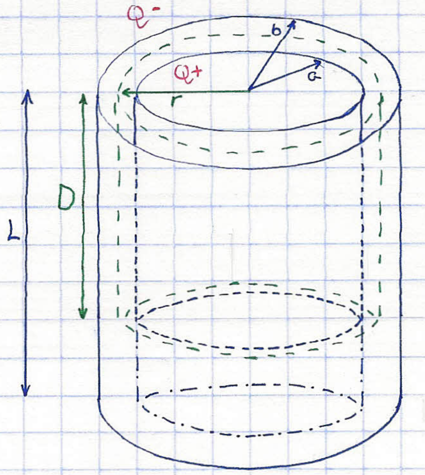
מבחן 2008 מועד ב' שאלה 4:



א. נחשב את הקיבול לפי השלבים: $E \longrightarrow V \longrightarrow C = \frac{Q}{V}$.

$$\oint E \cdot ds = 4\pi k \cdot Q_{in} \longrightarrow 2\pi r D \cdot E = 4\pi k \cdot \sigma \cdot 2\pi a D$$

$$\vec{E} = \frac{4\pi k a \sigma}{r} \cdot \hat{r}$$

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi a D} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{4\pi k a Q}{2\pi a L r}\hat{r} = \frac{2kQ}{Lr} \cdot \hat{r}$$

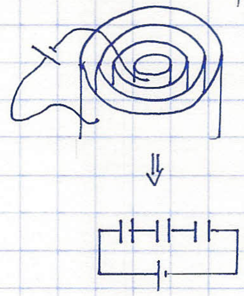
$$V = +\int_a^b E \cdot dl = -\int_b^a \frac{2kQ}{Lr} dr = -\frac{2kQ}{L} \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2kQ}{L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{L}{2k \ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

ב. כעת נתון: $\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \frac{b}{r}$. נחשב את הקיבול החדש בשתי דרכים:

דרך אחת:

יש כאן הרבה קבלים בעובי dr בטור:



אלמנט קיבול על סמך התוצאה מקודם.

$$dC = \frac{L}{2k \ln\left(\frac{r+dr}{r}\right)} \longrightarrow \frac{1}{C} = \int \frac{1}{dC} = \int_a^b \frac{2k}{L} \ln\left(\frac{r+dr}{r}\right)$$

נתון $\ln\left(\frac{r+dr}{r}\right) \approx \frac{dr}{r}$ (שכן: $\ln\left(1+\frac{dr}{r}\right) \approx \frac{dr}{r}$)

~~$\frac{1}{C} = \int_a^b \frac{2k}{L} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{2k}{L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$~~

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 b L}{b-a} = \frac{bL}{2k(b-a)}$$

$$\frac{1}{C} = \int_a^b \frac{r\, dr}{2\pi \varepsilon_0 b \cdot r L} = \frac{b-a}{2\pi \varepsilon_0 b L}$$

דרך שניה:

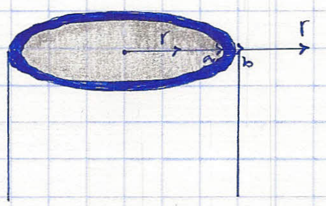
השדה לפי חוק גאוס כעת הוא: $\oint E \cdot ds = \frac{Q_{in}}{\varepsilon(r)} = \frac{r \cdot Q_{in}}{\varepsilon_0 b}$ אז: $2\pi r D \cdot E = \frac{r \cdot \sigma \cdot 2\pi a D}{\varepsilon_0 b} \rightarrow E = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 b}$

נציב את: $\sigma = \frac{Q}{2\pi a L}$ ונקבל: $\vec{E} = \frac{aQ}{2\pi \varepsilon_0 a b L} = \frac{2kQ}{bL} \cdot \hat{r}$

הפוטנציאל הוא: $V = \int_a^b \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 b L} dr = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 L} \frac{b-a}{b}$ ולכן הקיבול הוא: $C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi \varepsilon_0 b L}{b-a} = \frac{bL}{2k(b-a)}$.

ג. נתון שדה חיצוני: $\vec{E} = E_r \cdot \hat{r} + E_z \cdot \hat{z}$

לפי משפטי הרציפות: $D_{N_1} = D_{N_2}$, $\vec{E}_{T_1} = \vec{E}_{T_2}$, אצלנו: $E_T = E_z$, $E_N = E_r$.



לכן נקבל: $r > b$, $r < a$: $\vec{E} = \vec{E}$, $\theta = \arctan\left(\frac{E_r}{E_z}\right)$.

$a < r < b$: $D_{N_1} = D_{N_2} \rightarrow \varepsilon_0 E_r = \varepsilon(r) E_{r(ab)} \rightarrow E_{r(ab)} = \frac{r}{b} E_r$

$$E_{T_1} = E_{T_2} \rightarrow E_{z(ab)} = E_z$$

$$\vec{E} = \frac{r}{b} E_r \cdot \hat{r} + E_z \cdot \hat{z}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{r E_r}{b E_z}\right)$$