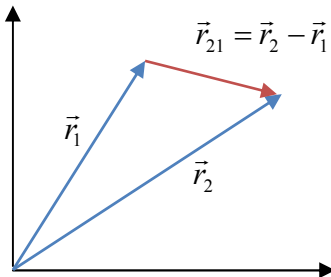


פיסיקה 2

אלקטרוסטטיקה:

בטבע יש כמות מטען אחת ויחידה שהיא המטען של האלקטרון. כאשר אומרים שלגוף יש כמות מטען מסוימת הכוונה שיש לו מכפלה במספר שלם של מטען זה. מטען בטבע לא נוצר ולא נעלם ולכן מערכות המשוואות שמתארות מטענים משמרות את המטען.

חוק קולון:



נסתכל על שני מטענים q_1 ו- q_2 שמרחקם מהראשית הם r_1 ו- r_2 בהתאמה:

• הכוח שמטען q_1 מפעיל על q_2 שווה ל:

$$F = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \cdot \hat{r}_{21}$$

כאשר K קבוע ששווה ל:

$$K = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$$

- מחוק קולון אפשר לראות שאם שני המטענים שווים הם דוחים אחד את השני ואם הם שונים אז הם מושכים אחד את השני.

הכללה לחוק קולון: הכוח החשמלי הכולל הפועל על חלקיק טעון שווה לסכום הווקטורי של כל הכוחות הפועלים עליו ע"י החלקיקים הטעונים שמסביבו.

דוגמה 1:

נסתכל על אוסף מטענים שמפוזר בצפיפות מטען $\rho(\vec{r})$ בגוש במרחב, נרצה לדעת מה הכוח שפועל על מטען q שנמצא במרחק $\vec{r}$ מהראשית?

פתרון:

נחלק את גוש המטענים לחלקיקים קטנים שכל אחד בעל נפח ∂v ,

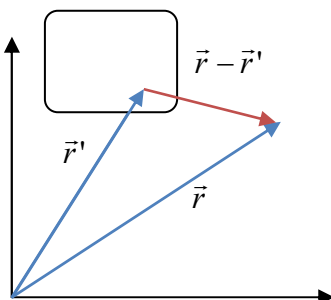
מכאן שהמטען שלו יהיה $\partial q = \rho(\vec{r}) \cdot \partial v$ והכוח שהוא יפעיל על q

$$\vec{F}_q = K \frac{\rho(\vec{r}) \cdot q \cdot \partial v}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})$$

יהיה:

ומאחר שהכוח הכולל הוא סכום הכוחות של כל חלקיק אז:

$$\vec{F}_{Total} = K \int \frac{\rho(\vec{r}) \cdot q \cdot \partial v}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})$$



השדה החשמלי:

שדה חשמלי בנקודה מסוימת הוא וקטור הכוח שהיה פועל על מטען יחידה סטטי אילו היה באותה נקודה.

כל מטען במרחב יוצר סביבו שדה חשמלי ועל מטען חשמלי שנמצא בשדה חשמלי תמיד יפעל כוח.

- השדה החשמלי שיפעיל מטען q שנמצא בראשית על נקודה $\vec{r}$ הוא:

$$\vec{E} = K \frac{q}{r^2} \cdot \hat{r}$$

מהגדרת השדה החשמלי על מטען q_2 במרחק $\vec{r}$ יפעל כוח ששווה:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q_2 \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

בדיוק כמו בכוחות השדה החשמלי שמייצרים מספר מטענים בנקודה מסוימת הוא הסכום הווקטורי של השדות שיוצר כל מטען לחוד בנקודה זו.

דוגמה 2:

נסתכל על הדוגמה הקודמת, נרצה לדעת מה השדה שיוצרת התפלגות מטען

מסוימת בנקודה $\vec{r}$?

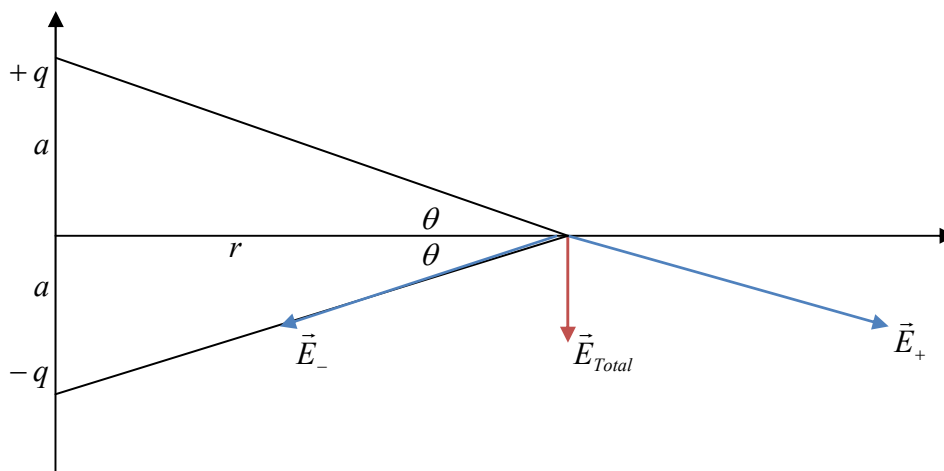
פתרון:

בדיוק כמו שעשינו עם הכוחות כאשר שמים במקום q מטען בוחן בגודל 1 ואז:

$$\vec{E}_{Total} = K \int \frac{\rho(\vec{r}') \cdot \partial v}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')$$

דוגמה 3 (דיפול חשמלי):

שני מטענים שווים והפוכי סימן שנמצאים במרחק a מהראשית ובמרחק $2a$ אחד מהשני נקראים דיפול חשמלי.



המטען החיובי מייצר שדה בכיוון המתרחק ממנו והשלילי מייצר שדה בכיוון המתקרב אליו אבל הגודל של שני השדות שווה. השדה הכללי כפי שלמדנו הוא הסכום הווקטורי של שניהם.

הגודל של שני השדות הוא: $E_1 = E_2 = K \frac{q}{r^2 + a^2}$ אבל נשים לב שהחלקים האופקיים של שני השדות מבטלים אחד את השני ולכן גודל השדה החשמלי הכולל יהיה:

$$|\vec{E}| = 2 \cdot E_1 \cdot \sin \theta = 2 \cdot K \frac{q}{r^2 + a^2} \cdot \sin \theta = \frac{2 \cdot K \cdot q \cdot a}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\cdot |\vec{E}| = \frac{K \cdot P}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \quad \text{ואז } P = 2 \cdot a \cdot q$$

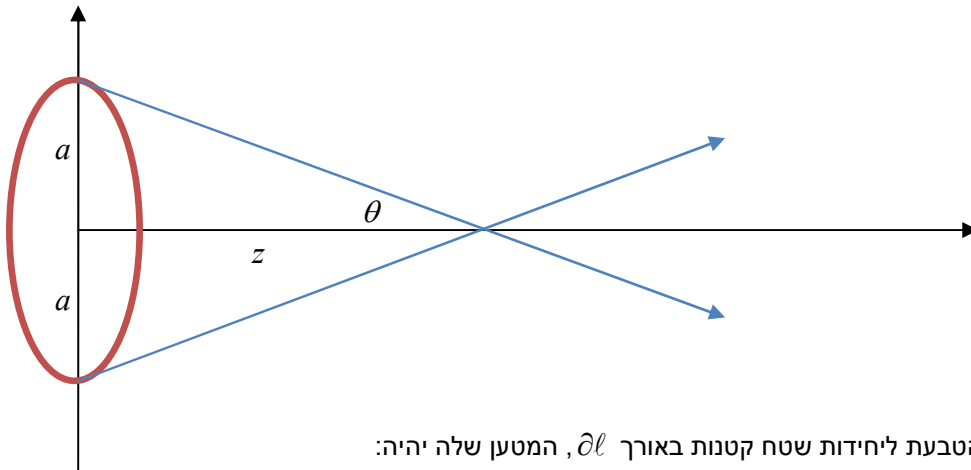
אם $r \gg a$ כלומר נקודת הבדיקה שלנו מאוד רחוקה מהדיפול נקבל שהשדה מתנהג כמו $\frac{1}{r^3}$:

$$E(r) = \frac{K \cdot P}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \xrightarrow{r \gg a} E(r) = \frac{K \cdot P}{r^3}$$

דוגמה 3 (שדה של טבעת טעונה):

נסתכל על טבעת ברדיוס a שטעונה במטען Q המפוזר בצורה אחידה. נרצה לדעת מה השדה בנקודה על ציר הסימטריה של הטבעת במרחק z ממנה?

פתרון:



נחלק את הטבעת ליחידות שטח קטנות באורך dl , המטען שלה יהיה:

$$\partial q = \lambda \cdot \partial \ell = \frac{Q}{2\pi \cdot a} \partial \ell$$

נסתכל על הציור, נשים לב שמהסימטריה של הבעיה החלק האנכי של השדה שמייצר כל חלקיק $\partial \ell$ תמיד יתבטל על ידי החלק האנכי של השדה שנוצר ע"י החלקיק $\partial \ell$ שממולו. לכן מספיק לסכם רק את הרכיבים האופקיים של וקטורי השדות:

$$\partial E_z = \frac{K \cdot \partial q}{z^2 + a^2} \cos \theta = \frac{K \cdot \partial q}{z^2 + a^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{K \cdot Q \cdot z \cdot \partial \ell}{2\pi \cdot a \cdot (z^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \int \partial E_z = \int \frac{K \cdot Q \cdot z \cdot \partial \ell}{2\pi \cdot a \cdot (z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{K \cdot Q \cdot z}{2\pi \cdot a \cdot (z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi \cdot a} \partial \ell$$

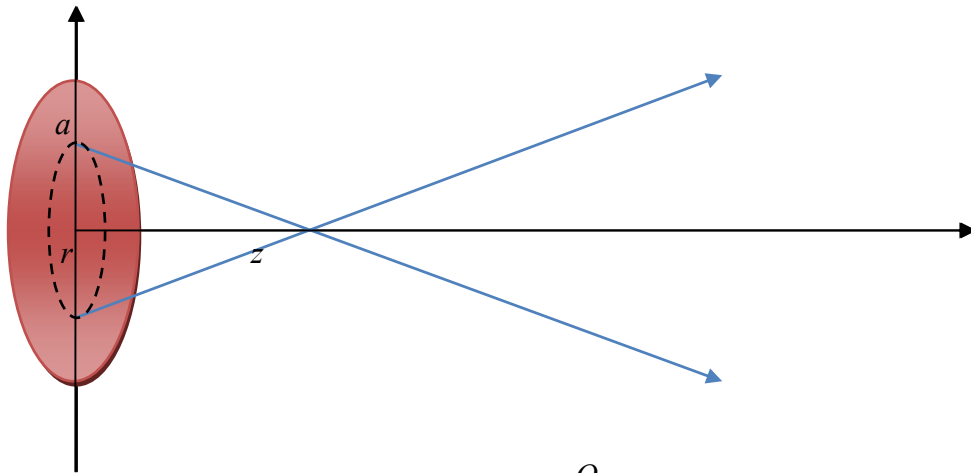
קיבלנו שהשדה שמפעילה טבעת טעונה על נקודה במרחק z על ציר הסימטריה שלה הוא:

$$E = \frac{K \cdot Q \cdot z}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

דוגמה 4 (שדה של דסקה טעונה):

דסקה בעלת התפלגות מטען אחידה טעונה במטען Q אחיד. מהו השדה החשמלי שהיא מייצרת בנקודה במרחק z על ציר הסימטריה שלה?

פתרון:



צפיפות המטען השטחית במקרה זה היא: $\sigma = \frac{Q}{\pi \cdot a^2}$.

נחלק את הדסקה לטבעות ברדיוס r ועובי dr , עבור כל אחת מהטבעות אנו יודעים שהשדה שלה הוא בכיוון ציר הסימטריה לכן ניתן להגיד שזה גם כיוון השדה הכולל של הדסקה.

שטח הטבעת הוא $2\pi \cdot r \cdot dr$ לכן המטען עליה יהיה

$$dq = \sigma \cdot (2\pi \cdot r \cdot dr) = \frac{Q}{\pi \cdot a^2} (2\pi \cdot r \cdot dr) = \frac{2 \cdot Q \cdot r \cdot dr}{a^2}$$

ולכן התרומה של כל טבעת כזו לשדה תהיה (לפי הדוגמה הקודמת):

$$\partial E_z = \frac{K \cdot dq \cdot z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{K \cdot 2 \cdot Q \cdot r \cdot z \cdot dr}{a^2 \cdot (z^2 + r^2)^{3/2}}$$

ולכן השדה הכולל יהיה הסכום שלהם כלומר:

$$E = \int \partial E_z = \int \frac{K \cdot 2 \cdot Q \cdot r \cdot z \cdot dr}{a^2 \cdot (z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{K \cdot Q \cdot z}{a^2} \int_0^a \frac{2r \cdot dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2K \cdot Q}{a^2} \left(1 - \frac{z}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \right)$$

נסתכל על המקרה שבו $\frac{z}{a} \ll 1$ כלומר ($z \ll a$) במקרה זה :

$$E = \frac{2 \cdot K \cdot Q}{a^2} = \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^2} = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

כעת נסתכל על המקרה שבו $a \ll z$ במקרה זה :

$$f(x) = \frac{z}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \xrightarrow{z \gg a} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2\right)^{1/2}}$$

לכן אם נסמן $x = \frac{a}{z}$ אזי אם נפתח את הפונקציה לטור טיילור נקבל :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

נציב למשוואת השדה ונקבל:

$$E \xrightarrow{z \gg a} \frac{2 \cdot Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^2} \left(1 - 1 - \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^2}{2}\right) = \frac{2 \cdot Q \cdot a^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^2 \cdot 2 \cdot z^2} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{z^2}$$

כלומר ההתנהגות של השדה החשמלי של דסקה במרחק מאוד גדול תהיה כמו של מטען נקודתי.

חוק גאוס:

חוק גאוס נותן את הקשר בין התפלגות מטענים חשמליים במרחב לבין השדה החשמלי .

- סכום המטענים בתוך נפח מסוים שווה לשטף של השדה החשמלי על השטח הסגור של מעטפת הנפח כפול הקבוע ϵ_0 :

$$\sum q_{in} = \epsilon_0 \cdot \Phi_E = \epsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a}$$

נסביר מה זה בעצם השטף של השדה החשמלי.

נחלק את המעטפת של הנפח שברצוננו לנתח לשטחים קטנים שמכסים את כל המעטפת.

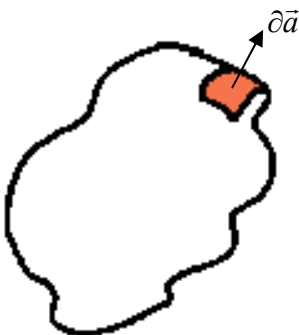
מאחר ולכל שטח כזה יש גודל וכיוון נאפיין אותו ע"י וקטור $\partial \vec{a}$, שנקרא וקטור השטח ,

שגודלו כגודל השטח וכיוונו ניצב לשטח החוצה מהנפח.

אם נכפיל סקלרית את הווקטור $\partial \vec{a}$ בווקטור השדה שעובר דרך השטח ∂A נקבל סקלר.

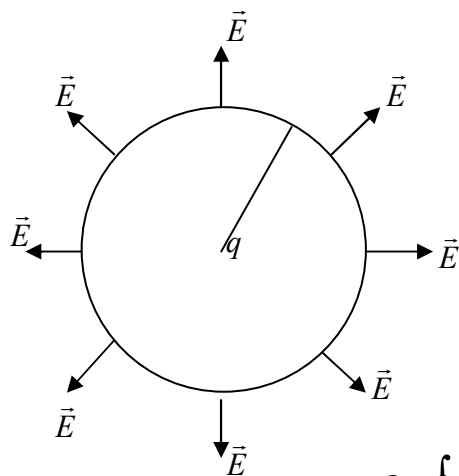
השטף החשמלי מוגדר להיות האינטגרל על כל השטח של סקלרים אלה, כלומר:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a}$$



הקשר גאוס $\Leftrightarrow$ קולון:

נסתכל על כדור ברדיוס r עם מטען q במרכזו.



משיקולי סימטריה השדה יהיה בכיוון הרדיאלי $\vec{E} = E(r)\hat{r}$.

מכיוון שגם $\partial\vec{a}$ הוא גם תמיד בכיוון הרדיאלי מקבלים: $\vec{E} \cdot \partial\vec{a} = E \cdot \partial a$

ואז:

$$\varepsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial\vec{a} = \varepsilon_0 \cdot \oint E \cdot \partial a = \varepsilon_0 \cdot E(r) \cdot \oint \partial a$$

$$= \varepsilon_0 \cdot E(r) \cdot 4\pi \cdot r^2 = \sum q_{in} = q$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

• קיבלנו את חוק קולון!

כעת עבור אותו כדור נראה שאם חוק קולון מתקיים אז חוק גאוס נכון:

כידוע אם חוק קולון מתקיים אז עבור המטען q מתקיים: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \hat{r}$ ואז:

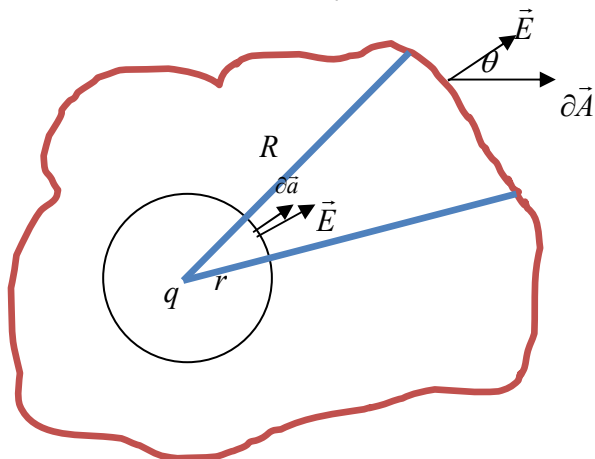
$$\varepsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial\vec{a} = \varepsilon_0 \cdot \oint E \cdot \partial a = \varepsilon_0 \cdot \oint \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \partial a = \varepsilon_0 \cdot \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \oint \partial a$$

$$= \varepsilon_0 \cdot \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot 4\pi \cdot r^2 = q$$

• קיבלנו את חוק גאוס!

הוכחנו את חוק גאוס עבור כדור, אבל כדור זה מקרה פרטי, נוכיח את המקרה הכללי:

נסתכל על מעטפת כללית, נבנה כדור סביב המטען, עבור כדור זה מתקיים: $\sum q_i = \varepsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial\vec{a}$



מעבירים מהמטען שני קרניים שיוצרים שני שטחים אינפיניטזמליים: אחד על הכדור והשני על המעטפת.

$$\frac{E(\vec{R}) \cdot \partial A}{E(\vec{r}) \cdot \partial a} \quad \text{נסתכל על היחס הבא:}$$

$$\frac{E(\vec{R})}{E(\vec{r})} = \frac{r^2}{R^2}, \quad \frac{\partial A}{\partial a} = \frac{R^2}{r^2 \cdot \cos \theta}$$

לכן:

$$\frac{\Phi_{Volume}}{\Phi_{Ball}} = \frac{\vec{E}(\vec{R}) \cdot \partial \vec{A}}{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \partial \vec{a}} = \frac{r^2 \cdot R^2}{r^2 \cdot R^2 \cdot \cos \theta} \cdot \cos \theta = 1$$

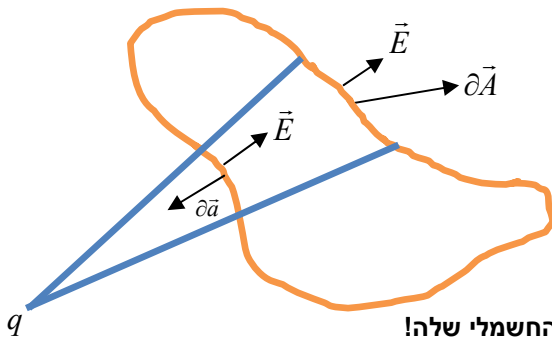
מהמכפלה הסקלרית העליונה

כפי שניתן לראות היחס בין השטף של הכדור לשטף של המעטפת הכללית הוא 1 כלומר הם שווים וזה מה שרצינו להוכיח.

דוגמה 1:

נסתכל על מטען שנמצא מחוץ לנפח סגור כלשהו, במקרה זה מאחר שווקטור השטח מצד אחד הפוך לזה שבצד השני נקבל:

$$\frac{\Phi_{up}}{\Phi_{down}} = \frac{\vec{E}(\vec{R}) \cdot \partial \vec{A}}{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \partial \vec{a}} = -1$$



כלומר כמות השטף שנכנסת מצד אחד שווה לכמות השטף שיוצאת מהצד השני.

לכן מטען שנמצא מחוץ למעטפת של גוף לא ישנה את השטף החשמלי שלה!

דוגמה 2:

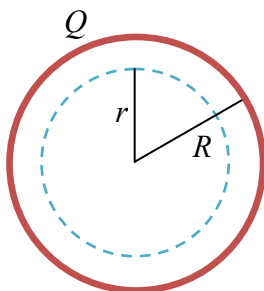
כדור מלא טעון בצפיפות מטען אחידה במטען Q. מה השדה החשמלי שיוצר הכדור הזה בנקודה במרחק r?

פתרון:

נחלק את הבעיה לשני מקרים:

$$r < R$$

נבנה כדור גאוסיאני שמרכזו הוא מרכז הכדור החיצוני ורדיוסו r, עבור כדור זה מתקיים:



$$\epsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \epsilon_0 \cdot \oint E \cdot \partial a = \epsilon_0 \cdot E \cdot \oint \partial a = \epsilon_0 \cdot E(\vec{r}) \cdot 4\pi \cdot r^2$$

$$= \sum q_{in} = \left(\frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} \right) \cdot Q = \frac{r^3 \cdot Q}{R^3}$$

היחס בין נפחי שני הכדורים

המטען בתוך הכדור הקטן

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q \cdot r}{R^3} \quad \text{לכן עבור } r < R \text{ נקבל:}$$

$$:R < r$$

נבנה כדור גאומטרי שמרכזו הוא מרכז הכדור החיצוני ורדיוסו r , עבור כדור זה מתקיים:

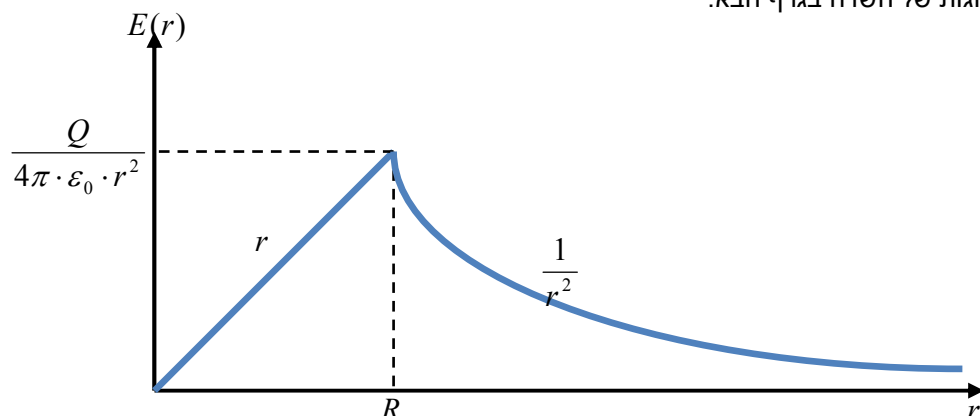
$$\epsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \epsilon_0 \cdot \oint E \cdot \partial a = \epsilon_0 \cdot E \cdot \oint \partial a = \epsilon_0 \cdot E(\vec{r}) \cdot 4\pi \cdot r^2$$

$$= \sum q_{in} = Q$$

מחוץ לכדור הטעון אין מטען לכן לכל $r > R$ המטען בפנים יהיה Q

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{לכן עבור } R < r \text{ נקבל:}$$

נראה את ההתנהגות של השדה בגרף הבא:

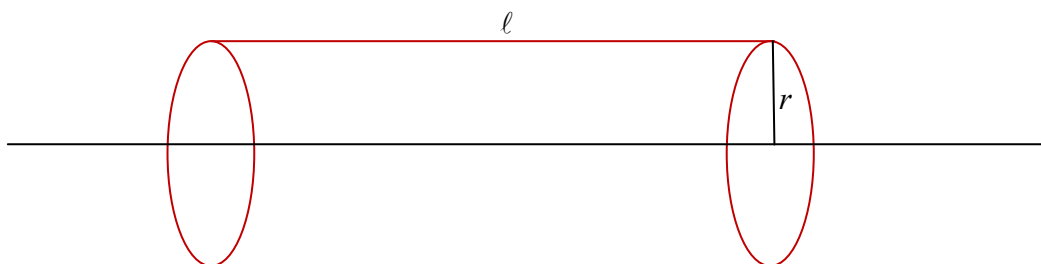


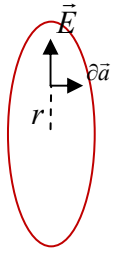
דוגמה 3:

תיל אינסופי טעון במטען בצפיפות אורכית אחידה λ , מה השדה החשמלי בנקודה במרחק r מהתיל?

פתרון:

נבנה סביב התיל גליל גאומטרי בעל רדיוס r ואורך ℓ , השדה החשמלי שיוצר כל חלק מהתיל יהיה ניצב למעטפת של הגליל. נשים לב שמאחר והתיל אינסופי בכל הנקודות עם אותו מרחק ממנו יהיה לשדה החשמלי אותו גודל.





מזה ניתן להסיק שאין שטף דרך המעטפות הצדדיות של הגליל כי שם וקטור השטח תמיד יהיה ניצב לווקטור השדה ומכפלתם הסקלרית תהיה אפס.

לכן נוכל לסכם:

$$\epsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = 0 + 0 + \epsilon_0 \cdot \oint E \cdot \partial a = \epsilon_0 \cdot E \cdot \oint \partial a = \epsilon_0 \cdot E(\vec{r}) \cdot 2\pi \cdot r \cdot \ell$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \cdot E(\vec{r}) \cdot 2\pi \cdot r \cdot \ell = \sum q_{in} = \lambda \cdot \ell$$

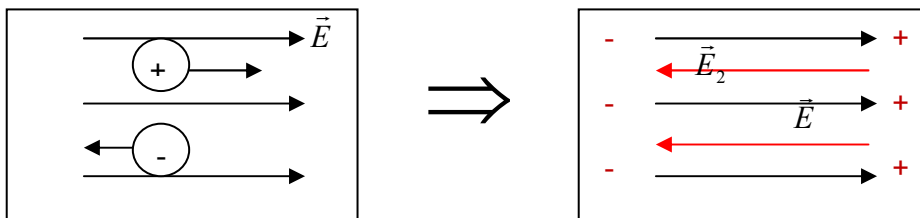
$$\Rightarrow E(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r}$$

מוליכים:

מוליך: חומר שמכיל מטענים שחופשיים לנוע בתוכו.

טענה 1: בכל נקודה בתוך המוליך השדה החשמלי שווה אפס (במצב הסטטי).

- נניח שהטענה הנ"ל לא נכונה, אזי אם יש שדה חשמלי בתוך המוליך הוא יגרום לכוחות על המטענים החופשיים בתוכו, מטענים אלה יתחילו לנוע בכיוון או נגד כיוון השדה. כידוע מטען מייצר שדה חשמלי לכן מטענים אלה ייצרו שדה חשמלי שיאפס את השדה בתוך המוליך ונגיע למצב שאין בו שדה באף נקודה.



טענה 2: אם מוליך כלשהו טעון אז כל המטען שלו נמצא רק על שטח הפנים שלו.

- הטענה הזאת נובעת מזה שמטענים דומים תמיד ידחו אחד את השני עד שיגיעו בסוף לצורה עם המרחק הכי גדול ביניהם. נסתכל על משטח טעון כלשהו ונבנה משטח גאומיאי המקביל למשטח המקורי בכל הנקודות שלו כאשר המרחק ביניהם מאוד קטן. לפי חוק גאוס עבור משטח זה יתקיים:

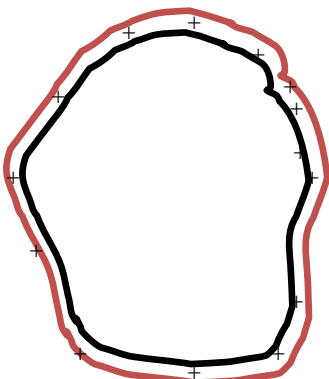
$$\epsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in}$$

אבל לפי טענה 1 ראינו שאין שדה בתוך המוליך כלומר $E=0$ ולכן צד שמאל שווה אפס

ומזה נובע בהכרח ש $\sum q_{in} = 0$ לכן המטען יכול להצטבר רק על המעטפת החיצונית.

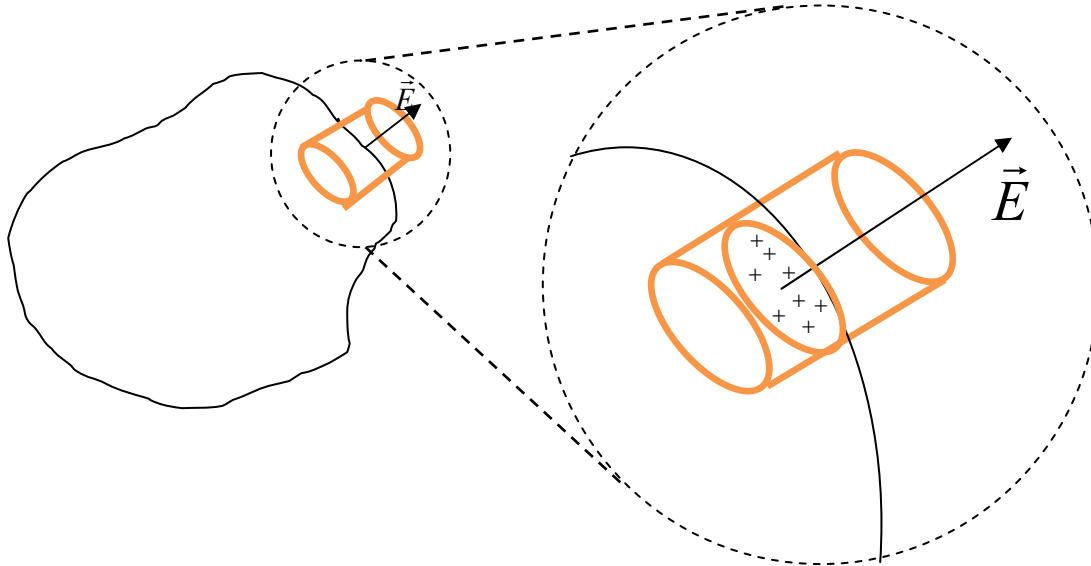
טענה 3: המטענים על שפת המוליך מייצרים שדה חשמלי מסביב לשפה שכיוונו בכל

נקודה ניצב לשפה וגודלו שווה לצפיפות המטען המשטחית המקומית לחלק ל ϵ_0 .



- אם השדה החשמלי לא מאונך לשפת המוליך אז ניתן לפרק אותו לשני רכיבים, הרכיב שמקביל לנקודה עצמה יפעיל כוח על המטענים שמסביבו עד שהם יסתדרו ויצרו שדה חשמלי הפוך שיבטל אותו. נוכיח את החלק השני של הטענה (גודל השדה):

נבחר מעטפת גאומטרית גלילית כך שהחצי הראשון שלה יהיה בתוך המוליך והחצי השני מחוצה לו:



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \epsilon_0 (0 + 0 + E \cdot A) = \sigma \cdot A = \sum q_{in}$$

אין שדה בתוך המוליך לכן אין שטף בפנים.

השדה ווקטור השטח על השפה הצדדית ניצבים לכן מכפלתם אפס

רק דרך שטח המכסה העליון של הגליל יש שטף.

וקיבלנו את מה שרצינו להוכיח:

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

דוגמה 1:

כדור קטן מלא נמצא בתוך כדור חלול כאשר שניהם מוליכים. הכדור הפנימי טעון במטען $+Q$ והחיצוני לא טעון.

המטען על הכדור הפנימי יגרום למטען מושרה על הכדור החיצוני, לכן

על השפה הפנימית של הכדור החיצוני יצטבר מטען $-Q$, כתוצאה מזה

תחל תנועה של מטענים חיוביים ועל המעטפת החיצונית יצטבר מטען $+Q$.

נחשב את השדה הנוצר ע"י המערכת בכל נקודה בעולם:

$r < R$: הכדור הקטן מוליך לכן המטענים מצטברים על השפה שלו ואין

בפנים מטען. לכן מחוץ גאוס $E=0$.

$R_1 < r < R_2$: ראינו בדוגמה קודמת שהתנהגות השדה של כדור טעון היא לפי חוק קולון

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \text{לכן:}$$

$R_1 < r < R_2$: גם כאן אנחנו נמצאים בתוך מוליך לכן $E=0$.

$$R_2 < r: \quad \text{המטען בפנים שווה לסכום המטענים כלומר } Q \text{ לכן השדה יהיה: } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

דוגמה 2:

נחבר את שני הכדורים מהדוגמה הקודמת עם חוט מוליך, כל המטען על הכדור הפנימי יעבור לקליפה החיצונית של הכדור הגדול והמטען על הכדור הקטן יתאפס, במקרה זה גם על הקליפה הפנימית של הכדור החיצוני לא יהיה מטען.

קעת טוענים את הכדור הפנימי שוב במטען $+Q$, שוב מטען זה ישרה מטען $-Q$ על המעטפת הפנימית של הכדור הגדול שתגרום להיווצרות מטען $+Q$ נוסף על המעטפת החיצונית שלו, כלומר יצטבר עליה מטען $2Q$.

אם מחברים שוב את שני הכדורים בחוט מוליך המטען של הכדור הפנימי יעבור לקליפה החיצונית של הכדור החיצוני ונקבל מטען $2Q$ על המעטפת החיצונית. אם נמשיך בצורה הזאת נוכל לטעון את הכדור החיצוני בכל מטען שנרצה.

דוגמה 3:

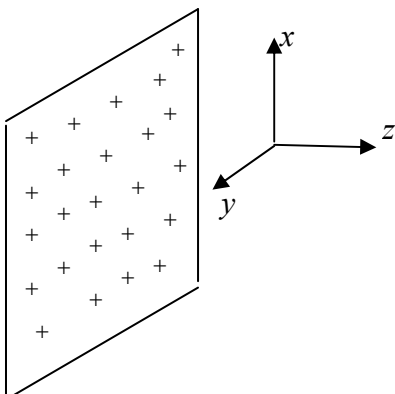
לוח אינסופי טעון במטען בצפיפות משטחית σ . מה השדה החשמלי בכל נקודה בעולם?

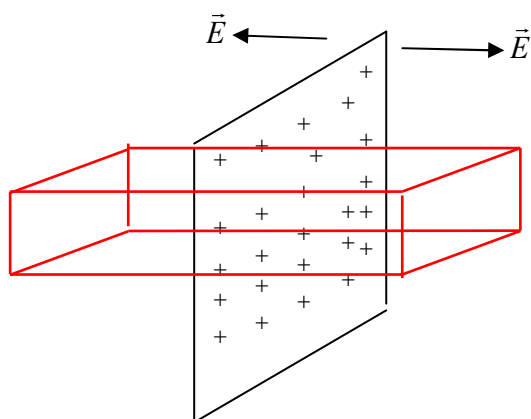
בגלל הסימטריה של לוח אינסופי השדה לא תלוי ב x ו- y אבל הוא

כן תלוי ב z .

נשים לב שהשדה בנקודה $z+$ כלשהי שווה לשדה בנקודה $z-$ רק בסימן הפוך.

נבנה משטח גאוסיאני בצורת קובייה שהלוח חותך אותה באמצע.





בפאות האמצעיות השטף מתאפס כי וקטור השדה ניצב לווקטור השטח.

לפי חוק גאוס:

השטף בפאות הצדדיות

$$\varepsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \varepsilon_0 (0 + 0 + 0 + 0 + E \cdot A + E \cdot A)$$

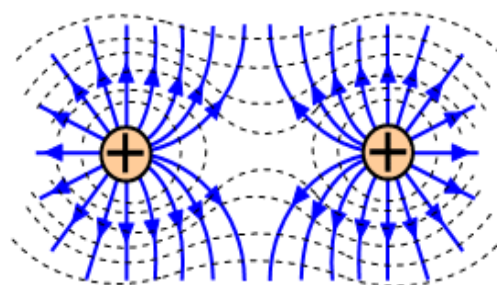
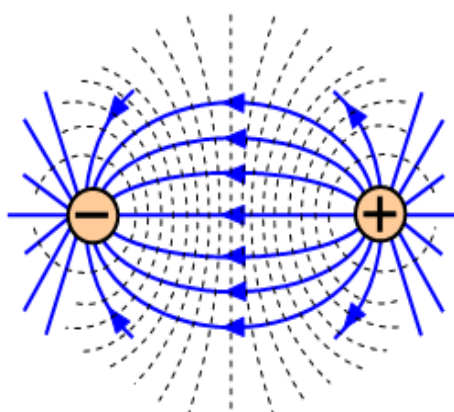
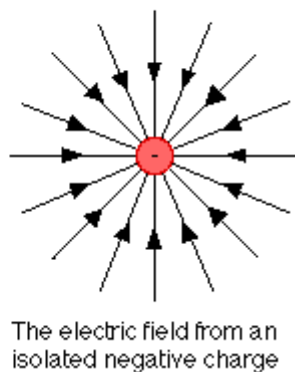
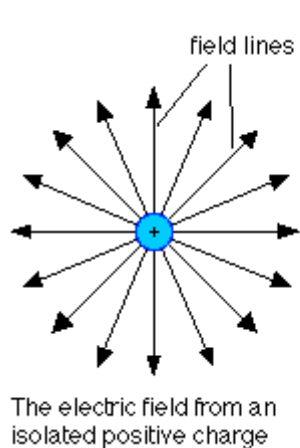
$$= \sigma \cdot A = \sum q_{in}$$

לכן השדה של לוח אינסופי הוא:

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

קו שדה: קו שהשדה משיק לו בכל נקודה ונקודה.

להלן מספר סקיצות של שדות חשמליים:



הפוטנציאל החשמלי:

הגדרה: כמות העבודה הנעשית כנגד כוחות השדה החשמלי הנדרשת להעביר מטען +1 מהנקודה A לנקודה B נקראת הפרש הפוטנציאלים בין A ל-B.

$$\frac{W_{A \rightarrow B}}{q_0} = V_B - V_A$$

- אם משקיעים עבודה ($W_{A \rightarrow B} > 0$) אז $V_B > V_A$.

- אם מקבלים עבודה ($W_{A \rightarrow B} < 0$) אז $V_B < V_A$.

היחידות של הפרש הפוטנציאלים הם וולט:

$$[V] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = \text{Volt}$$

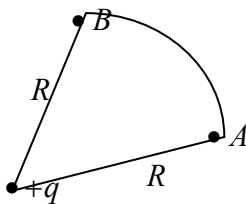
דוגמה 1:

- B נסתכל על שתי נקודות A ו-B ומטען q. במעבר בין A ל-B אנחנו מקבלים עבודה כי המטען q ידחוף את המטען +1 שעובר מ-A ל-B, לכן $W_{A \rightarrow B} < 0$.

• A

• q

- כעת נניח שהמטען הוא -q ונרצה לנוע כמו קודם מהנקודה A הקרובה לנקודה B הרחוקה. הפעם צריך להשקיע עבודה כי המטען -q ימשוך את המטען שלנו.



- נרצה כעת לעבור מהנקודה A ל-B כאשר שתיהן נמצאות על קשת באותו מרחק מהמטען. מאחר והפוטנציאל בשתי הנקודות שווה (כי יש להן אותו מרחק) מקבלים ש $W_{A \rightarrow B} = V_B - V_A = 0$ כלומר העבודה היא אפס.

- הערה: מאחר והפרש פוטנציאלים חשמלי הוא הפרש בין שני גדלים אף פעם לא נתייחס אליו כערך מוחלט אלא כהפרש כהגדרתו. כאשר אומרים שהפוטנציאל שווה לערך מסוים בנקודה מסוימת הכוונה היא להפרש הפוטנציאלים בין נקודה זו לאינסוף כאשר מגדירים $V(\infty) = 0$.

פוטנציאל חשמלי של כל נקודה בעולם:

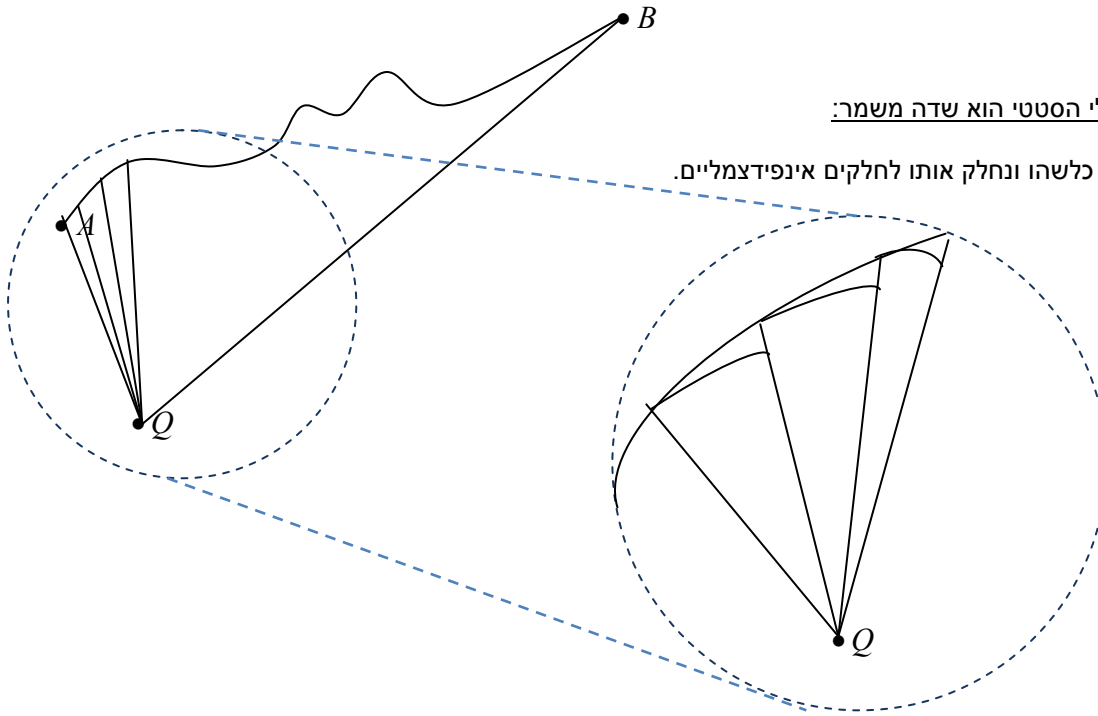
$$V(\vec{r}) = \frac{W_{\infty \rightarrow \vec{r}}}{q_0}$$

זה העבודה הנדרשת כדי להביא מטען +1 מהאינסוף לנקודה $\vec{r}$.

- נשים לב שאפשר לדבר על הפרש פוטנציאלים רק בתנאי שהשדה החשמלי הוא שדה משמר, כלומר כמות העבודה שצריך להשקיע במעבר מנקודה אחת לשנייה לא תלוי במסלול.

נוכח שהשדה החשמלי הסטטי הוא שדה משמר:

נסתכל על מסלול כללי כלשהו ונחלק אותו לחלקים אינפיניטזמליים.



הולכים עם הקו ימינה בצורת קשת של מעגל ולמעלה בקו ישר בכיוון השדה, החלקים הקשתיים לא מבצעים עבודה כי הם ניצבים לכיוון השדה/הכוח. רק החלקים של התנועה בקו ישר יבצעו עבודה, לכן לא משנה מה יהיה המסלול העבודה תמיד תהיה לפי המרחק בין הקשת שעוברת ב A לקשת שעוברת ב B (כלומר כמו ללכת מרדיוס A לרדיוס B).

נמצא את הקשר בין הפוטנציאל לשדה:

$$V(\vec{r}) = \frac{W_{\infty \rightarrow \vec{r}}}{q_0} = \frac{1}{q_0} \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \partial \vec{\ell} = \frac{1}{q_0} \int_{\infty}^{\vec{r}} -q_0 \cdot \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell}$$

$$V_B - V_A = \left(- \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} \right) - \left(- \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} \right)$$

$$= \left(- \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} \right) - \left(\int_A^{\infty} \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} \right)$$

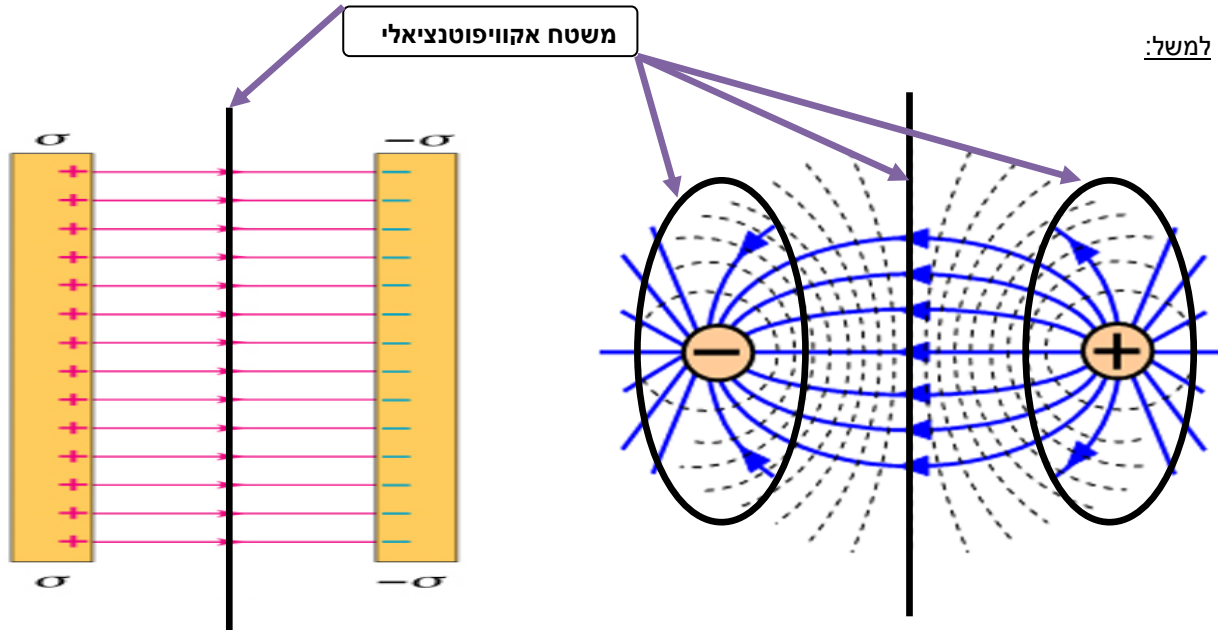
$$= - \left[\int_{\infty}^B \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} + \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} \right] = - \int_A^B \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell}$$

$$\Rightarrow V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell}$$

משטח אקוויפוטנציאלי זה משטח שיש לו את אותו השדה בכל נקודה עליו כלומר כל שתי נקודות עליו הן בעלות אותו פוטנציאל חשמלי.

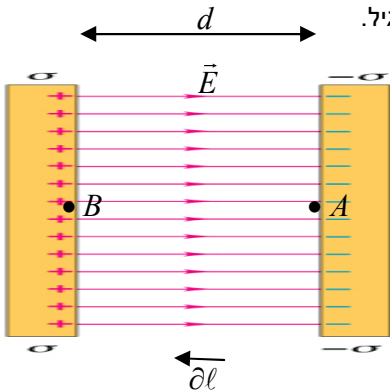
- מעבר מנקודה אחת לשנייה על משטח כזה לא דורשת עבודה.
- משטח כזה תמיד ניצב לקווי השדה שלו.

למשל:



דוגמה 2:

נחשב את הפרש הפוטנציאלים בין הנקודה A לנקודה B על לוחות של קבל לוחות רגיל.

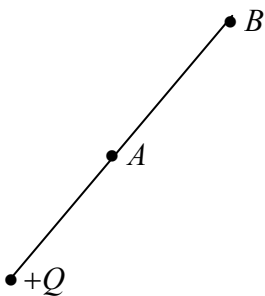


$$V_B - V_A = \frac{W_{A \rightarrow B}}{q_0} > 0 \Rightarrow V_B > V_A$$

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B -E \cdot d\ell \\ &= E \cdot \int_A^B d\ell = E \cdot d \end{aligned}$$

$$\Delta V = E \cdot d \Rightarrow \boxed{E = \frac{\Delta V}{d}}$$

נחשב את הפרש הפוטנציאלים של שתי נקודות שנמצאות על אותו קו יחסית למטען Q כלשהו.



$$V_B - V_A = \frac{W_{A \rightarrow B}}{q_0} < 0 \Rightarrow V_B < V_A$$

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B E \cdot d\ell \\ &= - \int_A^B \left(\frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 r^2} \right) \cdot d\ell \end{aligned}$$

$$V_B - V_A = -\frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_A^B \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \partial \ell = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

אם נבחר $r_A \rightarrow \infty$ ו- $r_B = r$ אז נקבל את הפוטנציאל החשמלי שעושה מטען חשמלי בגודל Q בנקודה במרחק r ממנו:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{1}{r}$$

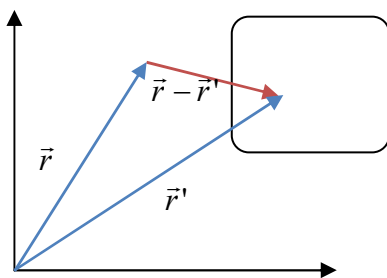
- הפוטנציאל שמספר מטענים עושים בנקודה מסוימת שווה לסכום הפוטנציאלים שכל מטען מהם עושה באותה נקודה.

דוגמה 3:

נסתכל על צפיפות מטען כלשהי בעלת צפיפות מטען נפחית $\rho(\vec{r})$. נרצה לדעת למה שווה הפוטנציאל בנקודה כלשהי במרחק r?

נחלק את הגוף לנפחים קטנים $\partial v'$, לכל נפח כזה יש מטען $\partial q' = \rho(\vec{r}') \cdot \partial v'$.

לכן:



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \int \frac{\partial q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') \cdot \partial v'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

דוגמה 4:

דסקית ברדיוס a עם צפיפות מטען משטחית אחידה σ . מה הפוטנציאל החשמלי בנקודה במרחק z על ציר הסימטריה שלה?

פתרון:

נחלק את הדסקית לטבעות ברדיוס r ועובי ∂r .

המטען על כל טבעת כזו יהיה: $\partial q = \sigma \cdot \partial s = \sigma \cdot 2\pi \cdot r \cdot \partial r$

לכן תרומת כל טבעת לפוטנציאל תהיה: $\partial V = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{\sigma \cdot 2\pi \cdot r \cdot \partial r}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$

$$\Rightarrow V(z) = \int \partial V = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \int_0^a \frac{r \cdot \partial r}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - z \right)$$

נבדוק את התוצאה, באינסוף הדסקית תיראה כמו נקודה:

לפי התיאוריה:

$$V(z \rightarrow \infty) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{1}{z} = \frac{\sigma \cdot \pi \cdot a^2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{1}{z} = \frac{\sigma \cdot a^2}{4 \cdot z \cdot \epsilon_0}$$

לפי התוצאה:

$$\Rightarrow V(z \rightarrow \infty) = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} (\sqrt{a^2 + z^2} - z) = \frac{\sigma \cdot z}{2 \cdot \epsilon_0} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{z} \right)^2 - 1 \right) = \frac{\sigma \cdot a^2}{4 \cdot z \cdot \epsilon_0}$$

טור טיילור של השורש

ואכן קיבלנו את התוצאה שציפינו לה.

דוגמה 5:

כדור בעל רדיוס r_1 טעון במטען q_1^0 וכדור שני בעל רדיוס r_2 טעון במטען q_2^0 . שני הכדורים רחוקים מאוד אחד מהשני. מחברים את שני הכדורים עם חוט מוליך, המטען q_1^0 הופך למטען q_1 והמטען q_2^0 הופך למטען q_2 . מחוק שימור המטען ידוע ש- $q_1^0 + q_2^0 = q_1 + q_2$.

מאחר והכדורים מחוברים הפוטנציאל של שניהם יהיה שווה לכן:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R_1} = \frac{q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R_2} = V_2$$

$$\Rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1 \cdot 4\pi \cdot R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 \cdot 4\pi \cdot R_2^2}{R_2}$$

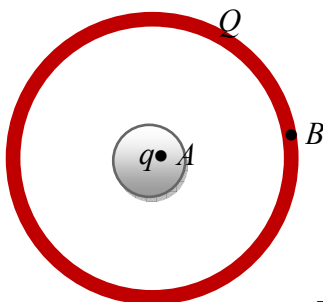
$$\Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

קיבלנו שצפיפות המטען החדשה על כל כדור תהיה פרופורציונאלית הפוכה לרדיוס שלו.

דוגמה 6:

כדור מוליך טעון במטען q נמצא בתוך כדור מוליך אחר שטעון במטען Q . מהו הפרש הפוטנציאלים בין שניהם?

נשים לב ששני הכדורים הם אקוויפוטנציאליים לכן נוכל לבחור כל שתי נקודות על שני הכדורים ולחשב את הפרש הפוטנציאלים בין שתיהן.



$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} = - \int_A^B E \cdot \partial \ell = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \partial \ell$$

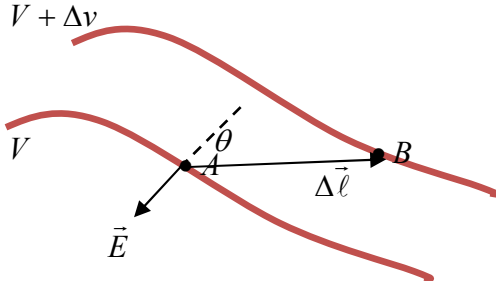
הכדור החיצוני לא עושה שדה בפנים לכן שמים רק את השדה של הכדור הפנימי.

$$= - \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} \cdot \partial \ell = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

מהתוצאה ניתן להסיק ש: $r_B > r_A \Rightarrow V_A > V_B$.

עד עכשיו למדנו איך לבצע את המעבר מהשדה לפוטנציאל $\vec{E}(\vec{r}) \rightarrow V(\vec{r})$, ברור שכדי להגיע למעבר ההפוך כלומר למעבר $\vec{E}(\vec{r}) \leftarrow V(\vec{r})$ צריך לבצע פעולה מתמטית הפוכה. אבל השדה הוא וקטור והפוטנציאל הוא סקלר... לפתרון בעיה זו נשתמש באופרטור שנקרא **הגרדיינט** ∇ .

נתון קו אקוויפוטנציאלי עם פוטנציאל V ובאזור מאוד קרוב אליו יש קו דומה עם פוטנציאל $V + \Delta v$.



השדה החשמלי בנקודה כלשהי A על הקו הראשון יהיה בכיוון

החוצה (כי הפוטנציאל על הקו העליון יותר גדול).

אם נרצה לעבור מנקודה זו לנקודה אחרת B על הקו השני

בזווית θ מהשדה אז העבודה שנצטרך לבצע תהיה:

$$\begin{aligned}\Delta W &= \vec{F} \cdot \partial \vec{\ell} = (-q_0 \cdot \vec{E}) \cdot \partial \vec{\ell} = -q_0 \cdot \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} \\ &= -q_0 \cdot E \cdot \partial \ell \cdot \cos(\pi - \theta) = q_0 \cdot E \cdot \partial \ell \cdot \cos \theta\end{aligned}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

דרך אחרת לחישוב העבודה היא:

$$\Delta W = (W_B - W_A) = q_0 \cdot (V + \Delta v - V) = q_0 \cdot \Delta v$$

נשווה את שני הביטויים שקיבלנו ונקבל:

$$q_0 \cdot E \cdot \partial \ell \cdot \cos \theta = q_0 \cdot \Delta v \Rightarrow E \cdot \cos \theta = \frac{\Delta v}{\partial \ell}$$

$$E \cdot \cos \theta = -E_\ell = \frac{\Delta v}{\partial \ell} \quad \text{זה רכיב השדה החשמלי בכיוון ההליכה עם סימן מינוס לכן נוכל לסכם:}$$

נסתכל כעת על מערכת קרטזית עם הצירים x, y, z , נחלק את השדה לשלושת מרכיביו ונגזור אותם רכיב קודם x אח"כ y ואז z. נסמן:

$$E_z = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad E_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_x = \frac{\partial V}{\partial x}$$

את השדה נוכל לכתוב בצורה:

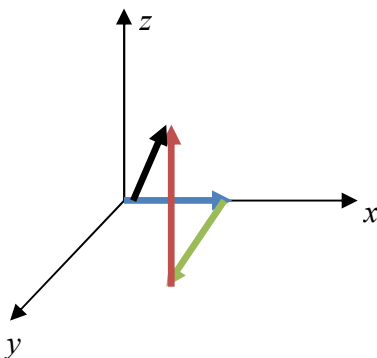
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

נסמן:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

כאשר הגרדיינט מוגדר להיות:



בדוגמה האחרונה ראינו את הקשר $E \cdot \cos \theta = \frac{\Delta v}{\partial \ell}$ בין שני קווים אקוויפוטנציאליים, הערך הזה יכול להיות מקסימאלי אם $\theta = 0$ כלומר אם כיוון ההליכה מקביל לשדה.

הגרדיינט של שדה סקלרי נותן שדה וקטורי שמצביע לכיוון שבו השדה הווקטורי הוא הכי חזק.

הערה: במקרה של סימטריה כדורית יותר קל להשתמש בקואורדינאטות כדוריות מאשר בקרטזיות, במקרה כזה הפוטנציאל $V(r, \theta, \varphi)$ אבל נשים לב ש $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ ולכן $\vec{\nabla} V(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial}{\partial r} V(r) \cdot \hat{r}$.

דוגמה:

נתון הפוטנציאל $V(\vec{r}) = \frac{K \cdot q}{r}$. מהו השדה החשמלי?

פתרון:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{K \cdot q}{r} \right) \cdot \hat{r} = \left(\frac{K \cdot q}{r^2} \right) \cdot \hat{r}$$

בקואורדינאטות קרטזיות:

$$V(\vec{r}) = \frac{K \cdot q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E} = -\left[\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right] = K \cdot q \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x \cdot \hat{x} + y \cdot \hat{y} + z \cdot \hat{z})$$

$$= K \cdot q \cdot \frac{1}{(r)^3} (\vec{r}) = K \cdot q \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

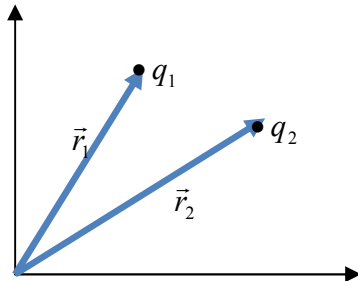
למרות שקיבלנו את אותה התוצאה ברור שעדיף לעבוד עם קואורדינאטות כדוריות במקרה זה כי זה יותר קל.

אנרגיה פוטנציאלית חשמלית:

האנרגיה הפוטנציאלית החשמלית של מערכת מטענים היא העבודה שצריך לבצע כדי להביא את כל המטענים במערכת מהאינסוף לנקודה שבה הם נמצאים.

האנרגיה הזאת אגורה במערכת ולכן אם נחזיר את המטענים לאינסוף נקבל בחזרה את כל העבודה שהשקענו.

- נסתכל למשל על מערכת שני המטענים הבאה:



מהי האנרגיה הפוטנציאלית החשמלית האגורה במערכת?

בהתחלה נביא את המטען הראשון מהאינסוף לנקודה r_1 , הבאת המטען

הזה לא דורשת עבודה כי בהתחלה אין מטענים ולכן אין פוטנציאל חשמלי.

בשלב השני נביא את המטען השני מהאינסוף לנקודה r_2 , בשלב זה כבר יש

מטען q_1 שיוצר פוטנציאל חשמלי, לכן להבאת המטען השני מהאינסוף נצטרך

להשקיע אנרגיה נגד הפוטנציאל. לסיכום האנרגיה החשמלית האגורה במערכת היא:

$$U = 0 + q_2 \cdot V(\vec{r}_2)$$

הערה: סדר העברת המטענים החשמליים לא משנה ובכל סדר נקבל את אותה התוצאה.

- כעת נסתכל על מערכת של n מטענים שיושבים על הווקטורים r_1 עד r_n . נרצה לחשב את האנרגיה הפוטנציאלית של מערכת זו.

$$U = 0 + q_2 \cdot V_1(\vec{r}_2) + q_3 \cdot [V_1(\vec{r}_3) + V_2(\vec{r}_3)] + q_4 \cdot [V_1(\vec{r}_4) + V_2(\vec{r}_4) + V_3(\vec{r}_4)] + \dots$$

נסמן: $\vec{r}_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ ואז:

$$U = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^n \frac{q_i \cdot q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_i \cdot q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n q_i \cdot V_{ij}$$

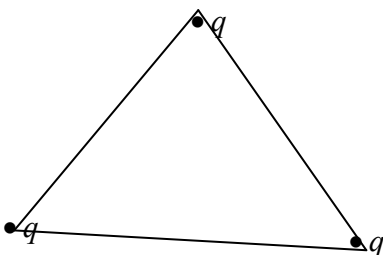
במעבר ל i שונה מ- j כל איבר חושב פעמיים
לכן מכפילים בחצי.

דוגמה 1:

על כל אחד מקודקודיו של משולש שווה צלעות בעל צלע a יש מטען q ,

מהי האנרגיה האגורה במערכת?

נחשב את האנרגיה בשתי שיטות:



שיטה 1 (הבאת המטענים אחד אחד מהאינסוף):

$$U = 0 + \underbrace{\frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{q^2}{a}}_{\text{מטען ראשון}} + 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{q^2}{a}}_{\text{מטען שני}} = \underbrace{\frac{3q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}}_{\text{מטען שלישי}}$$

שיטה 2 (לפי הנוסחה האחרונה):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n q_i \cdot V_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left[q \cdot \frac{2q}{a} + q \cdot \frac{2q}{a} + q \cdot \frac{2q}{a} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left[3q \cdot \frac{2q}{a} \right] = \frac{3q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}$$

- מאחר ואינטגרל הוא סכום, עבור כל התפלגות מטענים רציפה בעלת התפלגות מטען נפחית $\rho(\vec{r})$

נוכל לחלק אותה לנפחים אינפיניטזמליים, להעביר את הסכום לאינטגרל ולקבל:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n q_i \cdot V_{ij} \Rightarrow \frac{1}{2} \int V(\vec{r}) \cdot \rho(\vec{r}) \cdot \partial V$$

כלומר $U = \int \partial u$ כאשר ∂u היא תרומת הנפח הקטן ∂V לאנרגיה הכללית של המערכת.

דוגמה 2:

כדור עם רדיוס R טעון במטען Q בצורה אחידה. מהי האנרגיה האגורה בכדור?

פתרון:

אפשר לחלק את הכדור לטבעות ברדיוס r ועובי ∂r , אז נבנה אותו כך

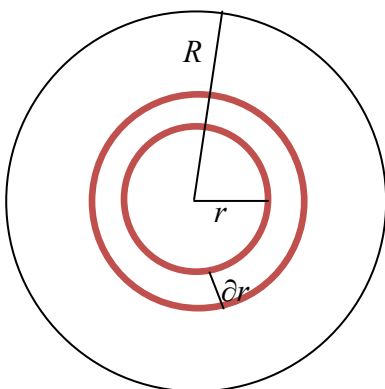
שבכל פעם נביא טבעת כזו ונוסיף את התרומה שלה לאנרגיה ∂u .

$$\partial q = \rho \cdot \partial V = \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3} \right) \cdot (4\pi \cdot r^2 \cdot \partial r)$$

- המטען על כל טבעת הוא:

- המטען שכבר הצטבר בכדור ברדיוס r כפי שראינו בדוגמה קודמת הוא:

$$Q_{(r)} = Q \frac{r^3}{R^3}$$



לכן התרומה של הוספת כל טבעת ברדיוס r תהיה:

$$\partial u = V_{(r)} \cdot \partial q = \left(\frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q \frac{r^3}{R^3} \cdot \frac{1}{r} \right) \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3} \cdot 4\pi \cdot r^2 \cdot \partial r \right) = \frac{3Q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^6} \cdot r^4 \cdot \partial r$$

$$U = \int \partial u = \frac{3Q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^6} \cdot \int_0^R r^4 \cdot \partial r = \frac{3Q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^6} \cdot \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R = \frac{Q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \frac{3}{5}$$

דוורגנס:

נסתכל על משטח סגור במרחב בעל שטח מעטפת S ונפח V . יהי $\vec{F}$ שדה וקטורי כלשהו במרחב.

נרצה לחשב את השטף של השדה $\vec{F}$ דרך השטח S .

ראינו כבר שהנוסחה של השטף של שדה וקטורי דרך מעטפת סגורה היא: $\Phi_F = \oint_S \vec{F} \cdot \partial \vec{a}$

נגדיר פעולה חדשה שנקראת הדוורגנס שפועלת על שדות וקטורים ונותנת סקלר, בעזרת הדוורגנס נוכל להעביר את הנוסחה של השטף מאינטגרל משטחי לאינטגרל נפחי, כלומר:

$$\Phi_F = \oint_S \vec{F} \cdot \partial \vec{a} = \oint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \cdot \partial V$$

נגדיר:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x \cdot \hat{x} + F_y \cdot \hat{y} + F_z \cdot \hat{z})$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z}$$

$$\epsilon_0 \cdot \oint_S \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \epsilon_0 \cdot \oint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \partial V \quad \text{טענה:}$$

$$\epsilon_0 \cdot \oint_S \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in} \quad \text{לפי חוק גאוס ידוע ש:}$$

$$\epsilon_0 \cdot \oint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \partial V = \epsilon_0 \cdot \oint_S \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in} = \int \rho \cdot \partial V \quad \text{לכן:}$$

$$\oint_V (\epsilon_0 \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho) \cdot \partial V = 0 \quad \text{מעבירים אגפים:}$$

$$\oint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \cdot \partial V = 0 : \epsilon_0 \text{ נחלק את המשוואה ב-}$$

לכן אם נבחר כל נקודה בעולם ונבנה סביבה כדור גאומטרי כלשהו אזי לכל כדור כזה תתקיים

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \text{ התוצאה הנ"ל ולכן בהכרח לכל נקודה בעולם יתקיים:}$$

כלומר אם נתון השדה החשמלי בכל העולם ורוצים לדעת מהי התפלגות המטען שיוצרת אותו אז:

$$\epsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in} \Leftrightarrow \boxed{\rho = \epsilon_0 \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}$$

דוגמה:

כדור ברדיוס R טעון במטען אחיד Q.

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3}, r < R \\ 0, r > R \end{cases} \quad \text{צפיפות המטען של כדור כזה היא:}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot r}{R^3} \cdot \hat{r}, r < R \\ \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \hat{r}, r > R \end{cases} \quad \text{והשדה החשמלי שלו הוא:}$$

$r < R$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3} (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3} + \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3} + \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3} = \frac{3Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3} \\ &= \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3} \cdot \frac{1}{\epsilon_0} = \rho \cdot \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \text{קיבלנו את חוק גאוס:}$$

:r>R

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= \dots = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right)\end{aligned}$$

משוואת פואסון ולפלס:

ראינו עד עכשיו שיש קשר בין השדה לצפיפות המטען: $\rho = \epsilon_0 \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$.

ראינו גם שיש קשר בין השדה לפוטנציאל החשמלי: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$.

לכן חייב להיות קשר בין הפוטנציאל החשמלי לצפיפות המטען, קשר זה הוא:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \cdot V) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned}-\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot V) &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \hat{z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V\end{aligned}$$

↑
לפליסיאן ∇^2

ולכן נסכם:

$-\nabla^2 \cdot V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\nabla^2 \cdot V = 0$

משוואת פואסון:

משוואת לפלס (אם $\rho = 0$):

דוגמה (לתרגול עצמי):

3 מוליכים טעונים ומבודדים אחד מהשני מונחים במרחב. הפוטנציאלים על הגופים הם V_1, V_2, V_3 .

מהו הפוטנציאל בכל נקודה בעולם?

פתרון:

פותרים את המשוואה של לפלס $\nabla^2 \cdot V = 0$ עם תנאי השפה $V_\infty = 0$ ו- V_1, V_2, V_3 .

דוגמה 2:

טענה: אם בגוף מוליך יש נפח ריק בתוכו אז אם בתוך חלל זה אין מטענים אז גם אין שדה בפנים.

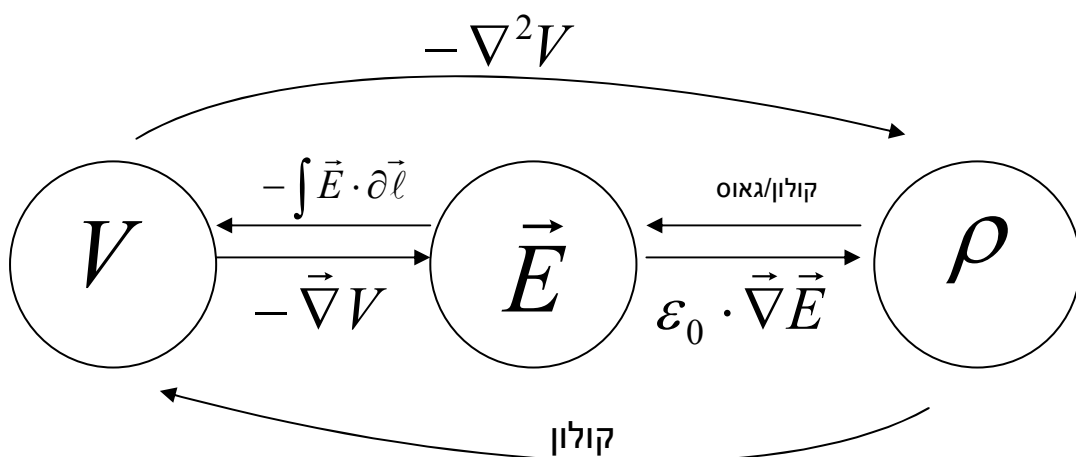
הוכחה:

בגלל שאין מטענים בתוך החלל משוואת לפלס חייבת להתקיים כלומר $\nabla^2 \cdot V = 0$, כמו כן על השפה הפנימית של מוליך הפוטנציאל תמיד יהיה קבוע, נניח $V = V_0 = \text{Const.}$

נשים לב ש $V = V_0$ בתוך החלל הוא פתרון של משוואת לפלס אבל כידוע למשוואה זו יש תמיד פתרון אחד ויחיד לכן $V = V_0$ הוא פתרון יחיד.

אנו יודעים ש $\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot V$, נציב ונקבל: $\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot V_0 = 0$ כלומר השדה בפנים הוא אפס וזה מה שרצינו להוכיח.

סיכום ביניים:



קבלים:

קבל: זה שני מוליכים מבודדים אחד מהשני כאשר אחד מהם טעון במטען $+Q$ והשני במטען $-Q$.

היחס בין המטען על הקבל לבין הפוטנציאל בין שני המוליכים נקרא **קיבולת**, המשמעות שלה זה כמה מטען צריך לשים על הקבל כדי ליצור הפרש פוטנציאלים מסויים.

$$C = \frac{Q}{V}$$

יחידות:

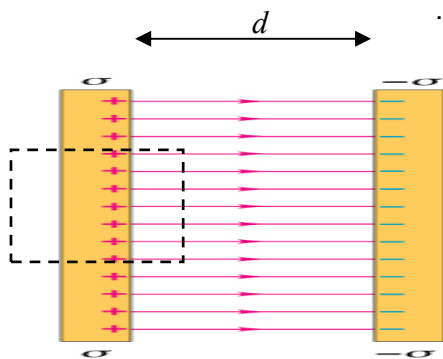
$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{\text{Colomb}}{\text{Volt}} = \text{Farad}$$

דוגמה 1:

קבל מורכב משני לוחות אינסופיים טעונים שהמרחק ביניהם הוא d . רוצים לדעת מה השדה שהוא מייצר?

פתרון:

בונים משטח גאוסיאני בצורת קובייה שהלוח של הקבל חוצה אותה לשתיים.



$$\epsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in}$$

$$\epsilon_0 \cdot (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + E \cdot A) = \sigma \cdot A$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

שדה חשמלי של קבל לוחות:

$$\Delta V = \left| \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} \right| = \left| E \cdot \oint \partial \ell \right| = E \cdot d$$

ואז:

נציב את השדה ונקבל:

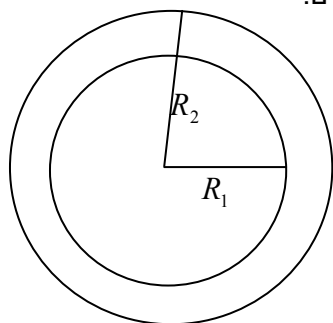
$$\Delta V = E \cdot d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d = \frac{Q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q \cdot A \cdot \epsilon_0}{Q \cdot d} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \Rightarrow C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

הערה: בכל קבל המשוואה של הקיבולת תהיה מכפלה של ערך ביחידות אורך שתלוי בגיאומטריה של הקבל כפול ϵ_0 .

דוגמה 2:

קבל מורכב משתי קליפות כדוריות עם רדיוסים R_1 ו- R_2 כאשר שני המטענים שלהן שווים.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \hat{r} \quad \text{השדה בין שני הכדורים הוא:}$$

$$\Delta V = \left| \int \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} \right| = \left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \partial r \right| = \left| \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} \partial r \right| = \left| \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \right|_{R_1}^{R_2}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R_1 \cdot R_2}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R_1 \cdot R_2}{(R_2 - R_1)} = \epsilon_0 \cdot \left(\frac{4\pi \cdot R_1 \cdot R_2}{(R_2 - R_1)} \right)$$

- ניתן לראות שההערה האחרונה מתקיימת עבור קבל זה.

- מה יקרה עבור $R_1, R_2 \rightarrow \infty$?

$$C \xrightarrow[R_2 - R_1 = d]{R_1 \cdot R_2 \rightarrow \infty} \epsilon_0 \cdot \left(\frac{4\pi \cdot R^2}{d} \right) = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

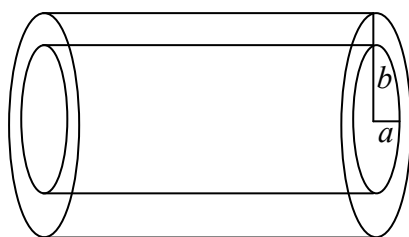
במקרה כזה נקבל את המשוואה של קבל לוחות אינסופי!

דוגמה 3:

שני גלילים אינסופיים ברדיוסים a ו- b טעונים מהווים קבל. מהו הקיבול שלהם?

פתרון:

נבנה משטח גאוסיאני גלילי שנמצא בין שני הגלילים, אז:



$$\epsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in}$$

$$\epsilon_0 \cdot E \cdot 2\pi \cdot r \cdot \ell = Q$$

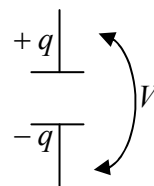
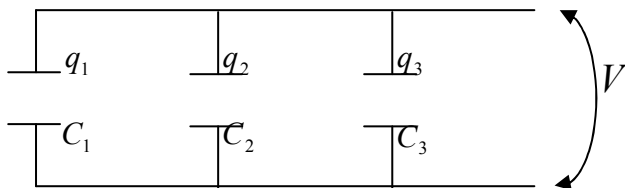
$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot r \cdot \ell}$$

$$\Delta V = \left| \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} \right| = \left| \int \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot r \cdot \ell} \partial r \right| = \left| \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot \ell} \int \frac{1}{r} \cdot \partial r \right| = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot \ell} \cdot \ln(r) \Big|_a^b = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot \ell} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \cdot \left(\frac{2\pi \cdot \ell}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right)$$

חיבור קבלים במקביל:

נחבר מספר קבלים במקביל:



המטען הכולל של המערכת שווה לסכום המטענים של כל אחד מהקבלים: $q_1 + q_2 + q_3 = q$

הפוטנציאל החשמלי על כל אחד מהקבלים שווה לכן: $\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_3}{C_3}$

לפי הנוסחה $q_i = \frac{C_i}{V_i}$ נוכל לרשום:

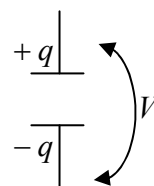
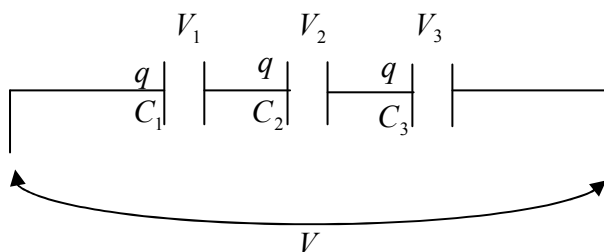
$$q = q_1 + q_2 + q_3 = \frac{C_1}{V} + \frac{C_2}{V} + \frac{C_3}{V} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{V} = \frac{C_{Total}}{V}$$

כלומר בחיבור קבלים במקביל נוכל להחליף אותם בקבל אחד שהקיבול שלו הוא:

$$C_{Total} = C_1 + C_2 + C_3$$

חיבור קבלים בטור:

נחבר מספר קבלים בטור:



הפעם המטען מתפזר על הקבלים באופן שווה ומתקיים גם $V_1 + V_2 + V_3 = V$.

$$V = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} = \frac{q}{C_{Total}}$$

מנוסחה זו נקבל:

כלומר בחיבור קבלים בטור נוכל להחליף אותם בקבל אחד שהקיבול שלו הוא:

$$\frac{1}{C_{Total}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Leftrightarrow C_{Total} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

חומרים די-אלקטריים:

חומר די-אלקטרי הוא חומר שמכיל מטענים שקשורים לאטומים של החומר וחופשיים לנוע סביבם בתנועות מקומיות.

ההבדל בין חומר די-אלקטרי לחומר מוליך הוא שבמוליך המטענים לא קשורים לאטומים ולכן חופשיים לנוע בתנועות מיקרוסקופיות בחומר ולא רק סביב אטום מסוים.

נכניס גוש אחיד של חומר די-אלקטרי בין שני לוחות של קבל, תמיד היחס בין הקיבול של הקבל בריק לבין הקיבול שלו עם החומר הדי-אלקטרי יקיים:

$$\frac{C_{with_D.E.}}{C_{without_D.E.}} = K \geq 1$$

כלומר אם שמים חומר די-אלקטרי בין שני לוחות של קבל הקיבולת שלו תגדל בגודל K שהוא קבוע שתלוי רק בסוג החומר הדי-אלקטרי.

לכן נוכל לסכם שהקיבולת של קבל כלשהו היא:

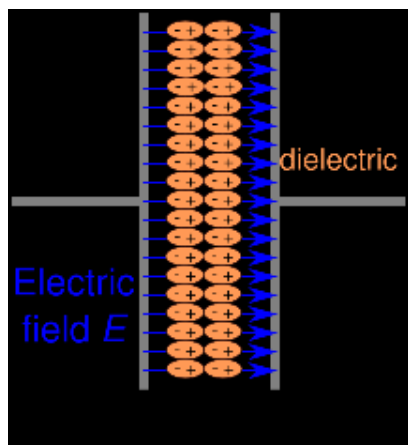
$$C = \epsilon_0 \cdot K \cdot \left(\begin{array}{l} \text{ערך במטרים} \\ \text{שתלוי} \\ \text{בגיאומטריה} \\ \text{של הקבל} \end{array} \right)$$

אז למה הקיבולת גדלה עם הוספת חומר די-אלקטרי?

השדה החשמלי של הקבל גורם לחלקיקים בחומר הדי-אלקטרי להסתדר כמו בציור משמאל, לכן ליד הלוח הטעון חיובית נוצרת שכבה של מטענים שליליים -q וליד הלוח הטעון שלילית נוצרת שכבה של מטען חיובית +q. כתוצאה מזה המטען האפקטיבי בין שני לוחות הקבל נהיה יותר קטן

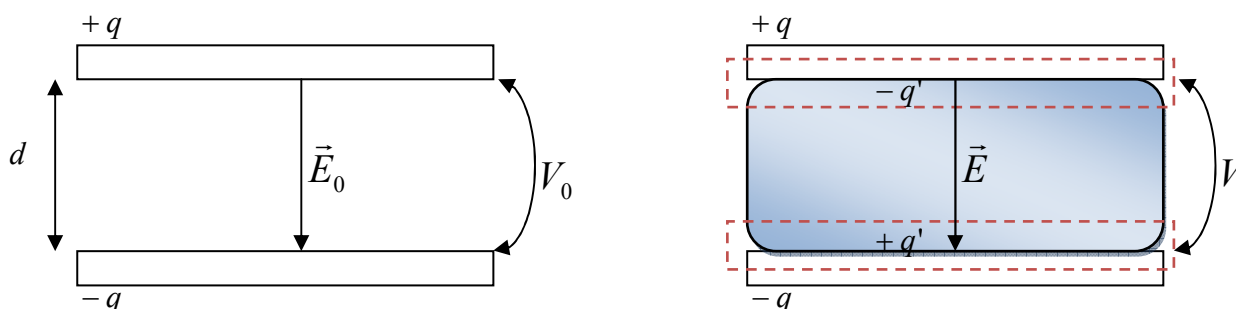
$$Q = C \cdot V$$

ולכן הפרש הפוטנציאלים נהיה קטן יותר לכן מהנוסחה



הוכחה:

נסתכל על קבל לוחות כאשר פעם הוא בריק ופעם הוא מכיל חומר די-אלקטרי.



נבנה קופסאות גאוס כמוראה בציור (הקווים המקווקווים) כאשר פאה אחת עוברת דרך המוליך והפאה השנייה עוברת דרך החומר הדי-אלקטרי.

$$\varepsilon_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in} \quad \text{לפי חוק גאוס:}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \cdot (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + E \cdot A) = q - q'$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \cdot E \cdot A = q - q'$$

$$\Rightarrow E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 \cdot A}$$

$$V = E \cdot d = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 \cdot A} \cdot d \quad \text{ואז הפרש הפוטנציאלים יהיה:}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{V} - \frac{q'}{V} = \frac{q - q'}{V} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} = C_0$$

לפי הגדרה זוהי קיבולת הקבל עם חומר די-אלקטרי

ראינו שזה שווה לקיבולת קבל לוחות בריק

$$\Rightarrow \frac{q'}{V} = C - C_0 = C(1 - \frac{C_0}{C}) \quad \frac{1}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{q'}{q/c} = C(1 - \frac{1}{K})$$

$$q' = q(1 - \frac{1}{K})$$

- מאחר ו- $K \geq 1$ אז $q \geq q'$ כלומר המטען האפקטיבי קטן.

$$E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 \cdot A}$$

ראינו ש:

$$E = \frac{q(1 - \frac{q'}{q})}{\varepsilon_0 \cdot A} = \frac{q(1 - (1 - \frac{1}{K}))}{\varepsilon_0 \cdot A} = \frac{q}{\varepsilon_0 \cdot A \cdot K} = \frac{E_0}{K}$$

$K \geq 1$ כלומר קיבלנו שהשדה החשמלי קטן פי K כלומר גם V קטן, מאחר והמטען החשמלי הכולל לא משתנה אזי בהכרח C חייב לגדול כדי לשמור על היחס $q = C \cdot V$.

- נניח שדאגנו לכך שגם אחרי הכנסת החומר הדי-אלקטרי הפוטנציאל יישאר קבוע אז אם נסמן q_0 להיות המטען בהתחלה נקבל שהמטען החדש הוא $q = q_0 \cdot K$. לכן בגלל

שהפוטנציאל לא משתנה ומהנוסחה $C = \frac{Q}{V}$ נקבל שאם הקיבולת בריק הייתה C_0

$$C = \frac{K \cdot q}{V} = K \cdot C_0$$

הקיבולת החדשה תהיה $C = \frac{K \cdot q}{V} = K \cdot C_0$.

ראינו שבמקרה של קבל עם חומר די-אלקטרי מתקיים לפי חוק גאוס:

$$\varepsilon_0 \cdot E \cdot A = q - q' = q(1 - (1 - \frac{1}{K})) = \frac{q}{K}$$

$$(\varepsilon_0 \cdot K) \cdot E \cdot A = q$$

כלומר:

$$\varepsilon = K \cdot \varepsilon_0$$

נגדיר:

ואז נוכל לכתוב את חוק גאוס למקרה הכללי:

$$\varepsilon_0 \cdot K \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in}$$

$$\varepsilon \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in}$$

הכוונה פה ב $\sum q_{in}$ הם רק המטענים החופשיים.

הערה:

- נניח שאנחנו נמצאים בעולם הבנוי מחומר די-אלקטרי אחיד ובתוכו יש מטען $+q$. מסביב למטען יושרה מטען שלילי לכן המטען נטו יהיה יותר קטן מ q לכן השדה החשמלי יקטן.

ואז: $E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2}$ כלומר באופן כללי אם יש מטענים בחומר די-אלקטרי אחיד אז חוק

קולון יעבוד גם שם בתנאי שמשתמשים ב ε של החומר במקום ε_0 .

נגדיר שדה וקטורי חדש שנקרא העתק החשמלי ונסמנו ב- $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot K \cdot \vec{E} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

ואם נסתכל על חוק גאוס הכללי אז:

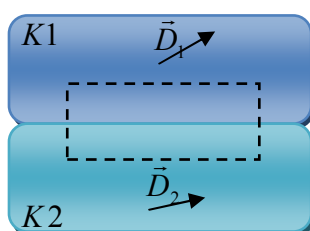
$$\epsilon_0 \cdot K \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in} \Rightarrow \oint (\epsilon_0 \cdot K \cdot \vec{E}) \cdot \partial \vec{a} = \sum_{Free} q_{in}$$

$$\oint \vec{D} \cdot \partial \vec{a} = \sum_{Free} q_{in}$$

כמו כן אנו יודעים ש:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{Free}}{\epsilon_0 \cdot K} \Rightarrow \epsilon_0 \cdot K \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_{Free}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{Free}$$



נסתכל על שני גופים די-אלקטריים המונחים אחד מעל השני:

נבנה משטח גאומטרי בצורת קופסה כך שהעובי של הדפנות

הצדדיות מאוד קטן כך שאין שטף דרךן. שטח הדפנות העליונה

והתחתונה הוא A.

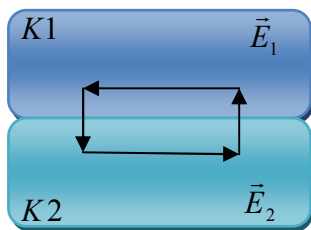
מאחר ואין פה מטענים חופשיים (אולי יש מטענים קשורים מחומרים הדי-אלקטריים אבל לא מתחשבים בהם) אזי מקבלים:

$$\oint \vec{D} \cdot \partial \vec{a} = \sum_{Free} q_{in} = 0$$

$$D_{1\perp} \cdot A - D_{2\perp} \cdot A = 0$$

$$(D_{1\perp} - D_{2\perp}) \cdot A = 0$$

$$D_{1\perp} = D_{2\perp}$$



כעת נסתכל על הלולאה המלבנית הסגורה הבאה:

עבור לולאה זו מתקיים: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$ כי זה מסלול סגור.

בהנחה ששני הקטעים האנכיים (הצדדיים) של הלולאה שואפים לאפס

אזי כדי שהתנאי הנ"ל יהיה נכון חייב להתקיים:

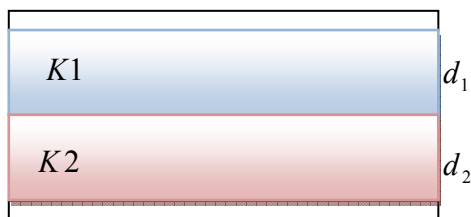
$$E_{1\parallel} \cdot \ell - E_{2\parallel} \cdot \ell = 0$$

$$(E_{1\parallel} - E_{2\parallel}) \cdot \ell = 0$$

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$$

לסיכום: במעבר מחומר די-אלקטרי אחד לשני הרכיב של D שניצב לשטח נשמר והרכיב של E שמקביל לשטח גם נשמר.

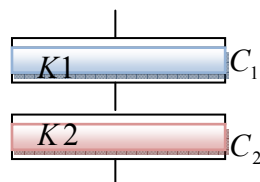
דוגמה 1:



בין שני לוחות של קבל שמים שני חומרים די-אלקטריים K_1 ו- K_2

אחד מעל השני. מהי הקיבולת החדשה של הקבל?

פתרון:



הקבל הזה שקול למצב:

אנו יודעים ש: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$. נחשב את הקיבולות של כל אחד מהקבלים: $C_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d_1} \cdot K_1$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d_2} \cdot K_2$$

ואז:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\frac{\epsilon_0 \cdot A}{d_1} \cdot K_1} + \frac{1}{\frac{\epsilon_0 \cdot A}{d_2} \cdot K_2} = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot A} \left(\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2} \right) = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot A \cdot K_1} \left(d_1 + d_2 \frac{K_1}{K_2} \right)$$

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot A \cdot K_1}{\left(d_1 + d_2 \frac{K_1}{K_2} \right)}$$

$$\oint \vec{D} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in} \Rightarrow \oint D_1 \cdot \partial a = \sum q_{in}$$

$$D_1 \cdot A = \sigma_1 \cdot A \Rightarrow K_1 \cdot \epsilon_0 \cdot E_1 = \sigma_1$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{K_1 \cdot \epsilon_0}$$

ראינו ש $D_{1\perp} = D_{2\perp}$ אבל מכיוון שזהו קבל לוחות כיוון השדה, ולכן גם כיוונו של $\vec{D}$, ניצב לשטח לכן מסיקים מזה ש:

$$D_1 = D_2 \Rightarrow K_1 \cdot \epsilon_0 \cdot E_1 = K_2 \cdot \epsilon_0 \cdot E_2$$

$$E_2 = \frac{K_1}{K_2} \cdot E_1$$

נבדוק את התשובה:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma_1 \cdot A}{E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2} = \frac{(K_1 \cdot \epsilon_0 \cdot E_1) \cdot A}{E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2}$$

$$C = \frac{(K_1 \cdot \epsilon_0 \cdot E_1) \cdot A}{E_1 \cdot d_1 + \left(\frac{K_1}{K_2} \cdot E_1 \right) \cdot d_2} = \frac{K_1 \cdot \epsilon_0 \cdot A}{d_1 + \frac{K_1}{K_2} \cdot d_2}$$

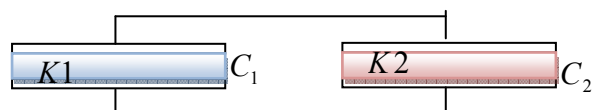
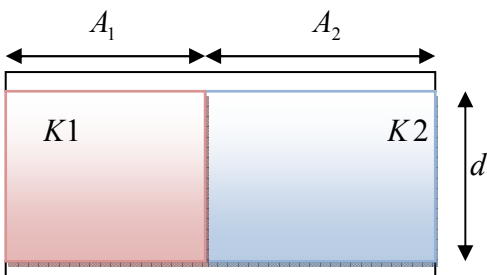
ואכן קיבלנו את אותו הביטוי לקיבולת.

דוגמה 2:

הפעם מניחים את החומרים הדי-אלקטריים אחד ליד השני.

מקרה זה שקול לשני קבלים המחוברים במקביל:

לכן: ב



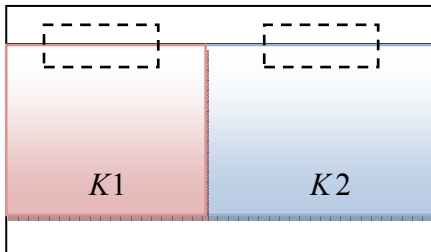
נחשב את הקיבולות של כל אחד מהקבלים: $C_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d} \cdot K_1$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d} \cdot K_2$$

ולכן: $C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \cdot A_1}{d} \cdot K_1 + \frac{\epsilon_0 \cdot A_2}{d} \cdot K_2 = \frac{\epsilon_0}{d} (A_1 \cdot K_1 + A_2 \cdot K_2)$

זהו קבל לוחות וראינו שעבורו מתקיים $E_{||} = E_{2||}$ ומאחר ובקבל לוחות השדה ניצב לשטח אז $E_1 = E_2$.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma_1 \cdot A_1 + \sigma_2 \cdot A_2}{E_1 \cdot d}$$



נחשב את הצפיפויות, נבנה מעטפת גאוסיאנית בצורה הבאה:

אז:

$$\epsilon_0 \cdot K_i \cdot \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in} = \sigma_i \cdot A$$

$$\epsilon_0 \cdot K_i \cdot E_i \cdot A = \sigma_i \cdot A$$

$$\epsilon_0 \cdot K_i \cdot E_i = \sigma_i$$

לכן $\sigma_1 = \epsilon_0 \cdot K_1 \cdot E_1$ ו- $\sigma_2 = \epsilon_0 \cdot K_2 \cdot E_2$

נציב במשוואה של הקיבולות:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{(\epsilon_0 \cdot K_1 \cdot E_1) \cdot A_1 + (\epsilon_0 \cdot K_2 \cdot E_2) \cdot A_2}{E_1 \cdot d} = \frac{\epsilon_0}{d} (K_1 \cdot A_1 + K_2 \cdot A_2)$$

$E_1 = E_2$

אנרגיה חשמלית של קבל:

קבל טעון מכיל מטענים Q לכן יש בו אנרגיה חשמלית אגורה, U, משמעות האנרגיה הזו היא העבודה שצריך לבצע כדי להביא מטען Q לקבל.

נראה למה שווה אנרגיה זו:

בכל פעם נביא מטען ∂q ונעבור מהמצב של q מטענים על הקבל למצב של $q + \partial q$ מטענים.

תרומת האנרגיה של כל מצב כזה היא: $\partial u = V \cdot \partial q = \frac{q}{C} \cdot \partial q$

כדי לקבל את האנרגיה הכוללת על הקבל נבצע אינטגרציה ממתען אפס עד Q:

$$U = \int \partial u = \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot \partial q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot [q^2]_0^Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot Q^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \frac{Q^2}{C^2} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$$

כלומר האנרגיה האגורה בקבל היא:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$$

אם נכניס חומר די-אלקטרי לקבל ונסתכל על היחס בין האנרגיות נקבל:

$$\frac{U}{U_0} = \frac{\frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2}{\frac{1}{2} \cdot C_0 \cdot V^2} = \frac{C}{C_0} = \frac{1}{K}$$

- האנרגיה החשמלית בקבל נמצאת באזור של השדה החשמלי.
- בכל מקום בעולם שיש בו שדה חשמלי יש גם צפיפות אנרגיה u.

נחשב את צפיפות האנרגיה החשמלית בין לוחות הקבל:

צפיפות האנרגיה מוגדרת להיות כמות האנרגיה ליחידת נפח לכן:

$$u = \frac{U}{V_{(Volume)}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2}{V_{(Volume)}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\epsilon_0 \cdot A}{d} \right) \cdot V^2}{A \cdot d} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{V^2}{d^2}$$

$$u = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{V^2}{d^2}$$

הערה חשובה: הנוסחה הנ"ל נכונה לכל אזור במרחב שמכיל שדה חשמלי!

דוגמה:

נניח שיש לנו כדור מוליך ברדיוס R שטעון במטען Q.

- נחשב את העבודה הדרושה כדי לטעון את הכדור בשיטות שונות.
- 1. ע"י הבאת המטענים אחד אחד:

תרומת האנרגיה של כל מטען ∂q שנביא היא: $\partial u = V \cdot \partial q = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q}{R} \cdot \partial q$

$$U = \int \partial u = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \cdot \int_0^Q q \cdot \partial q = \frac{Q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} \quad \text{לכן:}$$

2. לפי צפיפות המטען:

$$U = \frac{1}{2} \int V \cdot \rho \cdot \partial V = \frac{1}{2} \cdot V \int \rho \cdot \partial V = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} \right) \cdot \int \rho \cdot \partial V = \frac{Q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R}$$

3. ישירות לפי הנוסחה:

$$U = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot (4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R) \cdot \left(\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} \right)^2 = \frac{Q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R}$$

4. לפי צפיפות האנרגיה:

$$U = \int u \cdot \partial V$$

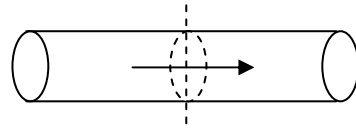
זרמים והתנגדות:

ראינו עד עכשיו שבתוך מוליך אין שדה חשמלי, זה נכון עבור המצב הסטטי. אבל אם נפעיל אנרגיה חשמלית באופן ממושך על המוליך נקבל שדה חשמלי בתוך המוליך שיגרום לתנועת אלקטרונים.

זרם חשמלי: תנועת מטען חשמלי בתוך מוליך.

נסתכל על חתך של תיל מוליך. כמות המטען ליחידת זמן שעוברת דרך חתך זה נקרא הזרם.

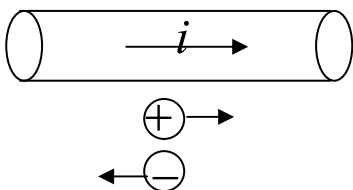
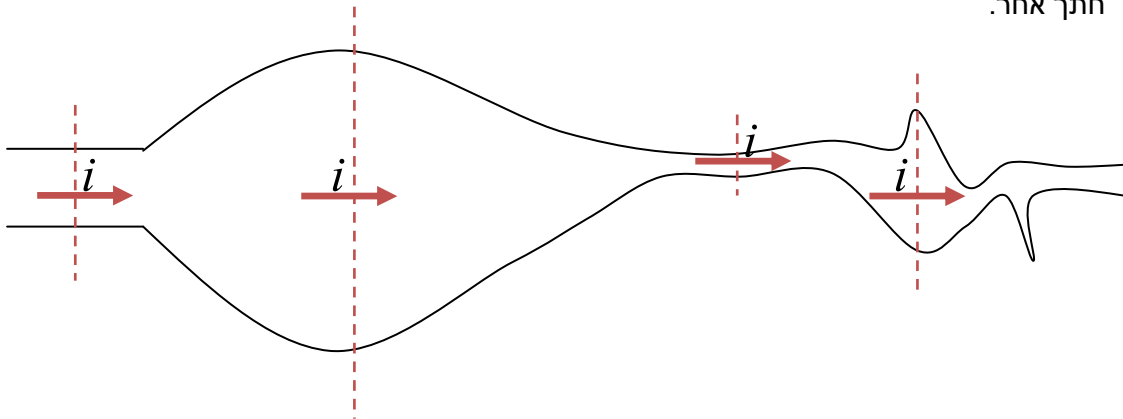
$$i = \frac{\partial q}{\partial t}$$



היחידות של הזרם:

$$[i] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{\text{Colomb}}{\text{Sec}} = \text{Amper}$$

הערה: לא משנה איפה נמצא שטח החתך שמסתכלים דרכו או מהו השטח שלו תמיד נקבל את אותו הזרם, זה קורה בגלל חוק שימור המטען כי כל מטען שנכנס דרך חתך מסוים חייב לצאת דרך כל חתך אחר.



הערה: הכיוון של הזרם במוליך הוא כיוון תנועת המטענים החיוביים.

הגדרה: צפיפות הזרם הזורם דרך מוליך, j , מוגדרת להיות כמות

הזרם ליחידת שטח. אם המוליך הוא בעל סימטריה אחידה אז:

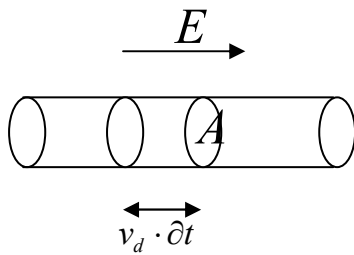
$$i = A \cdot j$$

$$j = \frac{i}{A}$$

ובצורה הכללית:

$$i = \int \vec{j} \cdot \partial \vec{a}$$

אם השדה שמפעילים בתוך מוליך הוא קבוע אזי למרות שעל המטענים במוליך יפעל כוח הם ינועו במהירות כמעט קבועה (כי הם מתנגשים כל הזמן באטומים של המוליך), מהירות זו של המטענים נקראת **מהירות הסחף**. נחשב אותה:



נסתכל על מוליך שדרכו זורם זרם כתוצאה משדה חשמלי שהפעלנו עליו.

נסמן את מהירות הסחף ב- v_d ואז כמות המטענים שיעברו דרך

החתך A בזמן ∂t הם המטענים שנמצאים בתוך הגליל האמצעי הקטן.

לכן:

$$\partial q = \underbrace{A \cdot v_d \cdot \partial t}_{\text{נפח הגליל}} \cdot \underbrace{n \cdot e}_{\text{צפיפות המטען}}$$

מטען האלקטרון
צפיפות האלקטרונים

$$i = \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{A \cdot v_d \cdot \partial t \cdot n \cdot e}{\partial t} = A \cdot v_d \cdot n \cdot e$$

$$j = \frac{i}{A} = n \cdot e \cdot v_d$$

$$\Rightarrow v_d = \frac{i}{A \cdot n \cdot e} = \frac{j}{n \cdot e}$$

דוגמה:

נניח שבחוט נחושת בעל קוטר 2.5mm ואורך של 1 מ"מ זורם זרם של 10A. מהי מהירות הסחף של האלקטרונים? המספר האטומי של נחושת הוא 64 כלומר בכל 64 גרם נחושת יש מספר אבוגדרו של

אטומים ($6 \cdot 10^{23}$) וצפיפותו היא $\rho = 9 \frac{gr}{cm^3}$.

$$j = \frac{i}{A} = \frac{10}{\pi \cdot \left(\frac{0.25}{2}\right)^2} = 200 \frac{Amp}{cm^2}$$

$$n = \frac{9 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{64} = 10^{23} \text{ מהנתונים של השאלה נחשב את צפיפות האלקטרונים:}$$

$$v_d = \frac{j}{n \cdot e} = \frac{200}{10^{23} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} = 10^{-2} \text{ cm/sec} \text{ ולכן מהירות הסחף תהיה:}$$

- כפי שניתן לראות מהירות הסחף של האלקטרונים מאוד נמוכה, במקרה זה לוקח להם 100 שניות לעבור סנטימטר אחד!

$$\int \vec{j} \cdot \partial \vec{a} \text{ נסתכל על מעטפת סגורה שדרכה יוצא מטען. כמות המטען שיוצא ליחידת זמן יהיה:}$$

$$\int \vec{j} \cdot \partial \vec{a} = -\frac{\partial q}{\partial t} \text{ מחוק שימור המטען כל מטען שיוצא החוצה יחסר בפנים לכן:}$$

נפתח את הנוסחה:

$$\int_S \vec{j} \cdot \partial \vec{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \partial V = -\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \cdot \partial V = \int -\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \partial V$$

$$\Rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \partial V = \int -\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \partial V$$

$$\Rightarrow \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \partial V = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

זהו חוק שימור המטען המקומי:

$$\boxed{\int \vec{j} \cdot \partial \vec{a} = \frac{\partial q}{\partial t}}$$

וזאת הצורה האינטגרלית שלו:

התנגדות:

התנגדות: זה היחס בין המתח לזרם של רכיב חשמלי מסוים.

נסתכל על המוליך הבא:

ההתנגדות שלו בין הנקודה A לנקודה B מוגדרת כ:

$$R = \frac{V_{AB}}{i}$$

ממה שלמדנו עד כה ניתן לרשום את ההתנגדות גם בצורה הבאה:

$$R = \frac{V_{AB}}{i} = \frac{\int \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell}}{\int \vec{j} \cdot \partial \vec{a}}$$

היחידות של ההתנגדות:

$$[R] = \frac{[V]}{[i]} = \frac{Volt}{Amp} = Ohme (\Omega)$$

בנוסף לקשר המיקרוסקופי בין הזרם, המתח וההתנגדות $R = \frac{V}{i}$ ישנו גם קשר מקרוסקופי בין

צפיפות הזרם, השדה החשמלי וההתנגדות הסגולית, קשר זה הוא: $\rho = \frac{E}{j}$.

- אם נסתכל על מוליך אחיד באורך ℓ אז:

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{V/\ell}{i/A} = \frac{V \cdot A}{\ell \cdot i} = R \cdot \frac{A}{\ell}$$

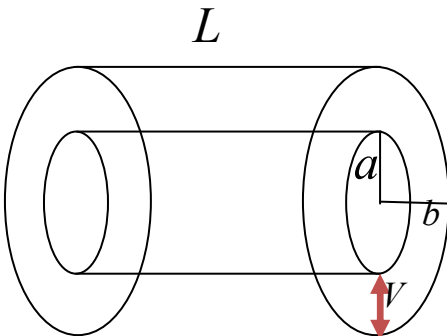
נעת נסתכל על גליל חלול בעל רדיוס פנימי a וחיצוני b והתנגדות סגולית ρ .

מפעילים הפרש מתחים בין החלק הפנימי לחלק החיצוני של הגליל. מהי התנגדותו?

נבנה משטח גאוסיאני גלילי בעל רדיוס r ($a < r < b$) ונחשב את השדה:

$$\epsilon_0 \cdot \int \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in}$$

$$\epsilon_0 \cdot \int E \cdot \partial a = \epsilon_0 \cdot E \cdot \int \partial a = \epsilon_0 \cdot E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \sum q_{in}$$



מהנוסחה האחרונה ניתן להסיק שהשדה החשמלי הוא מהצורה: $E = \frac{D}{r}$ כאשר D קבוע כלשהו.

נמצא את D:

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} = \int_a^b E \cdot \partial \ell = \int_a^b \frac{D}{r} \cdot \partial \ell = D \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

ולכן:

$$E = \frac{V_{ab}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

לכן במרחק r יתקיים:

$$j = \frac{E_{(r)}}{\rho} = \frac{V_{ab}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot r \cdot \rho}$$

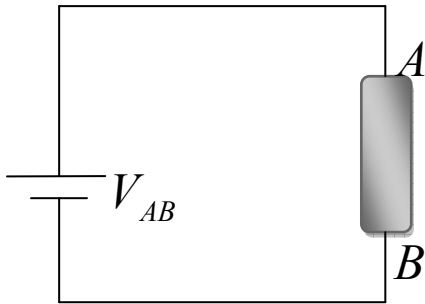
$$i = j \cdot A = \left(\frac{V_{ab}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot r \cdot \rho} \right) \cdot (2\pi \cdot r \cdot L)$$

$$\Rightarrow i = \left(\frac{2\pi \cdot L \cdot V_{ab}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \rho} \right)$$

ומפה ניתן ישיר לחשב את ההתנגדות:

$$R = \frac{V_{ab}}{i} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \rho}{2\pi \cdot L}$$

הספק חשמלי:



נסתכל על המעגל הבא, הסוללה יוצרת הפרש פוטנציאלים קבוע בין הנקודה A לנקודה B כאשר ה"קופסה" שביניהם מייצגת עומס כלשהו (נגד / מנורה / קבל /...). רוצים לדעת כמה אנרגיה הסוללה מספקת או כמה אנרגיה העומס צורך?

$$\Delta U = V_{AB} \cdot \partial q = V_{AB} \cdot i \cdot \partial t$$

ההספק הוא כמות העבודה ליחידת זמן לכן:

$$P = \frac{\Delta U}{\partial t} = V_{AB} \cdot i = R \cdot i^2 = \frac{V^2}{R}$$

יחידות ההספק:

$$[P] = [V] \cdot [i] = \frac{Jaul}{Colomb} \cdot \frac{Colomb}{Sec} = \frac{Jaul}{Sec}$$

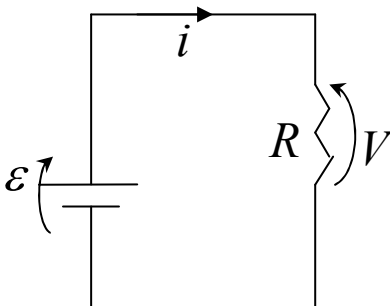
מעגלים חשמליים וחוקי קירכהוף:

מוסכמות של מעגלים חשמליים:

- מקור מתח נקרא כוח אלקטרו מניע (כא"מ), הוא מספק הפרש מתחים קבוע ε ובכך גורם

לזרימה של זרם.

- מסמנים את כיוון הפוטנציאל על הכא"מ מההדק השלילי להדק החיובי.
- כפי שכבר ראינו את כיוון הזרם מסמנים בכיוון תנועת המטענים החיוביים.
- את הפרש המתחים על נגד מסמנים כהפוך מכיוון הזרם (כי הזרימה היא מפוטנציאל גבוה לפוטנציאל נמוך), כלומר מההדק החיובי להדק השלילי.



חוק הלולאה של קירכהוף:

- סכום המתחים סביב לולאה סגורה כלשהי הוא אפס.

הסבר: כידוע סכום כל העבודה לאורך מסלול סגור כלשהו היא אפס לכן כדי שחוק שימור האנרגיה יתקיים החוק הזה חייב להיות נכון.

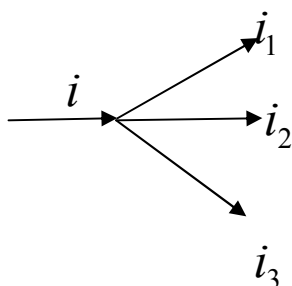
הערה: אם המתח בכיוון הזרם הוא נחשב חיובי ואם הוא הפוך מכיוון הזרם הוא נחשב שלילי.

במעגל המצויר משמאל לפי חוק הלולאה של קירכהוף:

$$\varepsilon + (-i \cdot R) = 0$$

חוק הזרמים של קירכהוף:

- כמות הזרם שנכנסת לצומת שווה לכמות הזרם היוצאת ממנה.



$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

הסבר: חוק זה נובע ישירות מחוק שימור המטען.

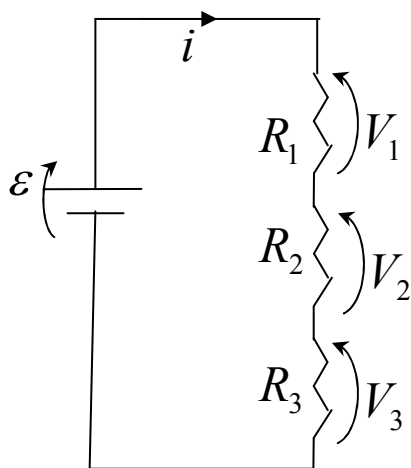
דוגמה 1:

נסתכל על המעגל החשמלי הבא, עבור מעגל זה מתקיים:

$$\mathcal{E} - V_1 - V_2 - V_3 = 0$$

$$\mathcal{E} - i(R_1 + R_2 + R_3) = 0$$

$$\frac{\mathcal{E}}{i} = R_1 + R_2 + R_3$$



חיבור נגדים בטור:

אם נרצה להחליף את הנגדים המחוברים בטור בנגד אחד אקוויבלנטי אז:

$$R_{Eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

כלומר בחיבור נגדים בטור ההתנגדות השקולה שווה לסכום ההתנגדויות.

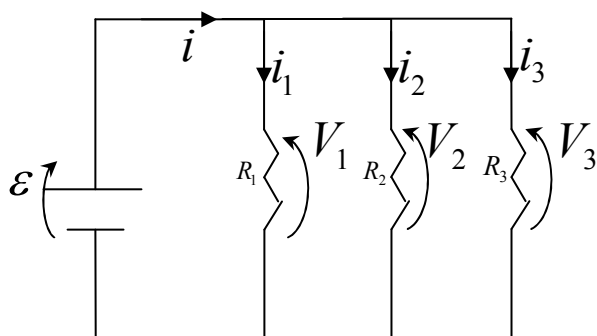
דוגמה 2:

נסתכל כעת על המצב שבו הנגדים מחוברים במקביל:

לפי חוק הזרמים של קירכהוף:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E}}{R_2} + \frac{\mathcal{E}}{R_3}$$



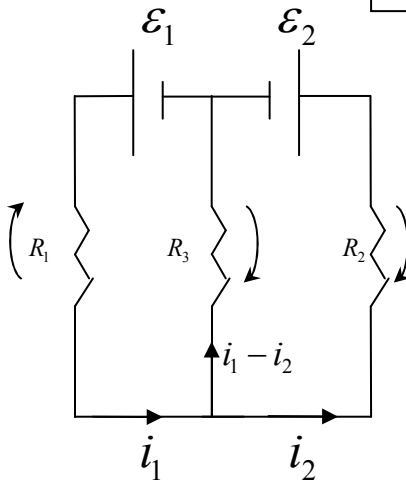
חיבור נגדים במקביל:

אם נרצה להחליף את הנגדים המחוברים במקביל בנגד אחד אקוויבלנטי אז:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Leftrightarrow R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

דוגמה 3:

נרצה לפתור את המעגל הבא:



נסמן את כיווני הזרמים במעגל באופן שרירותי ונפתור לפי חוקי

קירכהוף שלמדנו, אם זרם מסוים יוצא בסימן מינוס אז הכיוון

שלו הפוך מזה שבחרנו.

נכתוב את המשוואות ונפתור אותן:

$$\varepsilon_1 - i_1 \cdot R_1 - (i_1 - i_2) \cdot R_3 = 0$$

$$\varepsilon_2 - i_2 \cdot R_2 - (i_1 - i_2) \cdot R_3 = 0$$

קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים שאותן אנחנו יודעים לפתור.

דוגמה 4:

נסתכל על הגליל מדוגמה קודמת, נרצה לדעת מהי ההתנגדות שלו R ?

פתרון:

הזרם יהיה בכיוון הרדיאלי כי זהו כיוון מפל המתחים, לכן נסתכל על

הבעיה כאוסף של גלילים אחד בתוך השני עם רדיוס r ועובי ∂r .

במקרה זה הגלילים מחוברים כנגדים בטור לכן ההתנגדות הכוללת שלהם

שהיא ההתנגדות של כל הגליל היא סכום ההתנגדויות כלומר: $R = \int \partial R$.

ההתנגדות של כל גליל כזה תהיה:

$$\partial R = \rho \cdot \frac{\ell}{A} = \rho \cdot \frac{\partial r}{2\pi \cdot r \cdot L}$$

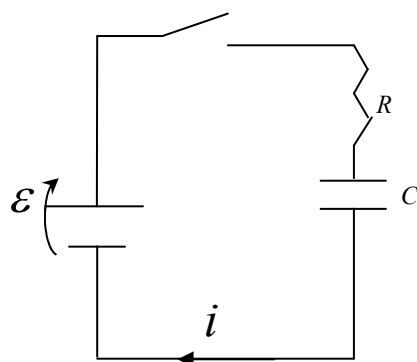
לכן:

$$R = \int \partial R = \int_a^b \rho \cdot \frac{\partial r}{2\pi \cdot r \cdot L} = \frac{\rho}{2\pi \cdot L} \cdot [\ln(r)]_a^b$$

$$R = \frac{\rho}{2\pi \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

זוהי בדיוק אותה תוצאה שקיבלנו בפעם הקודמת.

דוגמה 5:



נסתכל על המעגל הבא:

ברגע $t=0$ סוגרים את המתג, המטען מצטבר על הקבל עד שאחרי זמן רב לא יהיה זרם כי הפרש הפוטנציאלים עליו יהיה שווה לכא"מ.

ננתח את המעגל:

משימור האנרגיה ההספק שהספק מספק למעגל שווה לאנרגיה על הקבל בתוספת האנרגיה שהנגד צורך. נתרגם זאת לנוסחה:

$$\varepsilon \cdot \Delta q = i^2 \cdot R \cdot \Delta t + \frac{q}{C} \cdot \Delta q$$

↑
האנרגיה שהספק מספק

↑
האנרגיה שהנגד צורך

↑
האנרגיה על הקבל

אם נחלק ב Δt :

$$\varepsilon \cdot \frac{\Delta q}{\Delta t} = i^2 \cdot R + \frac{q}{C} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \varepsilon \cdot i = i^2 \cdot R + \frac{q}{C} \cdot i$$

$$\Rightarrow \varepsilon = i \cdot R + \frac{q}{C} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\partial q}{\partial t} \cdot R + \frac{q}{C}$$

קיבלנו מד"ר ליניארית, כדי לפתור אותה נמצא את תנאי ההתחלה:

- בהתחלה המטען על הקבל היה אפס לכן: $q(t=0) = 0$.
- בסוף המתח על הקבל יהיה ε לכן: $q(t \rightarrow \infty) = V_C \cdot C = \varepsilon \cdot C$.

כעת יש לנו תנאי התחלה ונוכל לפתור את המד"ר לפי הניחוש: $q(t) = q_\infty (1 - e^{-\alpha t})$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\varepsilon = R \cdot q_\infty \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha t} + \frac{q_\infty \cdot (1 - e^{-\alpha t})}{C}$$

$$\varepsilon = \frac{q_\infty}{C} + e^{-\alpha t} \cdot q_\infty \left(R \cdot \alpha - \frac{1}{C} \right)$$

נציב את ת.ה. ונקבל:

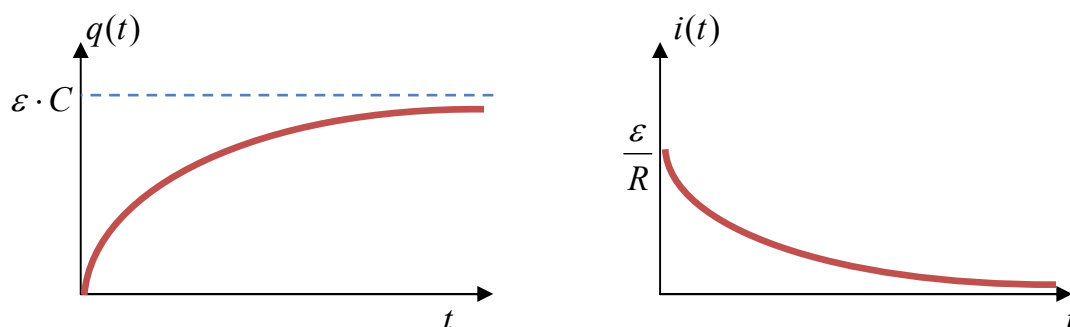
$$\varepsilon = \frac{q_\infty}{C} \Rightarrow q_\infty = \varepsilon \cdot C$$

$$\left(R \cdot \alpha - \frac{1}{C} \right) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{RC}$$

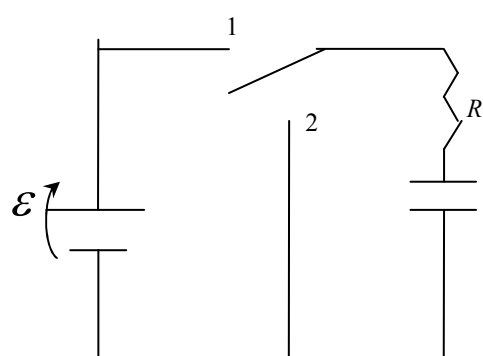
$$\Rightarrow q(t) = \varepsilon \cdot C \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

והגרפים של המטען והזרם על הקבל יהיו:



דוגמה 6:



נעבור כעת למעגל המשלים של המעגל הקודם (פריקת קבל),
אחרי שהקבל נטען במלואו מעבירים את המפסק ממצב 1 למצב 2.

מחוק קירכהוף על הלולאה הימנית מקבלים:

$$\frac{q}{C} + i \cdot R = 0$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית, נרשום אותה בצורה אחרת:

$$\frac{q}{C} + \frac{\partial q}{\partial t} \cdot R = 0$$

כדי לפתור אותה נמצא את תנאי ההתחלה:

- בהתחלה המטען על הקבל היה: $q(t=0) = q_0$.
- בסוף המטען על הקבל יהיה אפס לכן: $q(t \rightarrow \infty) = 0$.

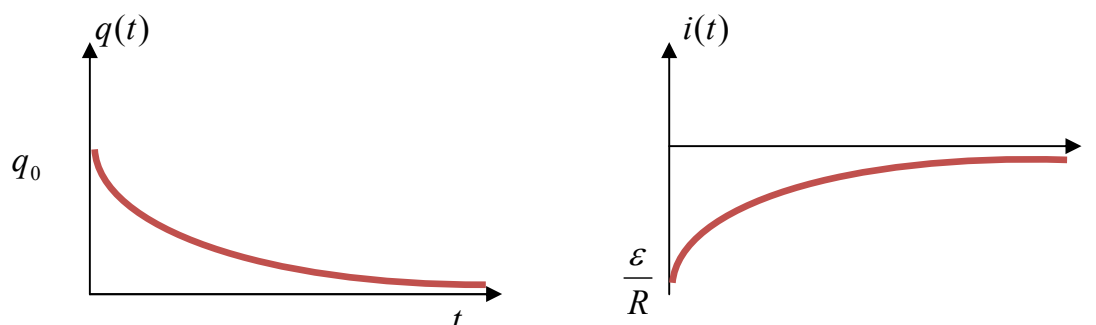
כעת יש לנו תנאי התחלה ונוכל לפתור את המד"ר לפי הניחוש: $q(t) = q_0 \cdot e^{-\alpha t}$

נפתור את המד"ר ונקבל:

$$q(t) = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

והגרפים יהיו:



מגנטיות:

חוק לורנץ:

על כל מטען חשמלי q שנע במהירות v פועל כוח שתלוי במהירות שלו, בשדה החשמלי ובשדה המגנטי שבהם הוא נע.

הנוסחה של כוח זה היא:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

ובפרט גודל הכוח שהשדה המגנטי מפעיל על החלקיק הוא:

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \theta_{(\vec{B}, \vec{v})}$$

יחידות השדה המגנטי:

$$[B] = \frac{\text{Webber}}{m^2} = \text{Tesla}$$

כאשר: $1\text{Tesla} = 10^4 \text{Gaues} = 10\text{KGaues}$

דוגמה 1:

באזור מסוים במרחב יש שדה מגנטי אחיד $\vec{B}$ הניצב למשטח בכל הנקודות בכיוון פנימה אלקטרון נע במהירות v .

על האלקטרון יפעל כוח מגנטי ששווה ל: $\vec{F} = e \cdot \vec{v} \cdot \vec{B}$

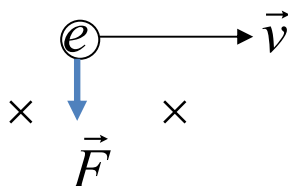
× × ×

נשים לב שלמרות שהמכפלה הווקטורית נותנת וקטור שכיוונו

כלפי מעלה הכיוון האמיתי של הכוח הוא כלפי מטה כי המטען

× × ×

של האלקטרון הוא שלילי!



בגלל שהכוח שנוצר ניצב למהירות של האלקטרון אזי הוא לא

ישנה אותה, אבל הוא כן ישנה את כיוונה.

לכן האלקטרון ינוע במקרה זה בתנועה מעגלית ברדיוס ומהירות קבועים.

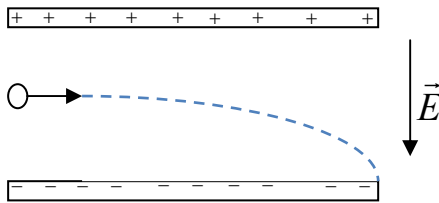
הכוח המגנטי במקרה זה הוא כוח צנטריפוגלי וראינו בפיסיקה 1 שהוא

שווה לערך $\frac{m_e \cdot v^2}{R}$ ולכן:

$$e \cdot v \cdot B \cdot \sin(90^\circ) = \frac{m_e \cdot v^2}{R} \Rightarrow \frac{e \cdot B}{m_e} = \frac{v}{R} = \omega$$

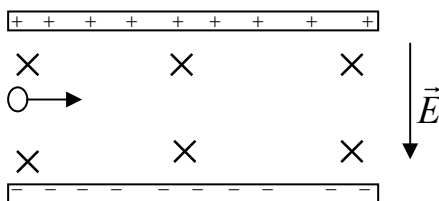
הערך $\omega = \frac{q \cdot B}{m_e}$ שחישבנו הוא המהירות הזוויתית של האלקטרון, כפי שניתן לראות מהתוצאה מהירות זו תלויה רק במטען ובמסה של החלקיק.

לכן תדירות זוויתית זו מאפיינת כל חלקיק לפי תכונותיו והיא נקראת **תדירות הציקלוטרון**.



- נסתכל על קבל לוחות אינסופי כאשר הלוח העליון שלו טעון חיובית והלוח התחתון טעון שלילית. בנקודה שנמצאת בחצי המרחק בין שני הלוחות נותנים לחלקיק q מהירות התחלתית v .

כתוצאה מהשדה החשמלי של הקבל יפעל על החלקיק כוח כלפי מטה שיגרום לתאוצה כלפי מטה, זוהי תנועה בליסטית לכן המטען ינוע בפרבולה.



- כעת נפעיל שדה מגנטי בתוך הקבל בכיוון פנימה שניצב לכיוון השדה החשמלי. הכוח שיפעל על החלקיק במקרה זה הוא:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

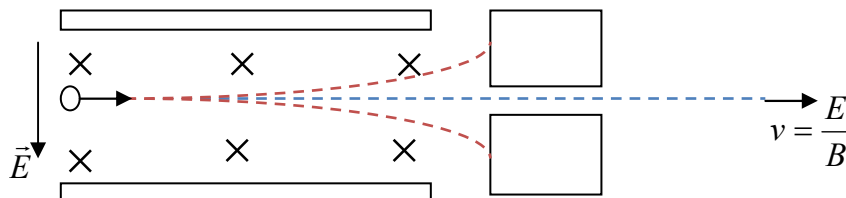
$$\vec{F} = (q \cdot E \cdot \hat{y}) + (-q \cdot v \cdot B \cdot \hat{y})$$

נרצה שהחלקיק ישמור על כיוון תנועתו ההתחלתי לכן נדרוש ששני הכוחות, החשמלי והמגנטי, יהיו שווים. כלומר:

$$F_E = q \cdot E = q \cdot v \cdot B = F_B$$

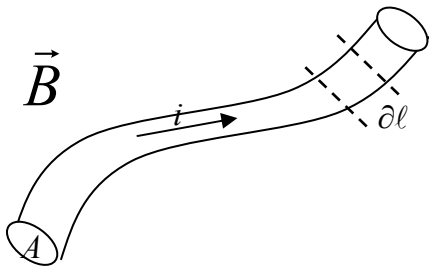
$$\Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

שימוש חשוב של הנוסחה הנ"ל הוא יצירת פילטר מהירויות לחלקיקים, בעזרת פילטר זה ניתן לייצר אלומת חלקיקים עם מהירות אחידה. נותנים לחלקיקים תנע מסוים ומעבירים אותם דרך קבל כמו זה שראינו לעיל, מכוונים את השדה החשמלי והמגנטי כך שהיחס ביניהם ייתן את המהירות שרוצים עבור החלקיקים, ובקצה הקבל שמים מחיצה עם חור בנקודה שנמצאת מול נקודת היציאה של החלקיקים. וכך רק חלקיקים עם המהירות שרצינו יוכלו להמשיך בקו ישר ולצאת מהמחיצה.



תיל מוזרם בשדה מגנטי:

ראינו שעל מטענים שנעים בתוך שדה מגנטי תמיד יפעל כוח לכן על תיל מוזרם שנמצא בשדה מגנטי יפעל כוח כי יש בתוכו תנועה של מטענים. נחשב את הכוח הזה:



נחלק את התיל לחלקיקים קטנים $\partial \ell$, על כל חלקיק כזה

$$\partial q = n \cdot e \cdot A \cdot \partial \ell$$

המטען יהיה:

צפיפות המטענים

נפח החתך

מהירות הסחף של האלקטרונים תהיה:

$$v_d = \frac{j}{n \cdot e} = \frac{i}{A \cdot n \cdot e}$$

כל מה שנשאר זה להציב במשוואת הכוח שפועל על מטענים ולקבל את הכוח שפועל על כל חתך $\partial \ell$

$$F = \partial q \cdot \vec{v}_d \times \vec{B} = (n \cdot e \cdot A \cdot \partial \ell) \cdot \left(\frac{i}{A \cdot n \cdot e} \right) \cdot B \cdot \sin \theta$$

$$\Rightarrow F = i \cdot \partial \ell \cdot B \cdot \sin \theta$$

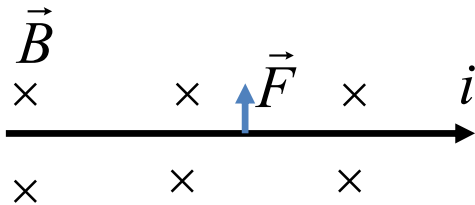
$$\Rightarrow \boxed{\partial \vec{F} = i \cdot \partial \vec{\ell} \times \vec{B}}$$

וכדי לקבל את הכוח הכללי שפועל על אורך מסוים של התיל פשוט מבצעים אינטגרציה.

דוגמה 1:

מהו הכוח שפועל על תיל באורך L שמוזרם בזרם i ימינה ונמצא בשדה מגנטי B בכיוון פנימה וניצב לזרם?

פתרון:

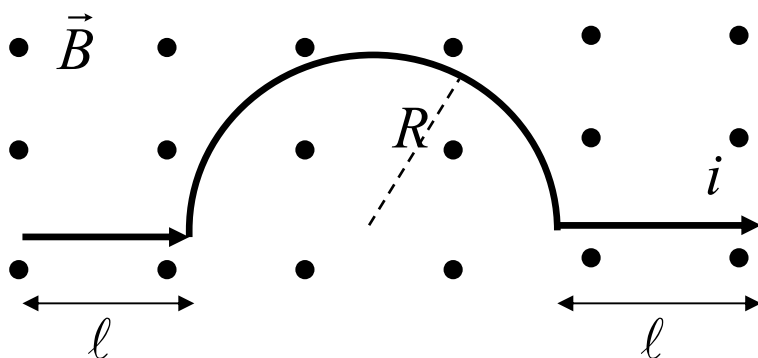


כיוון הכוח לפי כלל יד ימין הוא כלפי מעלה וגודלו:

$$\int_0^L \partial \vec{F} = \int_0^L i \cdot \partial \vec{\ell} \times \vec{B} = \int_0^L i \cdot B \cdot \partial \ell = i \cdot B \cdot L$$

דוגמה 2:

נסתכל על התיל המזורם הבא שנמצא בשדה מגנטי. מהו הכוח הפועל עליו?

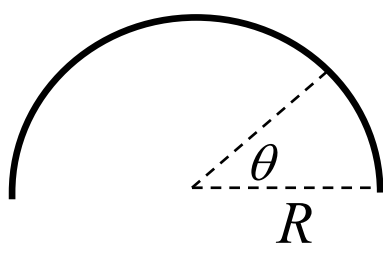


פתרון:

לפי הדוגמה הקודמת ניתן לראות שהכוחות הפועלים על שני החלקים הישרים של התיל הם:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_3 = i \cdot B \cdot \ell \cdot \hat{z}$$

נעבור לחישוב החלק המעגלי. מהסימטריה ניתן לראות שהחלקים האופקיים של הכוחות שפועלים על כל חתך מתבטלים ולכן נוכל להסיק ש:



$$\vec{F}_2 = \int d\vec{F}_z = \int dF \cdot \sin \theta = \int i \cdot B \cdot d\ell \cdot \sin \theta$$

$$\vec{F}_2 = \int i \cdot B \cdot \sin \theta \cdot R \cdot d\theta = i \cdot B \cdot R \int \sin \theta \cdot d\theta$$

$$\vec{F}_2 = 2 \cdot i \cdot B \cdot R \cdot \hat{z}$$

והכוח הכולל יהיה:

$$\vec{F}_{Total} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2 \cdot i \cdot B \cdot (R + \ell) \cdot \hat{z}$$

- קיבלנו את אותו הכוח שהיה פועל על התיל אם הוא היה ישר מתחת למעגל! את הסיבה לזה נראה בהמשך.

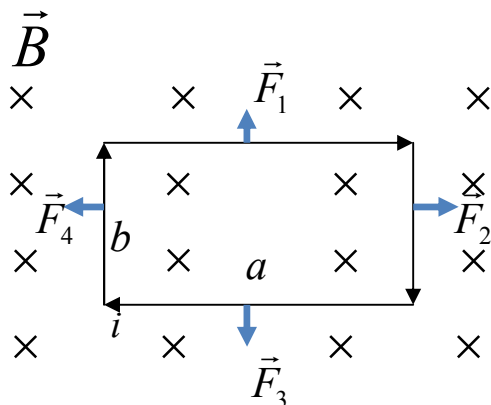
דוגמה 3:

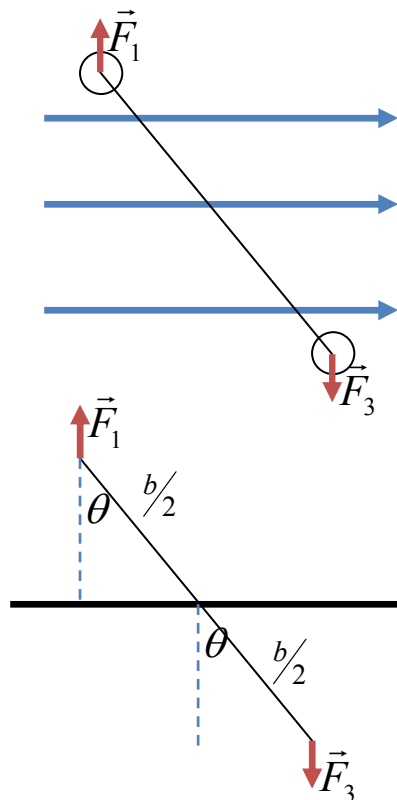
נכניס לולאה מלבנית מוזרמת לתוך שדה מגנטי B.

ברור שמתקיים:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_3 \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_4$$

כלומר שקול הכוחות על הלולאה הוא אפס.





נסתכל על הלולאה במבט מהצד:

כפי שניתן לראות מומנט הכוח של הלולאה אינו אפס.

מה שיקרה פה זה שהכוח המגנטי יסובב את הלולאה עד שתהיה

ניצבת לכיוון השדה.

נחשב את המומנט יחסית למרכז:

$$\tau = F_1 \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \theta + F_2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \theta$$

$$\tau = (B \cdot i \cdot a) \cdot 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \theta$$

$$\tau = (B \cdot i \cdot a \cdot b) \cdot \sin \theta$$

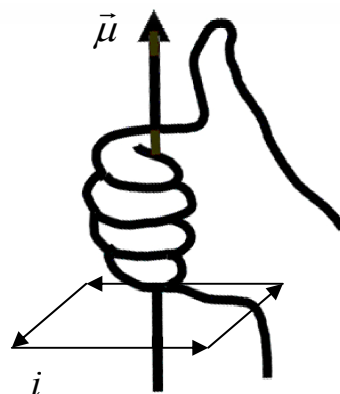
$$\tau = (B \cdot i \cdot A) \cdot \sin \theta$$

נגדיר גודל חדש שנקרא מומנט דיפול מגנטי:

$$\vec{\mu} = N \cdot A \cdot i \cdot \hat{A}$$

כאשר N הוא מספר הליפופים (במקרה שלנו זה 1), A זה שטח הטבעת ו-i זה הזרם.

הכיוון של מומנט הדיפול המגנטי נקבע לפי כלל יד ימין לפי כיוון הזרם בלולאה.

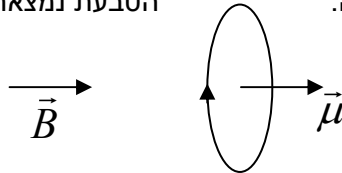


לכן נוכל לכתוב את משוואת המומנט בצורה הבאה:

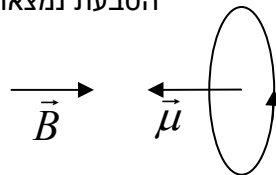
$$\tau = \mu \cdot B \cdot \sin \theta \Rightarrow \boxed{\tau = \vec{\mu} \times \vec{B}}$$

ומכאן ניתן להסיק:

- המומנט יפעל עד ש $\vec{\mu}$ יהיה בכיוון של השדה המגנטי.
- אם המצב הוא כזה: הטבעת נמצאת במצב שווי משקל יציב.

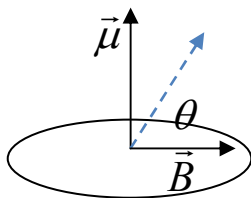


- אם המצב הוא כזה: הטבעת נמצאת במצב שווי משקל לא יציב.



במצב כזה כל הפרעה קטנה תגרום לתזוזה של הלולאה שתתחיל להסתובב ב 180 מעלות עד שהיא תגיע למצב הקודם ותעצור. במצב הראשון האנרגיה הפוטנציאלית היא הכי נמוכה ובמצב השני היא הכי גבוהה.

כעת נבחר את המצב הבא להיות המצב עם אנרגיה פוטנציאלית אפס (אנרגיה פוטנציאלית תמיד נמדדת ביחס לנקודת אפס) ונראה מה יהיה השינוי באנרגיה של הטבעת עם שינוי הזווית θ .



$$U = \int_{90^\circ}^{\theta} \tau \cdot d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} \mu \cdot B \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

$$U = \mu \cdot B \cdot \cos \theta \Big|_{90^\circ}^{\theta} = -\mu \cdot B \cdot \cos \theta$$

$$\boxed{U_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}}$$

לכן עבור המצב הראשון שראינו האנרגיה הפוטנציאלית תהיה $U_B = -\mu \cdot B$ ועבור המצב השני האנרגיה הפוטנציאלית תהיה $U_B = \mu \cdot B$.

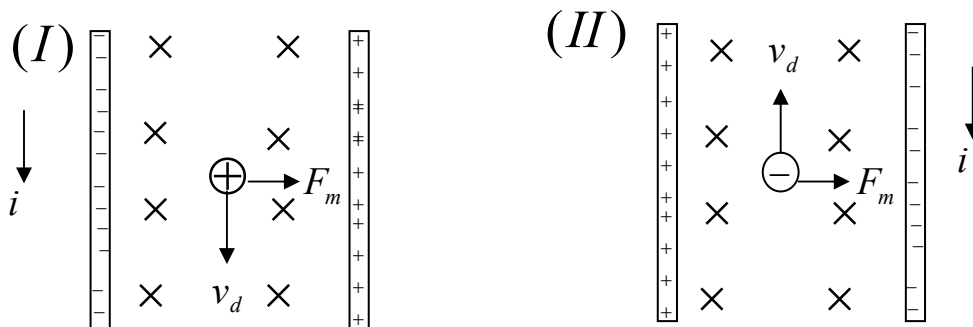
אפקט הול:

ראינו שבזרם תנועה של מטענים חיוביים תהיה בכיוון הזרם ותנועה של מטענים שליליים תהיה בכיוון ההפוך כאשר שני המקרים שקולים ולא משנה איזו הגדרה בוחרים.

נסתכל על האפקט הבא שבו הבחירה בכיוון הזרם כן משנה!

בשני לוחות מוליכים זורם אותו זרם באותו כיוון. שני המוליכים נמצאים בשדה מגנטי B באותו כיוון ביחס לשניהם.

את ההבדלה בין שני המצבים נעשה ע"י הגדרת הזרם בלוח הראשון כתנועת המטענים החיוביים בכיוון הזרם ובשני ע"י הגדרתו בלוח השני כתנועת המטענים השליליים בכיוון ההפוך לזרם.



במצב הראשון יפעל על המטענים החיוביים כוח ימינה והם יתחילו לזוז ימינה כך שמטען חיובי יצטבר על הצד הימני של הלוח, כתוצאה מזה יצטבר מטען שלילי על הצד השמאלי שלו. ממצב זה נוצר הפרש פוטנציאלים בין שני הצדדים של הלוח מימין לשמאל.

במצב השני גם יפעל על המטענים השליליים כוח ימינה והם יתחילו לזוז ימינה ומטען שלילי יצטבר על הצד הימני של הלוח, כתוצאה מזה יצטבר מטען חיובי על הצד השמאלי שלו. ממצב זה נוצר הפרש פוטנציאלים בין שני הצדדים של הלוח אבל משמאל לימין (הפוך מהמקרה הקודם).

כתוצאה מהפרשי הפוטנציאלים יפעל בתוך המוליך שדה חשמלי שניצב לכיוון של הזרם.

$$F = q \cdot E_H = q \cdot \frac{V_H}{d} = q \cdot v_d \cdot B \quad \text{ואז:}$$

$$\Rightarrow V_H = v_d \cdot d \cdot B$$

והמשוואה הווקטורית תהיה:

$$q \cdot \vec{E}_H = q \cdot \vec{v}_d \times \vec{B}$$

$$\vec{E}_H = \vec{v}_d \times \vec{B}$$

מה שמייוחד פה שאם הופכים את כיוון הזרם אז גם הכיוון של השדה החשמלי של אפקט הול מתהפך.

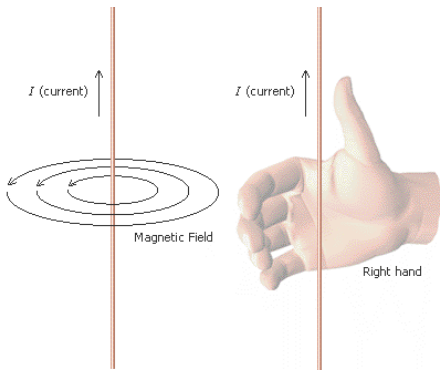
$$E_H = \frac{V_H}{d} = v_d \cdot B = \frac{i}{A \cdot n \cdot e} \cdot B \quad \text{ראינו ש: } v_d = \frac{j}{n \cdot e} = \frac{i}{A \cdot n \cdot e} \quad \text{נציב במשוואה הנ"ל ונקבל:}$$

$$\Rightarrow n = \frac{i \cdot d \cdot B}{A \cdot V_H \cdot e}$$

כלומר קיבלנו שיטה למציאת צפיפות המטען בתוך מוליך!

חוק אמפר:

סביב תיל מוזרם נוצר שדה מגנטי היקפי שכיוונו נקבע לפי כלל יד ימין.



חוק אמפר:

עבור לולאה סגורה במרחב, אם נחלק אותה לקטעים $\partial \ell$ המשיקים ללולאה בכל נקודה ונקודה אזי מתקיים:

$$\oint \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = \mu_0 \cdot \sum I$$

כאשר $\sum I$ היא סכום כל הזרמים שיוצאים מהלולאה בכיוון יד ימין ביחס

$$\text{לכיוון של } \partial \vec{\ell} \text{ ו- } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tesla} \cdot \text{m}}{\text{Amp}}.$$

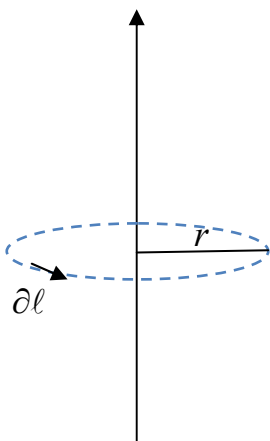
דוגמה 1:

נרצה לדעת מהו השדה המגנטי במרחק r מתיל מוזרם אינסופי?

פתרון:

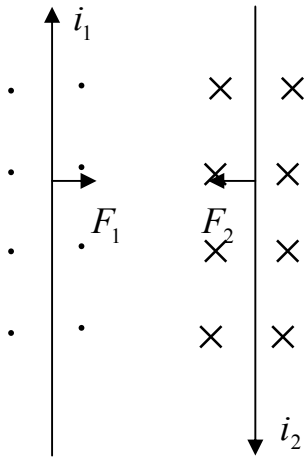
נבחר לולאה שמרכזת בתיל. מהסימטריה B יהיה תלוי רק במרחק r

ולכן כיוונו יהיה משיקי.



$$\oint \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = \oint B \cdot \partial \ell = B \cdot \oint \partial \ell = B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot i$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot r}$$



דוגמה 2:

שני תילים אינסופיים מוזרמים נמצאים במרחק d זה מזה.

פתרון:

כפי שראינו בדוגמה הקודמת כל תיל מייצר $\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot r}$. מאחר שהשדה שכל אחד מהם מייצר מגיע גם לאזור בו נמצא התיל השני יפעל עליו כוח בכיוון התיל הראשון.

$$F_2 = i_2 \cdot \ell \cdot B = i_2 \cdot \ell \cdot \frac{\mu_0 \cdot i_1}{2\pi \cdot r}$$

מאחר והתיל אינסופי נחשב כוח ליחידת אורך:

$$\frac{F_2}{\ell} = i_2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot i_1}{2\pi \cdot r}$$

על שני התילים יפעל אותו כוח רק בכיוון הפוך ושניהם ימשכו אחד את השני. נשים לב שאם כיווני הזרמים היו דומים הם היו דוחים אחד את השני.

דוגמה 3:

בצינור אינסופי עם רדיוס פנימי a וחיצוני b זורם זרם אחיד, מהו השדה המגנטי שהוא יוצר בכל נקודה בעולם?

פתרון:

נבנה טבעת אמפירית עם רדיוס r סביב הגליל ונפעיל עליה את חוק אמפר.

נחלק את הבעיה ל-3 מצבים:

$$r < a$$

בחלק הפנימי של הצינור לא עובר זרם לכן:

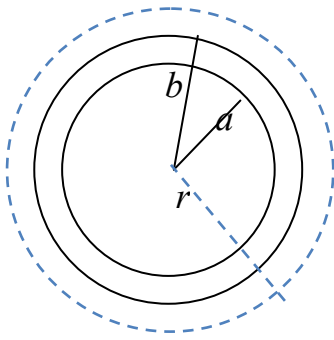
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B \cdot d\ell = B \cdot \oint d\ell = \mu_0 \cdot i = \mu_0 \cdot 0 \Rightarrow B = 0$$

$$a < r < b$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B \cdot d\ell = B \cdot \oint d\ell = B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \left(\frac{\pi \cdot r^2 - \pi \cdot a^2}{\pi \cdot b^2 - \pi \cdot a^2} \cdot i \right)$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 \cdot i \cdot \left(\frac{r^2 - a^2}{2\pi \cdot r \cdot (b^2 - a^2)} \right)$$

בהכפלת הזרם ביחס בין השטחים מקבלים את הזרם דרך השטח עד לרדיוס r .



$$: r > b$$

$$\oint \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = \oint B \cdot \partial \ell = B \cdot \oint \partial \ell = B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot i$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot r}$$

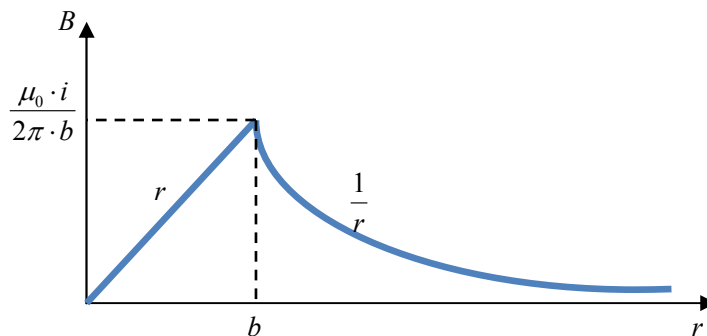
כפי שניתן לראות קיבלנו את הנוסחה של תיל אינסופי!

- מה יקרה אם $a \rightarrow 0$?

במקרה זה השדה בחוץ לא ישתנה, לעומת זאת השדה בפנים $r < b$ יהיה

$$B = \mu_0 \cdot i \cdot \left(\frac{r^2 - a^2}{2\pi \cdot r \cdot (b^2 - a^2)} \right) \xrightarrow{a \rightarrow 0} B = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot r}{2\pi \cdot b^2}$$

וההתנהגות של השדה המגנטי תהיה:

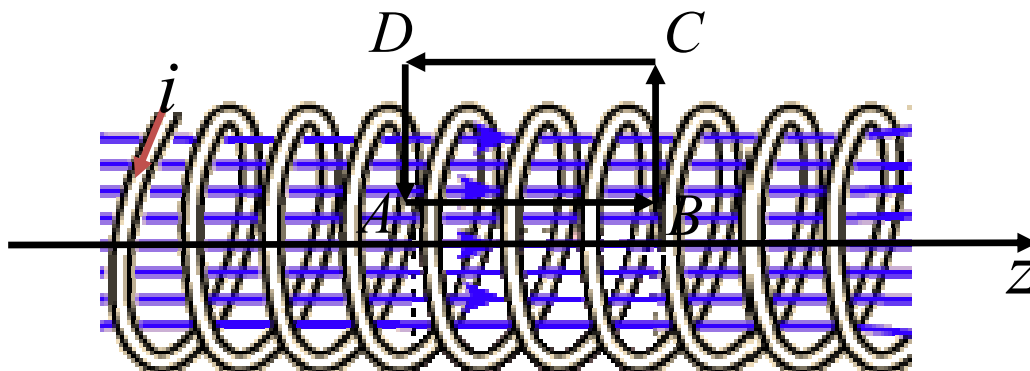


סליל אינסופי:

נרצה לחשב את השדה המגנטי שיוצר סליל אינסופי.

מאחר ויש פה סימטריה גלילית לכן B תלוי רק ב r , אם משתמשים בכלל יד ימין לכל לולאה אפשר לראות שבמקרה שלנו הוא יהיה בכיוון החיובי של ציר הסימטריה.

כדי לחשב מהו השדה נבנה טבעת מלבנית שחצי ממנה נמצא בתוך הסליל במרחק r מהציר והחצי השני מחוץ לסליל ונשתמש בחוק אמפר.



נוכיח בהמשך שהשדה מחוץ לסליל הוא אפס לכן $\int_C^D \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = 0$, נפעיל את חוק אמפר:

$$\oint \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = \int_A^B \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} + \int_B^C \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} + \int_D^A \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = \int_A^B \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = B \cdot \ell = \mu_0 \cdot (n \cdot \ell \cdot i)$$

מתאפשר כי השדה בהם
ניצב ל $\partial \vec{\ell}$

מספר הכריכות ליחידת אורך

לסיכום:

השדה בתוך סליל:

$$B = \mu_0 \cdot n \cdot i$$

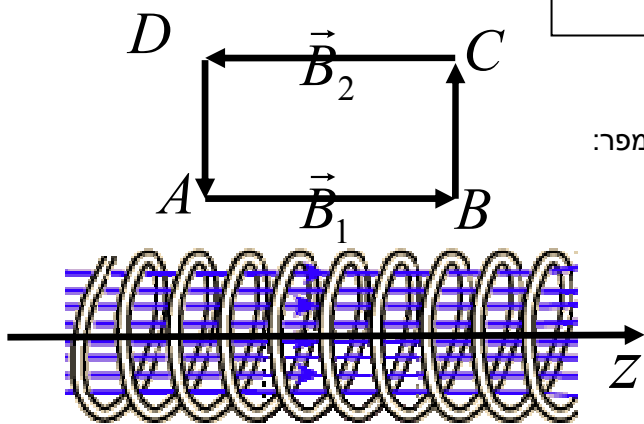
השדה בתוך סליל עם N שכבות:

$$B = N \cdot \mu_0 \cdot n \cdot i$$

נוכיח שמחוץ לסליל השדה הוא אפס:

נבנה טבעת אמפירית שכולה מחוץ לסליל ונפעיל את חוק אמפר:

גם פה אם יש שדה הוא יהיה לאורך ציר Z לכן:



$$\oint \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = \int_A^B \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} + \int_B^C \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} + \int_D^A \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell}$$

$$= B_1 \cdot \ell - B_2 \cdot \ell = (B_1 - B_2) \cdot \ell = \mu_0 \cdot 0$$

$$\Rightarrow B_1 = B_2$$

כלומר קיבלנו שהשדה בחוץ לא תלוי במרחק, אם נלך לאינסוף אז חייב להתקיים $B_\infty = 0$ כלומר

בכל נקודה אחרת מחוץ לסליל $B_r = 0$.

טורואיד:

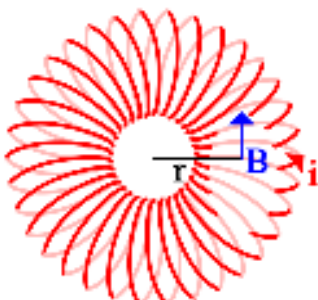
אם נסובב את הסליל ונסגור אותו נקבל טורואיד, נחשב את השדה המגנטי שטורואיד יוצר.

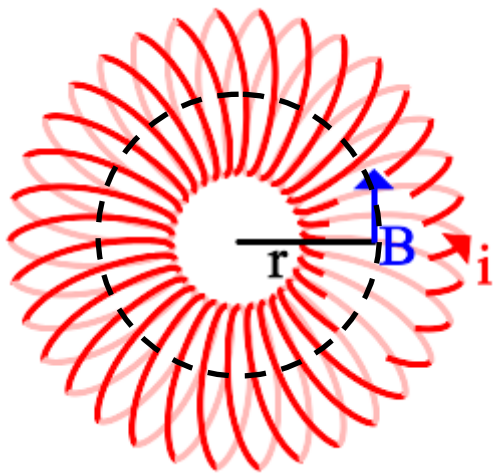
- מאותם שיקולי סימטריה של סליל השדה המגנטי מחוץ לטורואיד הוא אפס.

- גם בתוך הטורואיד השדה המגנטי הוא אפס כי אם נבנה טבעת אמפירית שם

שום זרם לא עובר דרכה ולכן צד ימין של משוואת חוק אמפר יתאפס ולכן השדה

הוא אפס.





- בין הסלילים של הטורואיד כן יש שדה, נחשב אותו:

נבנה טבעת אמפירית במרחק r מהמרכז ואז אם N מס'

הכריכות של הטורואיד:

$$\oint \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = \oint B \cdot \partial \ell = B \cdot \oint \partial \ell = B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot N \cdot i$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{2\pi \cdot r}$$

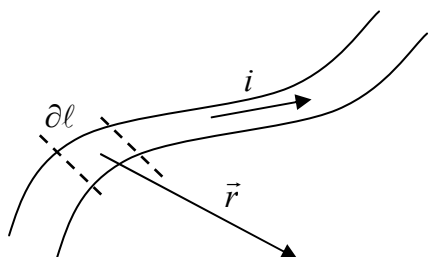
חוק ביו-סבר:

נסתכל על תיל שדרכו זרם i. נבחר קטע כלשהו $\partial \ell$ מהתיל.

נצייר וקטור $\vec{r}$ שזנבו באמצע הקטע $\partial \ell$ וראשו בנקודה כלשהי במרחב.

השדה המגנטי שיוצר חלק זה של התיל בנקודה הזאת הוא:

$$\partial \vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{\partial \vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

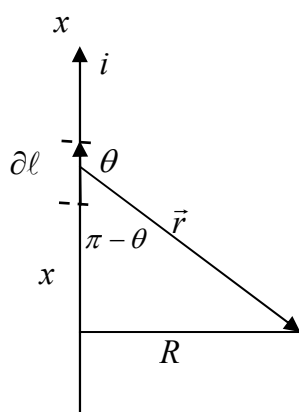


חשוב: לשים לב ש $\hat{r}$ במשוואה הוא וקטור יחידה!

דוגמה 1:

בתיל אינסופי זרם i, מהו השדה המגנטי במרחק R ממנו?

פתרון:



$$\partial \vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{\partial \vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{\partial \ell \cdot 1 \cdot \sin \theta}{r^2}$$

$$\partial \vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{\partial \ell \cdot \left(\frac{R}{r}\right)}{r^2} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{\partial \ell \cdot R}{r^3}$$

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{r}$$

$$B = \int \partial \vec{B} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \cdot \partial \ell = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{R}{\sqrt{\ell^2 + R^2}^3} \cdot \partial \ell$$

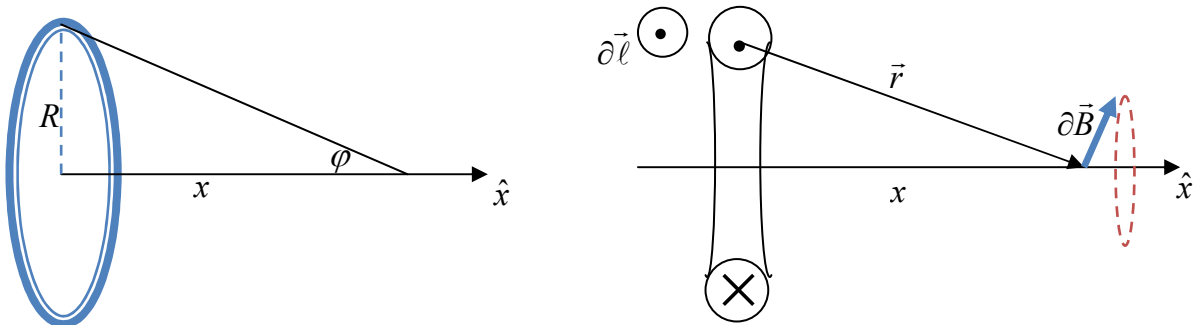
$$B = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot R}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{R^2}^3 \cdot \sqrt{\frac{\ell^2}{R^2} + 1}} \cdot \partial \ell = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi \cdot R} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{\ell^2}{R^2} + 1}} \cdot \partial \ell$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi \cdot R} \cdot \left. \frac{\ell}{\sqrt{\frac{\ell^2}{R^2} + 1}} \right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi \cdot R} \cdot 2 = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot R}$$

- ואכן קיבלנו את אותה התוצאה שמצאנו מקודם לפי חוק אמפר!

דוגמה 2:

נחשב את השדה המגנטי שמייצרת טבעת מוזרמת על נקודה על ציר הסימטריה שלה.



התרומות לשדה של כל אחד מהקטעים $\partial \ell$ יוצרים מעגל כלומר יש ביניהם סימטריה כך שכל הרכיבים האנכיים מתבטלים והשדה הכללי יהיה בכיוון x. נחשב אותו:

$$\partial \vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{\partial \vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{\partial \ell \cdot 1}{r^2}$$

נבצע אינטגרציה על החלקים בציר x בלבד:

$$\partial B_x = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{\partial \ell}{r^2} \cdot \sin \varphi = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{\partial \ell}{r^2} \cdot \frac{R}{r}$$

$$B_x = \int \partial B_x = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 \cdot i \cdot R}{4\pi \cdot r^3} \partial \ell = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot R}{4\pi \cdot r^3} \cdot 2\pi \cdot R$$

קיבלנו:

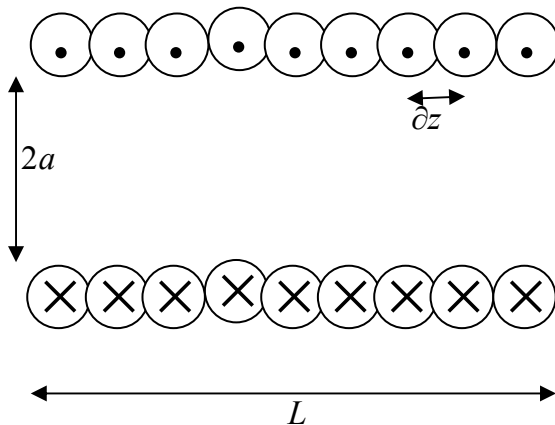
$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot R^2}{2 \cdot r^3} = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

אם $x \rightarrow \infty$ מקבלים (כאשר μ הוא מומנט דיפול חשמלי):

$$B \rightarrow \frac{\mu_0 \cdot i \cdot R^2}{2 \cdot x^3} = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot R^2}{2 \cdot x^3} \cdot \frac{\pi}{\pi} = \frac{\mu_0 \cdot (\pi \cdot i \cdot R^2)}{2 \cdot \pi \cdot x^3} = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{2 \cdot \pi \cdot x^3}$$

דוגמה 3:

נחשב את השדה המגנטי בנקודה על ציר הסימטריה של סליל בעל n טבעות ליחידת שטח.



- כידוע סליל זה אוסף של טבעות צמודות לכן נוכל להשתמש בתוצאה של הדוגמה הקודמת. התרומה של כל ∂z לשדה הכללי היא:

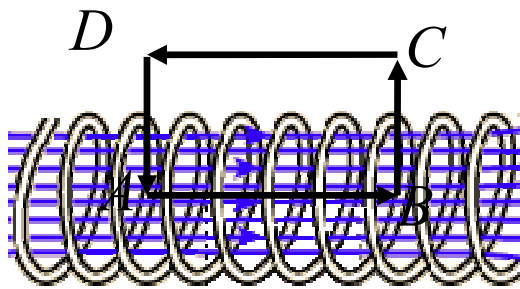
$$\partial B_z = \left(\frac{\mu_0 \cdot i \cdot a^2}{2 \cdot (a^2 + z^2)^{3/2}} \right) \cdot n \cdot \partial z$$

$$B_z = \int \partial B_z = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu_0 \cdot i \cdot a^2 \cdot n}{2} \cdot \frac{\partial z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot n \cdot L}{\sqrt{(2a)^2 + L^2}}$$

במקרה של סליל אינסופי $L \rightarrow \infty$ ואז נקבל:

$$B \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \mu_0 \cdot i \cdot n \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2}} = \mu_0 \cdot i \cdot n$$

זוהי בדיוק התוצאה שקיבלנו עבור סליל אינסופי!



- נוכיח שוב שהשדה המגנטי מחוץ לסליל הוא אפס בדרך אחרת:

נבנה לולאה שחצי ממנה בתוך הסליל והחצי השני מחוצה לו כך שהחלק הפנימי שלה נמצא על ציר הסימטריה.

נפעיל את חוק אמפר:

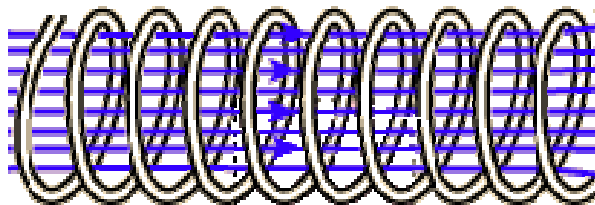
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot i \cdot n \cdot \ell + 0 + B_{out} \cdot \ell + 0 = \mu_0 \cdot i = \mu_0 \cdot (i \cdot n \cdot \ell)$$

$$\Rightarrow B_{out} = 0$$

- נוכיח שבכל נקודה בתוך הסליל יש את אותו השדה:

נבנה לולאה שכולה נמצאת בתוך הסליל ונפעיל עליה

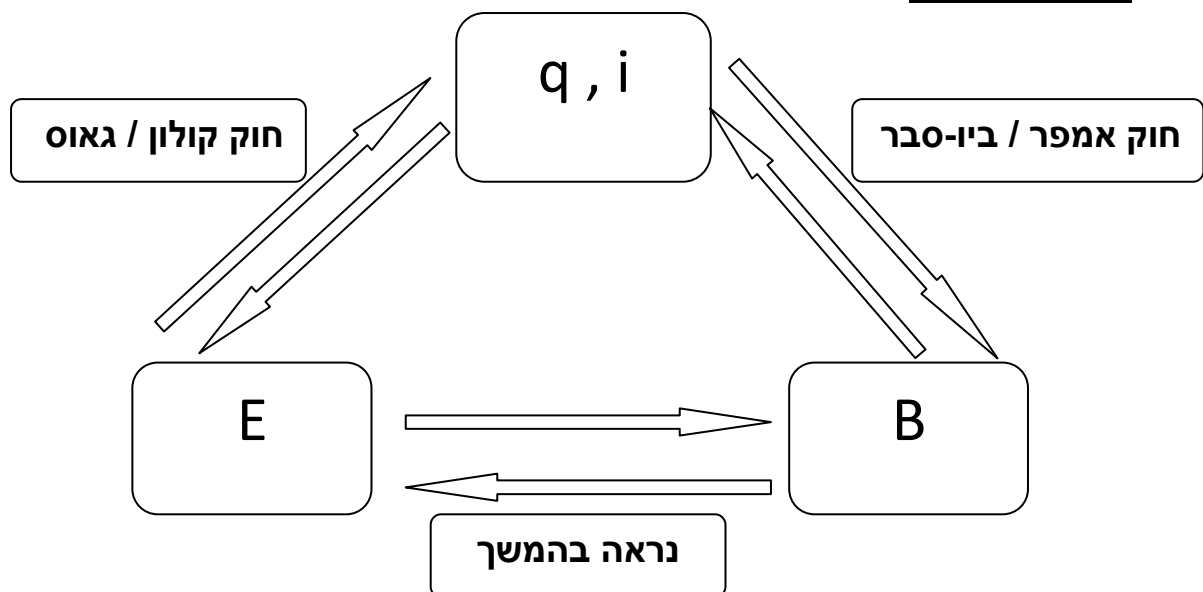
את חוק אמפר, הלולאה לא מכילה זרם לכן:



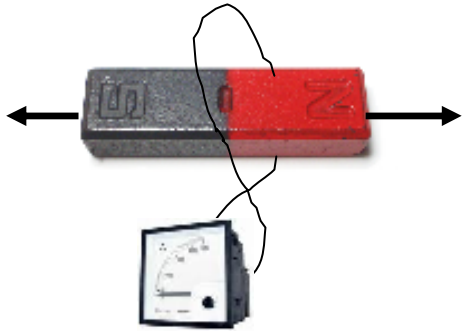
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot i = \mu_0 \cdot 0 \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_1 \cdot \ell + 0 + B_2 \cdot (-\ell) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow B_1 = B_2$$

סיכום ביניים:



שדות משתנים בזמן:



תנועת מגנט בתוך טבעת סגורה גורמת לזרימת זרם מושרה בתוכה.

ניתן להגיד שהשינוי היחסי בין המגנט לטבעת גרם לכא"מ מושרה

שגרם לזרם מושרה בטבעת.

חוק פאראדי:

שינוי של השטף המגנטי באזור שבו נמצאת לולאה סגורה גורם לכא"מ מושרה ולולאה.

$$\mathcal{E} = -N \cdot \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

כאשר $\mathcal{E}$ הוא הזרם המושרה בלולאה, N מספר הליפופים ו- Φ_B השטף של השדה המגנטי דרך

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$[\Phi_B] = [B] \cdot [A] = Tesla \cdot m^2 = Weber \quad \text{יחידות:}$$

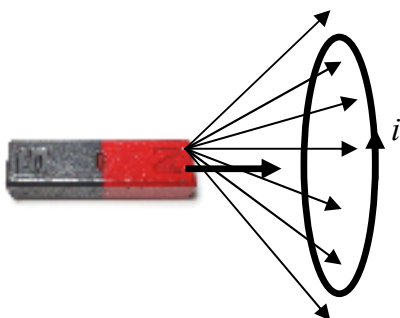
$$[\mathcal{E}] = \frac{[\Phi_B]}{[t]} = \frac{[B] \cdot m^2}{sec} = \frac{[E] \cdot m^2}{\frac{m}{sec} \cdot sec} = [E] \cdot m = Volt$$

$$\left(v = \frac{E}{B} \Rightarrow [v] = \frac{[E]}{[B]} \Rightarrow \frac{m}{sec} = \frac{[E]}{[B]} \Rightarrow [B] = \frac{[E]}{m/sec} \right)$$

נשים לב שכאשר אין שינוי בשטף המגנטי אז $\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = 0$ ואין כא"מ מושרה.

- פה יש מערכת של פידבק שלילי ולכן יש מינוס בנוסחה, כלומר אם יש שינוי בשטף המגנטי הוא יגרום לכא"מ מושרה שיוביל לזרימת זרם בלולאה, הזרם הזה ייצר שדה מגנטי שינסה לבטל את הגורם שיצר אותו, כלומר ינסה לחזור למצב ההתחלתי שלו.

דוגמה:

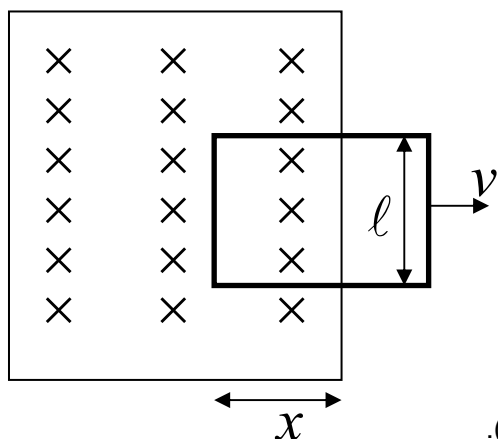


אם נקרב מגנט ללולאה השטף המגנטי בתוכה יגדל ולכן יזרום

זרם דרכה בכיוון המסומן בציר. לפי כלל יד ימין זרם זה ייצר שדה

מגנטי שמאלה שינסה להקטין את השינוי בשדה שיצר אותו.

(כלומר: השדה גדל והזרם ינסה להקטין אותו ולהחזירו לערך המקורי שלו)



כעת נסתכל על אזור במרחב עם שדה מגנטי אחיד פנימה (כמו בציור משמאל) לולאה העשויה מחומר מוליך נמצאת בחלקה בשדה המגנטי ונעה החוצה במהירות קבועה. השטח שנמצא בתוך אזור השדה המגנטי קטן עם הזמן ולכן השטף של השדה המגנטי קטן. במקרה הזה הזרם יזרום בצורה כזאת שהשדה שהוא יוצר בכיוון השדה המקורי כי השטף קטן עם הזמן והזרם ינסה להחזיר אותו לערך ההתחלתי (להגדיל אותו).

השטף יהיה:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot \partial \vec{a} = \oint B \cdot \partial a = B \cdot \oint \partial a = B \cdot \ell \cdot x$$

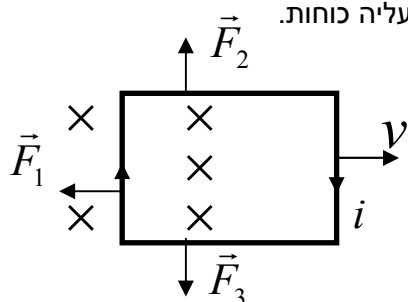
ולכן:

$$\varepsilon = \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (B \cdot \ell \cdot x) = B \cdot \ell \cdot v$$

והזרם יהיה:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B \cdot \ell \cdot v}{R}$$

עכשיו קיבלנו מצב של לולאה מוזרמת שנעה בתוך שדה מגנטי לכן יפעלו עליה כוחות.



נשים לב ש- $\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$ לכן הם מבטלים אחד את השני.

כדי שהמהירות תישאר קבועה עם הזמן צריך להפעיל על הטבעת כוח ימינה שיבטל את הכוח השמאלי וימנע היווצרות תאוצה.

נחשב למה שווה הכוח הזה:

$$F = F_1 = B \cdot i \cdot \ell = B \cdot \left(\frac{B \cdot \ell \cdot v}{R} \right) \cdot \ell = \frac{B^2 \cdot \ell^2 \cdot v}{R}$$

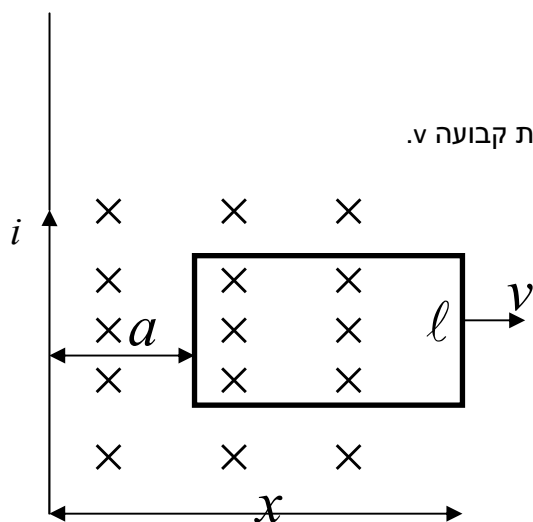
למה שווה ההספק של כוח זה?

$$P_F = F \cdot v = F_1 \cdot v = \frac{B^2 \cdot \ell^2 \cdot v^2}{R}$$

האנרגיה הזאת של הכוח גורמת לכא"מ מושרה בטבעת (אנרגיה חשמלית) שמייצר זרם שגורם לחום בגלל ההתנגדות של הלולאה, נראה שההספק של ההתנגדות שווה בדיוק לאנרגיה זו:

$$P_R = i^2 \cdot R = \left(\frac{B \cdot \ell \cdot v}{R} \right)^2 \cdot R = \frac{B^2 \cdot \ell^2 \cdot v^2}{R} = P_F$$

דוגמה 1:



בתיל אינסופי זורם זרם i , לולאה מתרחקת מהתיל במהירות קבועה v .

במקרה זה השדה המגנטי הולך וקטן ככל שמתרחקים

מהתיל לכן השטף בלולאה הולך וקטן ולכן הזרם

שנוצר ינסה להקטין את השינוי בשטף כלומר ינסה

להגדיל את השטף של השדה החשמלי וזה קורה רק

אם הזרם יזרום בכיוון השעון.

ככל שמתרחקים מהתיל השדה המגנטי נהיה יותר חלש

לכן גם השטף שלו יקטן מה שיגרום לכא"מ המושרה ולזרם לקטון.

כעת נסתכל על הבעיה בצורה אחרת:

הפעם יש לנו מסילה מוליכה עם נגד ומוט מוליך שנע לאורכה,

נשים לב שלמרות שהשטף הולך וגדל השינוי בשטף גם כאן

הולך וקטן כי ככל שמתרחקים מהתיל יש פחות

קווי שדה, לכן הזרם ילך ויקטן עם הזמן.

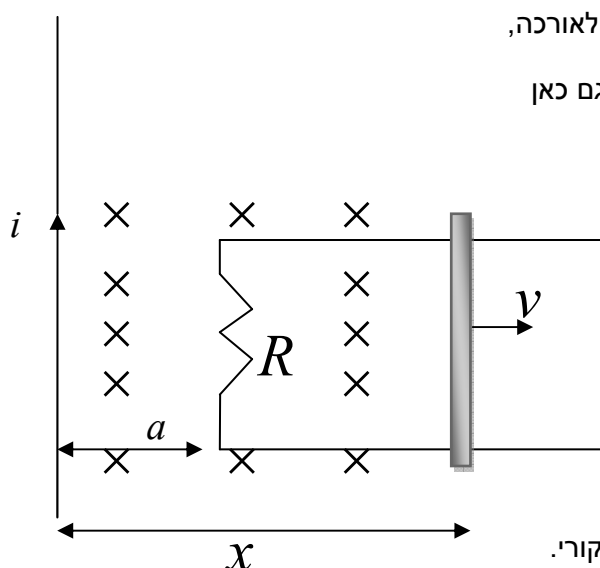
עם זאת הכיוון של הזרם במקרה הזה הוא

נגד כיוון השעון וזאת בגלל שהשטף של השדה

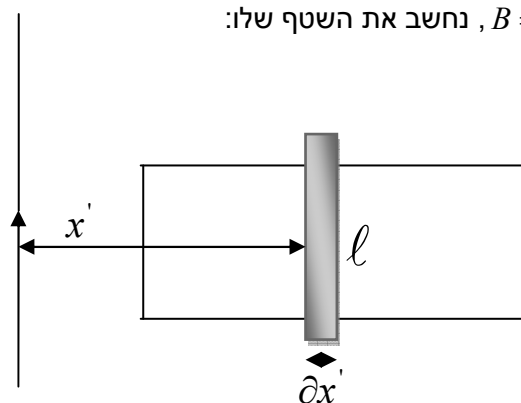
הולך וגדל עם הזמן כי כל הזמן נוסף שטח וכיוון

הזרם הפעם יהיה כך שינסה להקטין את השטף

כלומר הוא יגרום לשדה מגנטי בכיוון הפוך לשדה המקורי.



כפי שראינו השדה החשמלי של תיל אינסופי הוא: $B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot r}$, נחשב את השטף שלו:



$$\begin{aligned}\Phi_B &= \oint \vec{B} \cdot \partial \vec{a} = \oint B \cdot \partial a \\ &= \int_a^x \left(\frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot x'} \right) \cdot (\ell \cdot \partial x')\end{aligned}$$

$$\Phi_B = \int_a^x \left(\frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot x'} \right) \cdot (\ell \cdot \partial x') = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot \ell}{2\pi} \cdot \int_a^x \frac{\partial x'}{x'} = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot \ell}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

לכן הכא"מ המושרה יהיה:

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0 \cdot i \cdot \ell}{2\pi} \cdot (\ln(x) - \ln(a)) \right) = -\frac{\mu_0 \cdot i \cdot \ell}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot v \right)$$

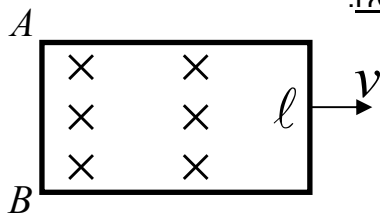
$$\frac{\partial \ln(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$$

ומכאן הזרם בטבעת יהיה:

$$\Rightarrow i_{Loop}(t) = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\frac{\mu_0 \cdot i \cdot \ell}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot v \right)}{R} = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot \ell \cdot v}{2\pi \cdot R} \cdot \frac{1}{x}$$

הערה:

כאשר תיל מוליך חותך קווי שדה שניצבים לו נוצר כא"מ מושרה בין הקצוות שלו.



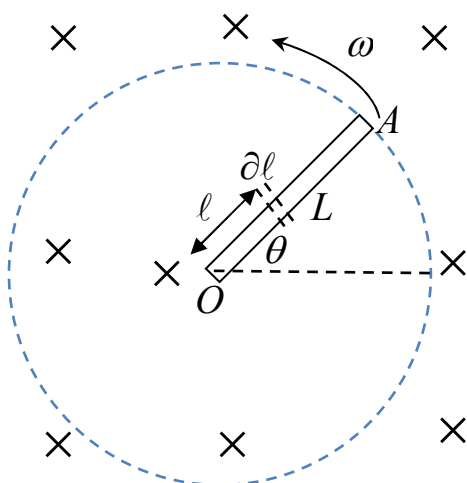
אם נסתכל שוב על הדוגמה הקודמת (של הלולאה הנעה בשדה מגנטי) ראינו ש $\varepsilon = B \cdot \ell \cdot v$, כא"מ זה יפעל בין הקצוות של החלק השמאלי של הלולאה כלומר בין הנקודות A ו-B.

כמו כן אם נסתכל על אלמנט קטן $\partial \ell$ של הקטע AB בין הקצוות שלו יהיה

הפרש פוטנציאלים של $\partial \varepsilon = B \cdot v \cdot \partial \ell$.

דוגמה 2:

מסובבים מוט מוליך במהירות זוויתית ω בשדה מגנטי B. מה יהיה הפרש הפוטנציאלים בין A ו-O?



ראינו שבכל קטע של המוט יתקיים: $\partial \varepsilon = B \cdot v \cdot \partial \ell$

לכן:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int \partial \varepsilon = \int_0^L B \cdot v \cdot \partial \ell = \int_0^L B \cdot (\omega \cdot \ell) \cdot \partial \ell \\ &= \int_0^L B \cdot (\omega \cdot \ell) \cdot \partial \ell = B \cdot \omega \cdot \left[\frac{\ell^2}{2} \right]_0^L = \frac{1}{2} B \cdot \omega \cdot L^2 \end{aligned}$$

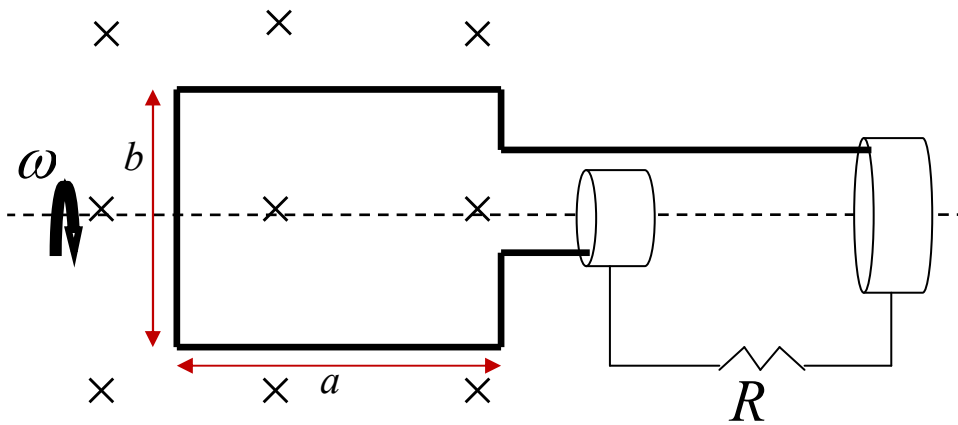
נראה שזה נכון ע"י חישוב הכא"מ לפי השינוי בשטף החשמלי:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot \partial \vec{a} = \oint B \cdot \partial a = B \cdot \left(\pi \cdot \ell^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} \right) = \frac{1}{2} B \cdot \ell^2 \cdot \theta$$

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} B \cdot \ell^2 \cdot \theta \right) = -\frac{1}{2} B \cdot \ell^2 \cdot \omega$$

מודל של דינמו / גנראטור:

גנראטור חשמלי מורכב מלולאה שנמצאת בשדה מגנטי קבוע ומסתובבת סביב צירה, כל קצה של הלולאה מחובר לטבעת כך שאם מחברים את שתי הטבעות הלולאה נסגרת ומתקבל זרם כתוצאה מהכא"מ המושרה.

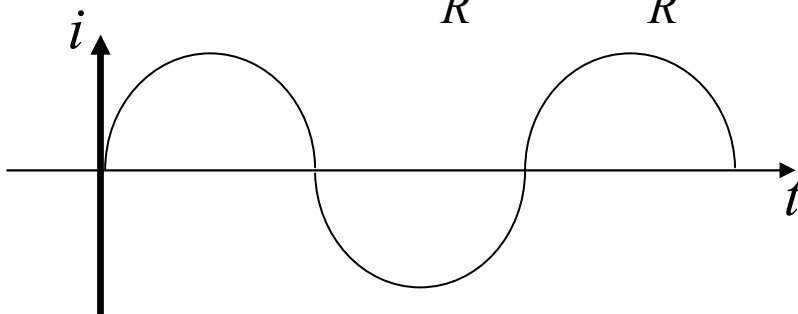


נחשב את הזרם המושרה שיזרום בנגד:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot \partial \vec{a} = B \cdot a \cdot b \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (B \cdot a \cdot b \cdot \cos(\omega \cdot t)) = -B \cdot a \cdot b \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

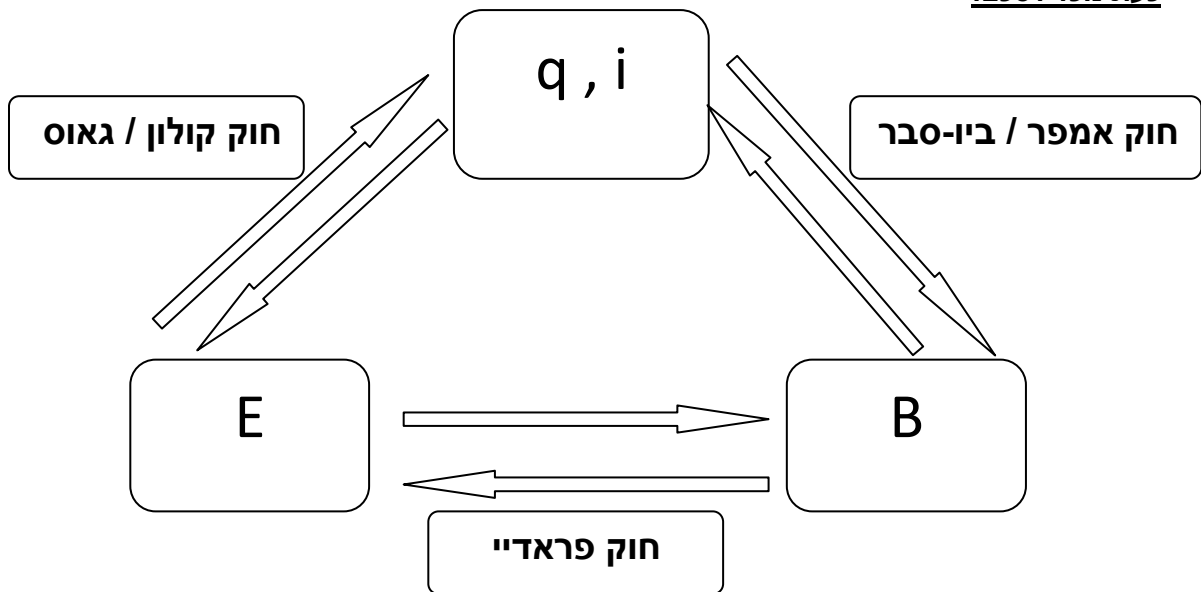
$$i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{B \cdot a \cdot b \cdot \omega}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



כלומר התנהגות הזרם תהיה :

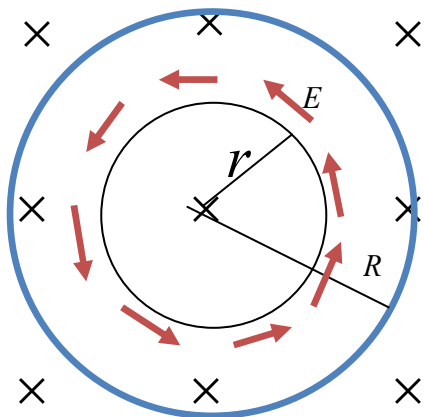
כמובן שבמקרה הנ"ל יכולנו לקבע את הלולאה ולשנות את השדה המגנטי בזמן ואז גם היינו מקבלים זרם בנגד כתוצאה מהשינוי בשטף של השדה המגנטי דרך הלולאה.

כעת נוכל לסכם:



כעת נניח שיש אזור במרחב שמכיל שדה מגנטי אחיד אבל גדל עם הזמן כלומר $\frac{\partial B}{\partial t} > 0$ ובתוכו

מונחת לולאה ברדיוס R .



לפי חוק פראדיי נקבל ש- $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ כלומר בגלל השינוי בשטף

של השדה המגנטי נוצר כא"מ מושרה מה שאומר שנוצר שדה חשמלי.

בגלל הסימטריה השדה החשמלי יכול להיות או רדיאלי או משיקי.

נניח בתוך הגליל מעטפת גלילית סגורה, נניח שהשדה החשמלי

היה רדיאלי, לפי חוק גאוס השטף של השדה החשמלי דרך המעטפת

הגלילית שונה מאפס אבל אנו יודעים שבתוך המעטפת הזאת אין מטען

לכן השדה החשמלי הנוצר חייב להיות משיקי כי אז השטף של השדה החשמלי דרך המעטפת

הגלילית יהיה אפס מה שמסתדר עם זה שאין מטענים בתוכו.

נחשב את השדה החשמלי:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot \partial \vec{a} = \int B \cdot \partial a = B \cdot \int \partial a = B \cdot \pi \cdot r^2 \quad \text{אם נסתכל על הלולאה הקטנה אז:}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\pi \cdot r^2 \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{ולכן הכא"מ המושרה יהיה:}$$

$$\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} = \int E \cdot \partial \ell = E \cdot \int \partial \ell = E \cdot 2\pi \cdot r \quad \text{אבל אנו יודעים כי:}$$

$$\pi \cdot r^2 \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = E \cdot 2\pi \cdot r \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\partial B}{\partial t}} \quad \text{נשווה בין שני הגדלים ונקבל:}$$

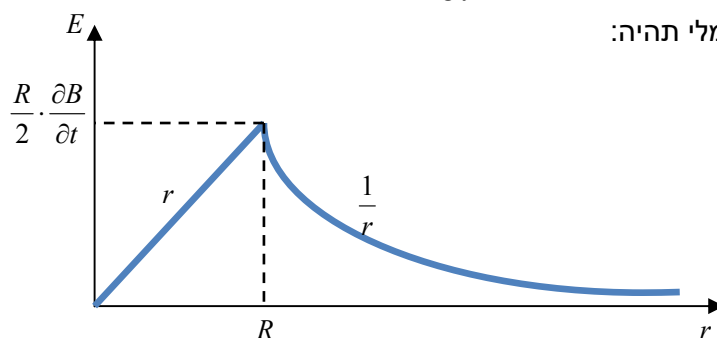
כפי שניתן לראות, השדה החשמלי שנוצר הולך וגדל ככל שמתרחקים בכיוון הרדיאלי.

נחשב את השדה החשמלי כאשר $r > R$:

$$\Phi_B = B \cdot \pi \cdot R^2 \quad |\mathcal{E}| = \left| -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \right| = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = E \cdot 2\pi \cdot r$$

$$\Rightarrow E = \frac{R^2}{2 \cdot r} \cdot \frac{\partial B}{\partial t}$$

התנהגות השדה החשמלי תהיה:



נשים לב שאם נבחר שתי נקודות במרחב ונסתכל על הפרש הפוטנציאלים ביניהם אז:

$$V_A - V_B = -\int_A^B E \cdot \partial \ell$$

$$\int E \cdot \partial \ell = 0 \quad \text{ראינו כבר ששדה חשמלי שנוצר ממטענים סטטיים הוא שדה משמר כאשר}$$

שדה חשמלי שנוצר כתוצאה משינוי בזמן של שדה מגנטי אינו שדה משמר!

לכן אין טעם לדבר על הפרש פוטנציאלים בשדה כזה.

אם ניקח סליל ונשנה את הזרם דרכו עם הזמן אז השדה המגנטי שבתוכו גם ישתנה עם הזמן ואז גם השטף של השדה המגנטי ישתנה ויגרום לזרם מושרה בלולאות של הסליל שיהיה הפוך בכיוונו לכיוון הזרם הנכנס אליו.

ננסח את חוק פראדיי כך שיתאים לסליל:

ראינו כבר שלפי חור פראדיי: $\varepsilon = -N \cdot \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$, מנוסחה זו מאחר והשדה המגנטי פרופורציונאלי לזרם אז גם הכא"מ המושרה יהיה פרופורציונאלי לזרם.

נגדיר את מקדם ההשראות הטבעי של הסליל L ע"י הנוסחה:

$$N \cdot \Phi_B = L \cdot i$$

ואז:

$$\varepsilon = -N \cdot \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial (N \cdot \Phi_B)}{\partial t} = -\frac{\partial (L \cdot i)}{\partial t} = -L \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

קיבלנו שני חוקים אקוויבלנטים:

$$\varepsilon = -N \cdot \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \Leftrightarrow \varepsilon = -L \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

יחידות:

$$[L] = \frac{[\varepsilon] \cdot [t]}{[i]} = \frac{Volt \cdot Sec}{Amp} = Henry$$

נסתכל על L: $L = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)}$, ככל ש-L יותר גדול הוא מעכב יותר את השינוי בזרם שעובר דרך הסליל. כפי שניתן לראות הכא"מ המושרה יהיה בכיוון הפוך לכיוון של השינוי בזרם ולכן הוא ייצר זרם בכיוון ההפוך.

דוגמה:

נרצה לחשב את מקדם ההשראות העצמית של סליל באורך ℓ ו-n ליפופים ליח' אורך.

ראינו כבר שהשדה בתוך הסליל הוא $B = \mu_0 \cdot n \cdot i$ (אם A הוא שטח החתך של לולאות הסליל):

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot \partial \vec{a} = \int B \cdot \partial a = B \cdot \int \partial a = B \cdot A$$

$$N \cdot \Phi_B = n \cdot \ell \cdot B \cdot A = n \cdot \ell \cdot (\mu_0 \cdot n \cdot i) \cdot A = (\mu_0 \cdot n^2 \cdot A \cdot \ell) \cdot i = L \cdot i$$

$$\Rightarrow L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot A \cdot \ell$$

תמיד מקדם ההשראות של סליל יהיה מהצורה: (משהו עם יחידות אורך) $L = \mu_0 \cdot$

דוגמה:

נתון טורואיד עם חתך מלבני, מהו מקדם ההשראות העצמית שלו L ?

פתרון:

לפי חוק גאוס עבור $a < r < b$:

$$\oint \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = \oint B \cdot \partial \ell = B \cdot \oint \partial \ell = 2\pi \cdot r \cdot B_r = \mu_0 \cdot N \cdot i$$

$$\Rightarrow B_r = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{2\pi \cdot r}$$

ניתן לראות שהשטף של השדה המגנטי במרחק r כלשהו שונה

מהשטף בנקודה במרחק אחר. לכן כדי למצוא את השטף דרך כל

חתך מלבני של הטורואיד נבצע את האינטגרציה הבאה:

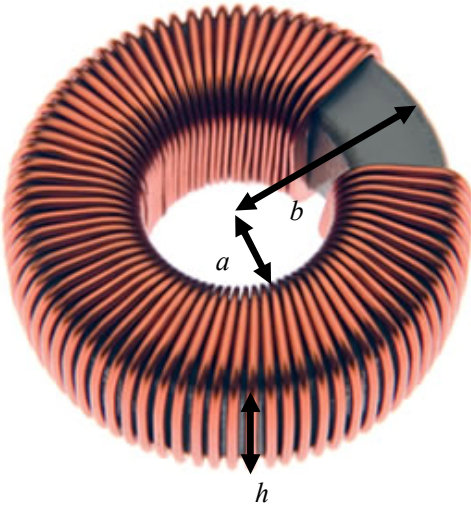
$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot \partial \vec{a} = \int B \cdot \partial a = \int_a^b \left(\frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{2\pi \cdot r} \right) \cdot (h \cdot \partial r) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i \cdot h}{2\pi} \cdot \int_a^b \frac{1}{r} \cdot \partial r$$

$$\Rightarrow \Phi_B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i \cdot h}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

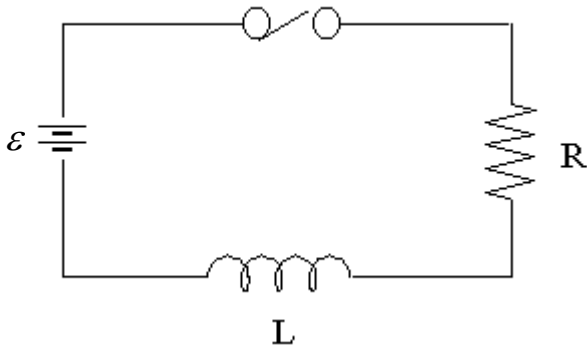
$$N \cdot \Phi_B = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot h}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot i = L \cdot i$$

ואז:

$$\Rightarrow L = \mu_0 \cdot \left(\frac{N^2 \cdot h}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$



נסתכל על המעגל הבא:



- אם הסליל לא היה שם דרך הנגד היה זרם

$$i = \frac{\varepsilon}{R}$$

ישיר לפי הנוסחה

אחרי סגירת המפסק הסליל לא ייתן לזרם לעלות ישר כי

הכא"מ המושרה בתוכו ינסה לעכב את השינוי בזרם.

נכתוב את חוק קירכהוף עבור הלולאה הזאת:

$$\varepsilon - i \cdot R - L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + i \cdot R = \varepsilon \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{\varepsilon}{L}$$

תנאי ההתחלה שלנו יהיו $i(t=0) = 0, i(t \rightarrow \infty) = \frac{\varepsilon}{R}$ ואז: $i(t) = i_{\infty} \cdot (1 - e^{-t/\tau})$

נציב במד"ר:

$$\frac{i_{\infty}}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{R}{L} \cdot i_{\infty} \cdot (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{\varepsilon}{L}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

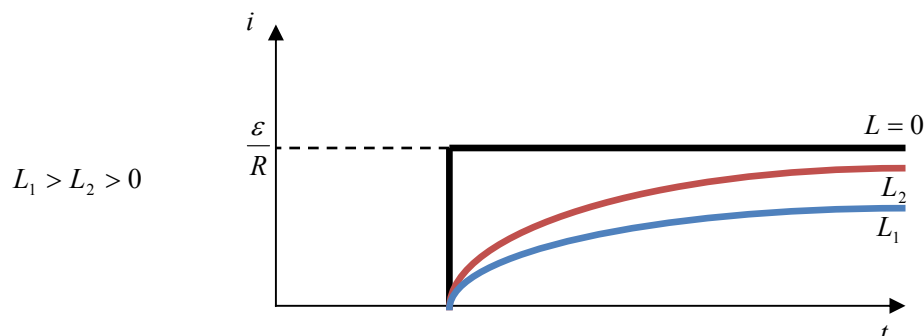
$$i_{\infty} \cdot \left(\frac{1}{\tau} - \frac{R}{L} \right) = 0 \Rightarrow \tau = \frac{L}{R}$$

$$\frac{R}{L} \cdot i_{\infty} = \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow i_{\infty} = \frac{\varepsilon}{R}$$

כלומר קיבלנו:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \cdot \left(1 - e^{-t/(L/R)} \right)$$

כפי שניתן לראות ככל ש- L יותר גדול הסליל מעכב את הזרם יותר זמן:



אנרגיה חשמלית בסליל:

$$U = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

בסליל מוזרם אגורה אנרגיה חשמלית

נוסחת השינוי בהספק של המעגל כאשר ההספק שמספק המקור הופך לחום בנגד ואנרגיה בסליל:

$$\mathcal{E} \cdot i = i^2 \cdot R + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \right)$$

ראינו שבסליל כלשהו השדה המגנטי הוא $B = \mu_0 \cdot n \cdot i$ וההשראות היא $L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot A \cdot \ell$

$$U = \frac{1}{2} \cdot (\mu_0 \cdot n^2 \cdot A \cdot \ell) \cdot i^2$$

נפתח את משוואת האנרגיה בסליל לפי נתונים אלה:

צפיפות האנרגיה ליחידת נפח תהיה:

$$u_B = \frac{U}{\text{נפח}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\mu_0 \cdot n^2 \cdot A \cdot \ell) \cdot i^2}{A \cdot \ell} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot (\mu_0 \cdot n \cdot i)^2 = \frac{1}{2\mu_0} \cdot B^2$$

נשים לב שעכשיו ניתן למצוא את L בשיטה אחרת:

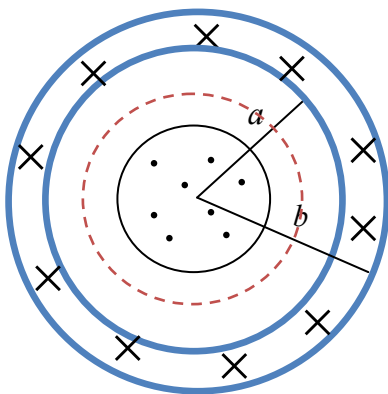
מוצאים את B וממנו מחשבים את צפיפות האנרגיה לפי הנוסחה הנ"ל ומשתמשים בה לחישוב

$$U = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

ואז משווים את התוצאה ל U ומחלצים את L.

דוגמה:

נסתכל על חתך של כבל שסביבו יש צינור כאשר שניהם מוזרמים באותו זרם רק בכיוונים הפוכים.



נבחר לולאה אמפירית עם רדיוס $b > r > a$ ואז:

$$\oint \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = \oint B \cdot \partial \ell = \mu_0 \cdot \sum i$$

$$B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot r}$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} \cdot B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \left(\frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot r} \right)^2$$

$$U_B = \int u_B \cdot \partial V = \int_a^b \frac{1}{2\mu_0} \cdot \left(\frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot r} \right)^2 \cdot (2\pi \cdot r \cdot \ell \cdot \partial r)$$

$$U_B = \frac{\mu_0 \cdot i^2}{4\pi \cdot \ell} \int_a^b \frac{\partial r}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 \cdot \ln(\frac{b}{a}) \cdot \ell}{2\pi} \right) \cdot i^2 \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \cdot \ln(\frac{b}{a}) \cdot \ell}{2\pi}$$

נמצא את ההשראות של המערכת בשיטה הראשונה:

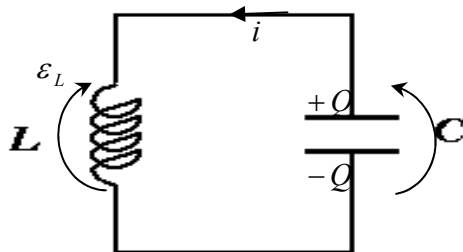
$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oint B \cdot da = \oint \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot r} \cdot \ell \cdot dr \quad \text{ולכן: } B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot r}$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot \ell}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = L \cdot i \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \ell}{2\pi}$$

כפי שניתן לראות בשני המקרים קיבלנו את אותה התוצאה.

מעגלי תהודה:

טוענים קבל במטען Q ומחברים אותו לסליל. כתוצאה מהזרם בסליל נוצר כא"מ מושרה שהולך וגדל בכיוון ההפוך לכיוון הזרם.



נסתכל על האנרגיה הכללית של המערכת:

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot Q^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

האנרגיה של המערכת מתחלפת בין חשמלית למגנטית אבל האנרגיה

הכללית לא משתנה (מחוק שימור האנרגיה) לכן:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot 2 \cdot Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot 2 \cdot i \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot q = 0 \quad \text{נוכל לכתוב את המשוואה הנ"ל בצורה:}$$

$$.w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{שפתרונה הוא: } q = Q_{\max} \cdot \cos(w_0 \cdot t + \varphi) \quad \text{כאשר}$$

זוהי המשוואה של אוסילטור הרמוני!

נמצא את משוואת הזרם כתלות בזמן:

$$i(t) = \frac{\partial q}{\partial t} = -w_0 \cdot Q_{\max} \cdot \sin(w_0 \cdot t + \varphi) = -I_{\max} \cdot \sin(w_0 \cdot t + \varphi)$$

לפי הנוסחה שפיתחנו ניתן לראות שאם המטען שנמצא בקבל מינימאלי הזרם בסליל יהיה מקסימאלי וכאשר המטען בקבל מקסימאלי הזרם בסליל יהיה מינימאלי. הדבר הזה קורה בגלל שהזרם הוא פונקציה של סינוס והמטען הוא פונקציה של קוסינוס ולשניהם יש את אותה פאזה ואותו מקדם של t .

$$U_E = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot q^2 = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot Q_{\max}^2 \cdot \cos^2(w_0 \cdot t + \varphi)$$

$$U_B = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_{\max}^2 \cdot \sin^2(w_0 \cdot t + \varphi)$$

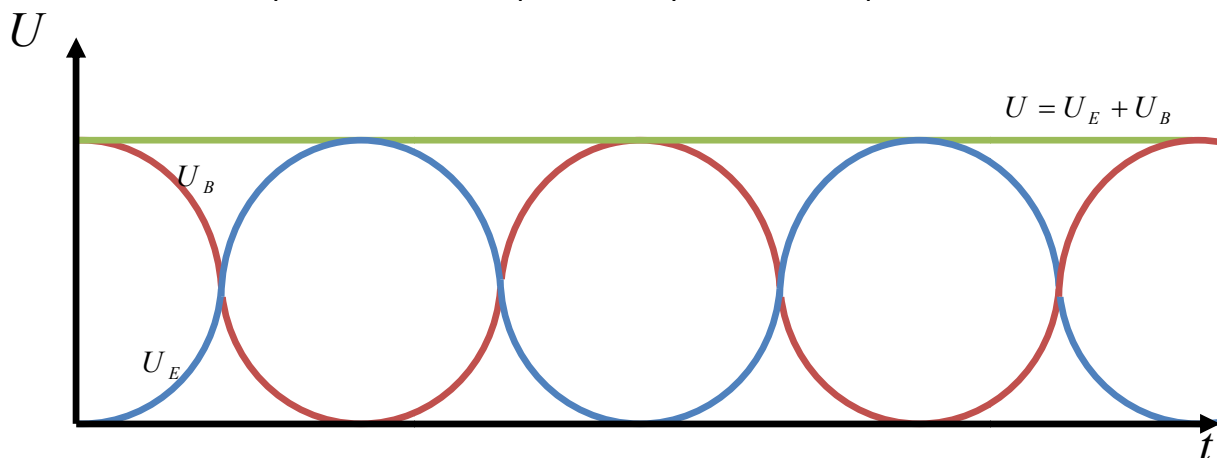
$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot Q_{\max}^2 \cdot \cos^2(w_0 \cdot t + \varphi) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot (w_0 \cdot Q_{\max})^2 \cdot \sin^2(w_0 \cdot t + \varphi)$$

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot Q_{\max}^2 \cdot (\cos^2(w_0 \cdot t + \varphi) + L \cdot C \cdot w_0^2 \cdot \sin^2(w_0 \cdot t + \varphi))$$

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot Q_{\max}^2 \cdot \left(\cos^2(w_0 \cdot t + \varphi) + L \cdot C \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \right)^2 \cdot \sin^2(w_0 \cdot t + \varphi) \right)$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot Q_{\max}^2 \cdot (\cos^2(w_0 \cdot t + \varphi) + \sin^2(w_0 \cdot t + \varphi)) \Rightarrow U = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot Q_{\max}^2$$

- זוהי משוואת האנרגיה במקרה זה וכפי שניתן לראות היא קבועה. נראה זאת בגרף הבא:



מעגל תהודה מרוסן:

אם נוסיף למעגל הקודם נגד אזי יהיה איבוד של אנרגיה שמתבזזת

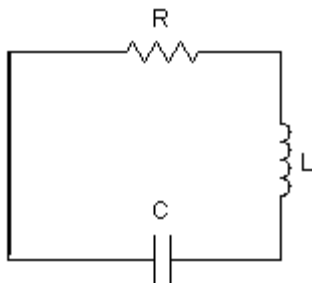
כהספק דרך הנגד. ואז ניתן להגיד ש $\frac{\partial U}{\partial t} \neq 0$.

מאחר והאנרגיה קטנה בזמן אזי קצב השינוי באנרגיה לפי הזמן

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -i^2 \cdot R \quad \text{יהיה:}$$

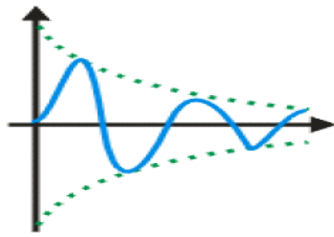
$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot Q^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \quad \text{כמו כן ראינו ש}$$

משתי המשוואות הנ"ל ניתן להגיע למד"ר שתתאר את המערכת.

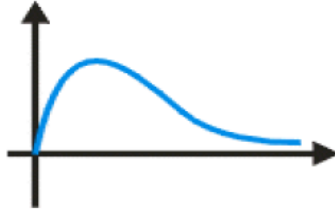


- ישנם שלושה מצבים של מעגל תהודה מרוסן:

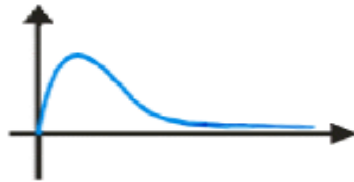
1. ריסון תת-קריטי כאשר $w_0 > \frac{R}{2L}$:



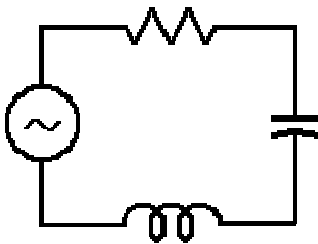
2. ריסון קריטי כאשר $w_0 = \frac{R}{2L}$:



3. ריסון קריטי כאשר $w_0 = \frac{R}{2L}$:



אילוח במעגלי תהודה:



נוסיף למעגל ה"ל אילוח ע"י כא"מ סינוסי. אם תדירות האילוח תהיה שווה

לתדירות העצמית של המעגל (ω_0) נקבל מצב של תהודה (רזוננס).

כלומר אם משוואת האילוח היא למשל $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ אזי המצב

של תהודה במערכת יתקיים כאשר $\omega_0 = \omega$.

משוואות מקסוול

משוואות מקסוול האינטגרליות:

נרשום סיכום קצר של המשוואות שלמדנו עד כה (בתוספת שנלמד בהמשך):

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1) \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \sum q_{in} & \text{חוק גאוס:} \\ 2) \oint \vec{B} \cdot \partial \vec{a} = 0 & \\ 3) \oint \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} & \text{חוק פאראדיי:} \\ 4) \oint \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = \mu_0 \cdot i = \mu_0 \cdot \sum (i + i_d) & \text{חוק אמפר:} \end{array} \right.$$

אם נסתכל על המשוואות 1, 3 ו-4 נמצא שני הבדלים בולטים בין השדה החשמלי לשדה המגנטי:

- לשדה החשמלי ישנם 2 משוואות: אחת עם אינטגרל קווי והשנייה עם אינטגרל משטחי.
- מטען במרחב מייצר שדה חשמלי וזרם מייצר שדה מגנטי. כלומר לשדה חשמלי יש מקורות סטטיים ולעומתו לשדה מגנטי אין מקורות סטטיים.

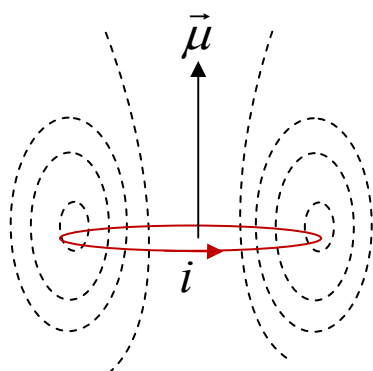
נגדיר **מונופול** כמקור סטטי של שדה מגנטי, זהו מקור תיאורטי ואין דבר כזה במציאות. נוכל להסביר את השדה המגנטי שנוצר מסביב למגנט ע"י הצטברות של מונופולים בקצוות שלו, נשים לב שזה לא נכון כי אין דבר כזה במציאות. בטבע לא מוכרת אף תופעה שבה מטען נייח כלשהו יוצר שדה מגנטי, יצירת שדה מגנטי מותנית בזרימה של מטענים.

נניח שתיאוריית המונופולים המגנטיים כן הייתה נכונה, אז אם היינו שמים את המונופולים בשדה מגנטי יפעל עליהם כוח בכיוון השדה אבל מכלל יד ימין אנו יודעים ששדה מגנטי פועל בכיוון ניצב לקווי השדה כלומר תיאוריית המונופולים לא נכונה!

אז איך מגנט יוצר שדה מגנטי?

במגנט ישנם טבעות זרימה של אלקטרונים והן אלה שיוצרות את הקטבים המגנטיים. גם בחומר לא ממוגנט יש טבעות זרימה של אלקטרונים אבל במקרה זה הן לא מסודרות וקווי השדה המגנטי מפוזרים לכל הצדדים ולכן אין שדה מגנטי. במגנט טבעות הזרימה מסודרות כמו בסליל ולכן הן יוצרות דיפול מגנטי.

דיפול מגנטי:



דיפול מגנטי הוא המקביל במגנטיות של הדיפול החשמלי.

הכיוון שלו מתקבל לפי יד ימין כתלות בכיוון הזרימה של טבעות הזרימה.

נשים לב שתופעה זו קיימת גם בסליל סופי (כי הוא מורכב מטבעות

מוזרמות).

נסתכל שוב על משוואות מקסוול, ניתן לראות שחסרה לנו משוואה אחת שמטפלת בקשר בין השדה המגנטי B לשדה החשמלי E.

ראינו שמקורות סטטיים יוצרים שדה חשמלי, תיארנו את השדה החשמלי הזה באמצעות חוק גאוס. ראינו שקווי השדה החשמלי יוצאים החוצה (או פנימה) בקו ישר מהמקור, לעומת זאת אנו יודעים שקווי השדה המגנטי יוצרים מסלול סגור כלשהו ושאינן מקורות סטטיים שיוצרים אותו.

נתאר את השדה המגנטי B באמצעות חוק גאוס $\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$, כלומר השטף של שדה מגנטי דרך משטח סגור כלשהו שווה לאפס. ביצענו את ההשוואה לאפס במקרה זה כי סה"כ המקורות הסטטיים בפנים הם אפס כי אין לשדה המגנטי מקור סטטי.

ראינו ששינוי בשטף השדה המגנטי יוצר שדה חשמלי, בטבע קיימת גם תופעה הפוכה כלומר שינוי בשדה החשמלי יוצר שדה מגנטי. נרצה לשנות את משוואות מקסוול כך שיוכלו לתאר לנו את התופעה הזאת.

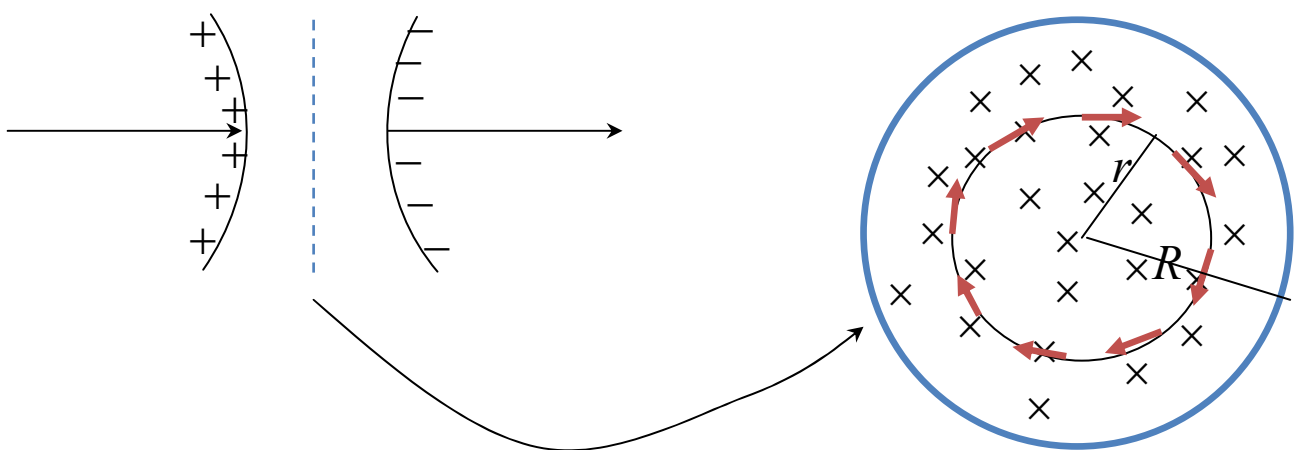
ניקח את המשוואה הרביעית (חוק אמפר) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot i$ וננסה לשפר אותה. נוסיף איבר חדש שתלוי בשטף של השדה החשמלי כך שכל עוד השדה החשמלי לא משתנה איבר זה מתאפס

והמשוואה הזאת נשארת נכונה, כלומר: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot i + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$ נשים לב שמבחינת יחידות אין בעיה בתוספת הזאת כי היחידות שלה הן יחידות של זרם (אמפר).

$$\boxed{i_d = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}} \quad \text{נסמן גודל חדש שנקרא זרם ההעתקה}$$

דוגמה:

דרך קבל לוחות אינסופי טעון שלוחותיו הם חלק מכדור בעל רדיוס R זרם זרם קבוע i. כתוצאה מהגדילה של כמות המטען השדה החשמלי הולך וגדל ולכן ייווצר שדה מגנטי מושרה שכיוונו יהיה משיקי.



בציור מימין ניתן לראות את כיוון השדה החשמלי בשחור ואת כיוון השדה המגנטי באדום.

הסבר:

נסתכל על חוק אמפר $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot (i + i_d)$, מאחר ואין זרם שעובר דרך הקבל (ובמקרה שלנו דרך לולאה כלשהי בקבל) נוכל לכתוב $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot i_d = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$ ומאחר ויש שינוי בשטף של השדה החשמלי הביטוי מימין לא מתאפס כלומר נוצר שדה מגנטי.

השדה המגנטי שנוצר יכול להיות או משיקי או רדיאלי, אם הוא היה רדיאלי צד שמאל של המשוואה היה מתאפס כי המכפלה הסקלרית הייתה אפס לכן הכיוון הוא בהכרח משיקי, אבל לאיזה כיוון?

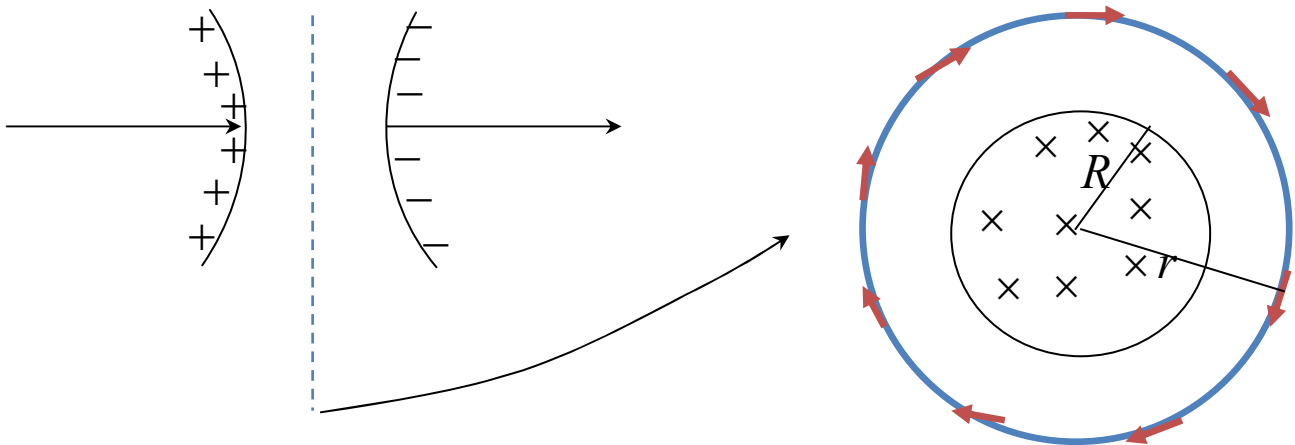
נסתכל על משוואות מקסוול (3) ו-(4), נשים לב שמשוואה (4) זו משוואה (3) עם מינוס לכן נניח שהשדה החשמלי היה שדה מגנטי שהולך וגדל אזי היה נוצר שדה חשמלי שכיוונו לפי חוק לנץ נגד כיוון השעון, בגלל ההבדל במינוס בין שתי המשוואות הכיוון של השדה המגנטי בבעיה שלנו יהיה הכיוון ההפוך כלומר בכיוון השעון. נמצא את גודל השדה:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B \cdot d\ell = B \cdot \oint d\ell = B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot i_d = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (E \cdot \pi \cdot r^2)$$

$$B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot r}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

- שאלה: מה יקרה בנקודה שנמצאת מחוץ לקבל אבל בין שני הלוחות?

גם אם נרחיב את החתך החוצה יהיה שינוי בשטף של השדה החשמלי דרכו לכן גם בנקודה כזאת יהיה שדה מגנטי מושרה

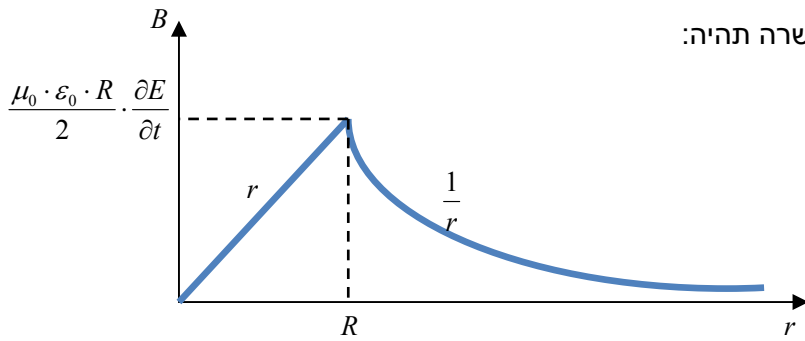


נחשב את השדה במקרה הזה:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B \cdot d\ell = B \cdot \oint d\ell = B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot i_d = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (E \cdot \pi \cdot R^2)$$

$$B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot R^2}{2r} \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

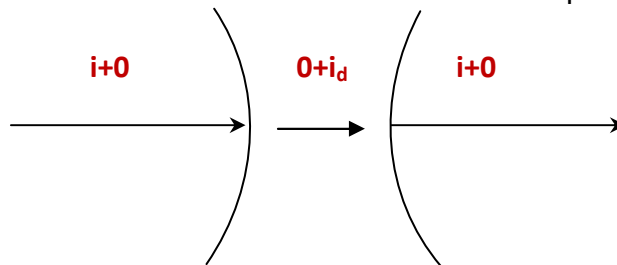
ולסיכום התנהגות השדה המגנטי המושרה תהיה:



- מהו גודל זרם ההעתק?

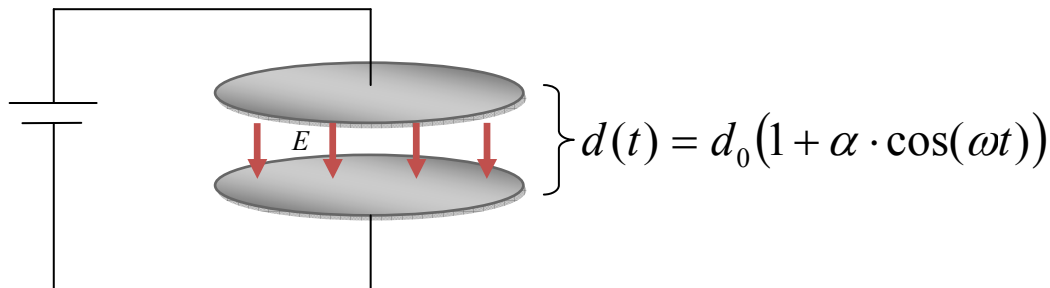
$$i_d = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (A \cdot E) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(A \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(A \cdot \frac{q}{A \cdot \epsilon_0} \right) = \frac{\partial q}{\partial t} = i$$

נשים לב שהגודל $(i + i_d)$ תמיד רציף!



דוגמה:

קבל עם שני לוחות ברדיוס a מחובר למקור מתח V_0 . המרחק בין שני לוחות הקבל מתנדנד בצורה:



מאחר והמתח לא משתנה והמרחק כן משתנה השדה החשמלי ישתנה עם הזמן ולכן השטף שלו דרך חתך כלשהו גם כן ישתנה. השינוי בשטף ייצור שדה מגנטי שבמחזור הראשון יגדל ובשני יקטן.

$$E(t) = \frac{V_0}{d(t)} = \frac{V_0}{d_0(1 + \alpha \cdot \cos(\omega t))}$$

נשתמש בחוק אמפר:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot (i + i_d) = \mu_0 \cdot i_d = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$$

$$B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\pi \cdot r^2 \cdot E(t)) \Rightarrow B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\partial E(t)}{\partial t}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot r}{2} \cdot \frac{\partial E(t)}{\partial t} = \frac{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot r}{2} \cdot \frac{V_0}{d_0} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{1 + \alpha \cdot \cos(\omega t)} \right)$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot r \cdot V_0}{2 \cdot d_0} \cdot \frac{\alpha \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)}{(1 + \alpha \cdot \cos(\omega t))^2}$$

אם נסתכל על המשוואה שקיבלנו רואים שהסינוס במונה יהיה חיובי בחצי מהמחזור ושילילי בחצי השני, מאחר ושאר האיברים הם חיוביים אז זוהי גם ההתנהגות של השדה המגנטי וזוהי בדיוק ההתנהגות שציפינו שתהיה!

נחשב את הזרם שיזרום בקבל:

$$q(t) = C(t) \cdot V_0 = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d(t)} \cdot V_0 \Rightarrow i(t) = \frac{\partial q}{\partial t} = \varepsilon_0 \cdot A \cdot V_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{d(t)} \right)$$

נראה שזרם ההעתקה מקיים את אותה משוואה:

$$i_d = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (E \cdot A) = \varepsilon_0 \cdot A \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V_0}{D(t)} \right) = \varepsilon_0 \cdot A \cdot V_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{D(t)} \right)$$

רוטור:

נגדיר גודל חדש שנקרא רוטור שפועל על וקטורים בצורה הבאה:

$$\text{rot}(\vec{u}) = \text{curl}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$$

להלן שלושה קשרים מתמטיים שנביא אותם ללא הוכחה ונשתמש בהם בהמשך:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \varphi) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = -\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

חוק סטוקס:

ראינו שלפי חוק גאוס ניתן לעבור מאינטגרל משטחי לאינטגרל נפחי ע"י הנוסחה: $\int_S \vec{F} \cdot \partial \vec{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \cdot \partial \vec{a}$
 עבור טבעת סגורה כלשהי, אינטגרציה מסלולית של שדה לאורך השפה של הטבעת ניתנת להחלפה באינטגרציה משטחית על הרוטור של אותו שדה. כלומר:

$$\oint \vec{F} \cdot \partial \vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \partial \vec{a}$$

כעת ננסה לעבור מהצגה אינטגרלית להצגה מקומית של חוקי מקסוול:

נסתכל קודם על חוק גאוס:

$$\epsilon_0 \cdot \int \vec{E} \cdot \partial \vec{a} = \epsilon_0 \cdot \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \partial V = \sum q_{in} = \int \rho \cdot \partial V$$

$$\epsilon_0 \cdot \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \partial V - \int \rho \cdot \partial V = 0 \Rightarrow \int \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \cdot \partial V = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

קיבלנו את החוק הראשון בהצגה המקומית שלו:

$$1) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ובאותו אופן נקבל את ההצגה המקומית של החוק השני:

$$2) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

נעבור למשוואה השלישית:

$$\oint \vec{E} \cdot \partial \vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \partial \vec{a} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \partial \vec{a} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \partial \vec{a}$$

$\uparrow$
סטוקס

$\uparrow$
מהגדרת השטף

$$\Rightarrow \int_S \left((\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \partial \vec{a} = 0$$

מאחר ואנחנו מחפשים את ההצגה הנקודתית אזי עבור טבעת מאוד קטנה ניתן להגיד שהיא מהווה נקודה ואז החוק השלישי בצורה הנקודתית יהיה:

$$3) \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

נעבור למשוואה הרביעית:

$$\oint \vec{B} \cdot \partial \vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \partial \vec{a} = \mu_0 \cdot (i + i_d) = \mu_0 \cdot \left(\int_S \vec{j} \cdot \partial \vec{a} + \int_S \vec{j}_d \cdot \partial \vec{a} \right)$$

סטוקס

$$\Rightarrow \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \cdot (\vec{j} + \vec{j}_d)) \cdot \partial \vec{a} = 0$$

$$4) \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{j} + \vec{j}_d)$$

זוהי המשוואה המקומית הרביעית של מקסוול.

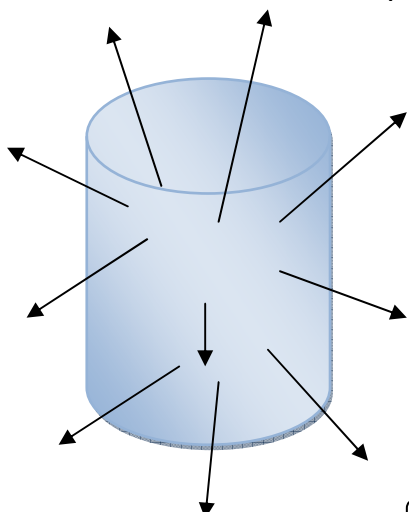
$$i_d = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial (\vec{E} \cdot A)}{\partial t} \Rightarrow \vec{j}_d = \frac{i_d}{A} = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

הערה:

דוגמה 1:

כפי שלמדנו יש בעולם שימור מטען כלומר מטען לא נוצר ולא נעלם. נראה שהמשוואה שמתארת את החוק הזה נובעת ממשוואות מקסוול.

נסתכל על שטח סגור כלשהו ונבדוק מהי כמות המטען שיוצאת ממנו ליחידת זמן:



$$\int_S \vec{j} \cdot \partial \vec{a} = - \frac{\partial q}{\partial t}$$

כמות המטענים
שיוצאים ליחידת
זמן

כל המטען
שיוצא יחסר
בפנים לכן יש
לישיח חיורח

כמות המטענים
שיחסרו בפנים

$$\int_S \vec{j} \cdot \partial \vec{a} = \int_S (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \cdot \partial V = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot \partial V = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \partial V$$

נעבור לאינטגרל נפחי

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \cdot \partial V = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

נראה שמשוואה זו נובעת ממקסוול:

נסתכל על המשוואה הרביעית ונבצע עליה דוורגנס משני הצדדים:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \cdot (\vec{j} + \vec{j}_d)) = \mu_0 \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_d)$$

זהות שראינו מקודם

המקום והזמן הם בת"ל לכן ניתן להפוך את הסדר

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_d = \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ואכן קיבלנו את חוק שימור המטען כפי שרצינו!

דוגמה 2:

ראינו שתמיד מתקיים שהגודל $i+i_d$ יהיה גודל רציף, נראה שזה נובע ממשוואות מקסוול.

נבחר משטח סגור כלשהו במרחב, עבור משטח זה יתקיים:

$$\oint (\vec{j} + \vec{j}_d) \cdot \partial \vec{a} = 0$$

$$\oint (\vec{j} + \vec{j}_d) \cdot \partial \vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{j} + \vec{j}_d) \cdot \partial V = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{j} + \vec{j}_d) = 0$$

נבצע דוורגנס על המשוואה הרביעית:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \cdot (\vec{j} + \vec{j}_d)) = \mu_0 \cdot \vec{\nabla} \cdot (\vec{j} + \vec{j}_d)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{j} + \vec{j}_d) = 0$$

וקיבלנו את חוק רציפות הזרם ממשוואות מקסוול.

סיכום משוואות מקסוול בהצגה המקומית:

$$\begin{array}{ll} 1) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & 3) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ 2) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & 4) \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{j} + \vec{j}_d) = \mu_0 \cdot (\vec{j} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{array}$$

כעת נבדוק מה יהיה משוואות מקסוול עבור נקודה בריק שבה אין מטענים ואין זרמים:

$$\begin{array}{ll} 1) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & 3) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ 2) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & 4) \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}$$

כפי שניתן לראות שתי המשוואות (3) ו-(4) קושרות את השדה המגנטי ואת השדה החשמלי ביחד. נרצה למצוא משוואות נפרדות לכל אחד מהם ללא קשר לשני.

נבצע רוטור על שני אגפי המשוואה (3):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

לפי החוק הראשון
(1) זה שווה אפס

$$= \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

כעת נבצע את אותה הפעולה על משוואה (4):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{B} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = -\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \times \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

לפי החוק השני (2)
זה שווה אפס

$$= \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

לפי החוק השלישי (3)

$$\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{B} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

כפי שניתן לראות קיבלנו את אותה המשוואה גם עבור השדה החשמלי וגם עבור השדה המגנטי!

משוואות אלה נקראות משוואות הגלים.