נערך ונכתב ע"י מתן דישון

תרגול מספר 5

קיבול

הקדמה:

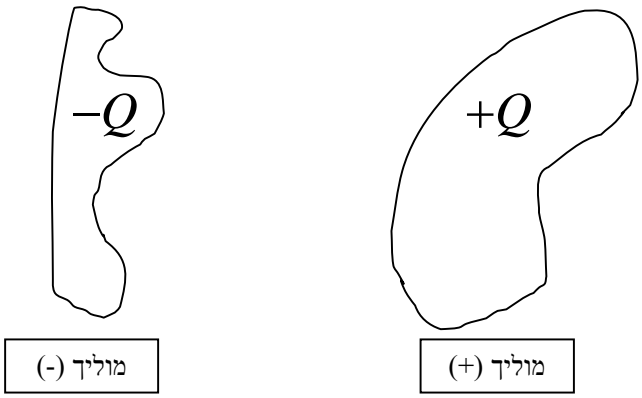
במצב אלקטרוסטטי (אין זרם חשמלי) מוליך חשמלי אידיאלי מקיים:

1. בתוך המוליך $\vec{E}=0$ (השדה החשמלי).
2. בתוך המוליך $\rho=0$ (צפיפות המטען).
3. המטען (אם קיים) ממוקם בשפה של המוליך.
4. הפוטנציאל קבוע על המשטח. $\varphi = const.$
5. השדה על שפת המשטח ניצב למשטח.

קיבול

נניח שיש לנו שני מוליכים.

על מוליך אחד $+Q$ ועל המוליך השני $-Q$. נסמן את המוליכים ב(+) וב(-).



כיוון שלכל אחד מהמוליכים יש פוטנציאל מסוים, φ_+ למוליך (+) ו φ_- למוליך (-).

אפשר לדבר על הפרש הפוטנציאלים או מתח בין המוליכים.

$$V=\varphi_+-\varphi_-=-\int_-^+\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

באופן כללי אנחנו לא יודעים לחשב את האינטגרל (תלוי בגיאומטריה).

אנחנו כן יודעים ש E פרופורציונאלי ל Q כי E פרופורציונאלי ל ρ בהגדרה.

$$E\propto\rho\propto Q$$

כלומר

$$V = \varphi_+ - \varphi_- = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l} \propto Q$$

כלומר גם V פרופורציוני ל Q, נקרא למקדם הפרופורציה הזה $\frac{1}{C}$ כאשר C הוא הקיבול.

לכן אפשר לכתוב:

$$V = \frac{Q}{C} \text{ או } \boxed{CV = Q}.$$

קיבול היא תכונה גיאומטרית.

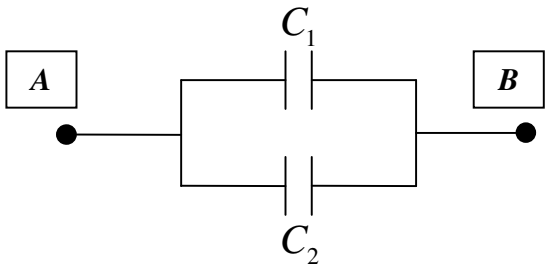
שים לב. רואים בבירור שהקיבול מוגדר בין שני גופים. **ולכן אם מדברים על קיבול של גוף יחיד**, הכוונה היא שהגוף השני הוא כדור בעל רדיוס אינסופי המקיף את הגוף ושהפוטנציאל באינסוף שווה 0 (נקודת יחוס של הפוטנציאל באינסוף).

יחידות של קיבול נתונות ב Farad.

$$1[\text{Farad}] = 1\left[\frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}}\right]$$

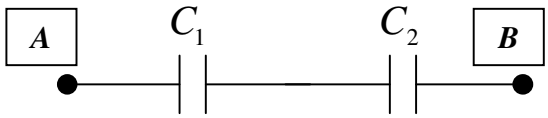
חיבור קבלים:

עלינו להבחין בין קבלים אשר מחוברים בטור ביחס למקור המתח – או ביחס לזרם שיכול לזרום, ובין קבלים המחוברים במקביל.



קבלים מקביל ביחס לנקודות A ו B.
הקיבול השקול:

$$C_{Total} = C_1 + C_2$$



קבלים בטור ביחס לנקודות A ו B.
הקיבול השקול:

$$\frac{1}{C_{Total}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

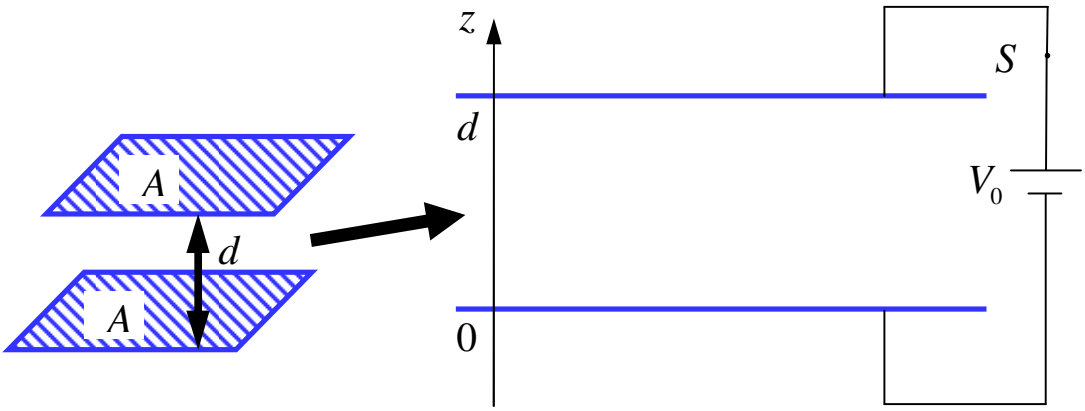
האנרגיה האגורה בקבל:

בהרצאה ראינו שהאנרגיה בקבל נתונה ע"י הנוסחה:

$$\mathcal{E}_{capacitor} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \text{ או } \mathcal{E}_{capacitor} = \frac{1}{2}CV^2$$

תרגיל 1

נתון קבל לוחות אשר בנוי משני לוחות מוליכים בעלי שטח A ואשר המרחק ביניהם הוא d כך ש $d << \sqrt{A}$. ראה ציור.

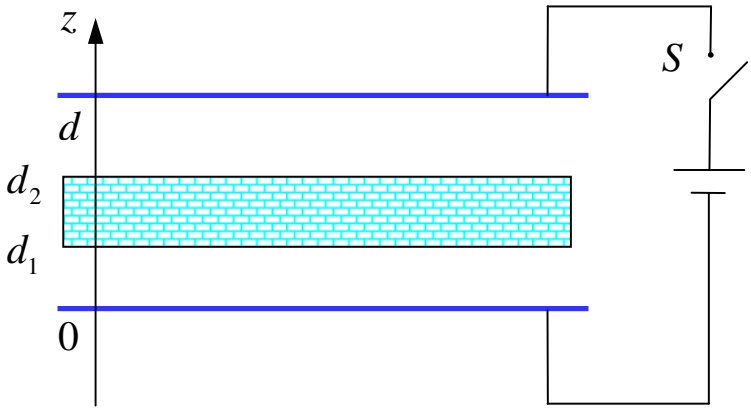


בין שני הלוחות מפעילים מתח חשמלי V_0, עד שהזרם נפסק (הקבל נטען).

בשלב זה מנתקים את מקור המתח.

1. לחשב את המטען על הקבל

<u>בעוד הקבל טעון ומנותק מהמקור</u> מכניסים לתוך הקבל טבלה מוליכה בעלת עובי l, הטבלה אינה מוארקת ואינה טעונה.(ראה ציור)



$(d_2 - d_1 = l)$

.

2. לחשב את הקיבול החדש שבין שתי האלקטרודות המקוריות (ב 0 וב d).
3. כמה אנרגיה הושקעה או התקבלה בתהליך הכנסת הטבלה?
4. כמה אנרגיה הושקעה או התקבלה בתהליך הכנסת הטבלה, אם המקור היה נשאר מחובר?

פתרון 1

1. בהרצאה ראינו שהשדה בתוך קבל לוחות הוא:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

וקיבלנו את הקיבול של קבל לוחות:

$$C_i = \frac{A\varepsilon_0}{d}$$

לכן,

$$Q = C_i V_0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \frac{A\varepsilon_0}{d} V_0}$$

2. נחשב את הקיבול החדש של המערכת.

בתוך המוליך

$$\vec{E} = 0$$

ולכן

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z} & 0 < z < d_1 \\ 0 & d_1 < z < d_2 \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z} & d_2 < z < d \end{cases}$$

כאשר $\sigma = \frac{Q}{A}$.

נחשב את הפרש הפוטנציאלים החדש:

$$V = \varphi_+ - \varphi_- = -\int_{0\ \text{electrode}}^{d\ \text{electrode}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^d \vec{E}\cdot d\vec{z} = -\int_0^d E dz$$

$$= \int_0^{d_1} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dz - \int_{d_1}^{d_2} 0 dz + \int_{d_2}^{d} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[d_1 + d - d_2\right]$$

כיוון שהאלקטרודות מבודדות המטען עליהם נשמר לכן נציב

$$\sigma = \frac{Q}{A}.$$

נקבל:

$$V_f = \frac{Q}{A\varepsilon_0}\left[d_1 + d - d_2\right]$$

$$C_f = \frac{Q}{V_f} = \boxed{\frac{A\varepsilon_0}{d_1 + d - d_2}} = \boxed{\frac{A\varepsilon_0}{d - l}}$$

את אותה התוצאה אפשר לקבל מחיבור של שני קבלים בטור:

קבל אחד מתחת הטבלה בעל שטח A ועובי d_1 בעל קיבול $C_1 = \frac{A\varepsilon_0}{d_1}$.

קבל שני מעל הטבלה בעל שטח A ועובי $d - d_2$, בעל קיבול $C_2 = \frac{A\varepsilon_0}{d - d_2}$

הקיבול השקול של שני קבלים בטור

$$\frac{1}{C_f} = \frac{1}{\frac{A\varepsilon_0}{d_1}} + \frac{1}{\frac{A\varepsilon_0}{d - d_2}} = \frac{d}{A\varepsilon_0} + \frac{d - d_2}{A\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{d_1}{A\varepsilon_0} + \frac{d - d_2}{A\varepsilon_0} = \frac{d_1 + d - d_2}{A\varepsilon_0}$$

$$C_f = \frac{A\varepsilon_0}{d_1 + d - d_2}$$

3. נחשב את הפרש האנרגיה בין לפני הכנסת הטבלה ואחרי $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i$.

ולכן האנרגיה <u>לפני</u> היא:

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}C_0 V_0^{\,2} = \frac{1}{2}\frac{A\varepsilon_0}{d}V_0^{\,2}$$

השתמשנו בנוסחא זו כי הפרש הפוטנציאל ידוע.

האנרגיה בסוף

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_f}$$

נשתמש בהגדרה זו כי המטען נשאר קבוע

את Q ניתן להוציא מהנוסחא של הקבל לפני הכנסת הטבלה

$$Q = C_i V = \frac{A\varepsilon_0}{d}V_0$$

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_f} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{A\varepsilon_0}{d}V_0\right)^2}{\frac{A\varepsilon_0}{d-l}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{A\varepsilon_0\left(d-l\right)}{d^2}V_0^{\ 2}$$

ולכן הפרש האנרגיה הוא:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{A\varepsilon_0\left(d-l\right)}{d^2}V_0^2 - \frac{1}{2}\frac{A\varepsilon_0}{d}V_0^{\ 2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{A\varepsilon_0}{d}V_0^{\ 2}\left(\frac{\left(d-l\right)}{d} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{A\varepsilon_0}{d}V_0^{\ 2}\left(\frac{-l}{d}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{Al\varepsilon_0}{d^2}V_0^{\ 2}} < 0$$

עבודה שלילית משמעה שקיבלנו אנרגיה בתהליך.

4. אם המקור היה נשאר מחובר אז האנרגיה בסוף התהליך היתה:

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2}C_f V_0^2 = \frac{1}{2}\frac{A\varepsilon_0}{d-l}V_0^2$$

והפרש האנרגיה לכן היה:

$$W = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = \frac{1}{2}\frac{A\varepsilon_0}{d-l}V_0^2 - \frac{A\varepsilon_0}{2d}V_0^2 =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}A\varepsilon_0 V_0^2\left(\frac{1}{d-l} - \frac{1}{d}\right)} > 0$$

<u>תרגיל 2</u>

נתון קליפה מוליכה דקה גמישה (בלון מוליך) בעל רדיוס R_0 נתון שהקיבול של בלון כזה הוא:

$$C_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_0$$

מחברים את הבלון למקור מתח V_0 טוענים את הבלון ואז מנתקים ממקור המתח. כך שהבלון נשאר טעון ומבודד.

<u>בעוד הבלון טעון ומנותק מהמקור</u> מנפחים את הבלון לרדיוס חדש R_1

1. כמה אנרגיה הושקעה או התקבלה בתהליך הניפוח?
2. כמה אנרגיה הושקעה או התקבלה בתהליך הניפוח, אם המקור היה נשאר מחובר?

פתרון 2

1. האנרגיה בהתחלה:

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}CV_0^2 = 2\pi\varepsilon_0 R_0 V_0^2$$

כמות המטען שהייתה על הכדור בהתחלה נשארת קבועה במהלך הניפוח. (הכדור מבודד).

$$Q_0 = C_f V_f$$

הקיבול החדש הוא:

$$C_f = 4\pi\varepsilon_0 R_1$$

ולכן המתח החדש הוא:

$$V_f = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{C_0 V_0}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_0}{4\pi\varepsilon_0 R_1}V_0 = \frac{R_0}{R_1}V_0$$

לכן האנרגיה <u>בסוף</u> התהליך היא:

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2}C_f V_f^2 = \frac{1}{2}4\pi\varepsilon_0 R_1\left(\frac{R_0}{R_1}V\right)^2 = 2\pi\varepsilon_0\frac{R_0^2}{R_1}V_0^2$$

ולכן הפרש האנרגיה הוא:

$$W = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = 2\pi\varepsilon_0\frac{R_0^2}{R_1}V_0^2 - 2\pi\varepsilon_0 R_0 V_0^2 = 2\pi\varepsilon_0 R_0 V_0^2\left(\frac{R_0}{R_1} - 1\right)$$

אם $R_0 < R_1$ אז $W < 0$ כלומר בלון כזה ישאף להתנפח (מבחינה אלקטרוסטטית).

2. כעת האנרגיה <u>בסוף</u> התהליך היא:

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2}C_f V_0^2 = 2\pi\varepsilon_0 R_1 V_0^2$$

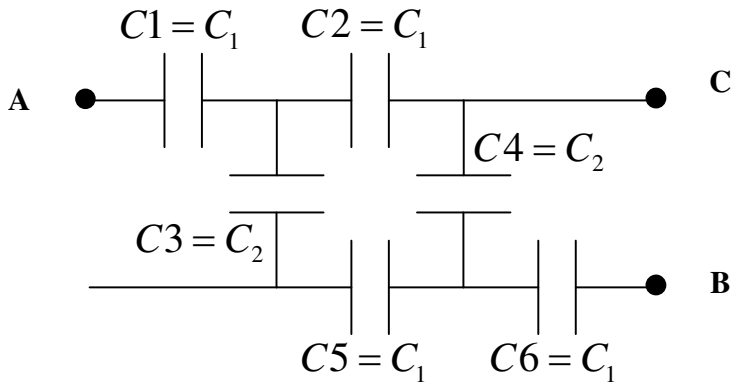
ולכן הפרש האנרגיה הוא:

$$W = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = 2\pi\varepsilon_0 R_1 V_0^2 - 2\pi\varepsilon_0 R_0 V_0^2 = 2\pi\varepsilon_0 V_0^2\left(R_1 - R_0\right)$$

הפעם אם $R_0 < R_1$ אז $W > 0$ כלומר בלון כזה ישאף להתכווץ (מבחינה אלקטרוסטטית).

תרגיל 3

נתונה מערכת הקבלים הבאה:



1. חשב את הקיבול השקול בין הנקודות A ו B.
2. נתח את הקיבול השקול בין הנקודות A ו C.

פתרון 3

1. נחבר את הנקודות A ו B למקור מתח דמיוני המספק מתח V_0.

ניתן לראות שהקבלים 2 ו 4 מחוברים בטור ביחס למתח וכך גם הקבלים 3 ו 5.

עוד אפשר לראות שהזוג 2+4 מחובר במקביל לזוג 3+5.

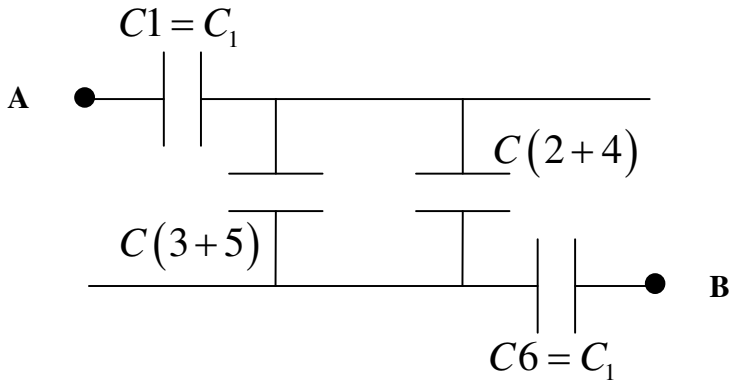
לכן נחשב את הקיבול השקול של שני הצמדים 2+4 ו3+5 בנפרד.

$$\frac{1}{C_{2+4}} = \frac{1}{C2} + \frac{1}{C4} = \frac{C4 + C2}{C2 \cdot C4}$$

$$C_{2+4} = \frac{C2 \cdot C4}{C4 + C2} = \frac{C_2 \cdot C_1}{C_2 + C_1}$$

$$C_{3+5} = \frac{C3 \cdot C5}{C3 + C5} = \frac{C_2 \cdot C_1}{C_2 + C_1}$$

עכשיו אפשר לתאר את המערכת בצורה הבאה (המעגל השקול):

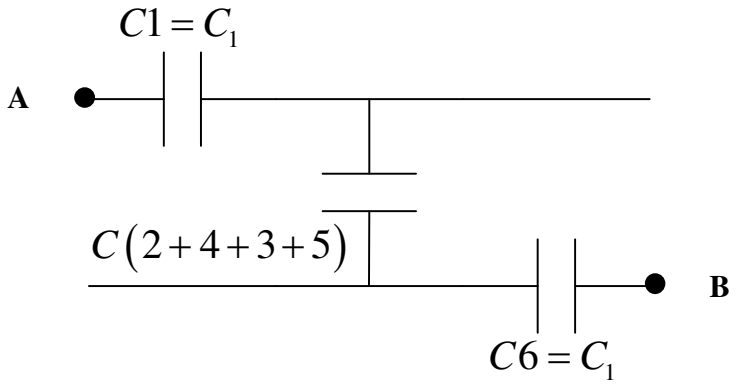


עכשיו נחשב את הקיבול השקול של הקבל 2+4 ושל הקבל 3+5 המחוברים המקביל ביחס למתח.

$$C(2+4+3+5) = C(2+4) + C(3+5) =$$

$$= 2\frac{C_2 \cdot C_1}{C_2 + C_1}$$

ולכן המעגל השקול נראה כעת כך:



כעת נותר לחבר את שלשת הקבלים שמחוברים בטור (ביחס למתח):

$$\frac{1}{CTotal} = \frac{1}{C1} + \frac{1}{C(2+4+3+5)} + \frac{1}{C6}$$

$$\frac{1}{CTotal}=\frac{C\left(2+4+3+5\right)+C1}{C\left(2+4+3+5\right)\cdot C1}+\frac{1}{C6}=$$

$$=\frac{C6\left(C\left(2+4+3+5\right)+C1\right)+C\left(2+4+3+5\right)\cdot C1}{C\left(2+4+3+5\right)\cdot C1\cdot C6}=$$

$$=\frac{C_1\cdot\left(2\cdot\frac{C_2\cdot C_1}{C_2+C_1}+C_1\right)+2\cdot\frac{C_2\cdot C_1}{C_2+C_1}\cdot C_1}{2\frac{C_2\cdot C_1}{C_2+C_1}\cdot C_1\cdot C_1}=$$

$$=\frac{\left(2\cdot\frac{C_2\cdot C_1^2}{C_2+C_1}+C_1^2\right)+2\cdot\frac{C_2\cdot C_1^2}{C_2+C_1}}{2\frac{C_2\cdot C_1^3}{C_2+C_1}}=\frac{4\frac{C_2\cdot C_1^2}{C_2+C_1}+C_1^2}{2\frac{C_2\cdot C_1^3}{C_2+C_1}}=$$

$$=\frac{4\frac{C_2}{C_2+C_1}+1}{2\frac{C_2\cdot C_1}{C_2+C_1}}=\frac{\frac{4C_2+C_2+C_1}{C_2+C_1}}{2\frac{C_2\cdot C_1}{C_2+C_1}}=\frac{1}{2}\frac{5C_2+C_1}{C_2\cdot C_1}$$

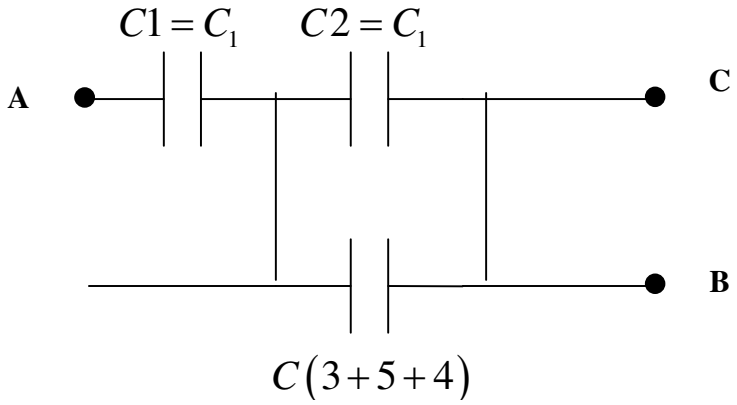
סכ"ה קיבלנו

$$\boxed{CTotal=2\frac{C_2\cdot C_1}{5C_2+C_1}}$$

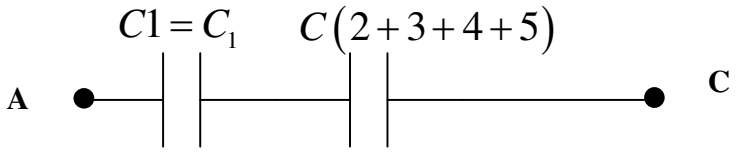
2. נחבר את הנקודות A ו C למקור מתח דמיוני המספק מתח V_0.

ניתן לראות שהקבלים 3, 5 ו4 מחוברים בטור ביחס למתח, וש6 לא משתתף בחישוב כלל.

לכן המעגל השקול הוא:



עכשיו רואים שהקבל השקול 3+4+5 מחובר במקביל ל2:



ברור שהשקול 2+3+4+5 מחובר בטור ל1.

<u>המסקנה החשובה היא שהקיבול של המעגל (או חיבור הקבלים) משתנה לחלוטין בהתאם לשאלה היכן מחוברות האלקטרודות.</u>