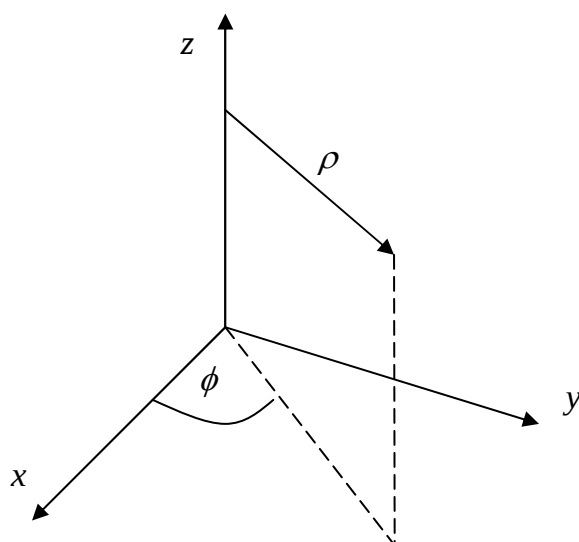


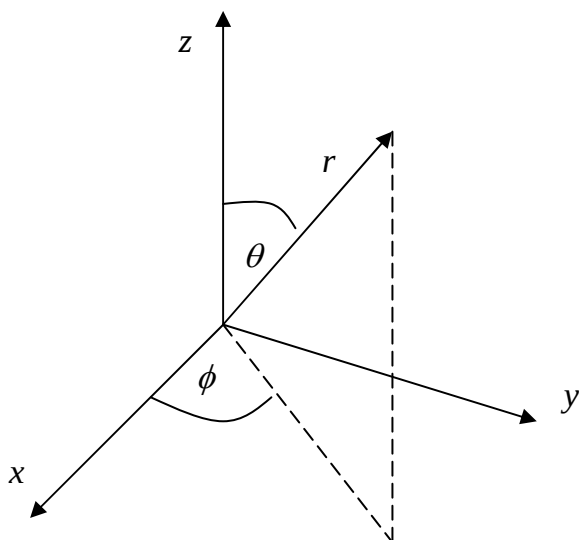
מערכות קואורדינטות – קרטזית, גלילית וכדורית

1. תיאור מערכות קואורדינטות:

מערכת גלילית:



מערכת כדורית:



2. מעבר בין קואורדינטות:

	כדורית	גלילית	קרטיזית	=
צירים קרטזיים	$r \sin \theta \cos \phi$	$\rho \cos \phi$	x	x
	$r \sin \theta \sin \phi$	$\rho \sin \phi$	y	y
	$r \cos \theta$	z	z	z
צירים ספיריתיים	$r \sin \theta$	ρ	$\sqrt{x^2 + y^2}$	ρ
	ϕ	ϕ	$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$	ϕ
	$r \cos \theta$	z	z	z
צירים קולומב	r	$\frac{\rho}{\sin \theta}$	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	r
	θ	$\tan^{-1}\left(\frac{\rho}{z}\right)$	$\cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$	θ
	ϕ	ϕ	$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$	ϕ

3. אלמנטי אורך, שטח ונפח

	כדורית	גלילית	קרטיזית	=
$d\vec{l}$	$dr\vec{1}_r + r d\theta\vec{1}_\theta + r \sin \theta d\phi\vec{1}_\phi$	$d\rho\vec{1}_\rho + \rho d\phi\vec{1}_\phi + dz\vec{1}_z$	$dx\vec{1}_x + dy\vec{1}_y + dz\vec{1}_z$	
$d\vec{a}$	$r^2 \sin \theta d\theta d\phi\vec{1}_r + r \sin \theta d\phi dr\vec{1}_\theta + r d\theta dr\vec{1}_\phi$	$\rho d\phi dz\vec{1}_\rho + \rho dz d\phi\vec{1}_\phi + \rho d\phi d\rho\vec{1}_z$	$dydz\vec{1}_x + dx dz\vec{1}_y + dx dy\vec{1}_z$	
dv	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$	$\rho d\rho d\phi dz$	$dx dy dz$	

4. מעבר בין וקטורי יחידה:

קרטזית
גלילית
כדורית

	קרטזית			גלילית			כדורית		
	$\vec{1}_x$	$\vec{1}_y$	$\vec{1}_z$	$\vec{1}_\rho$	$\vec{1}_\phi$	$\vec{1}_z$	$\vec{1}_r$	$\vec{1}_\theta$	$\vec{1}_\phi$
$\vec{1}_x$	1	0	0	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	0	$\sin \theta \cos \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\sin \phi$
$\vec{1}_y$	0	1	0	$\sin \phi$	$\cos \phi$	0	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \phi$
$\vec{1}_z$	0	0	1	0	0	1	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0
$\vec{1}_\rho$	$\cos \phi$	$\sin \phi$	0	1	0	0	$\sin \theta$	$\cos \theta$	0
$\vec{1}_\phi$	$-\sin \phi$	$\cos \phi$	0	0	1	0	0	0	1
$\vec{1}_z$	0	0	1	0	0	1	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0
$\vec{1}_r$	$\sin \theta \cos \phi$	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	0	$\cos \theta$	1	0	0
$\vec{1}_\theta$	$\cos \theta \cos \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$-\sin \theta$	$\cos \theta$	0	$-\sin \theta$	0	1	0
$\vec{1}_\phi$	$-\sin \phi$	$\cos \phi$	0	0	1	0	0	0	1

5. האופרטורים גרדיאנט, דיברגנט, רוטור ולפלסיאן

א. קואורדינטות קרטזיות:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{1}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{1}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{1}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{1}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{1}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{1}_z$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

ב. קואורדינטות גליליות:

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{1}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{1}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{1}_z \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{1}_\rho & \rho \vec{1}_\phi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{1}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{1}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \vec{1}_z \\ \nabla^2 V &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\end{aligned}$$

ג. קואורדינטות כדוריות:

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \vec{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{1}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{1}_\phi \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{1}_r & r \vec{1}_\theta & r \sin \theta \vec{1}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} = \\ &\quad \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{1}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \vec{1}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{1}_\phi \\ \nabla^2 V &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\end{aligned}$$

נספח ב: זהויות וקטוריות

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

$$\nabla(UV) = U\nabla(V) + V\nabla(U)$$

$$\nabla \cdot (V\vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla V + V\nabla \cdot \vec{A}$$

$$\nabla \times (V\vec{A}) = \nabla V \times \vec{A} + V\nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$

$$\nabla^2 \vec{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}$$