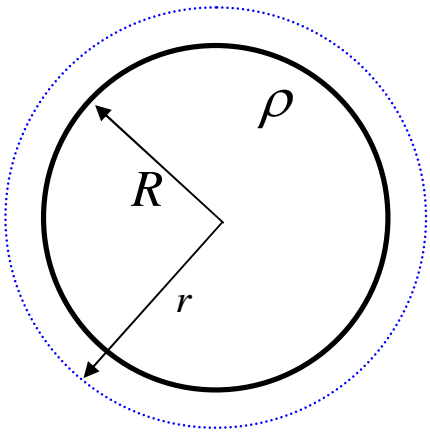
התוצאה שקיבלנו היא שהשדה החשמלי בתוך הכדור גדל ליניארית עם המרחק מהמרכז.

$$|E|(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

עכשיו יש להוסיף את כיוון השדה (אותו ידענו מראש משיקולי סימטריה) וסכ"ה נקבל:

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} = \boxed{\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}}$$

עבור $r > R$



בצד שמאל:

$$\iint_{\substack{\text{Gauss}\\\text{surface}}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = |E|4\pi r^2$$

ובצד ימין

$$Q_{in} = \rho\frac{4\pi R^3}{3}$$

ולכן על פי חוק גאוס:

$$|E|4\pi r^2 = \rho\frac{4\pi R^3}{3\varepsilon_0}$$

$$|E| = \rho\frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

נוסיף את הכיוון ונקבל את התוצאה:

$$\vec{E} = \rho \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

כלומר השדה מחוץ לכדור טעון הולך כמו $\frac{1}{r^2}$.

יתר על כן, כעת ניתן לראות שהשדה מחוץ לכדור טעון הוא זהה לשדה של מטען נקודתי (השווה למטען הכולל של הכדור) הנמצא במרכז הכדור.

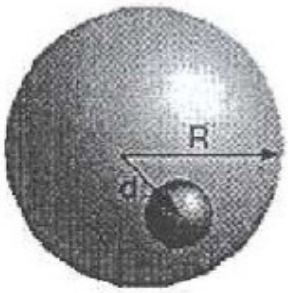
המטען הכולל על הכדור $Q \equiv \rho \frac{4\pi R^3}{3}$ ולכן ניתן לכתוב את השדה גם כך:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{kQ}{r^2} \hat{r}$$

תרגיל 4

נתון כדור בעל רדיוס R ובעל צפיפות מטען נפחית אחידה ρ. בתוך הכדור נמצא חלל כדורי ברדיוס a המרחק בין מרכז החלל ומרכז הכדור הינו d - ראה ציור.

- לחשב את השדה החשמלי בנקודה כלשהי, P, בתוך החלל הכדורי.

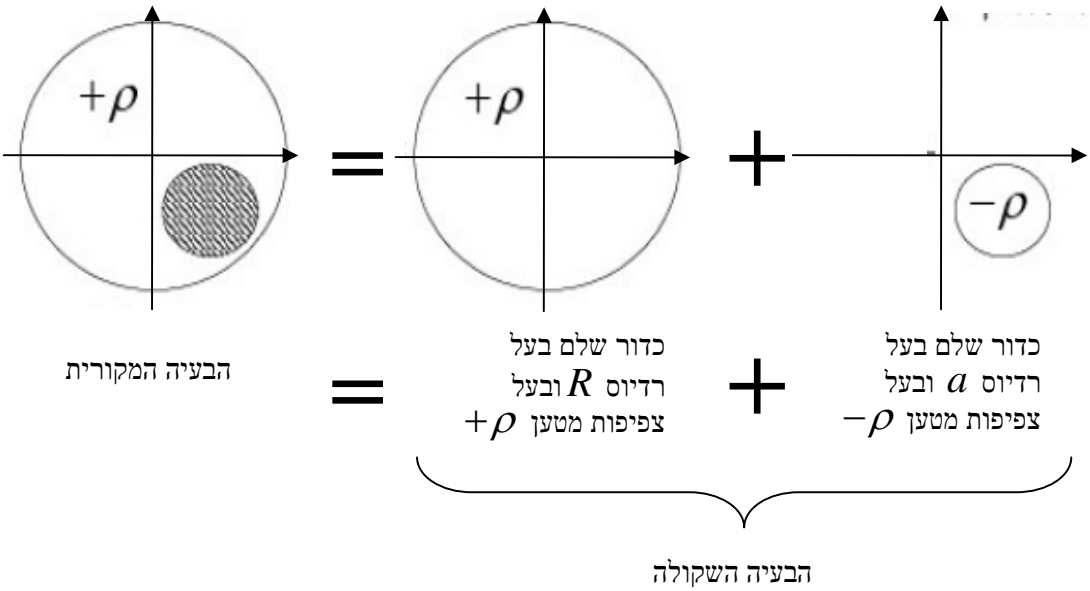


פתרון 4

לפי הגדרה יהיה קשה מאוד לחשב את השדה החשמלי, נסו לחשוב מהם הגבולות של האינטגרל הנדרש.

בחוק גאוס אי אפשר להשתמש מפני שלבעיה אין סימטריות ברורות.

נשתמש בעקרון הסופרפוזיציה. לשם כך נפרק את הבעיה באופן הבא.



השדה החשמלי בבעיה המקורית שווה בכל נקודה במרחב לשדה החשמלי בבעיה השקולה.

מדוע זה כך? מפני שצפיפות המטען של הגוף בבעיה המקורית זהה לצפיפות המטען של שני הכדורים ביחד בבעיה השקולה. כדי להשתכנע נסתכל על שלוש נקודות מייצגות בבעיה המקורית ובבעיה השקולה:

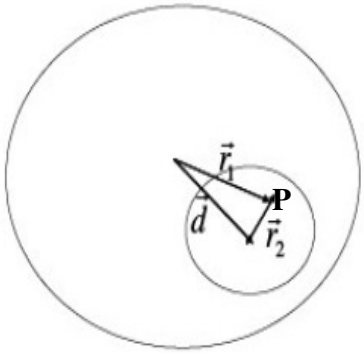
1) בנקודה כלשהי מחוץ לכדור ($r > R$): צפיפות המטען שם היא 0, וכך גם צפיפות המטען של שני הכדורים יחד בבעיה השקולה.

2) בנקודה כלשהי בתוך הכדור, אך לא בתוך החלל הכדורי: צפיפות המטען שם היא $+\rho$, וכך גם צפיפות המטען של שני הכדורים יחד בבעיה השקולה.

2) בנקודה כלשהי בתוך החלל הכדורי: צפיפות המטען שם היא 0, וכך גם צפיפות המטען של שני הכדורים יחד בבעיה השקולה $\rho_{total} = +\rho + (-\rho) = 0$.

נחשב אם כך את השדה החשמלי בבעיה השקולה כסכום (סופרפוזיציה) של השדה החשמלי שיוצר הכדור עם רדיוס R וצפיפות מטען $+\rho$ והשדה החשמלי שיוצר הכדור עם רדיוס a וצפיפות מטען $-\rho$. כמובן שעלינו לשמור על הגיאומטריה של הבעיה במעבר מהבעיה המקורית לבעיה השקולה.

נסמן את הוקטורים באופן הבא:



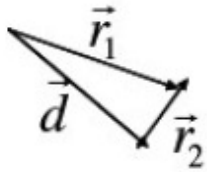
נסמן את השדה החשמלי של הכדור הגדול, $\vec{E}_1\left(\vec{r}_1\right)$ ואת השדה כתוצאה מהכדור הקטן $\vec{E}_2\left(\vec{r}_2\right)$.

$$\vec{E}\left(P\right)=\vec{E}_1\left(\vec{r}_1\right)+\vec{E}_2\left(\vec{r}_2\right)=\frac{+\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1+\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)$$

נשים לב שמתקיים הקשר הבא:

$$\vec{d}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$$

כאשר $\vec{d}$ הוא הווקטור המחבר בין שני המרכזים (מתחיל ממרכז הגדול ומסתיים במרכז הקטן)



לכן התוצאה היא

$$\vec{E}\left(P\right)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d}$$

התוצאה שקיבלנו היא שהשדה החשמלי בתוך החלל הוא קבוע בגודלו ובכיוונו ומקביל לציר המחבר בין המרכזים.