מבחן 2006 מועד א' שאלה 2:

נתון $\vec{E} = 4x^2\left(\frac{1}{x}(2yz-3.75t^2)\hat{x} + z\cdot\hat{y} + y\cdot\hat{z}\right)$

1. $\nabla \bar{E} = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \rightarrow \rho(x,y,z) = 4\varepsilon_0 \cdot \nabla\cdot\left(4x(2yz-3.75t^2)\hat{x} + 4x^2 z\cdot\hat{y} + 4x^2 y\cdot\hat{z}\right) =$

$$\rho(x,y,z,t) = 16\varepsilon_0\cdot\left((2yz-3.75t^2)\cancel{\tfrac{x}{x}}\right) = 16\varepsilon_0(2yz-3.75t^2)$$

2. $\rho(1,1,1,0) = 16\varepsilon_0(2-0) = 32\varepsilon_0$

3. $Q = \int \rho\, dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \rho(x,y,z,t)\cdot dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 16\varepsilon_0(2yz-3.75t^2)\,dx\,dy\,dz = 16\varepsilon_0\cdot 1\cdot\int_0^1\int_0^1(2yz-3.75t^2)\,dy\,dz =$

$$= 16\varepsilon_0\cdot\int_0^1 \left.(y^2 z - 3.75t^2 y)\right|_0^1 dz = 16\varepsilon_0\int_0^1(z-3.75t^2)\,dz = 16\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}-3.75t^2\right) = 8\varepsilon_0 - 60\varepsilon_0 t^2$$

נחשב את המטען בזמן t=0 ובזמן t=10 ונקבל:

$Q(t=0) = 8\varepsilon_0$

$Q(t=10) = -5992\varepsilon_0$

4. נתון גם פוטנציאל וקטורי במרחב: $\vec{A} = -5xt^3\cdot\hat{x}$

השטף החשמלי היוצא מבעד לפאות התיבה הנתונה.

$$\phi_E = \frac{Q_{in}}{4\varepsilon_0} = \frac{16\varepsilon_0(\frac{1}{2}-3.75t^2)}{4\varepsilon_0} = 2-7.5t^2$$

כתוצאה מהשדה המגנטי:

$$\phi_B = \int B\cdot ds \rightarrow B = \nabla\times A = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -5xt^3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \phi_B = 0$$

5. $\dot{\bar{B}} = \bar{\nabla}\times\bar{E}$ קיים גם:

השדה משמר ולכן אין לו תרומה להיווצרות שדה מגנטי

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z} =$$

$$= (4x^2-4x^2)\cdot\hat{x} - (8xy-8xy)\,\hat{y} + (8xz-8xz)\,\hat{z} = 0$$

6. $V = -\int E\cdot dl = -\int\left(4x(2yz-3.75t^2)\hat{x} + 4x^2 z\cdot\hat{y} + 4x^2 y\cdot\hat{z}\right)\left(dx\cdot\hat{x} + dy\cdot\hat{y} + dz\cdot\hat{z}\right) =$

$$= -\left(\int 4x(2yz-3.75t^2)\,dx + \int 4x^2 z\,dy + \int 4x^2 y\,dz\right) = -2x^2(2yz-3.75t^2) - 4x^2yz - 4x^2yz = -(12x^2yz - 7.5x^2t^2) + C$$

7. $E_{(1,1,1,0)} = 8\hat{x} + 4\hat{y} + 4\hat{z}$. $\cos\alpha = \frac{(8,4,4)\cdot(1,0,0)}{1\cdot\sqrt{8^2+4^2+4^2}} = \frac{8}{\sqrt{96}} \rightarrow \alpha = 35.26^\circ$

הכל חושב לפי זמן $t=0$

8. $W = q\cdot\Delta V$, $a(1,1,1)$, $b(1,2,1)$, $C(1,2,2)$, $d(2,2,2)$

$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = (12-24) = -12v$, $\Delta V_{bc} = V_c - V_b = (24-48) = -24v$, $\Delta V_{cd} = (48-192) = -144v$

$W = q\cdot\Delta V = 4\cdot 10^{-6}\cdot(-12-24-144) = -7.2\cdot 10^{-4}j$