נערך ונכתב ע"י מתן דישון

תרגול מספר 3

פוטנציאל חשמלי

הקדמה:

- כיוון שהשדה החשמלי משמר קיימת פונקציה קדומה, מתקיים:

$$\boxed{\varphi\left(\vec{r}_2\right)-\varphi\left(\vec{r}_1\right)\equiv-\int_1^2\vec{E}\cdot d\vec{r}}$$

- העבודה שיש להשקיע על מנת להעביר מטען Q מנקודה $\vec{r}_1$ לנקודה $\vec{r}_2$ כנגד השדה החשמלי היא:

$$\boxed{W_{12}\equiv Q\left[\varphi\left(\vec{r}_2\right)-\varphi\left(\vec{r}_1\right)\right]}$$

- אם נגדיר נקודת ייחוס (רפרנס) במרחב, שבה הפוטנציאל שווה אפס, $\varphi\left(\vec{r}_{ref}\right)=0$, אז ניתן לדבר על פוטנציאל בנקודה כלשהי $\vec{r}$:

$$\varphi\left(\vec{r}\right)-\underbrace{\cancel{\varphi\left(\vec{r}_{ref}\right)}}_{=0}\equiv\boxed{\varphi\left(\vec{r}\right)=-\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}}\vec{E}d\vec{r}}$$

- מטען נקודתי q_1 הנמצא בנקודה $\vec{r}_1$ יוצר פוטנציאל חשמלי הנתון ע"י:

$$\varphi_1\left(\vec{r}\right)=\frac{kq_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|}$$

כאשר בחרנו את נקודת הייחוס של הפוטנציאל באינסוף.

- הפוטנציאל (כמו חוק קולון והשדה החשמלי) מקיים את עקרון הסופרפוזיציה.

$$\varphi\left(\vec{r}\right)=\sum_n\varphi_n\left(\vec{r}\right)$$

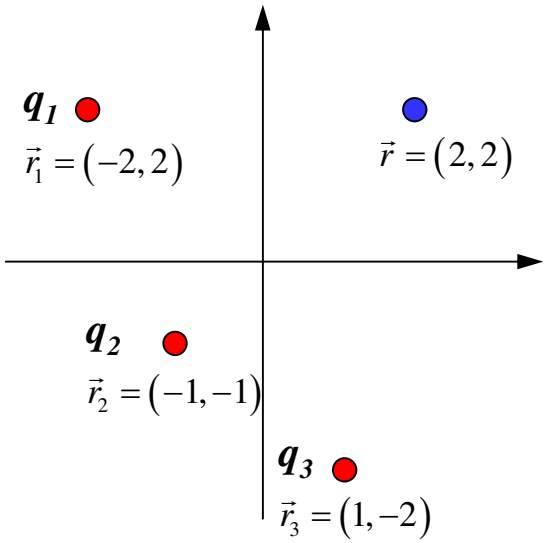
$$\varphi\left(\vec{r}\right)=\int d\varphi$$

תרגיל 1

נתונים שלושה מטענים: $q_1 = q$, $q_2 = -2q$, $q_3 = 3q$, הנמצאים בנקודות: $r_1 = (-2,2)$, $r_2 = (-1,-1)$, $r_3 = (1,-2)$ בהתאמה.

- חשב את הפוטנציאל החשמלי בנקודה $\vec{r} = (2,2)$.

פתרון 1



נשתמש בעקרון הסופרפוזיציה, נסכום את התרומות לפוטנציאל של כל אחד מהמטענים בנפרד.

כל מטען נקודתי, q_i , תורם לפוטנציאל בנקודה $\vec{r}$:

$$\varphi_i(\vec{r}) = \frac{kq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_1(\vec{r}) + \varphi_2(\vec{r}) + \varphi_3(\vec{r}) = \frac{kq_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{kq_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \frac{kq_3}{|\vec{r} - \vec{r}_3|}$$

נחשב את $\varphi_1(\vec{r})$:

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{kq_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = \frac{kq_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} = \frac{kq_1}{\sqrt{(2-(-2))^2 + (2-2)^2}} =$$

$$= \frac{kq_1}{\sqrt{(4)^2}} = \frac{kq_1}{4}$$

באופן דומה נחשב את $\varphi_2\left(\vec{r}\right)$ ואת $\varphi_3\left(\vec{r}\right)$.

$$\varphi_2\left(\vec{r}\right)=\frac{kq_2}{\sqrt{18}}$$

$$\varphi_3\left(\vec{r}\right)=\frac{kq_3}{\sqrt{17}}$$

ולכן בסך הכל קיבלנו:

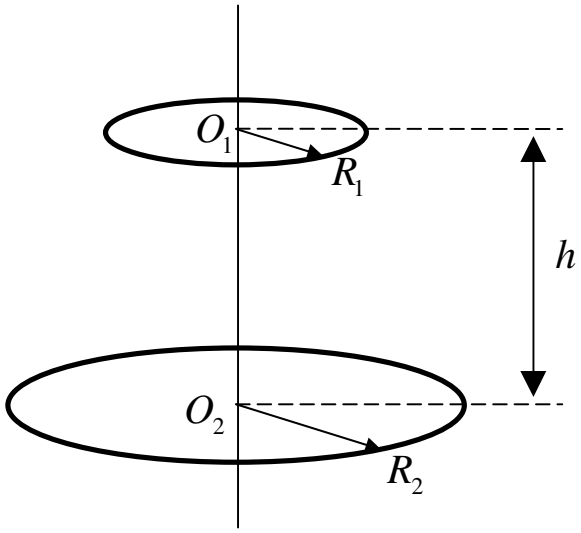
$$\varphi\left(\vec{r}\right)=\frac{kq_1}{4}+\frac{kq_2}{\sqrt{10}}+\frac{kq_3}{\sqrt{17}}=$$

$$=\frac{kq}{4}+\frac{k\left(-2q\right)}{\sqrt{10}}+\frac{k3q}{\sqrt{17}}=\boxed{kq\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{\sqrt{18}}+\frac{3}{\sqrt{17}}\right)}$$

תרגיל 2

שתי טבעות אופקיות, 1 ו 2, ממוקמות זו מעל זו במרחק h כפי הנראה בציור.

לטבעת העליונה רדיוס R_1 והיא טעונה בצפיפות מטען אורכית λ_1. לטבעת התחתונה רדיוס R_2 והיא טעונה בצפיפות מטען אורכית λ_2.



- חשב את האנרגיה הנדרשת על מנת להביא מטען Q ממרכז טבעת 1, O_1, למרכז טבעת 2, O_2 ללא שינוי מהירות.

פתרון 2

האנרגיה הנדרשת על מנת להביא מטען Q מ O_1 ל O_2 היא:

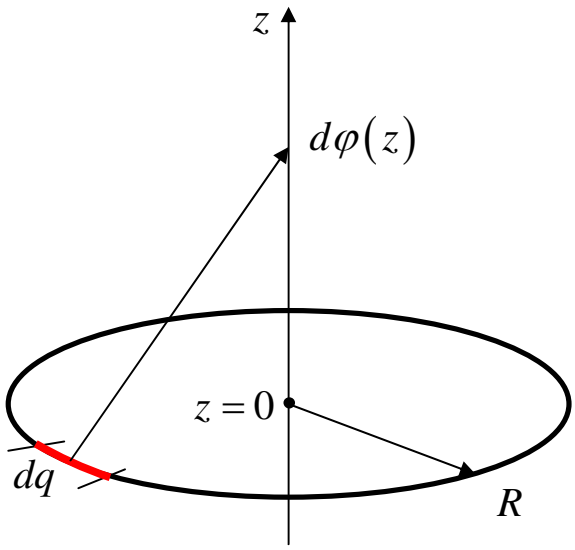
$$W_{12} = Q\left(\varphi\left(O_2\right) - \varphi\left(O_1\right)\right)$$

נחשב את הפוטנציאל במרכזי הטבעות: $\varphi\left(O_1\right), \varphi\left(O_2\right)$.

לפוטנציאל בנקודה O_1 יש תרומה הן מהטבעת 1 והן מטבעת 2.

נפתור לכן את הבעיה הכללית שהיא הפוטנציאל במרחק z מעל מרכזה של טבעת בעלת רדיוס R הטעונה בצפיפות מטען אורכית λ.

פתרון: נחלק את הטבעת לגזרות קטנות $dl = Rd\theta$,



כל גזרה קטנה טעונה במטען, $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$.

ולכן אם נקבע שהפוטנציאל ב ∞ שווה 0,

$$\varphi\left(\infty\right) = 0,$$

נקבל שכל מטען dq תורם פוטנציאל

$$d\varphi\left(z\right) = \frac{kdq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

עכשיו נסכום את התרומות לפוטנציאל ונקבל:

$$\varphi\left(z\right) = \int d\varphi = \frac{k\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi k\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

נחזור לתרגיל

$$\varphi\left(O_1\right)=\varphi_1\left(0\right)+\varphi_2\left(h\right)$$

כאשר

$$,\varphi_1\left(0\right)=\frac{2\pi k\lambda_1 R_1}{\sqrt{R_1^{\ 2}}}=2\pi k\lambda_1$$

הוא הפוטנציאל שיוצרת טבעת 1 בגובה $z=0$ ו

$$,\varphi_2\left(h\right)=\frac{2\pi k\lambda_2 R_2}{\sqrt{R_2^{\ 2}+h^2}}$$

הוא הפוטנציאל שיוצרת טבעת 2 בגובה $z=h$.

לכן מתקיים

$$.\varphi\left(O_1\right)=2\pi k\left(\lambda_1+\frac{\lambda_2 R_2}{\sqrt{R_2^{\ 2}+h^2}}\right)$$

באופן דומה נקבל

$$.\varphi\left(O_2\right)=2\pi k\left(\frac{\lambda_1 R_1}{\sqrt{R_1^{\ 2}+h^2}}+\lambda_2\right)$$

נציב את התוצאות במשוואה לאנרגיה:

$$W_{12}=Q\left(\varphi\left(O_2\right)-\varphi\left(O_1\right)\right)$$

$$W_{12}=2\pi kQ\left(\frac{\lambda_1 R_1}{\sqrt{R_1^{\ 2}+h^2}}+\lambda_2-\left(\lambda_1+\frac{\lambda_2 R_2}{\sqrt{R_2^{\ 2}+h^2}}\right)\right)=$$

$$=\boxed{2\pi kQ\left(\left(\lambda_2-\lambda_1\right)+\frac{\lambda_1 R_1}{\sqrt{R_1^{\ 2}+h^2}}-\frac{\lambda_2 R_2}{\sqrt{R_2^{\ 2}+h^2}}\right)}$$

אפשר לראות שכאשר $\lambda_2=\lambda_1$ וגם $R_1=R_2$ נקבל $W_{12}=0$

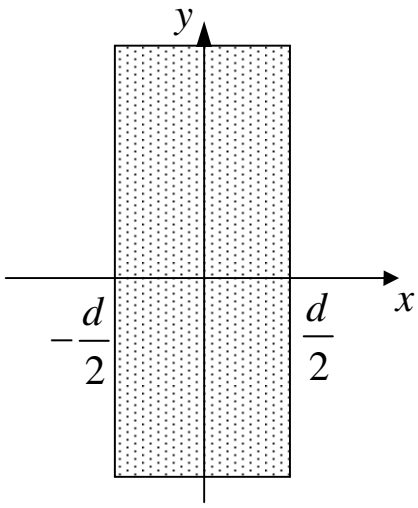
תרגיל 3

נתונה טבלה אינסופית בעובי d בציר x. הטבלה טעונה בצפיפות מטען נפחית אחידה ρ.

נתון שפוטנציאל הייחוס הוא בראשית, $\varphi(0,0,0)=0$.

- לחשב את הפוטנציאל במרחב (בתוך ומחוץ לטבלה)

פתרון 3



נשתמש ב

$$\varphi(\vec{r})-\varphi(0,0,0)\equiv\boxed{\varphi(\vec{r})=-\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}}\vec{E}\cdot d\vec{r}}$$

כדי לחשב את האינטגרל צריך לחשב את השדה החשמלי $\vec{E}(\vec{r})$.

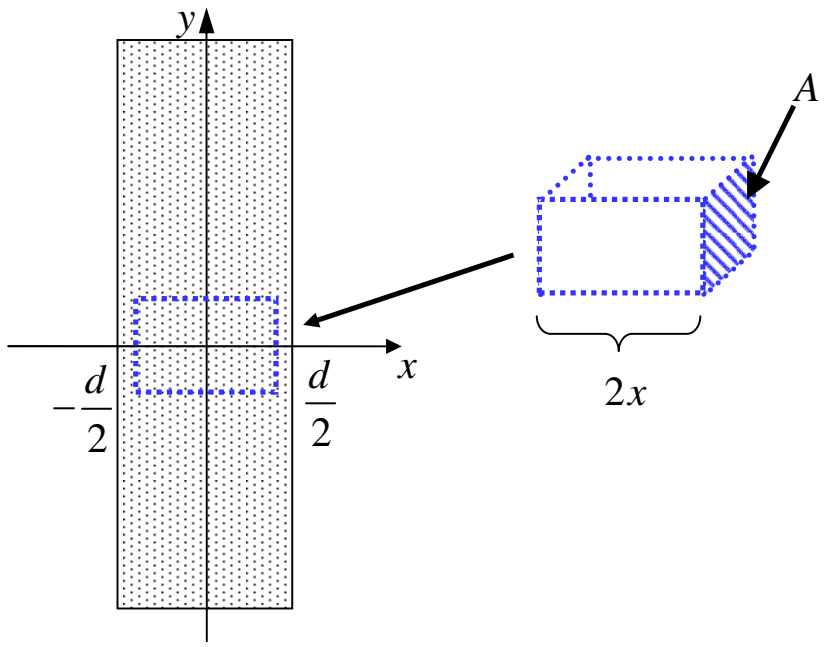
מטעמי סימטריה אפשר להסיק ש:

1. השדה יכול להיות תלוי רק ב x ולא ב y,z. $\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}(x)$.
2. השדה ניצב לטבלה בכל נקודה. $\vec{E}(x)=E(x)\hat{x}$.

לכן נשתמש בחוק גאוס.

בתוך הטבלה:

נבחר מעטפת תיבה באורך $2x$ ושטח חתך A, הממוקמת כפי הנראה בציור.



על פי חוק גאוס

$$\underset{\substack{S \\ \text{Gauss surface}}}{\oiint} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enclosed}}{\varepsilon_0}$$

בצד שמאל בחוק גאוס נקבל:

$$\left|E(x)\right| \underset{\substack{S \\ \text{Gauss surface}}}{\oiint} ds = \left|E(x)\right| 2A$$

כאשר השתמשנו בכך ש:

א. השדה ניצב לשטח A ושווה בערכו המוחלט על פני שתי הפאות.

ב. התרומה לשטף מהפאות האחרות היא 0 כי השדה ניצב לשטח הפאה.

המטען המוכל בתוך התיבה (צד ימין של חוק גאוס) מקיים:

$$Q_{enclosed} = \underset{\text{volume inside } S}{\iiint} \rho dV = 2xA\rho$$

ולכן מחוק גאוס:

$$\left|E(x)\right| 2A = \frac{1}{\varepsilon_0} 2xA\rho$$

$$\left|E(x)\right| = \frac{1}{\varepsilon_0} x\rho$$

$$\vec{E}(x)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\vec{x}$$

נחשב את הפוטנציאל בנקודה x כלשהי נציב את השדה באינטגרל ונקבל:

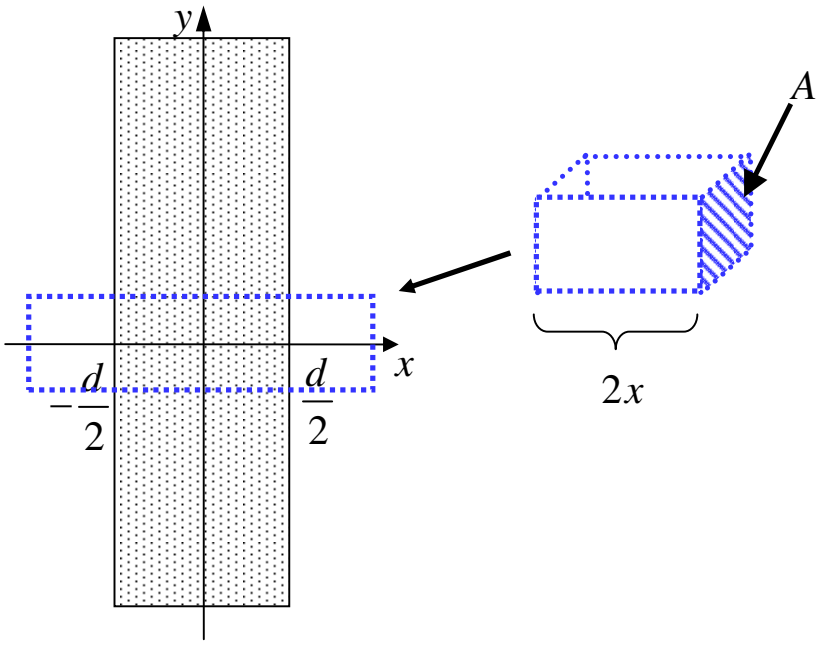
$$\varphi(x)=-\int_0^x \vec{E}(x')\cdot d\vec{x}'=-\int_0^x \frac{\rho}{\varepsilon_0}\vec{x}'\cdot d\vec{x}'=$$

$$=-\int_0^x \frac{\rho}{\varepsilon_0}x'dx'=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left[\frac{x'^2}{2}\right]_0^x=\boxed{-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2}$$

<u>מחוץ לטבלה:</u>

מאותם שיקולים נשמש בחוק גאוס.

שוב נבחר מעטפת תיבה באורך $2x$ ושטח חתך A, הממוקמת כפי הנראה בציור.



$$|E(x)|\oiint_S ds=|E(x)|2A$$

Gauss surface

$$Q_{enclosed}=\iiint_{\text{volume inside } S}\rho dV=dA\rho$$

$$|E(x)|2A=\frac{1}{\varepsilon_0}dA\rho$$

$$\left|E(x)\right| = \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}(-\hat{x}) & x<0 \\ \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}\hat{x} & x>0 \end{cases}$$

נציב את השדה באינטגרל ונקבל

עבור $x>0$

$$\varphi(x) = -\int_0^x \vec{E}(x')\cdot d\vec{x}' =$$

$$= -\int_0^{d/2} \vec{E}_{\substack{\text{inside}\\ \text{the table}}}(x')\cdot d\vec{x}' - \int_{d/2}^x \vec{E}_{\substack{\text{outside}\\ \text{the table}}}(x')\cdot d\vec{x}' =$$

$$= -\int_0^{d/2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} x'\hat{x}\cdot dx'\hat{x} - \int_{d/2}^x \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}\hat{x}\cdot dx'\hat{x} =$$

$$= -\int_0^{d/2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} x'dx' - \int_{d/2}^x \frac{d\rho}{2\varepsilon_0} dx' =$$

$$-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}x + \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{d}{2}\right) =$$

$$= -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\left(\frac{d}{4}\right) - \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}x + \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{d}{2}\right) =$$

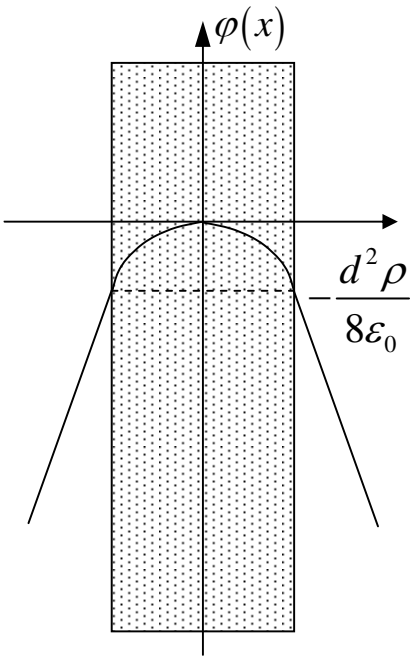
$$= \boxed{-\frac{d\rho}{2\varepsilon_0}\left[x - \frac{d}{4}\right]}$$

עבור $x<0$

$$\varphi(x)=-\int_0^{-x}\vec{E}(x')\cdot d\vec{x}'=$$

$$=-\int_0^{-d/2}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\vec{x}'\cdot dx'\hat{x}-\int_{-d/2}^{-x}-\frac{d\rho}{2\varepsilon_0}\hat{x}\cdot dx'\hat{x}=$$

$$=-\int_0^{-d/2}\frac{\rho}{\varepsilon_0}x'dx'+\int_{-d/2}^{-x}\frac{d\rho}{2\varepsilon_0}dx'=$$

$$=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{d^2}{4}-\frac{d\rho}{2\varepsilon_0}x+\frac{d\rho}{2\varepsilon_0}\frac{d}{2}=\boxed{-\frac{d\rho}{2\varepsilon_0}\left[x-\frac{d}{4}\right]}$$

בסך הכל קיבלנו עבור הפוטנציאל