ה א ו נ י ב ר ס י ט ה ה פ ת ו ח ה

מערכות ספרתיות

מדריך למידה לספר הקורס

האוניברסיטה הפתוחה

מערכות ספרתיות

מדריך למידה • פרקים 1-7

כתיבה: אילנה בס

אמי וולדרסקי

יוסי קאופמן

יעוץ: ד"ר יהודית גל-עזר

עריכה: בת-שבע כהן

גרפיקה: רחל אהרן-שריקי

מהדורה מתוקנת – דצמבר 1992

20272

מסת"ב ISBN 965-302-476-0

בית ההוצאה לאור של האוניברסיטה הפתוחה, רח' קלאוזנר 16, רמת־אביב, ת"ד 39328, תל־אביב 61392.
The Open University of Israel, 16 Klausner St., Ramat-Aviv, P.O.Box 39328, Tel-Aviv, 61392.
Printed in Israel.

תוכן העניינים

הקדמה למדריך הלמידה

מדריך הלמידה מהווה את נקודת המוצא לכל התהליך הלימודי, עליך לקרוא בו בזמן הלימודים ולפעול לפי ההנחיות הרשומות בו. המדריך מחלק עבורך את החומר שבספר הלימוד ליחידות קטנות, מבהיר ומסביר כל יחידה ומספק תרגול.

שיטת הלימוד היא כדלהלן:

התחל את הלימוד בקריאת מדריך הלמידה. במהלך קריאתך תיתקל בהפניות לקריאת סעיפים או תת-סעיפים מהפרק שאותו הינך לומד. כאשר הינך נתקל בהפנייה כזו, קרא את הסעיף או את התת-סעיף המתאים בספר הלימוד ובסופו חזור למדריך ובדוק אם עליך לפתור שאלה או לקרוא הסבר נוסף. נסה לענות בעצמך על השאלות שבגוף המדריך מיד עם הגיעך אליהן - אל תדחה זאת לסוף! פתרון השאלות יאפשר לך לבדוק אם הבנת את החומר הנלמד. אם אינך יודע לפתור - חזור וקרא את הסעיף. את התשובות לשאלות תמצא בסוף מדריך הלמידה של הפרק שאותו אתה לומד. רצוי שלא תעבור לסעיף הבא לפני שתוודא שאתה מבין את התשובה.

בהצלחה

פרק 1

מערכות בינריות

בפרק זה נציג את המושגים "מחשב ספרתי" ו"מערכת ספרתית", נלמד מה הן מערכות מספרים שאינן עשרוניות, ונציג כמה מושגים בסיסיים הקשורים למערכות ספרתיות.

סעיף 1.1

בסעיף זה תקבל מושג כללי על מה שמכנים "מערכת ספרתית" ו"מחשב ספרתי".

קרא את סעיף 1.1.

סעיף 1.2

מערכת המספרים המוכרת לנו היא מערכת המספרים העשרונית, שבה עשר ספרות (0-9). ואולם, רוב המחשבים פועלים בעזרת מערכת המספרים הבינרית, שבה שתי ספרות בלבד (0,1). סעיף 1.2 יבהיר לך, בפרט, מהי מערכת המספרים הבינרית, ובכלל, מהי מערכת מספרים שבה מספר כלשהו של ספרות. בסעיף זה גם תלמד כיצד מבצעים פעולות חשבון במערכת מספרים שאינה עשרונית.

קרא את סעיף 1.2.

ראינו, שקל לכפול מספרים בינריים, שכן כל המכפלות החלקיות הן 1 או 0. ואולם, כשכופלים שתי ספרות בבסיס גדול יותר, עשויים לקבל מספר בעל יותר מספרה אחת. נדגים פעולת כפל בבסיס 3.

$$\begin{array}{r} 212 \\ \times\ 120 \\ \hline 000 \\ 1201 \\ 212 \\ \hline 110210 \end{array}$$

נסביר ביתר פירוט את השלב שבו כפלנו את המספר 212 בספרה 2.
2×2 בבסיס 3 הוא המספר 11 (2+1=10, 10+1=11, ולכן 2×2=2+2=11). לפיכך רושמים את הספרה 1 וזוכרים שיש להוסיף 1 לספרה הבאה בתוצאה.

2×1 בבסיס 3 הוא המספר 2, אך יש להוסיף 1 ומקבלים $2+1=10$. לפיכך רושמים את הספרה 0 וזוכרים שיש להוסיף 1 לספרה הבאה בתוצאה.

שוב, $2\times2=11$. יש להוסיף 1 ומקבלים $11+1=12$, ואלו שתי הספרות הבאות בתוצאה.

לסיכום, בבסיס 2: $212\times2=1201$.

שאלה 1

כתוב את עשרים המספרים הראשונים בבסיס 3.

שאלה 2

1. חבר את זוגות המספרים הבאים בבסיסים הנתונים:
   - א. 1230, 23 בבסיס 4.
   - ב. 135.4, 43.2 בבסיס 6.
   - ג. 367, 715 בבסיס 8.
   - ד. 296, 57 בבסיס 12.
2. כפול את זוג המספרים הראשון (בבסיס 4).

אם תרצה, תוכל לכפול גם את שאר זוגות המספרים, אם כי זה מייגע מאוד.

סעיף 1.3

סעיף זה עוסק בהמרת מספרים מבסיס לבסיס.

קרא את תחילת סעיף 1.3 (עד דוגמה 1.1 - לא כולל), העוסקת בהמרות מבסיס כלשהו לבסיס עשרוני.

המרת מספר שלם עשרוני לבסיס אחר

יהי N מספר עשרוני שלם. אם המספר השווה לו בבסיס r הוא

$$N_r=(a_n a_{n-1}\dots a_2 a_1 a_0)_r$$

אז
$$N=a_n r^n+a_{n-1} r^{n-1}+\dots+a_1 r^1+a_0$$

ולכן
$$N=(a_n r^{n-1}+a_{n-1} r^{n-2}+\dots+a_2 r^1+a_1)r+a_0$$

עתה קל לראות, שכאשר מחלקים N ב-r, מקבלים מנה השווה לביטוי שבסוגריים ושארית a_0. שארית זו היא הספרה הפחות משמעותית במספר N_r. את המנה שהתקבלה, $a_n r^{n-1}+a_{n-1} r^{n-2}+\dots+a_2 r^1+a_1$, נחלק שוב ב-r, דהיינו נחלק את $(a_n r^{n-2}+a_{n-1} r^{n-3}+\dots+a_2)r+a_1$ ב-r. קל לראות, שנקבל מנה השווה לביטוי שבסוגריים ושארית a_1. הפעם השארית היא הספרה השנייה מימין ב-N_r

אם נמשיך לחלק ב-r באופן זה, נקבל בזו אחר זו את הספרות
$a_2, a_3, \dots, a_n$.
עלינו להמשיך את התהליך, עד שנקבל מנה 0 ושארית a_n, שהיא הספרה המשמעותית ביותר ב-N_r. נדגים תהליך זה להלן.

דוגמה 1.1

נמיר את המספר העשרוני 41 למספר בינרי.
ראשית נחלק את 41 ב-2 - המנה 20 והשארית 1.
נחלק את 20 ב-2 - המנה 10 והשארית 0.
נחלק את 10 ב-2 - המנה 5 והשארית 0.
נחלק את 5 ב-2 - המנה 2 והשארית 1.
נחלק את 2 ב-2 - המנה 1 והשארית 0.
נחלק את 1 ב-2 - המנה 0 והשארית 1.
כיוון שהמנה 0, התהליך מסתיים ומקבלים את המספר הבינרי 101001.

דוגמה 1.2

נמיר את המספר העשרוני 167 למספר בבסיס 12.
נחלק את 167 ב-12 - המנה 13 והשארית B.
נחלק את 13 ב-12 - המנה 1 והשארית 1.
נחלק את 1 ב-12 - המנה 0 והשארית 1.
כיוון שהמנה 0, התהליך מסתיים ומקבלים את המספר 11B בבסיס 12.

המרת שבר עשרוני לבסיס אחר

יהי N שבר עשרוני. אם המספר השווה לו בבסיס r הוא $N_r=(0.a_{-1}a_{-2}\dots a_{-n})$, אז $N=a_{-1}r^{-1}+a_{-2}r^{-2}+\dots+a_{-n}r^{-n}$. אם נכפול מספר זה ב-r, נקבל את המספר $a_{-1}+a_{-2}r^{-1}+a_{-3}r^{-2}+\dots+a_{-n}r^{-n+1}$.
קיבלנו אם כן מספר שלם a_{-1} (הספרה הראשונה אחרי הנקודה במספר בבסיס r) ושבר: $a_{-2}r^{-1}+a_{-3}r^{-2}+\dots+a_{-n}r^{-n+2}$.
קיבלנו את הספרה a_{-1}. כעת נחשב את הספרה a_{-2}. לשם כך נכפול את השבר שהתקבל ב-r. נקבל מספר שלם a_{-2} ושבר: $a_{-3}r^{-1}+a_{-4}r^{-2}+\dots+a_{-n}r^{-n+3}$.
נמשיך בתהליך, עד שנגיע לדיוק הרצוי (מספר ספרות רצוי אחרי הנקודה), או עד שנגיע לשבר השווה ל-0.

קרא את דוגמאות 1.3 ו-1.4 בסעיף 1.3.

המרת מספר כלשהו עשרוני לבסיס אחר

כדי להמיר מספר עשרוני לבסיס r יש לבצע את הפעולות האלה:

1. הפרד את המספר לשני חלקים - השלם והשבר.
2. מצא את ייצוגו של כל חלק בנפרד בבסיס r.
3. רשום את המספר כולו בבסיס r; סמן נקודה מפרידה בין השלם לשבר.

לדוגמה: נמיר את המספר העשרוני 41.6875 למספר בינרי.

בדוגמה 1.1 קיבלנו ש-$(41)_{10}=(101001)_2$.

בדוגמה 1.3 קיבלנו ש-$0.6875_{10}=(0.1011)_2$.

לפיכך: $(41.6875)_{10}=(101001.1011)_2$.

סעיף 1.4

קרא את סעיף 1.4.

שאלה 3

המר את המספרים הבאים כנדרש:

1. 225.225 מבסיס עשרוני לבסיס בינרי, אוקטלי והקסדצימלי.
2. 11010111.110 מבסיס בינרי לבסיס עשרוני, אוקטלי והקסדצימלי.
3. 623.77 מבסיס אוקטלי לבסיס עשרוני, בינרי והקסדצימלי.
4. 2AC5.D מבסיס הקסדצימלי לבסיס עשרוני, אוקטלי ובינרי.

סעיף 1.5

קרא את סעיף 1.5.

שאלה 4

חשב את המשלימים ל-1 ול-2 עבור המספרים הבינריים האלה:

1010101, 0111000, 0000001, 00000.

שאלה 5

חשב את המשלימים ל-9 ול-10 עבור המספרים העשרוניים האלה:

13579, 09900, 90090, 10000, 00000.

שאלה 6

הוכח שתהליך החיסור של שני מספרים בעזרת המשלים ל-(r-1) הוא נכון.

שאלה 7

חשב את תוצאות פעולות החיסור הבאות במספרים בינריים בעזרת -

א. המשלים ל-1;

ב. המשלים ל-2.

בדוק את תשובותיך בעזרת חיסור רגיל.

1. 11010-1101
2. 11010-100000
3. 10010-10011
4. 100-110000

שאלה 8

חשב את תוצאות פעולות החיסור הבאות במספרים עשרוניים בעזרת -

א. המשלים ל-9;

ב. המשלים ל-10.

בדוק את תשובותיך בעזרת חיסור רגיל.

1. 5250-321
2. 3570-2100
3. 753-864
4. 20-1000

סעיף 1.6

קרא את הסעיף עד התת-סעיף "קודים מזהי שגיאות" - לא כולל.

שאלה 9

הצג את המספר העשרוני 8620 בקודים האלה:

1. בקוד BCD
2. בקוד Excess-3
3. בקוד 2421
4. בקוד בינרי.

שאלה 10

עבור הקודים המשוקללים 3,3,2,1 ו-2-,4,4,3 של הספרות העשרוניות קבע את כל הטבלאות האפשריות באופן שהמשלים ל-9 של כל ספרה עשרונית מתקבל, אם מחליפים 1-ים ב-0-ים ו-0-ים ב-1-ים.

שאלה 11

מצא קוד בינרי להצגת כל הספרות בבסיס 6 באופן שהמשלים ל-5 מתקבל, אם מחליפים 1-ים ב-0-ים ו-0-ים ב-1-ים בסיביות הקוד.

קרא את התת-סעיף "קודים מזהי שגיאות".

שאלה 12

הוסף לקוד 1-2-84 את סיבית ביקורת הזוגיות באופן שמספר ה-1-ים יהיה אי-זוגי.

קרא את התת-סעיף "הקוד המשקף".

שאלה 13

הגדר שני צירופים נוספים לקוד המשקף, השונים מהצירוף שמופיע בטבלה 1.4.

קרא את התת-סעיף "קודים אלפנומריים".

סעיף 1.7

בסעיף זה תכיר את מושג האוגר. אוגר הוא קבוצה של סיביות המיועדת להכיל מידע. הזיכרון של המחשב בנוי מאלפי אוגרים.

קרא את סעיף 1.7.

שאלה 14

הצג את קונפיגורציות הסיביות של אוגר בן 24 תאים, אם תכולתו מייצגת -

1. את המספר העשרוני 295 בשיטה הבינרית;
2. את המספר העשרוני 295 בקוד BCD;
3. את התווים 'XY5' בקוד EBCDIC.

שאלה 15

מצבו של אוגר בן 12 תאים הוא 010110010111.

מצא את תוכנו אם הוא מייצג -

1. שלוש ספרות עשרוניות בקוד BCD;
2. שלוש ספרות עשרוניות בקוד Excess-3;
3. שלוש ספרות עשרוניות בקוד 2421;
4. שני תווים בקוד הפנימי של טבלה 1.5.

שאלה 16

מה התכולה של כל אוגר שבאיור 1.3, אם שווי-הערך העשרוניים של שני המספרים הבינריים שחוברו הם 257 ו-1050?

הנח שכל האוגרים בני 12 תאים.

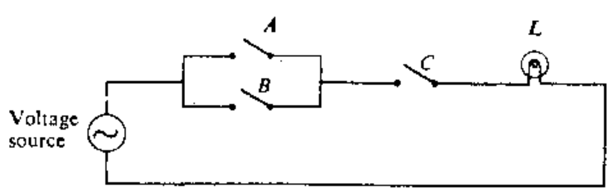
סעיף 1.8

בסעיף זה תכיר את הלוגיקה הבינרית ואת הדרך למימושה במערכת ספרתית בינרית.

קרא את סעיף 1.8.

שאלה 17

בטא את מעגל המיתוג הבא בסימונים של לוגיקה בינרית.



סעיף 1.9

קרא את סעיף 1.9.

קודים לזיהוי ותיקון שגיאות

בספר הלימוד מוצגים קודים המזהים שגיאה בסיבית יחידה. ישנן כמה הרחבות. האחת - קודים המזהים שגיאה בסיבית יחידה או בשתי סיביות. האחרת - קודים המזהים שגיאה בסיבית יחידה ואף יכולים לתקן אותה. הכללית - אפשר לכתוב קוד המזהה שגיאות בסיבית יחידה עד k סיביות ומתקן שגיאות בלא יותר מ-j סיביות ($j \le k$), ואולם, לקודים אלו יש חיסרון - הם ארוכים יותר.

כעת נדגים קוד המזהה שגיאה בסיבית יחידה ומתקן אותה -

קוד Hamming ל-BCD.

לכל ספרה עשרונית יש קוד BCD, ובו ארבע סיביות שיסומנו להלן ב-$m_1m_2m_3m_4$.

קוד Hamming ל-BCD הוא בן שבע סיביות שיסומנו ב-$P_3P_2m_1P_1m_2m_3m_4$.

m_i בקוד זה שווה ל-m_i בקוד BCD.

- P_3 - משלים את מספר ה-1-ים בסיביות 1,3,5,7 (משמאל) לזוגי (אלו הסיביות המסומנות ב-P_3, m_1, m_2, m_4).
- P_2 - משלים את מספר ה-1-ים בסיביות 2,3,6,7 לזוגי.
- P_1 - משלים את מספר ה-1-ים בסיביות 4,5,6,7 לזוגי.

נבהיר זאת בעזרת הטבלה שלהלן:

ספרה עשרונית	קוד BCD $m_1m_2m_3m_4$	קוד Hamming ל-BCD $P_3P_2m_1P_1m_2m_3m_4$
0	0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0
1	0 0 0 1	1 1 0 1 0 0 1
2	0 0 1 0	0 1 0 1 0 1 0
3	0 0 1 1	1 0 0 0 0 1 1
4	0 1 0 0	1 0 0 1 1 0 0
5	0 1 0 1	0 1 0 0 1 0 1
6	0 1 1 0	1 1 0 0 1 1 0
7	0 1 1 1	0 0 0 1 1 1 1
8	1 0 0 0	1 1 1 0 0 0 0
9	1 0 0 1	0 0 1 1 0 0 1

למשל, מכיוון שקוד BCD של הספרה 5 הוא 0101, הרי קוד Hamming ל-BCD הוא 0100101. שים לב ש-$P_3=0$, כיוון שבאופן זה סכום ה-1-ים בסיביות 1,3,5,7 הוא זוגי (2).

$P_2=1$ כיוון שבאופן זה סכום ה-1-ים בסיביות 2,3,6,7 הוא זוגי (2).

$P_1=0$ כיוון שבאופן זה סכום ה-1-ים בסיביות 4,5,6,7 הוא זוגי (2).

כיצד מזהים שגיאה?

אם סיבית יחידה הופכת מ-1 ל-0 או מ-0 ל-1, הרי לפחות אחת משלוש הרביעיות (1,3,5,7; 2,3,6,7; 4,5,6,7) תיפגע ומספר ה-1-ים שבה לא יהיה זוגי.

כיצד מתקנים שגיאה?

נגדיר שלושה ערכים (C_3, C_2, C_1):

אם סכום ה-1-ים בסיביות 1,3,5,7 אי-זוגי - $C_3=1$
ולא - $C_3=0$
אם סכום ה-1-ים בסיביות 2,3,6,7 אי-זוגי - $C_2=1$
ולא - $C_2=0$
אם סכום ה-1-ים בסיביות 4,5,6,7 אי-זוגי - $C_1=1$
ולא - $C_1=0$

לדוגמה: נניח שבקוד Hamming של הספרה העשרונית 1: 1101001, חלה שגיאה בסיבית החמישית ומתקבל 1101101. אז:

$C_3=1$ כיוון שסכום ה-1-ים בסיביות 1,3,5,7 אי-זוגי (3).

$C_2=0$ כיוון שסכום ה-1-ים בסיביות 2,3,6,7 זוגי (2).

$C_1=1$ כיוון שסכום ה-1-ים בסיביות 4,5,6,7 אי-זוגי (3).

שרשר כעת את הספרות $C_1C_2C_3$ בסדר זה ותקבל את המספר 101. $(101)_2=(5)_{10}$.
5 הוא המספר של הסיבית שבה חלה השגיאה! כל שנותר הוא להפוך את ערכה של הסיבית החמישית ולקבל את הקוד המתוקן.

באופן כללי, אם נקבע את ערכי C_3, C_2, C_1 כנדרש אז:

אם $(C_1C_2C_3)_2=(0)_{10}$, אז לא קרתה כל שגיאה.

אם $(C_1C_2C_3)_2=(k)_{10}$ ו-$0<k$, אז קרתה שגיאה בסיבית שמיקומה k.

תוכל לחשוב בעצמך מדוע שיטה זו "עובדת" בצורה נכונה.
לבסוף נעיר, שניתן לזהות שגיאה ולתקן אותה בעזרת רכיבים אלקטרוניים. כדי להבין איך הדבר נעשה נדרש ידע נוסף. ידע כזה יירכש בקורס "מערכות ספרתיות".

סיכום פרק 1

ראשית למדנו מה פרוש ייצוג מספרים בבסיס כלשהו, והדגש הושם על הייצוג הבינרי (זו הצורה לייצג מספרים במערכות ספרתיות).
ראינו כיצד ניתן להמיר מספר מבסיס לבסיס ומהו המשלים ל-r והמשלים ל-r-1.
בהמשך למדנו לבצע פעולות אריתמטיות במספרים המיוצגים בבסיס נתון:

א. חיבור

ב. חיסור - בשתי דרכים:

1. השלמת המחסר ל-r וחיבורו למחוסר
2. השלמת המחסר ל-r-1 וחיבורו למחוסר.

ג. כפל.

בהמשך למדנו מהי פעולה לוגית והתודענו לפעולות NOT,OR,AND. למדנו עוד שיטה לייצוג מידע - שיטת הקידוד הבינרית. הדגמנו אותה בעזרת קודים עשרוניים (BCD, Excess-3, 84-2-1; ראה טבלה 1.2) וקודים אלפאנומריים (EBCDIC, ASCII; ראה טבלה 1.5).
במיוחד עסקנו בקודים בינריים לגילוי ותיקון שגיאות.

תשובות לשאלות בפרק 1

תשובה 1

בבסיס 3 משתמשים בספרות 0, 1 ו- 2.

המספר העשרוני 1 שווה ל- 1×3^0, ולכן בבסיס 3 הוא 1.

נבצע את ההמרה גם באופן טכני, כפי שמוסבר בסעיף 1.3 (חזור ובדוק זאת לאחר שתלמד את הסעיף):

כשמחלקים 1 ב- 3 מקבלים מנה 0 ושארית 1, ולכן $(1)_{10}=(1)_3$.

המספר העשרוני 2 שווה ל- 2×3^0, ולכן בבסיס 3 הוא 2.

ובאופן טכני:

כשמחלקים 2 ב- 3 מקבלים מנה 0 ושארית 2, ולכן $(2)_{10}=(2)_3$.

המספר העשרוני 3 שווה ל- 1×3^1, ולכן בבסיס 3 הוא 10.

ובאופן טכני:

כשמחלקים 3 ב- 3 מקבלים מנה 1 ושארית 0;

כשמחלקים 0 ב- 3 מקבלים מנה 0 ושארית 0, ולכן $(3)_{10}=(10)_3$.

המספר העשרוני 4 שווה ל- $1\times3^1+1\times3^0$, ולכן בבסיס 3 הוא 11.

ובאופן טכני:

כשמחלקים 4 ב- 3 מקבלים מנה 1 ושארית 1;

כשמחלקים 1 ב- 3 מקבלים מנה 0 ושארית 1, ולכן $(4)_{10}=(11)_3$.

בשאלה זו אפשר לקבוע את הצגת מספר עשרוני i בבסיס 3 בשיטה פשוטה יותר - להוסיף 1 לייצוג בבסיס 3 של המספר העשרוני i-1:

$(1)_{10}=(1)_3$, ולפיכך $(2)_{10}=(1+1)_3=(2)_3$.

$(2)_{10}=(2)_3$, ולפיכך $(3)_{10}=(2+1)_3=(10)_3$.

$(3)_{10}=(10)_3$, ולפיכך $(4)_{10}=(10+1)_3=(11)_3$.

$(4)_{10}=(11)_3$, ולפיכך $(5)_{10}=(11+1)_3=(12)_3$.

$(5)_{10}=(12)_3$, ולפיכך $(6)_{10}=(12+1)_3=(20)_3$.

$(6)_{10}=(20)_3$, ולפיכך $(7)_{10}=(20+1)_3=(21)_3$.

$(7)_{10}=(21)_3$, ולפיכך $(8)_{10}=(21+1)_3=(22)_3$.

$(8)_{10}=(22)_3$, ולפיכך $(9)_{10}=(22+1)_3=(100)_3$.

נציג את הטבלה במלואה:

בסיס 10	בסיס 3
1	1
2	2
3	10
4	11
5	12
6	20
7	21
8	22
9	100
10	101
11	102
12	110
13	111
14	112
15	120
16	121
17	122
18	200
19	201
20	202

תשובה 2

1. נחבר את זוגות המספרים הנתונים:

א. $(1230)_4+(23)_4$

$0+3=3$ ולכן הספרה הראשונה (מימין) של הסכום היא 3.

$3+2=11$ ולכן הספרה השנייה של הסכום היא 1, ויש נשא של 1.

$2+1=3$ ולכן הספרה השלישית היא 3.

הספרה הרביעית היא 1.

לפיכך: $(23)_4+(1230)_4=(1313)_4$

מכאן ואילך נציג את תרגילי החיבור ללא הפרוט שלעיל.

ב. בבסיס 6.

$$\begin{array}{r} 135.4 \\ +\ 43.2 \\ \hline 223.0 \end{array}$$

ג. בבסיס 8.

$$\begin{array}{r} 367 \\ +\ 715 \\ \hline 1304 \end{array}$$

ד. בבסיס 12

$$\begin{array}{r} 296 \\ +\ 57 \\ \hline 331 \end{array}$$

2. נכפול את זוגות המספרים הנתונים:

א. בבסיס 4.

$$\begin{array}{r} 1230 \\ \times\ 23 \\ \hline 11010 \\ 3120 \\ \hline 102210 \end{array}$$

ב. בבסיס 6.

$$\begin{array}{r} 135.4 \\ \times\ 43.2 \\ \hline 3152 \\ 4550 \\ 10344 \\ \hline 11314.52 \end{array}$$

ג. בבסיס 8.

$$\begin{array}{r} 367 \\ \times\ 715 \\ \hline 2323 \\ 367 \\ 3301 \\ \hline 336313 \end{array}$$

ד. בבסיס 12.

$$\begin{array}{r} 296 \\ \times\ 57 \\ \hline 1766 \\ 11B6 \\ \hline 13706 \end{array}$$

תשובה 3

נבצע רק חלק מההמרות, ונדרוש דיוק של 3 ספרות אחרי הנקודה.

א. המרות מבסיס עשרוני

1. נמיר את 225.225 מבסיס עשרוני לבסיס בינרי:

המרת 225: (שארית 1) 225/2=112

(שארית 0) 112/2= 56

(שארית 0) 56/2= 28

(שארית 0) 28/2= 14

(שארית 0) 14/2= 7

(שארית 1) 7/2= 3

(שארית 1) 3/2= 1

(שארית 1) 1/2= 0

על פי השאריות מקבלים את המספר הבינרי 11100001.

המרת 0.225: $0.225\times2=0.45$ (החלק השלם הוא 0)

$0.45\times2=0.9$ (החלק השלם הוא 0)

$0.9\times2=1.8$ (החלק השלם הוא 1)

על פי החלקים השלמים מקבלים את המספר הבינרי 0.001.

לפיכך: $(225.225)_{10}=(11100001.001)_2$.

2. נמיר את 225.225 מבסיס עשרוני לבסיס אוקטלי:

המרת 225: $225/8=28$ (שארית 1)

$28/8=3$ (שארית 4)

$3/8=0$ (שארית 3)

על פי השאריות מקבלים את המספר האוקטלי 341.

המרת 0.225: $0.225\times8=1.8$ (החלק השלם הוא 1)

$0.8\times8=6.4$ (החלק השלם הוא 6)

$0.4\times8=3.2$ (החלק השלם הוא 3)

על פי החלקים השלמים מקבלים את המספר האוקטלי 0.163.

לפיכך: $(225.225)_{10}=(341.163)_8$.

ב. המרות לבסיס עשרוני

1. נמיר את 11010111.110 מבסיס בינרי לבסיס עשרוני:

בבסיס עשרוני נקבל:

$$2^7+2^6+2^4+2^2+2^1+2^0+2^{-1}+2^{-2}=$$

$$=128+64+16+4+2+1+0.5+0.25=215.75$$

2. נמיר את 2AC5.D מבסיס הקסדצימלי לבסיס עשרוני:

בבסיס עשרוני נקבל:

$$2\times16^3+10\times16^2+12\times16^1+5\times16^0+13\times16^{-1}=$$

$$=8192+2560+192+5+\frac{13}{16}=10949\frac{13}{16}=10949.8125$$

ג. המרות פשוטות נוספות

1. נמיר את 11010111.110 מבסיס בינרי לבסיס אוקטלי:

$(110)_2=(6)_8$

$(111)_2=(7)_8$

$(010)_2=(2)_8$

$(11)_2=(3)_8$

לפיכך: $(11010111.110)_2=(327.6)_8$.

2. נמיר את 2AC5.D מבסיס הקסדצימלי לבסיס בינרי:

$$(2)_{16}=(0010)_2$$
$$(A)_{16}=(1010)_2$$
$$(C)_{16}=(1100)_2$$
$$(5)_{16}=(0101)_2$$
$$(D)_{16}=(1101)_2$$

לפיכך: $(2AC5.D)_{16}=(0010101011000101.1101)_2=$
$=(10101011000101.1101)_2$

נעיר שאם אין דרך פשוטה להמיר מספר מבסיס אחד למשנהו, רצוי לבצע את ההמרה בשני שלבים: בשלב ראשון נמיר מהבסיס המבוקש לבסיס עשרוני, ובשלב השני נמיר מבסיס עשרוני לבסיס המבוקש. משתמשים בבסיס עשרוני, כיוון שבבסיס זה קל לנו לבצע את פעולות החשבון.

תשובה 4

כדי לחשב את המשלים ל-1 של מספר בינרי יש להפוך כל 0 ל-1, וכל 1 ל-0.
בחישוב המשלים ל-2 של מספר בינרי שלם יש להוסיף 1 למשלים ל-1 של המספר (מבלי לרשום את הנשא של הספרה המשמעותית ביותר).

המספרים הבינריים:	1010101	0111000	0000001	00000
המשלימים ל-1:	0101010	1000111	1111110	11111
המשלימים ל-2:	0101011	1001000	1111111	00000

תשובה 5

כדי לחשב את המשלים ל-9 של מספר עשרוני יש להפחית כל ספרה מ-9.
כדי לחשב את המשלים ל-10 של מספר עשרוני שלם יש להוסיף 1 למשלים ל-9 של המספר (מבלי לרשום את הנשא של הספרה המשמעותית ביותר).

המספרים העשרוניים:	13579	09900	90090	10000	00000
המשלימים ל-9:	86420	90099	09909	89999	99999
המשלימים ל-10:	86421	90100	09910	90000	00000

תשובה 6

נוכיח שתהליך החיסור של שני מספרים בעזרת המשלים ל-$(r-1)$ הוא נכון.
נעקוב אחר תהליך החיסור של B מ-A; A ו-B בעלי n ספרות משמאל לנקודה ו-m ספרות מימין לה.
תחילה מחשבים את המשלים ל-$(r-1)$ של B ומקבלים את המספר $r^n-r^{-m}-B$. מוסיפים אותו ל-A ומקבלים את המספר $A-B+r^n-r^{-m}$.
נבחן את שתי האפשרויות הקיימות:

א. אם $A>B$ אז $A-B>0$, ולכן $r^n-r^{-m}+A-B>r^n-r^{-m}$, ולפיכך יש נשא. את הנשא מוסיפים לספרה הכי פחות משמעותית של תוצאת הביניים $A-B+r^n-r^{-m}$. פעולה זו זהה להפחתת r^n והוספת r^{-m}, ולפיכך מקבלים את המספר $A-B+r^n-r^{-m}-r^n+r^{-m}=A-B$, וזו אכן התוצאה הנכונה.

ב. אם $A\le B$ אז $A-B\le 0$, ולכן $A-B+r^n-r^{-m}\le r^n-r^{-m}$, ולפיכך אין נשא. מחשבים את המשלים ל-$(r-1)$ של תוצאת הביניים $A-B+r^n-r^{-m}$, ומוסיפים את סימן השלילה. מכאן שמתקבל המספר $-[r^n-r^{-m}-(A-B+r^n-r^{-m})]=-(B-A)$, וזו אכן התוצאה הנכונה.

בכך הוכחנו שהתהליך נכון.

תשובה 7

נבצע את פעולות החיסור המבוקשות בשיטות השונות:

1.

<u>חיסור רגיל</u>	<u>חיסור בעזרת המשלים ל-1</u>	<u>חיסור בעזרת המשלים ל-2</u>
	המשלים ל-1 של 01101 הוא 10010.	המשלים ל-2 של 01101 הוא 10011.
$\begin{array}{r}11010\\-\ \ 1101\\\hline 1101\end{array}$	$\begin{array}{r}11010\\+\ 10010\\\hline 01100\\+\qquad 1\\\hline 01101\end{array}$ (יש נשא)	$\begin{array}{r}11010\\+\ 10011\\\hline 01101\end{array}$ (יש נשא)

2.

<u>חיסור רגיל</u>	<u>חיסור בעזרת המשלים ל-1</u>	<u>חיסור בעזרת המשלים ל-2</u>
	המשלים ל-1 של 100000 הוא 011111.	המשלים ל-2 של 01101 הוא 100000.
$\begin{array}{r}11010\\-\ 100000\\\hline -110\end{array}$	$\begin{array}{r}011010\\+\ 011111\\\hline 111001\end{array}$ (אין נשא) שלילת המשלים ל-1 היא 000110-.	$\begin{array}{r}011010\\+\ 100000\\\hline 111010\end{array}$ (אין נשא) שלילת המשלים ל-2 היא 000110-.

3. חיסור <u>רגיל</u>

10010
\-
10011

-1

חיסור בעזרת <u>המשלים ל-1</u>

המשלים ל-1 של 10011 הוא 01100.

10010
\+
01100

11110 (אין נשא)
שלילת המשלים ל-1 היא -00001.

חיסור בעזרת <u>המשלים ל-2</u>

המשלים ל-2 של 10011 הוא 01101.

10010
\+
01101

11111 (יש נשא)
שלילת המשלים ל-2 היא -00001.

4. חיסור <u>רגיל</u>

100
\-
110000

-101100

חיסור בעזרת <u>המשלים ל-1</u>

המשלים ל-1 של 110000 הוא 001111.

000100
\+
001111

010011 (אין נשא)
שלילת המשלים ל-1 היא -101100.

חיסור בעזרת <u>המשלים ל-2</u>

המשלים ל-2 של 110000 הוא 010000.

000100
\+
010000

010100 (אין נשא)
שלילת המשלים ל-2 היא -101100.

תשובה 8

נבצע את פעולות החיסור המבוקשות בשיטות השונות:

1. חיסור <u>רגיל</u>

5250
\-
321

4929

חיסור בעזרת <u>המשלים ל-9</u>

המשלים ל-9 של 0321 הוא 9678.

5250
\+
9678

4928 (יש נשא)
\+
1

4929

חיסור בעזרת <u>המשלים ל-10</u>

המשלים ל-10 של 0321 הוא 9679.

5250
\+
9679

4929 (יש נשא)

2. חיסור רגיל

$$\begin{array}{r} 3570 \\ -\ 2100 \\ \hline 1470 \end{array}$$

חיסור בעזרת המשלים ל-9

המשלים ל-9 של 2100 הוא 7899.

$$\begin{array}{r} 3570 \\ +\ 7899 \\ \hline 1469 \\ +\ 1 \\ \hline 1470 \end{array}$$

1469 (יש נשא)

חיסור בעזרת המשלים ל-10

המשלים ל-10 של 2100 הוא 7900.

$$\begin{array}{r} 3570 \\ +\ 7900 \\ \hline 1470 \end{array}$$

1470 (יש נשא)

3. חיסור רגיל

$$\begin{array}{r} 753 \\ -\ 864 \\ \hline -111 \end{array}$$

חיסור בעזרת המשלים ל-9

המשלים ל-9 של 864 הוא 135.

$$\begin{array}{r} 753 \\ +\ 135 \\ \hline 888 \end{array}$$

888 (אין נשא)
שלילת המשלים ל-9 היא 111-.

חיסור בעזרת המשלים ל-10

המשלים ל-10 של 864 הוא 136.

$$\begin{array}{r} 753 \\ +\ 136 \\ \hline 889 \end{array}$$

889 (אין נשא)
שלילת המשלים ל-10 היא 111-.

4. חיסור רגיל

$$\begin{array}{r} 20 \\ -\ 1000 \\ \hline -980 \end{array}$$

חיסור בעזרת המשלים ל-9

המשלים ל-9 של 1000 הוא 8999.

$$\begin{array}{r} 0020 \\ +\ 8999 \\ \hline 9019 \end{array}$$

9019 (אין נשא)
שלילת המשלים ל-1 היא 0980-.

חיסור בעזרת המשלים ל-10

המשלים ל-10 של 1000 הוא 9000.

$$\begin{array}{r} 0020 \\ +\ 9000 \\ \hline 9020 \end{array}$$

9020 (אין נשא)
שלילת המשלים ל-2 היא 0980-.

תשובה 9

נציג את המספר 8620 בקודים הנדרשים:

1. **קוד BCD**: הקוד של כל ספרה ב- BCD הוא הייצוג שלה כמספר בינרי בעל ארבע ספרות.

code(0)=0000, code(2)=0010, code(6)=0110, code(8)=1000, ולכן 1000011000100000 הוא הקוד של 8620.

2. **קוד Excess-3:** ניתן לראות בטבלה 1.2 בספר הלימוד שבקוד Excess-3 מתקיים: code(0)=0011, code(2)=0101, code(6)=1001, code(8)=1011, ולכן 1011100101010011 הוא הקוד של 8620.

3. **קוד 2421:** באותה הטבלה ניתן לראות ש-code(0)=0000, code(2)=0010, code(6)=1100, code(8)=1110, ולכן 1110110000100000 הוא הקוד של 8620.

4. **קוד בינרי:** נמיר את 8620 מבסיס עשרוני לבסיס בינרי:

8620/2=4310 (שארית 0)
4310/2=2155 (שארית 0)
2155/2=1077 (שארית 1)
1077/2= 538 (שארית 1)
538/2= 269 (שארית 0)
269/2= 134 (שארית 1)
134/2= 67 (שארית 0)
67/2= 33 (שארית 1)
33/2= 16 (שארית 1)
16/2= 8 (שארית 0)
8/2= 4 (שארית 0)
4/2= 2 (שארית 0)
2/2= 1 (שארית 0)
1/2= 0 (שארית 1)

על פי השאריות מקבלים את המספר הבינרי 10000110101100.

תשובה 10

1. עבור הקוד המשוקלל 3,3,2,1 של הספרות העשרוניות נקבע את כל הטבלאות האפשריות באופן שהמשלים ל-9 של כל ספרה עשרונית מתקבל, אם מחליפים 1-ים ב-0-ים ו-0-ים ב-1-ים.

קודים ל-0,9: כיוון שכל המשקלים חיוביים, ברור שהקוד היחיד האפשרי עבור 0 הוא 0000. לפיכך הקוד עבור 9 הוא 1111.

שים לב שאכן $1\times3+1\times3+1\times2+1\times1=9$.

קודים ל-1,8: הקוד היחיד האפשרי עבור 1 הוא 0001. לפיכך הקוד עבור 8 הוא 1110.

שים לב שאכן $1\times3+1\times3+1\times2+0\times1=8$.

העובדה שהקוד המשלים ל-1 בבסיס הבינרי מתאים תמיד לספרה המשלימה ל-9 בבסיס העשרוני איננה מפתיעה, כיוון שסך המשקלים הוא 9. לפיכך נפסיק לבדוק זאת בהמשך.

קודים ל-2,7: הקוד היחיד האפשרי עבור 2 הוא 0010. לפיכך הקוד עבור 7 הוא 1101.

קודים ל-3,6: קוד עבור 3 יכול להכיל 1 יחיד במיקום שמשקלו 3 (שתי אפשרויות) או שני 1-ים במיקומים שמשקלם 2 ו-1. לפיכך יש שלוש אפשרויות לקוד עבור 3: 1000, 0100 או 0011.

אם 3 יקבל את הקוד 1000, אז 6 יקבל את הקוד 0111.

אם 3 יקבל את הקוד 0100, אז 6 יקבל את הקוד 1011.

אם 3 יקבל את הקוד 0011, אז 6 יקבל את הקוד 1100.

קודים ל-4,5: קוד עבור 4 יכול להכיל 1 באחד משני המיקומים שמשקלם 3 (שתי אפשרויות) ו-1 במיקום שמשקלו 1. לפיכך יש שתי אפשרויות לקוד עבור 4: 1001 או 0101.

אם 4 יקבל את הקוד 1001, אז 5 יקבל את הקוד 0110.

אם 4 יקבל את הקוד 0101, אז 5 יקבל את הקוד 1010.

יש אפוא שש טבלאות אפשריות. כל טבלה מכילה את אחת משלוש האפשרויות של קידוד 3 ו-6 ואת אחת משתי האפשרויות של קידוד 4 ו-5.

2. נקבע את כל הטבלאות האפשריות עבור הקוד המשוקלל 4,4,3,-2 באופן שיתקימו הדרישות הרשומות בחלק 1.

קודים ל-0,9: הקוד היחיד האפשרי עבור 0 הוא 0000. לפיכך הקוד עבור 9 הוא 1111.

קודים ל-1,8: הקוד היחיד האפשרי עבור 1 הוא 0011. לפיכך הקוד עבור 8 הוא 1100.

קודים ל-2,7: קוד עבור 2 יכול להכיל 1 באחד משני המיקומים שמשקלם 4 (שתי אפשרויות) ו-1 במיקום שמשקלו -2. לפיכך יש שתי אפשרויות לקוד עבור 2: 1001 או 0101.

אם 2 יקבל את הקוד 1001, אז 7 יקבל את הקוד 0110.

אם 2 יקבל את הקוד 0101, אז 7 יקבל את הקוד 1010.

קודים ל-3,6: הקוד היחיד האפשרי עבור 3 הוא 0010. לפיכך הקוד עבור 6 הוא 1101.

קודים ל-4,5: קוד עבור 4 יכול להכיל 1 באחד משני המיקומים שמשקלם 4. לפיכך יש שתי אפשרויות לקוד עבור 4: 1000 או 0100.

אם 4 יקבל את הקוד 1000, אז 5 יקבל את הקוד 0111.

אם 4 יקבל את הקוד 0100, אז 5 יקבל את הקוד 1011.

יש אפוא ארבע טבלאות אפשריות. כל טבלה מכילה את אחת משתי האפשרויות של קידוד 2 ו-7 ואת אחת משתי האפשרויות של קידוד 4 ו-5.

תשובה 11

נציג קוד בן 3 ספרות להצגת כל הספרות בבסיס 6. נשתמש במשקלים 2,2,1, ונקבל קוד שבו מקבלים את המשלים ל-5 אם מחליפים 1-ים ב-0-ים ו-0-ים ב-1-ים בסיביות הקוד.

הספרה	הקוד שלה
0	000
1	001
2	010
3	101
4	110
5	111

אפשר גם שהקוד של 2 יהיה 100, אך אז הקוד של 3 יהיה 011.

תשובה 12

נוסיף לקוד 84-2-1 את סיבית ביקורת הזוגיות באופן שמספר ה-1-ים יהיה אי-זוגי.

ספרה עשרונית	קוד 84-2-1 (בתוספת סיבית ביקורת הזוגיות מימין)
0	00001
1	01110
2	01101
3	01011
4	01000
5	10110
6	10101
7	10011
8	10000
9	11111

נסביר כיצד קובעים את סיבית ביקורת הזוגיות עבור הקודים של 0 ושל 1:

כיוון שהקוד של 0 הוא 0000 ובו מספר זוגי של 1-ים, סיבית ביקורת הזוגיות היא 1, ומספר ה-1-ים הוא אי-זוגי, כנדרש.

כיוון שהקוד של 1 הוא 0111 ובו מספר אי-זוגי של 1-ים, סיבית ביקורת הזוגיות היא 0, ומספר ה-1-ים הוא אי-זוגי, כנדרש.

תשובה 13

נציג צירוף נוסף לקוד המשקף, השונה מהצירוף המופיע בטבלה 1.4.

ספרה עשרונית	קוד משקף
0	0000
1	0010
2	0011
3	0001
4	0101
5	0111
6	0110
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

תשובה 14

נציג את קונפיגורציית הסיביות של אוגר בן 24 תאים בכל אחד מהמקרים האלה:

1. תכולתו מייצגת את המספר העשרוני 295 בשיטה הבינרית:

מכיוון ש-$(295)_{10}=(100100111)_2$ (בדוק זאת), הרי 24 תאי האוגר הם 000000000000000100100111.

2. תכולתו מייצגת את המספר העשרוני 295 בקוד BCD:

קוד BCD של 5 הוא 0101, ולכן זה תוכן ארבעת התאים הימניים של האוגר.

קוד BCD של 9 הוא 1001, ולכן זה תוכן ארבעת התאים הבאים של האוגר.

קוד BCD של 2 הוא 0010, ולכן זה תוכן ארבעת התאים הבאים של האוגר.

בחלקו השמאלי של האוגר יש עוד 12 תאים שתוכן כל ארבעה מהם הנו קוד BCD של 0, והוא 0000.

לפיכך 24 תאי האוגר הם 000000000000001010010101.

3. תכולתו מייצגת את התווים 'XY5' בקוד EBCDIC:
קוד EBCDIC של התו 5 הוא 11110101, ולכן זה תוכן שמונת התאים הימניים של האוגר.
קוד EBCDIC של התו Y הוא 11101000, ולכן זה תוכן שמונת התאים האמצעיים של האוגר.
קוד EBCDIC של התו X הוא 11100111, ולכן זה תוכן שמונת התאים השמאליים של האוגר.
לפיכך 24 תאי האוגר הם 11100111111010001110101.

תשובה 15

בשאלה זו נדון באוגר בן 12 תאים שמצבו 010110010111.

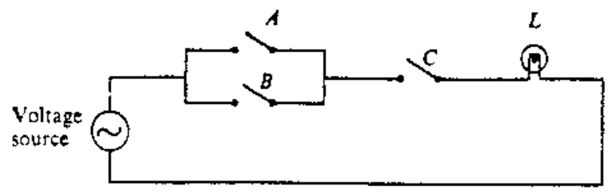
1. אם הוא מייצג שלוש ספרות עשרוניות בקוד BCD, הרי מיוצג המספר העשרוני 597, מכיוון שקוד 7 הוא 0111, קוד 9 הוא 1001 וקוד 5 הוא 0101.
2. אם הוא מייצג שלוש ספרות עשרוניות בקוד Excess-3, הרי מיוצג המספר העשרוני 264, מכיוון שקוד 4 הוא 0111, קוד 6 הוא 1001 וקוד 2 הוא 0101.
3. מצב כזה של אוגר **אינו קידוד חוקי** על פי קוד 2421 באופן שהוא מוצג בטבלה 1.2. למשל, לארבע הספרות הימניות 0111 אין כל משמעות. (ואולם, בהינתן המשקלים 2,4,2,1 הרי שלוש הספרות הימניות של האוגר, 0111, יכולות לייצג את הספרה העשרונית 7. שלוש הספרות האמצעיות של האוגר, 1001, יכולות לייצג את הספרה העשרונית 3. שלוש הספרות השמאליות של האוגר, 0101, יכולות לייצג את הספרה העשרונית 5. לפיכך אפשר ליצור קוד אחר עבור המשקלים 2,4,2,1 שבו האוגר מייצג את המספר העשרוני 537.)
4. אם הוא מייצג שני תווים בקוד הפנימי של טבלה 1.5, הרי מיוצגת מחרוזת התווים 'FG', מכיוון ש-010110 הוא הקוד הפנימי של התו F ו-010111 הוא הקוד הפנימי של התו G.

תשובה 16

נניח שאיור 1.3 מציג חיבור של המספרים 257 ו-1050 ולכל אוגר יש 12 תאים. תכולת האוגר operand 1 היא 000100000001 (מספר בינרי זה שווה למספר העשרוני 257). תכולת האוגר operand 2 היא 010000011010 (מספר בינרי זה שווה למספר העשרוני 1050). תכולת האוגר R1 שווה לתכולת האוגר operand 1, ותכולת האוגר R2 שווה לתכולת האוגר operand 2, מכיוון שכדי לחשב מעבירים את תכולת אוגרי הזיכרון לאוגרי המעבד באופן שהאיור מראה.
000100000001+010000011010=010100011011, ולכן תכולת האוגר R3 היא 010100011011.
גם תכולת האוגר sum היא 010100011011, מכיוון שהתוצאה מועברת אליו מ-R3.

תשובה 17

מעגל המיתוג הוא -



כדי שמעגל המיתוג יעביר ערך 1 חייבים לסגור את השער C ולסגור לפחות את אחד משני השערים A ו-B. לפיכך מעגל זה מייצג את הביטוי (A OR B) AND C.
בסימונים של לוגיקה בינרית מעגל זה הוא $(A+B)\cdot C$.

פרק 2

אלגברה בוליאנית ושערים לוגיים

בפרק זה נגדיר מהי אלגברה בוליאנית ונלמד חוקים, כללים ומשפטים של אלגברה בוליאנית אשר באמצעותם נוכל ליצור ביטויים בוליאניים.

סעיף 2.1

בסעיף זה נלמד מהי קבוצה ומהו אופרטור בינרי המוגדר על קבוצה. כמו כן נגדיר כמה חוקים שאופרטור בינרי, המוגדר על קבוצה מסוימת, יכול לקיים, וכן נגדיר כמה תכונות שאפשר שיהיו לקבוצה ביחס לאופרטור בינרי.

נציג כמה אפשרויות לתאר קבוצה, אשר חלקן לא מוצגות בפרק. קבוצה היא אוסף של עצמים (איברים). אם מספר העצמים בקבוצה סופי, נהוג לסמן את הקבוצה בעזרת סוגריים מסולסלים (צומדים). למשל את הקבוצה שאבריה (העצמים שבה) הם המספרים 2, 3 ו-9 נסמן: $A=\{2,3,9\}$ (A הוא שם הקבוצה). אם מספר העצמים בקבוצה אינו סופי, אך הוא בן מנייה, נהוג להעזר בשלש נקודות. למשל קבוצת כל המספרים הטבעיים תסומן: $N=\{1,2,3,\ldots\}$, וקבוצת כל המספרים השלמים תסומן: $Z=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

לעתים אי אפשר לסמן קבוצה כך. למשל קבוצת כל המספרים הממשיים אינה בת מנייה. נאמר "קבוצת כל המספרים הממשיים היא R" ובכך הגדרנו באופן מילולי את R. גם את קבוצת כל המספרים הרציונלים, Q, נגדיר באופן מילולי ולא נסמנה בעזרת צומדים (למרות שהיא בת-מנייה), וזאת מטעמי נוחות ובהירות.
נציג בעזרת שתי דוגמאות סמון מקובל נוסף:

1. $B=\{x|3\le x\le 6\}$; B היא קבוצת כל ה-x-ים כך ש x בין 3 ל-6, דהיינו כל המספרים הממשיים שבין 3 ל-6.
2. $C=\{x\in B|x\ne 4\}$; C היא קבוצת כל המספרים שבקבוצה B פרט למספר 4, דהיינו כל המספרים שבין 3 ל-6 פרט ל-4.

קרא את סעיף 2.1.

לפניך דוגמאות אחדות.

1. אופרטור הכפל במספרים טבעיים הנו חילופי וקיבוצי. אם l,m,n טבעיים, אז $mn=nm$ וכן $(mn)l=m(nl)$.
2. אופרטור "העלאה בחזקה" אינו חילופי; למשל: $2^3 \ne 3^2$.
3. אופרטור מציאת הממוצע החשבוני על קבוצת כל המספרים החיוביים, שנסמנו ∇, אינו קיבוצי. כדי להראות זאת מספיק למצוא שלושה נתונים כלשהם שעבורם שינוי של סדר ביצוע הפעולות משנה את התוצאה:

$(4\triangledown 8)\triangledown 12 = 6\triangledown 12 = 9$ ואולם $4\triangledown(8\triangledown 12) = 4\triangledown 10 = 7$.

שים לב! יש טעם לשאול אם אופרטור בינרי הוא קיבוצי רק בנוגע לאופרטורים בינריים אשר הקבוצות שעליהן הם מוגדרים - **סגורות ביחס לאופרטור**. נבהיר מדוע:

אם * הוא אופרטור בינרי המוגדר על קבוצה A, ואם A אינה סגורה ביחס לאופרטור *, הרי קיימים איברים $a,b\in A$ שעבורם $a*b\notin A$.

אז אין משמעות לביטוי מהצורה $(a*b)*c$, ולכן גם אין משמעות לשאלה אם ביטוי זה שווה ל-$a*(b*c)$ או שונה ממנו.

כשהבאנו את האופרטור $\triangledown$ (המוצא ממוצע חשבוני) כדוגמה לאופרטור לא קיבוצי, התייחסנו אליו כאל אופרטור המוגדר על קבוצת כל המספרים החיוביים. קבוצה זו, בניגוד לקבוצת המספרים הטבעיים, סגורה ביחס לאופרטור $\triangledown$, ולכן יש משמעות לדיון בקיבוציות או באי-קיבוציות של האופרטור $\triangledown$ על קבוצה זו.

לעומת זאת, תכונת החילופיות אינה תלויה בסגירות או באי-סגירות הקבוצה שעליה האופרטור מוגדר.

4. בקבוצה $N_o=\{0,1,2,3,4,...\}$ לא קיים מספר שיש לו איבר הפכי ביחס לפעולת החיסור; כדי להבין זאת נשאל את עצמנו מהו איבר הפכי למספר נתון x ביחס לחיסור. זהו מספר y כך ש- $x-y$ יהיה איבר היחידה ביחס לחיסור. לפיכך, לפני שנמצא אם קיימים מספרים שיש להם איבר הפכי ביחס לחיסור, עלינו לשאול: האם קיים ב-N_o איבר יחידה ביחס לחיסור? התשובה היא **לא**.
אמנם 0 נראה כמועמד מתאים, כי לכל מספר n מתוך הקבוצה N_o $n-0=n$. אבל 0 אינו איבר יחידה, שכן אם n מספר טבעי כלשהו, אז $0-n\neq n$. לפיכך, בקבוצה N_o אין איבר יחידה ביחס לחיסור. כאשר אין איבר יחידה בקבוצה ביחס לאופרטור מסוים, אין שום משמעות לשאלה אם קיימים איברים בקבוצה שיש להם איבר הפכי.

הכללת חוק הפילוג ל-n משתנים:

צורתו הכללית של חוק הפילוג של $\cdot$ ביחס ל- $+$ היא

$$Y\cdot(X_1+X_2+X_3+...+X_n) = Y\cdot X_1+Y\cdot X_2+Y\cdot X_3+...+Y\cdot X_n$$

שאלה 1

אילו מבין ששת החוקים הבסיסיים (סגור, קיבוץ, חילוף, יחידה, הפכי ופילוג) מתקיימים עבור זוג האופרטורים הבינריים שלהלן (המוגדרים על הקבוצה $S=\{0,1,2\}$)?

$\cdot$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

+	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

סעיף 2.2

בסעיף זה נגדיר אלגברה בוליאנית באופן פורמלי; לאחר מכן נגדיר אלגברה בוליאנית דו-ערכית שהיא אחת מתוך מספר רב של אלגברות בוליאניות שניתן לנסח, ובה נעסוק בהמשך לימודינו. בהמשך, כשנאמר "האלגברה הבוליאנית", הכוונה לאלגברה בוליאנית דו-ערכית.

קרא את סעיף 2.2.

שאלה 2

הראה שהקבוצה {0,1,2} ושני האופרטורים הבינריים + ו-·, כפי שהוגדרו בטבלאות בשאלה 1, אינם מהווים אלגברה בוליאנית. קבע אילו מבין כללי Huntington אינם מתקיימים.

סעיף 2.3

בסעיף זה נלמד מהו עקרון הדואליות, ונוכיח משפטים יסודיים בעזרת כללי Huntington.

כמו כן נגדיר יחס קדימות בין האופרטורים כדי לחשב ערכי ביטויים בוליאניים.

בסוף הסעיף נכיר אמצעי גרפי שבעזרתו ניתן להמחיש -

1. קשרים בין משתנים המופיעים בביטוי בוליאני;
2. את כללי האלגברה הבוליאנית;
3. תקפות משפטים.

אמצעי זה נקרא דיאגרמת Venn.

קרא את התת-סעיפים האלה:
דואליות, משפטים יסודיים וקדימות אופרטורים.

עקרון הדואליות

לכל ביטוי בוליאני ניתן להתאים **ביטוי דואלי** באופן טכני זה:

1. החלפת כל AND ב-OR והחלפת כל OR ב-AND, כלומר החלפת כל · ב- + וכל + ב- ·.
2. החלפת כל 0 ב-1 וכל 1 ב-0.

את המשתנים עצמם נשאיר ללא שינוי.

למשל: נתון הביטוי $(1+A)\cdot(B+0)$.

הביטוי הדואלי שלו הוא $(0\cdot A)+(B\cdot 1)$.

על-פי עקרון הדואליות הצורה הדואלית של כלל באלגברה בוליאנית מהווה אף היא כלל באלגברה זאת.

במלים אחרות: אם נתון שוויון בוליאני כלשהו, ונרשום את הביטוי הדואלי של כל אחד מאגפי השוויון, אז לפי עקרון הדואליות יתקיים שוויון גם בין שני הביטויים הדואליים. למשל אם לכל A מתקיים $1\cdot A=A$, אזי לכל A מתקיים גם $0+A=A$.

שאלה 3

הוכח את משפט 6(ב) בדרך דומה להוכחת משפט 6(א), כלומר בעזרת כללי האלגברה הבוליאנית.

שאלה 4

הוכח באופן אלגברי את הזהות הבוליאנית הזו: $(x+y)(x'+z) = x'y+xz$

שאלה 5

הוכח בעזרת טבלת אמת את משפט דה-מורגן השני: $(x\cdot y)'=x'+y'$.

הערה למשפטי דה-מורגן

שימוש במשפטי דה-מורגן מאפשר לטפל גם בביטויים בוליאניים מורכבים, כי x ו-y עשויים להיות ביטויים כלשהם, ולאו דווקא משתנים בוליאניים. למשל:

$$[(wu+v)+(w'v+u)]'=(wu+v)'\cdot(w'v+u)'$$

קרא את התת-סעיף דיאגרמת Venn.

שים לב שבחלק השמאלי של איור 2.3 מסמנים קווים רוחביים את x וקווים אלכסוניים את y+z. לפיכך x(y+z) הוא השטח שבו יש גם קווים רוחביים וגם קווים אלכסוניים.

בחלק הימני של האיור סומנו קווים הן באזור השייך ל-xy והן באזור השייך ל-xz. לפיכך xy+xz הוא השטח שבו יש קווים. שטח זה זהה לשטח שבו יש קווים רוחביים ואלכסוניים בצד שמאל. זה מראה את תקפות חוק הפילוג.

שאלה 6

1. הראה את תקפות משפטי דה-מורגן עבור שלושה משתנים בעזרת דיאגרמות Venn.
2. הראה את תקפות חוק הפילוג של + ביחס ל- · בעזרת דיאגרמות Venn.

סעיף 2.4

בסעיף זה נגדיר פונקציה בוליאנית. נראה כי כל פונקציה בוליאנית ניתן לתאר בשתי דרכים שונות: בעזרת ביטוי אלגברי ובעזרת טבלת אמת. כמו כן נראה כיצד ניתן לממש פונקציה בוליאנית בעזרת שערים לוגיים.

נלמד כיצד ניתן לפשט פונקציה בוליאנית (הנתונה באופן אלגברי), כדי שיתקבל ביטוי המכיל מספר מינימלי של ליטרלים.

לבסוף נגדיר משלים של פונקציה נתונה, ונלמד כיצד ניתן לקבלו מתוך ביטוי המתאר את הפונקציה.

קרא את התת-סעיף הראשון (עד פעולות אלגבריות - לא כולל).

שאלה 7

בנה את טבלת האמת של הפונקציה הזו: $F = xy + xy' + y'z$

שאלה 8

נתונה הפונקציה הבוליאנית הזו: $F = xy + x'y' + y'z$

1. ממש אותה בעזרת שערי AND, OR ו-NOT.
2. ממש אותה בעזרת שערי OR ו-NOT בלבד.
3. ממש אותה בעזרת שערי AND ו-NOT בלבד.

קרא את התת-סעיף פעולות אלגבריות.

שאלה 9

פשט את הפונקציות הבוליאניות הבאות באופן שמספר הליטרלים שלהן יהיה מינימלי:

1. $zx + zx'y$
2. $(A+B)'(A'+B')'$

שאלה 10

הצג את הביטויים הבוליאניים הבאים באופן שיהיה בהם מספר הליטרלים הדרוש:

1. $ABC + A'B'C + A'BC + ABC' + A'B'C'$ - חמישה ליטרלים.
2. $BC + AC' + AB + BCD$ - ארבעה ליטרלים.
3. $[(CD)' + A]' + A + CD + AB$ - שלושה ליטרלים.
4. $(A+C+D)(A+C+D')(A+C'+D)(A+B')$ - ארבעה ליטרלים.

שאלה 11

ממש את הפונקציה הבוליאנית הבאה בעזרת שערים לוגיים: $F = A'B'C + B(A+C)$

קרא את התת-סעיף משלים של פונקציה.

שאלה 12

מצא את המשלימים של הפונקציות הבוליאניות הבאות והבא אותם לצורה בעלת מספר ליטרלים מינימלי:

1. $F_1 = (BC' + A'D)(AB' + CD')$
2. $F_2 = B'D + A'BC' + ACD + A'BC$
3. $F_3 = [(AB)'A][(AB)'B]$

סעיף 2.5

בסעיף זה תכיר את המושגים האלה:

מכפלה סטנדרטית (minterm)

סכום סטנדרטי (maxterm)

סכום של מכפלות סטנדרטיות מכפלה של סכומים סטנדרטיים	צורות קנוניות של פונקציה בוליאנית
סכום מכפלות מכפלת סכומים	צורות סטנדרטיות של פונקציה בוליאנית

קרא את התת-סעיף הראשון (מכפלה סטנדרטית וסכום סטנדרטי).

צירוף AND (או גורם AND) הוא גורם שבו מבוצעת פעולת AND בין כל שני ליטרלים סמוכים, למשל $xy'z$.
צירוף OR (או גורם OR) הוא גורם שבו מבוצעת פעולת OR בין כל שני ליטרלים סמוכים, למשל $x+y'+z$.
בהינתן n משתנים $x_1,\dots,x_n$, מכפלה סטנדרטית - minterm - היא צירוף AND של n המשתנים; כל משתנה יופיע פעם אחת, מותג או לא מותג. באותו אופן: סכום

סטנדרטי - maxterm - הוא צירוף OR של n המשתנים; כל משתנה יופיע פעם אחת, מותג או לא מותג.

יש המתרגמים את המונחים minterm ו-maxterm ל"כפלן" ו"יספן" בהתאמה, אולם אנו נעדיף להשתמש במונחים "מכפלה סטנדרטית" ו"סכום סטנדרטי".

חשוב להדגיש: אם נתונה פונקציה מסוימת של n משתנים, אז מכפלה סטנדרטית (המהווה חלק מביטוי המתאר פונקציה זו) חייבת להכיל את כל משתני הפונקציה.

למשל, אם F היא פונקציה של המשתנים x,y,z, אז כל מכפלה סטדרטית שלה חייבת להכיל את שלושת המשתנים הללו (כאמור, כל משתנה יופיע פעם אחת - מותג או לא מותג). למשל, הגורם z'y' אינו מכפלה סטנדרטית של הפונקציה F, כיוון שחסר בו המשתנה x, היכול להופיע כ-x או כ-x'.

גם על סכום סטנדרטי חלה דרישה זו. למשל, הגורם x'+y אינו סכום סטנדרטי של הפונקציה F שהוזכרה לעיל, כיוון שחסר בו המשתנה z.

שאלה 13

נתונות שתי פונקציות בוליאניות F_1 ו-F_2:

1. הראה כי הפונקציה הבוליאנית $E = F_1+F_2$, המתקבלת בפעולת OR על שתי הפונקציות, מכילה את הסכום של כל המכפלות הסטנדרטיות המופיעות ב-F_1 וב-F_2.
2. הראה כי הפונקציה הבוליאנית $G = F_1F_2$, המתקבלת בפעולת AND על שתי הפונקציות, מכילה את אותן המכפלות הסטנדרטיות המשותפות ל-F_1 ול-F_2.

קרא את התת-סעיף סכום של מכפלות סטנדרטיות.

באמרנו "מסדרים (מחדש) את המכפלות הסטנדרטיות **בסדר עולה**" הכוונה היא שאנו מסדרים את המכפלות הסטנדרטיות באופן שהמספרים הבינריים המתאימים להן מסודרים בסדר עולה.

שאלה 14

נתונה הפונקציה הבוליאנית $F_1(x,y,z) = x'y'+z$.

1. "הרחב" את הפונקציה לסכום של מכפלות סטנדרטיות.
2. בנה טבלת אמת עבור ההצגה החדשה לפונקציה שקיבלת בסעיף 1.

שאלה 15

הסכום של כל 2^n המכפלות הסטנדרטיות האפשריות של פונקציה בוליאנית בעלת n משתנים הוא 1.

1. הוכח משפט זה עבור n=3.

2. הוכח משפט זה עבור n כלשהו.

קרא את התת-סעיף מכפלה של סכומים סטנדרטיים.

שים לב שבדוגמה 2.5, לאחר השימוש בחוק הפילוג, השמטנו את הצירוף x+x'. צירוף זה שווה ל-1 ולכן הוא מיותר.

קרא את התת-סעיף המרת צורות קנוניות.

שאלה 16

בטא את הפונקציות הבאות כסכום של מכפלות סטנדרטיות וכמכפלה של סכומים סטנדרטיים:

1. $F(A,B,C,D) = D(A'+B) + B'D$
2. $F(w,x,y,z) = y'z + wxy' + wxz' + w'x'z$
3. $F(x,y,z) = 1$

שאלה 17

המכפלה של כל 2^n הסכומים הסטנדרטיים האפשריים של פונקציה בוליאנית בעלת n משתנים היא 0.

1. הוכח משפט זה עבור n=3.
2. הוכח משפט זה עבור n כלשהו.

האם ניתן להשתמש בעקרון הדואליות לאחר הוכחת סעיף א' של שאלה 15?

מכפלה
סכומי
הצו=)

שאלה 18

המר את הצורה הקנונית שבה נתונה כל אחת מהפונקציות הבאות לצורה הקנונית האחרת.

1. $F(A,B,C,D) = \Sigma(0,2,6,11,13,14)$
2. $F(x,y,z) = \Pi(0,3,6,7)$

סיים לקרוא את סעיף 2.5.

בסכום מכפלות מספר הליטרלים המרבי במחובר מכפלה (product term) הנו כמובן n - מספר המשתנים המופיעים בפונקציה המקורית.

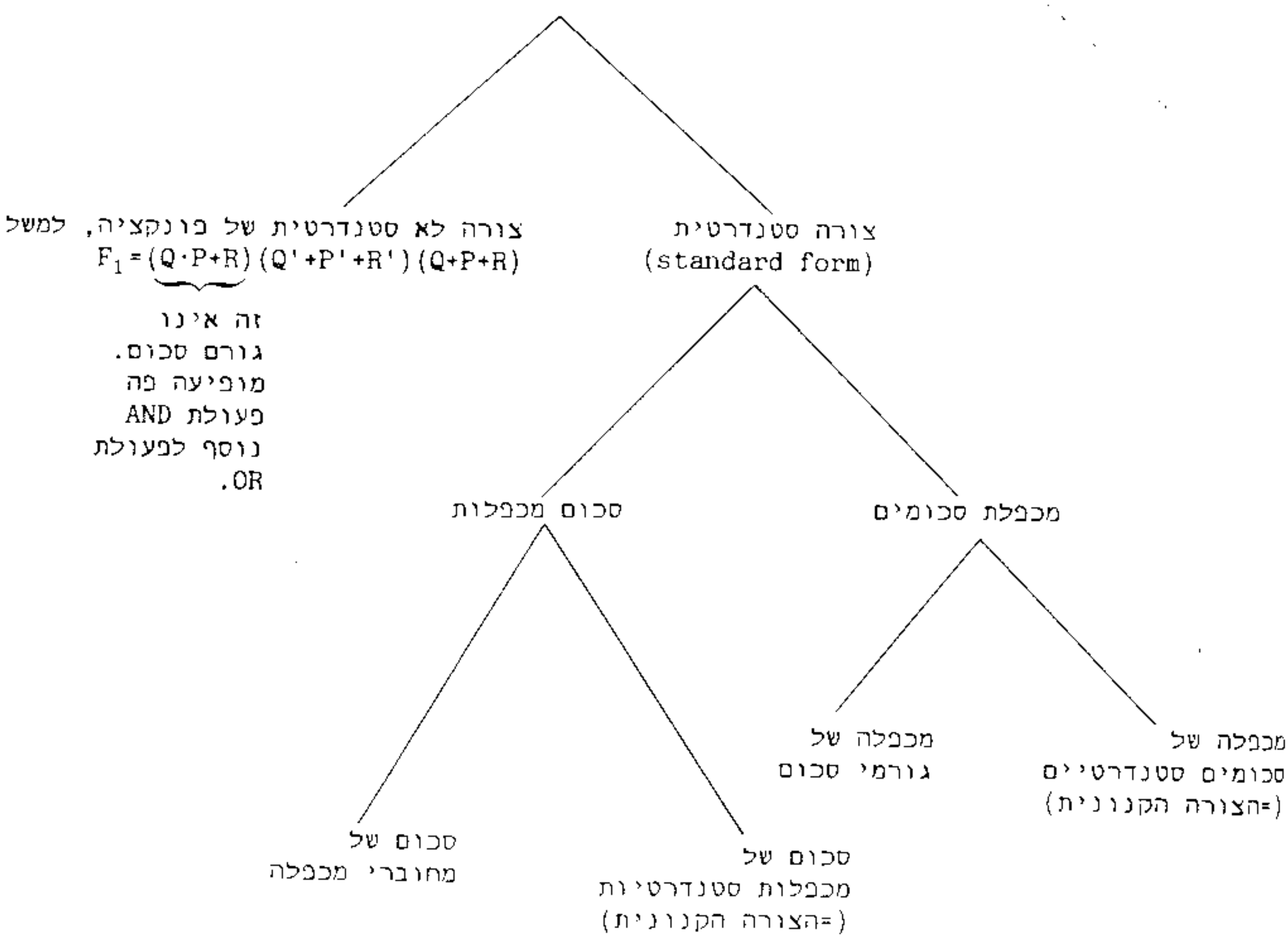
שאלה 19

מהו ההבדל בין צורה קנונית לצורה סטנדרטית?

איזו צורה עדיפה, כאשר מממשים פונקציה בוליאנית בעזרת שערים?

איזו צורה מתקבלת, כאשר קוראים פונקציה מטבלת אמת?

נסכם בעזרת עץ את האופנים שבהם ניתן להציג פונקציה בוליאנית:



סעיף 2.6

עד כה הכרנו את האופרטורים AND, OR ו-NOT. AND ו-OR הם אופרטורים בינריים, ואילו NOT הוא אופרטור אונרי. בסעיף זה נכיר אופרטורים נוספים.

קרא את סעיף 2.6.

הפונקציה F_2 המתוארת בטבלאות 2.5 ו-2.6 נקראת **עיכוב**. ההערה המתאימה לה בטבלה 2.6 היא x but not y, ומשמעותה כלהלן:
F_2 מקבלת תמיד את הערך של x פרט למקרה שבו x ו-y שניהם 1. המקרה היחיד אפוא היכול **לעכב** את F_2 מלקבל את הערך 1 (אף-על-פי ש-x=1) הוא כאשר y=1.
כלומר, $F_2=1$ כאשר x=1 ו-y=0; אחרת $F_2=0$.
הפונקציה exclusive-OR מקבלת את הערך 1, אם ורק אם שני משתניה שונים בערכם. אם שניהם שווים ל-0 או שניהם שווים ל-1, אז הפונקציה שווה ל-0, כיוון ששני המחוברים בביטוי המתאר אותה (xy'+x'y) שווים ל-0. ואילו כאשר שניהם שונים בערכם, אז בדיוק אחד המחוברים שווה ל-1, וזה דרוש כדי שהפונקציה תהיה שווה ל-1.

שאלה 20
הראה כי הדואלי של הפונקציה exclusive-OR שווה למשלים שלה.

סעיף 2.7

בסעיף זה נכיר שמונה שערים לוגיים עבור שמונה פונקציות (מבין 16 הפונקציות הקיימות עבור 2 משתנים) המייצגות אופרטורים בינריים חילופיים וקיבוציים. נראה כיצד יש לשנות חלק מהגדרות הפונקציות, כדי שנוכל להרחיב את השערים המממשים אותן ליותר משתי כניסות.

קרא את סעיף 2.7.

שאלה 21
עבור הפונקציות הבוליאניות המוגדרות בטבלה 2.6 הראה כי -
1. האופרטור עיכוב אינו חילופי ואינו קיבוצי.
2. האופרטור exclusive-OR הנו חילופי וקיבוצי.
3. האופרטורים NOR ו-NAND אינם פילוגיים זה ביחס לזה.

שאלה 22
שער-רוב (majority) הנו מעגל ספרתי שהיציאה שלו שווה ל-1, אם רוב הכניסות הן 1-ים; אחרת היציאה היא 0.

מצא את הפונקציה הבוליאנית הממומשת באמצעות שער-רוב בעל שלוש כניסות באמצעות טבלת אמת; פשט את הפונקציה.

שאלה 23

בדוק את טבלת האמת עבור שער exclusive-OR בעל שלוש כניסות, המופיעה באיור 2.8(3), באופן הזה:

עבור כל שמונת הצירופים של x, y ו-z חשב את $A = x \oplus y$; לאחר מכן חשב את $F = A \oplus z = x \oplus y \oplus z$.

סעיף 2.8

מערכת שערים המממשת פונקציה בוליאנית נקראת מערכת ספרתית.

בסעיף זה נכיר את המעגל המשולב הספרתי. המעגלים המשולבים הספרתיים משמשים אבני בניין למימוש מערכות ספרתיות.

כדי שנוכל לתכנן ולבנות מערכת ספרתית, עלינו להכיר את תכונות המעגלים המשולבים ואת מגבלותיהם.

כזכור מסעיף 1.9, מעגל משולב הוא גביש קטן מוליך למחצה עשוי סיליקון, הנקרא שבב, המכיל רכיבים חשמליים (כגון טרנזיסטורים, דיודות, נגדים וקבלים). הרכיבים השונים מחוברים זה לזה בתוך השבב במטרה ליצור מעגל אלקטרוני.

קיימות טכנולוגיות אחדות לייצור מעגלים משולבים. מעגלים משולבים המיוצרים באותה טכנולוגיה מהווים משפחה לוגית. כל משפחה לוגית נבדלת מהמשפחות הלוגיות האחרות בערכי הנתונים המאפיינים. במרבית המשפחות הלוגיות אף ניתן למצוא תת-משפחות, אשר להן תכונות מיוחדות במסגרת המשפחה שלהן. בסעיף הזה נביא תיאור קצר של המשפחות הלוגיות הנפוצות.

המתח שיש לספק למעגל המשולב נקרא מתח אספקה. הזרם שצורך המעגל המשולב ממקור המתח נקרא זרם אספקה. שני נתונים אלה נמצאים בדפי הנתונים של המעגל המשולב, המסופקים על ידי היצרן. לכל משפחה לוגית של מעגלים משולבים יש מתח אספקה אופייני. לעומת זאת, זרם האספקה שונה בכל סוג של מעגל משולב, גם עבור מעגלים משולבים שיוצרו באותה טכניקת ייצור (דהיינו השייכים לאותה משפחה לוגית).

קרא את התת-סעיף הראשון (עד לוגיקה חיובית ושלילית - לא כולל).

שאלה 24

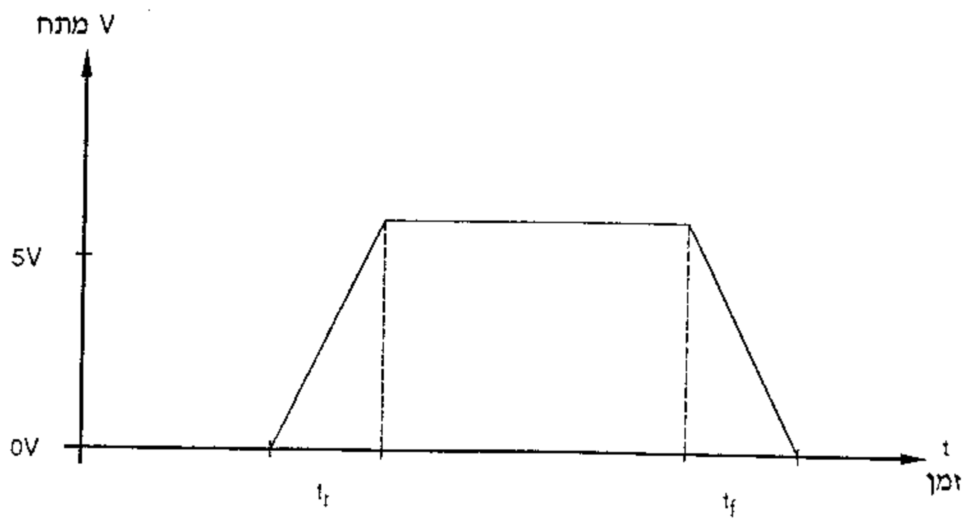
מעגלי TTL SSI בדרך-כלל באים באריזות בנות 14 רגליים. שתי רגליים שמורות לאספקת מתח, והרגליים הנותרות משמשות לכניסות וליציאות. מצא כמה שערים יכולים להיות בתוך אריזה אחת כזו, אם היא מכילה את סוגי השערים האלה:

1. שערי exclusive-OR בעלי שתי כניסות בלבד.
2. א. שערי NAND בעלי ארבע כניסות בלבד.
   ב. שערי NAND בעלי שמונה כניסות בלבד.

קרא את התת-סעיף השני (לוגיקה חיובית ושלילית).

הרמות הלוגיות מיוצגות במציאות על ידי מתחים. למשל, מתח של 5 וולט מייצג רמה לוגית 1, ואילו מתח של 0 וולט מייצג רמה לוגית 0. כמו כל תופעה פיסיקלית, גם המעבר ממתח אחד למשנהו (דהיינו מרמה לוגית אחת לאחרת) גוזל זמן. זמן זה נקרא זמן מעבר.

נבהיר בעזרת סרטוט את המושג זמן מעבר ממתח אחד למשנהו:



הזמן הדרוש למעבר ממתח נמוך למתח גבוה נקרא זמן עלייה, והוא מסומן ב-t_r (rise time).
הזמן הדרוש למעבר ממתח גבוה למתח נמוך נקרא זמן ירידה, והוא מסומן ב-t_f (fall time).
כשאנו מדברים על סימן קוטביות האות, כוונתנו אם האות חיובי או שלילי.

כאמור, סוג הלוגיקה (חיובית או שלילית) איננו נקבע על פי סימן ערך האות (חיובי או שלילי). התבונן, למשל, בטבלה 2.7, בשורה השנייה (המשפחה הלוגית ECL).

הערכים האופייניים של שתי הרמות (הנמוכה והגבוהה) הנם שליליים (L = -1.8 Volt, H = -0.8 Volt) ללא תלות בסוג הלוגיקה. ניתן לבחור בהשמה של לוגיקה חיובית או שלילית כרצוננו.

פעולתו האלקטרונית של שער כלשהו קבועה, ואינה תלויה בלוגיקה שאנו מגדירים עבורו.

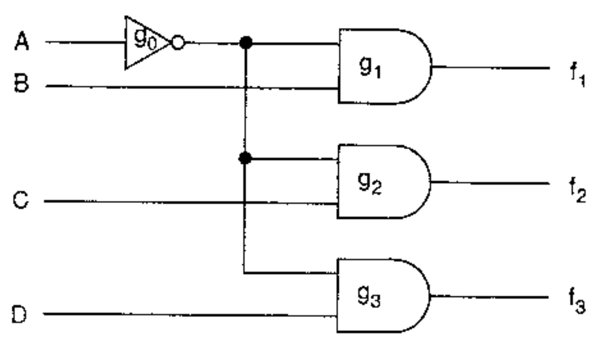
פעולתו הלוגית תלויה בלוגיקה (חיובית או שלילית) שבה הוא מוגדר.

שאלה 25

הראה ששער AND של לוגיקה חיובית הנו שער OR של לוגיקה שלילית, ולהפך.

קרא את התת-סעיף מאפיינים מיוחדים.

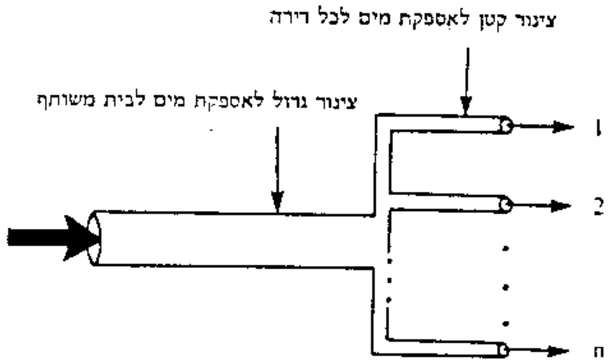
נניח שמחברים יציאה של שער לכניסות של כמה שערים אחרים; כמו למשל:



במקרה זה יש להגביל את מספר הכניסות שניתן יהיה לחבר ליציאה של השער g_0. (הסיבה היא, כאמור, שזרם היציאה של שער, למשל של g_0, אף הוא מוגבל לערכים מסוימים.)

נדגים את הבעיה בעזרת דימוי של צינורות מים. באיור הבא מתואר צינור גדול המחובר לכמה צינורות קטנים. נניח כי הצינור הגדול מספק מים לבית משותף, והצינורות הקטנים מספקים מים לכל אחת מהדירות שבבית. צריכת המים של משפחה (דירה) בבית נעה בין 0 ל-0.5 מטרים מעוקבים (מ"ק) מים בדקה.

הצינור הגדול מסוגל לספק צריכה מרבית של 3 מ"ק מים בדקה.



נתאר לעצמנו מצב שבו צריכת המים של כל אחת מהמשפחות (דירות) היא הצריכה המרבית האפשרית: 0.5 מ"ק מים בדקה.

מכיוון שהצינור הגדול מסוגל לספק צריכה מרבית של 3 מ"ק מים בדקה, ניתן לחבר אליו לכל היותר 6 דירות, מבלי להפריע לצריכת המים של כל משפחה, שהרי

$$6 = \frac{3 \text{ מ"ק}}{0.5 \text{ מ"ק}}.$$

החסינות לרעש מבטאת את יכולת המערכת לעבוד כהלכה, גם כאשר יש רעשים (שינויים בלתי-רצויים במתח), הנוספים למתחים שנוצרים כתוצאה מפעולת המערכת עצמה. כלומר, אם הרעש (שינוי המתח) איננו גדול מערך החסינות לרעש - המערכת תפעל כשורה.

שאלה 26

למשפחה לוגית של מעגלים משולבים יש שערי NAND בעלי דרגת העמסה 5 ושערי חוצץ בעלי דרגת העמסה 10. הראה כיצד ניתן להחיל את אות היציאה של שער NAND בודד על 50 כניסות של שערים אחרים.

סיים לקרוא את הסעיף.

סיכום פרק 2

משתנה בוליאני הוא משתנה היכול לקבל אחד משני הערכים: 0 או 1.
0 ו-1 הם **קבועים בוליאניים**.

אופרטור בינרי המוגדר על קבוצת איברים S הוא כלל המתאים איבר יחיד לכל זוג איברים מתוך S.

ביטוי בוליאני הוא צירוף של משתנים וקבועים, הקשורים ביניהם באמצעות אופרטורים בוליאניים, בתוספת אפשרית של סוגריים.

אלגברה בוליאנית היא מבנה אלגברי המוגדר על קבוצת איברים B בצירוף שני אופרטורים בינריים באופן שכללי Huntington מתקיימים:

1. B **סגורה** ביחס לכל אחד משני האופרטורים הבינריים.
2. קיים **איבר יחידה** ביחס לכל אחד משני האופרטורים:
   (א) $x+0 = x$; (ב) $x\cdot 1 = x$.
3. מתקיים **חוק החילוף** ביחס לכל אחד משני האופרטורים:
   (א) $x+y = y+x$; (ב) $xy = yx$.
4. שני האופרטורים **פילוגיים** זה ביחס לזה:
   (א) $x(y+z) = xy+xz$
   (ב) $x+yz = (x+y)(x+z)$.
5. לכל איבר x ב-B קיים משלים ב-B, שנסמנו x':
   (א) $x+x'=1$
   (ב) $x\cdot x'=0$
6. קיימים לפחות שני איברים שונים ב-B.

אלגברה בוליאנית דו-ערכית היא אלגברה בוליאנית המוגדרת על קבוצת איברים B בעלת שני איברים (0 ו-1).

עקרון הדואליות באלגברה בוליאנית קובע, שכל ביטוי בוליאני שניתן להסיק את תקפותו מתוך הכללים של אלגברה בוליאנית יישאר תקף, גם לאחר שהאופרטורים AND ו-OR יוחלפו זה בזה ואיברי היחידה 0 ו-1 יוחלפו זה בזה.

המשפטים היסודיים של אלגברה בוליאנית הם אלה:

משפט 1: (א) $x+x = x$; (ב) $x\cdot x = x$

משפט 2: (א) $x+1 = 1$; (ב) $x\cdot 0 = 0$

משפט 3: $(x')' = x$

משפט 4: (חוק הקיבוץ): (א) $x+(y+z) = (x+y)+z$

(ב) $x(yz) = (xy)z$

משפט 5 (דה-מורגן): (א) $(x+y)' = x'y'$

(ב) $(xy)' = x'+y'$

משפט 6 (צמצום): (א) $x+xy = x$

(ב) $x(x+y) = x$

סדר קדימויות האופרטורים הוא NOT ⟵ AND ⟵ OR; כאשר סוגריים קודמים לכל אופרטור אחר.

דיאגרמת Venn הנה אמצעי גרפי הממחיש את היחסים שבין המשתנים המופיעים בביטוי בוליאני.

פונקציה בוליאנית היא ביטוי המכיל משתנים בוליאניים, את שני האופרטורים הבינריים OR ו-AND, את האופרטור האונרי NOT, סוגריים וסימן שוויון.
ביטוי אלגברי המתאר פונקציה בוליאנית איננו יחיד.
הערכים שפונקציה בוליאנית יכולה לקבל הם 0 או 1.
שתי פונקציות בוליאניות של n משתנים בינריים הנן **זהות** - אם עבור כל אחד מבין 2^n הצירופים האפשריים של ערכי n המשתנים שתיהן מקבלות את אותו ערך.
ניתן לתאר פונקציה בוליאנית גם באמצעות **טבלת אמת**. מספר השורות (צירופי ערכי המשתנים) בטבלת האמת הוא 2^n, כאשר n הוא מספר המשתנים הבינריים בפונקציה.

ניתן **לממש** כל פונקציה בוליאנית בעזרת שערים לוגיים.
כל משתנה בפונקציה מציין כניסה לשער מסוים, וכל איבר המופיע בביטוי המתאר את הפונקציה ממומש באמצעות שער.

המשלים של פונקציה F הוא הפונקציה 'F אשר מקבלת את הערך 0, כאשר F מקבלת ערך 1, ולהפך.
שיטה פשוטה יותר לקבל את המשלים של פונקציה היא לקחת את הביטוי הדואלי של הפונקציה ולהשלים בו כל ליטרל.

פישוט פונקציות - ניתן להקטין את מספר הליטרלים בפונקציה בוליאנית באמצעות פעולות אלגבריות, תוך שימוש בכללים ובמשפטים היסודיים של אלגברה בוליאנית. הקטנת מספר הליטרלים נקראת פישוט.

מכפלה סטנדרטית - minterm - היא צירוף AND המכיל את כל משתני הפונקציה הבוליאנית הנתונה. כל משתנה מופיע במכפלה הסטנדרטית באחת משתי צורותיו:

מותג או לא מותג. בצירוף זה כל משתנה מותג אם הסיבית המתאימה של המספר הבינרי היא 0, ואינו מותג אם היא 1.

סכום סטנדרטי - maxterm - הוא צירוף OR המכיל את כל משתני הפונקציה הבוליאנית הנתונה. בצירוף זה כל משתנה מותג אם הסיבית המתאימה היא 1, ואינו מותג אם היא 0.

ניתן לבטא כל אחת מבין 2^{2^n} הפונקציות הבוליאניות בעלות n משתנים בינרים באחת משתי **הצורות הקנוניות** האלה: 1. **סכום של מכפלות סטנדרטיות**
2. **מכפלה של סכומים סטנדרטיים.**

המכפלות הסטנדרטיות שסכומן מגדיר את הפונקציה הבוליאנית הן אלו שעבורן הפונקציה מקבלת ערך 1 בטבלת האמת.

הסכומים הסטנדרטיים שמכפלתם מגדירה את הפונקציה הבוליאנית הם אלה שעבורם הפונקציה מקבלת ערך 0.

כדי **להמיר** צורה קנונית אחת לאחרת יש להחליף את הסמלים Σ ו-Π זה בזה ולרשום בסוגריים את מספרי המכפלות הסטנדרטיות או הסכומים הסטנדרטיים שאינם מופיעים בצורה המקורית.

ניתן לבטא פונקציה בוליאנית באחת משתי **הצורות הסטנדרטיות:**

1. **סכום מכפלות** - ביטוי בוליאני המכיל מחוברי AND (מחוברי מכפלה) אשר כל אחד מהם מורכב מליטרל אחד או יותר.
2. **מכפלת סכומים** - ביטוי בוליאני המכיל גורמי OR (גורמי סכום) אשר כל אחד מהם מורכב מליטרל אחד או יותר.

אלה האופרטורים הבינריים שהכרנו: exclusive-OR, AND, OR, NAND, NOR, שקילות, עיכוב וגרירה.

אלה הסמלים וטבלאות האמת של השערים הלוגיים שבהם משתמשים בתכנון מערכות ספרתיות:

שם	סמל גרפי	פונקציה אלגברית	טבלת אמת
AND		$F = xy$	x y | F 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
OR		$F = x + y$	x y | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
Inverter		$F = x'$	x | F 0 | 1 1 | 0
Buffer		$F = x$	x | F 0 | 0 1 | 1
NAND		$F = (xy)'$	x y | F 0 0 | 1 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
NOR		$F = (x + y)'$	x y | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 0
Exclusive-OR (XOR)		$F = xy' + x'y$ $= x \oplus y$	x y | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
Exclusive-NOR or equivalence		$F = xy + x'y'$ $= x \odot y$	x y | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1

ניתן להרחיב שער לוגי באופן שיהיו לו יותר משתי כניסות, אם האופרטור הבינרי שהוא מייצג הנו חילופי וקיבוצי.

מעגלים ספרתיים נבנים תמיד בעזרת מעגלים משולבים.

המשפחות הלוגיות (של מעגלים משולבים) הנפוצות הן: TTL, ECL, MOS, CMOS, I^2L.

לפי הגדרת הלוגיקה החיובית מתח גבוה מייצג רמה לוגית 1, ומתח נמוך מייצג רמה לוגית 0. לפי הגדרת הלוגיקה השלילית מתח נמוך מייצג רמה לוגית 1, ומתח גבוה מייצג רמה לוגית 0. ההמרה מלוגיקה חיובית ללוגיקה שלילית, ולהפך, הנה בעיקרה פעולה המחליפה 1-ים ב-0-ים ו-0-ים ב-1-ים בכניסות וביציאה של השער.

הפרמטרים החשובים ביותר עבור כל משפחה לוגית של מעגלים משולבים הם אלה: דרגת העמסה, פיזור הספק, זמן השהיה וחסינות לרעש.

תשובות לשאלות בפרק 2

תשובה 1

כל החוקים פרט לקיום איבר הפכי מתקיימים:

1. סגור - משתי הטבלאות ניתן להיווכח כי הקבוצה S סגורה ביחס לאופרטורים + ו-· (שכן התוצאה של כל פעולה היא 0, 1 או 2 ו-$0,1,2 \in S$).
2. חוק החילוף - החוק מתקיים, כיוון שהטבלאות סימטריות ביחס לאלכסון הראשי.
3. איבר יחידה - ביחס ל- + הוא 2 כי $0+2=2+0=0$

$1+2=2+1=1$

$2+2=2+2=2$

ביחס ל- · הוא 0 כי $0\cdot0=0\cdot0=0$

$0\cdot1=1\cdot0=1$

$0\cdot2=2\cdot0=2$

4. אין איברים הפכיים: ל-0, למשל, לא קיים איבר $y \in S$ כך ש- $0+y=2$.

ל-1, למשל, לא קיים איבר $z \in S$ כך ש- $1\cdot z=0$.

6,5. חוק הקיבוץ וחוקי הפילוג מתקיימים.

כדי להראות זאת יש ליצור טבלת אמת של כל ערכי x,y,z האפשריים.

א. לכל צירוף ערכים נחשב את $(x\cdot y)\cdot z$ ואת $x\cdot(y\cdot z)$, ונראה שערכיהם זהים (מכאן נסיק כי חוק הקיבוץ מתקיים). באופן דומה ניתן להראות כי $x+(y+z) = (x+y)+z$.

ב. לכל צירוף ערכים נחשב את $x\cdot(y+z)$ ואת $(x\cdot y)+(x\cdot z)$, ונראה שערכיהם זהים (מכאן נסיק כי חוק הפילוג של · ביחס ל- + מתקיים). באופן דומה ניתן להראות כי חוק הפילוג של + ביחס ל- · [$x+y\cdot z = (x+y)\cdot(x+z)$] מתקיים, אך אנו לא נעשה זאת.

א.

x	y	z	x·y	(x·y)·z	y·z	x·(y·z)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	2	0	2	2	2
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	2	1	2	2	2
0	2	0	2	2	2	2
0	2	1	2	2	2	2

x	y	z	x·y	(x·y)·z	y·z	x·(y·z)
0	2	2	2	2	2	2
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	2	1	2	2	2
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	2	2	2
1	2	0	2	2	2	2
1	2	1	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2
2	0	0	2	2	0	2
2	0	1	2	2	1	2
2	0	2	2	2	2	2
2	1	0	2	2	1	2
2	1	1	2	2	1	2
2	1	2	2	2	2	2
2	2	0	2	2	2	2
2	2	1	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2

ב.

x	y	z	y+z	x·(y+z)	x·y	x·z	(x·y)+(x·z)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	2	0	0	0	2	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1

x	y	z	y+z	x·(y+z)	x·y	x·z	(x·y)+(x·z)
0	1	2	1	1	1	2	1
0	2	0	0	0	2	0	0
0	2	1	1	1	2	1	1
0	2	2	2	2	2	2	2
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	2	0	1	1	2	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	2	1
1	2	0	0	1	2	1	1
1	2	1	1	1	2	1	1
1	2	2	2	2	2	2	2
2	0	0	0	2	2	2	2
2	0	1	0	2	2	2	2
2	0	2	0	2	2	2	2
2	1	0	0	2	2	2	2
2	1	1	1	2	2	2	2
2	1	2	1	2	2	2	2
2	2	0	0	2	2	2	2
2	2	1	1	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2

אם נתבונן היטב בטבלאות המגדירות את שני האופרטורים, נבחין שבעצם:

$$x \cdot y = \max\{x,y\}$$

$$x + y = \min\{x,y\}$$

לפיכך, במקרה פרטי זה לא היה צורך לבדוק בעזרת טבלאות אמת אם מתקיימים חוקי הקיבוץ והחילוף.

אנו יודעים שמתקיימים:

$$\min\{\min\{x,y\},z\} = \min\{x,\min\{y,z\}\}$$
$$\max\{\max\{x,y\},z\} = \max\{x,\max\{y,z\}\}$$
$$\max\{x,\min\{y,z\}\} = \min\{\max\{x,y\},\max\{x,z\}\}$$
$$\min\{x \max\{y,z\}\} = \max\{\min\{x,y\},\min(x,z\}\}$$

תשובה 2

הקבוצה בצירוף שני האופרטורים הבינריים אינם מהווים אלגברה בוליאנית. נראה שלא כל כללי Huntington מתקיימים:

כללים 1-4 - הראינו שהם מתקיימים בתשובה 1.

כלל 6 בוודאי מתקיים, שכן הקבוצה מכילה שלושה איברים שונים.

כלל 5 אינו מתקיים, שכן אין משלים לכל איבר בקבוצה ביחס ל- + וביחס ל- $\cdot$.

נזכיר שהאיבר 2 הוא איבר היחידה ביחס ל- + ולמשל ל-0 אין איבר '0, המקיים $2=0+0'$. איבר היחידה ביחס ל- $\cdot$ הוא 0 ולמשל ל-1 אין איבר, '1, המקיים $0=1\cdot 1'$.

תשובה 3

נוכיח כי $x\cdot(x+y) = x$:

לפי חוק הפילוג	$x\cdot(x+y) = x\cdot x + x\cdot y$
לפי משפט 1(ב)	$= x + x\cdot y$
לפי משפט 6(א)	$= x$

הוכחה שאינה מסתמכת על 6(א) והיא דואלית להוכחת 6(א):

לפי כלל 2(א)	$x\cdot(x+y) = (x+0)\cdot(x+y)$
לפי כלל 4(ב)	$= x+(0\cdot y)$
לפי כלל 3(ב)	$= x+(y\cdot 0)$
לפי משפט 2(ב)	$= x+0$
לפי כלל 2(א)	$= x$

תשובה 4

נוכיח כי $(x+y)(x'+z) = x'y+xz$:

$$(x+y)(x'+z)=$$

לפי חוק הפילוג	$=(x+y)x'+(x+y)z$
לפי חוק הפילוג וחוק החילוף	$=xx'+x'y+xz+yz$
לפי כלל 5(ב) וכלל 2(א)	$=x'y+xz+yz$
לפי כלל 5(א) וכלל 2(ב)	$=x'y+xz+y(x+x')z$
לפי כלל 4(א), כלל 3(ב) ומשפט 4	$=x'y+x'yz+xz+xzy$
לפי כלל 4(א)	$=x'y(1+z)+xz(1+y)$
לפי משפט 2(א) וכלל 2(ב)	$=x'y+xz$

תשובה 5

נראה את תקפותו של משפט דה מורגן השני:

x	y	x'	y'	x'+y'	x·y	(x·y)'
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

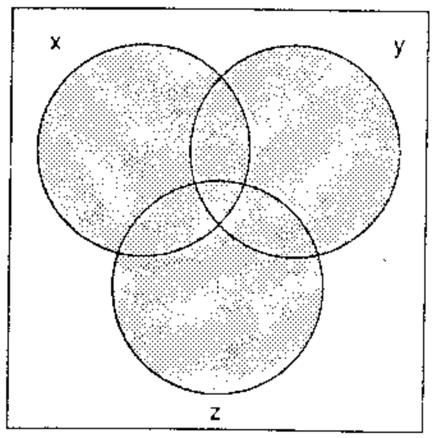
מתוך הטבלה אנו רואים ששתי העמודות: x'+y' ו-(x·y)' הן זהות.

תשובה 6

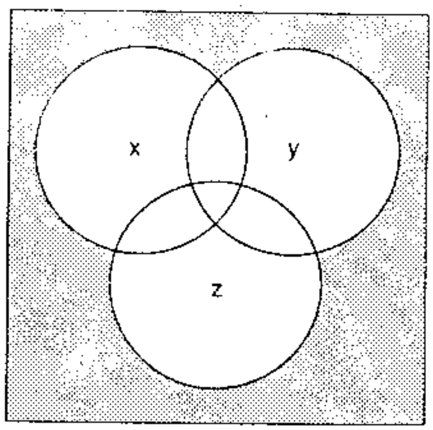
1. נראה את תקפות משפטי דה מורגן עבור שלושה משתנים תוך שימוש בדיאגרמת Venn:

א. משפט דה-מורגן הראשון:

$$(x+y+z)' = x'y'z'$$

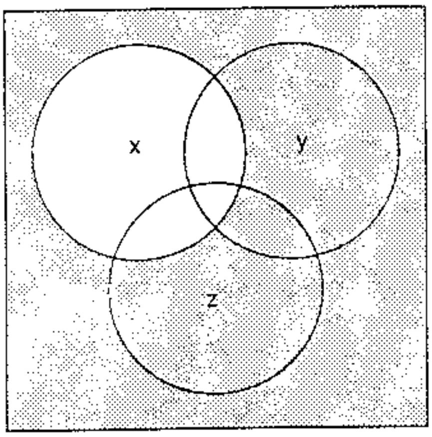


x+y+z

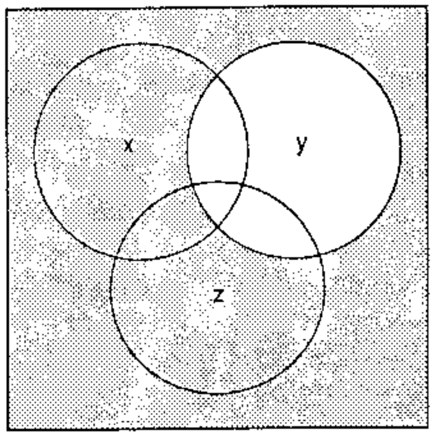


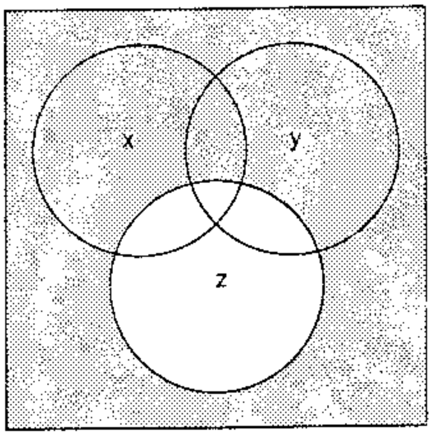
(x+y+z)'

x'

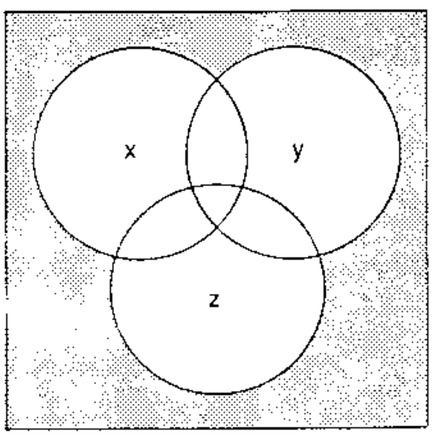


y'





z'

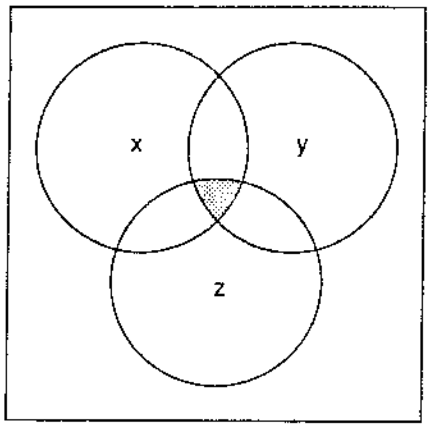


$x'y'z'$

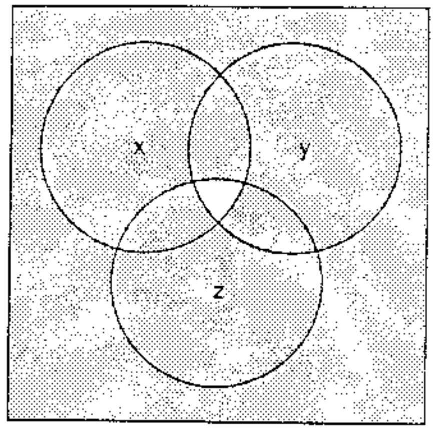
ניתן לראות שדיאגרמת Venn של $(x+y+z)'$ זהה לזו של $x'y'z'$.

ב. משפט דה-מורגן השני:

$$(xyz)' = x'+y'+z'$$

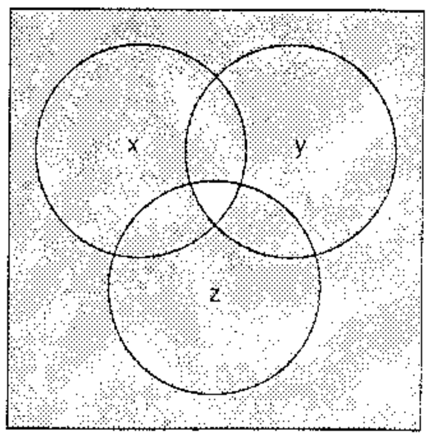


xyz



(xyz)'

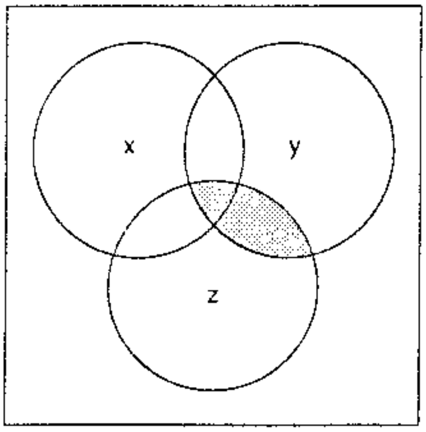
בסעיף (א), ניתן לראות, שהחלק **היחיד** אשר איננו נכלל באף אחת מדיאגרמות Venn של x', y' ו-z' הוא xyz. **כל** חלק אחר נכלל באחת מהן **לפחות**, וזה מספיק כדי שייכלל באיחודן; מכאן



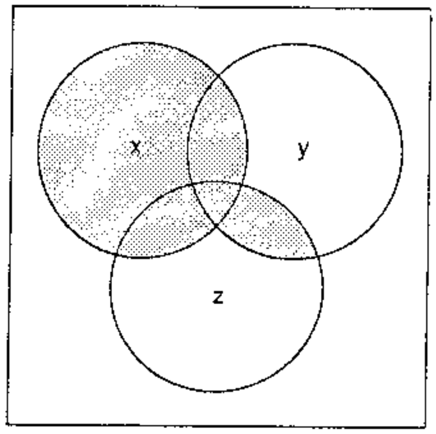
$x'+y'+z'$

וקיבלנו דיאגרמה הזהה לזו של $(xyz)'$.

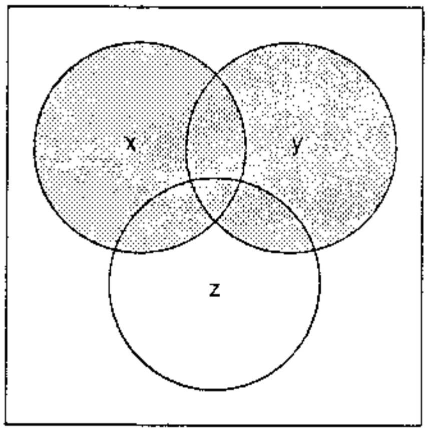
2. נראה בעזרת דיאגרמות Venn את תקפות חוק הפילוג של + ביחס ל- · : $x+yz=(x+y)(x+z)$.



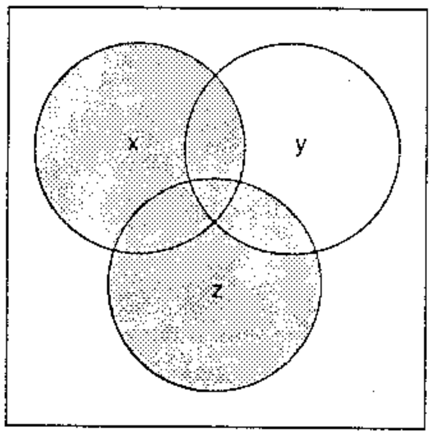
yz



$x+yz$

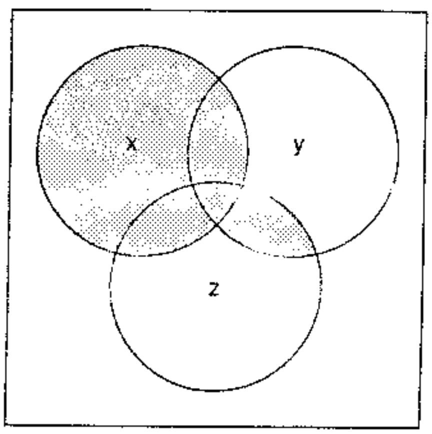


$x+y$



$x+z$

נסרטט כעת דיאגרמה המבטאת את החיתוך של שתי הדיאגרמות האחרונות:



$(x+y)(x+z)$

ומכאן נובעת תקפות חוק הפילוג של + ביחס ל- $\cdot$.

z')'

תשובה 7

להלן טבלת האמת עבור הפונקציה $F = xy + xy' + y'z$:

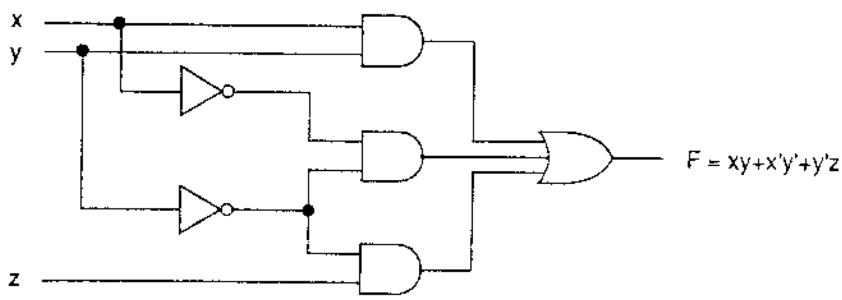
x	y	z	y'	xy	xy'	y'z	F
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1

תשובה 8

נתונה הפונקציה $F = xy + x'y' + y'z$

1. האופרטורים הבוליאניים המופיעים בביטוי המקורי של F הם AND, OR ו-NOT.
לכן אם נתונים שלושת סוגי השערים AND, OR ו-NOT, אז מימוש הפונקציה ייעשה על פי הביטוי המקורי שלה, ואין צורך לשנותו.
המימוש הוא כלהלן:

)]'



2. כאשר יש לממש את F בעזרת שערי OR ו-NOT בלבד, צריך לשנות את הביטוי המקורי של F באופן שיופיעו בו האופרטורים הבוליאניים OR ו-NOT בלבד.
ניתן לקבל את הביטוי השקול ל-F (המכיל רק OR ו-NOT) בעזרת משפטי דה-מורגן והמשפט $(x')'=x$:

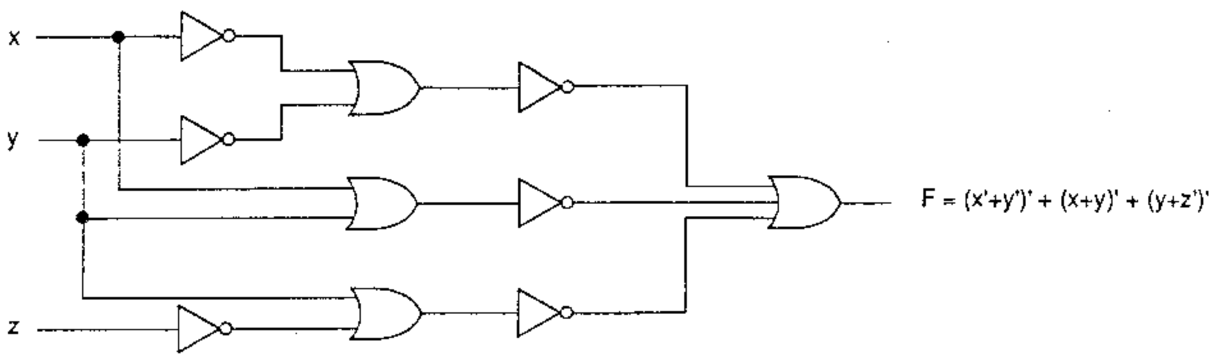
$xy = (x'+y')'$

$x'y' = (x+y)'$

$y'z = (y+z')'$

ניתן אפוא לכתוב את F כך: $F = (x'+y')'+(x+y)'+(y+z')'$

ומימושה יהיה כלהלן:



3. ניתן לקבל ביטוי שקול עבור F אשר יכיל את האופרטורים הבוליאניים AND ו-NOT בלבד. נשתמש במשפט דה-מורגן השני עבור שלושה משתנים: $(A\cdot B\cdot C)'=A'+B'+C'$ ובמשפט $x=(x')'$. במקרה שלנו:

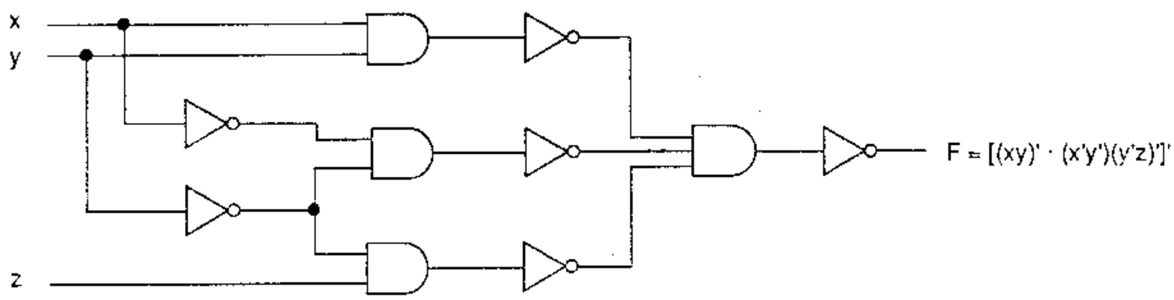
$A = (xy)'$

$B = (x'y')'$

$C = (y'z)'$

$$\underbrace{[(xy)'\cdot(x'y')'\cdot(y'z)']'}_{(A\cdot B\cdot C)'} = \underbrace{xy+x'y'+y'z}_{A'+B'+C'} = F$$

המימוש הוא זה:



תשובה 9

1. נפשט את הפונקציה הבוליאנית $zx + zx'y$:

$zx + zx'y = z(x+x'y)$	לפי כלל 4(א)
$= z(x+x')(x+y)$	לפי כלל 4(ב)
$= z(x+y)$	לפי כלל 5(א)

2. נפשט את הפונקציה הבוליאנית $(A+B)'(A'+B')'$:

$(A+B)'(A'+B')' = A'B'(AB)$	לפי משפטי דה-מורגן
$= A'AB'B$	
$= 0$	לפי כלל 5(ב)

הסבר נוסף למעבר הראשון:

לפי משפט דה-מורגן הראשון $(A+B)' = A'B'$

לפי משפט דה-מורגן השני $(A'+B') = (AB)'$

ואם נשלים בו שני אגפים נקבל: $(A'+B')' = AB$

ומכאן: $(A+B)'(A'+B')' = A'B'(AB)$

תשובה 10

1. יש להציג את הביטוי $ABC + A'B'C + A'BC + ABC' + A'B'C'$, באופן שיהיו בו חמישה ליטרלים. נעשה זאת באופן הזה:

$$\begin{aligned} & ABC + A'B'C + A'BC + ABC' + A'B'C' \\ &= BC(A+A') + A'B'(C+C') + AB(C+C') \\ &= BC + A'B' + AB \\ &= A'B' + B(A+C) \end{aligned}$$

2. יש להציג את הביטוי $BC + AC' + AB + BCD$, באופן שיהיו בו ארבעה ליטרלים:

$$\begin{aligned} BC + AC' + AB + BCD &= BC(1+D) + AC' + AB \\ &= BC + AC' + \underline{AB} \\ &= BC + AC' + \underline{AB(C+C')} \\ &= BC + AC' + ABC + ABC' \\ &= BC + BCA + AC' + AC'B \\ &= BC + AC' \end{aligned}$$

לפי משפט 6(א)

[כי $BC + BCA = BC,\ AC' + AC'B = AC$]

3. יש להציג את הביטוי $[(CD)' + A]' + A + CD + AB$, באופן שיהיו בו שלושה ליטרלים:

$$\begin{aligned} [(CD)'+ A]'+ A + CD + AB &= CDA' + A(1+B) + CD \\ &= CDA'+ A + CD \\ &= CD(A'+1) + A \\ &= CD + A \end{aligned}$$

4. יש להציג את הביטוי $(A+C+D)(A+C+D')(A+C'+D)(A+B')$, באופן שיהיו בו ארבעה ליטרלים:

$$\underbrace{(A+C+D)}_{1}\underbrace{(A+C+D')}_{2}\underbrace{(A+C'+D)}_{3}\underbrace{(A+B')}_{4}$$

$$\underset{\mathrm{I}}{=}\ \underbrace{(A+C+DD')}_{1,2}\underbrace{(A+D+CC')}_{1,3}\underbrace{(A+B')}_{4}$$

$$\underset{\mathrm{II}}{=}\ (A+C)(A+D)(A+B')$$

ת

נ

$= (A+CD)(A+B')$

↓

III

$= A + B'CD$

↓

IV

הצדקת המעברים

מעבר I

$$\underbrace{(A+C+D)}_{1}\underbrace{(A+C+D')}_{2} = A+C+DD'$$

לפי כלל 4(ב), דהיינו חוק הפילוג של + ביחס ל- · (כאן $x=A+C$; $z=D'$; $y=D$).

$$\underbrace{(A+C+D)}_{1}\underbrace{(A+C'+D)}_{3} = (A+D+C)(A+D+C')$$

$$= A+D+CC'$$

שוב, לפי כלל 4(ב) (כאן $x=A+D$; $y=C$; $z=C'$).

כדי להשלים את הצדקת המעבר ה-I נוסיף, כי השתמשנו פעמיים בתת-ביטוי 1, $(A+C+D)$ לפי משפט 1(ב) [$(A+C+D)(A+C+D)=(A+C+D)$].

מעבר II

לפי כלל 5(ב) $DD' = 0$

$CC' = 0$

ולכן $(A+C+DD')(A+D+CC') = (A+C)(A+D)$

מעברים III,IV

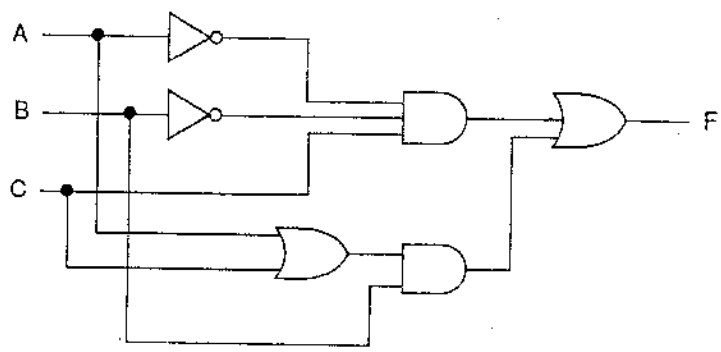
לפי חוק הפילוג של + ביחס ל- · [כלל 4(ב)]:

$(A+C)(A+D) = A+CD$ - מעבר III

$(A+CD)(A+B') = A+CDB'$ - מעבר IV

תשובה 11

נממש את הפונקציה $F = A'B'C + B(A+C)$ בעזרת שערים לוגיים:



תשובה 12

1. נמצא את המשלים של $F_1 = (BC' + A'D)(AB' + CD')$:

$$F_1 = (BC' + A'D)(AB' + CD') =$$

$$= \underbrace{BC'AB'}_{0} + \underbrace{BC'CD'}_{0} + \underbrace{A'DAB'}_{0} + \underbrace{A'DCD'}_{0} = 0$$

ולכן , $F_1{}' = 0' = 1$

2. נמצא את המשלים של $F_2 = (B'D + A'BC' + ACD + A'BC)$ ונפשטו ככל האפשר:

$F_2{}' = (B'D + A'BC' + ACD + A'BC)'$

$= [B'D + A'B(C+C') + ACD]'$

$= (B'D)'\cdot(A'B)'\cdot(ACD)'$ — לפי משפט דה-מורגן הראשון

$= (B+D')(A+B')(A'+C'+D')$

$= (A+B')(D'+B)(D'+A'+C')$ — שינוי סדר הופעת הגורמים וסדר המחוברים בתוכם

$= (A+B')[D' + B(A'+C')]$ — לפי כלל 4(ב)

הצדקת המעבר שנעשה לפי משפט דה-מורגן הראשון: השתמשנו במשפט דה-מורגן עבור שלושה משתנים: $(x+y+z)'=x'\cdot y'\cdot z'$, כאשר כל משתנה הוא גורם בעל כמה איברים: $x=B'D$; $y=A'B$; $z=ACD$

$x'y'z'=(B'D)'(A'B)'(ACD)'$

3. נמצא את המשלים של $F_3 = [(AB)'A][(AB)'B]$ ונפשטו:

$F_3{}' = \{[(AB)'A][(AB)'B]\}'$

$= [(AB)'A]' + [(AB)'B]'$ — לפי משפט דה-מורגן השני

$= (AB+A')+(AB+B')$ — לפי משפט דה-מורגן השני

$= AB+A'+B'$ — לפי משפט 1(א) $(AB+AB=AB)$

$= (A'+B')'+(A'+B')$ — לפי משפט דה-מורגן השני אחרי שמבצעים השלמה של שני אגפיו

$= 1$ לפי כלל 5(א) $(x = A'+B')$

תשובה 13

1. נציג את הפונקציות F_1 ו-F_2 כסכום של מכפלות סטנדרטיות באופן הזה:

$$F_1 = \sum_i m_i \ , \ F_2 = \sum_j m_j$$

אם נבצע פעולת OR על שתי הפונקציות הללו, נקבל את הפונקציה הבוליאנית :E

$$E = F_1 + F_2 = \sum_i m_i + \sum_j m_j$$

כלומר: E מכילה את סכום כל המכפלות הסטנדרטיות שב-F_1 וב-F_2.

2. אם נבצע כעת פעולת AND על F_1 ו-F_2, נקבל את הפונקציה G:

$$G = F_1 \cdot F_2 = (\sum_i m_i) \cdot (\sum_j m_j)$$

אם $i \neq j$, אז $m_i \cdot m_j = 0$, כיוון שהשוני בין שתי המכפלות הסטנדרטיות m_i ו-m_j הוא במשתנה אחד לפחות. למשל: $x'yz' \cdot xyz' = 0$.

0

אם $i=j$, אז $m_i \cdot m_j = m_i \cdot m_i = m_i$.

לפיכך, G מכילה את המכפלות הסטנדרטיות המשותפות ל-F_1 ול-F_2.

תשובה 14

1. תחילה נרחיב כל אחד מגורמי הביטוי לצורתו הקנונית:

$$x'y' = x'y'(z+z') = x'y'z + x'y'z'$$

$$z = (x+x')(y+y')z = xyz + xy'z + x'yz + x'y'z$$

נציב את מה שקיבלנו בביטוי המקורי של הפונקציה, ונקבל:

$$F_1 = x'y' + z = \underbrace{x'y'z + x'y'z'}_{} + \underbrace{xyz + xy'z + x'yz + x'y'z}_{}$$

נשמיט הופעות כפולות של גורמים ונסדר את המכפלות בסדר עולה:

$$F_1 = x'y'z' + x'y'z + x'yz + xy'z + xyz =$$

$$= m_0+m_1+m_3+m_5+m_7 = \Sigma(0,1,3,5,7)$$

2. המספרים 0,1,3,5,7 הנם הערכים העשרוניים של השורות בטבלת האמת שבהן $F_2=1$. לכן נרשום 1 בשורות הללו - בעמודה המתאימה ל-F_1, ו-0 ביתר שורותיה של עמודה זו, ונקבל:

x	y	z	ערך עשרוני של המכפלה הסטנדרטית	F_1
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	2	0
0	1	1	3	1
1	0	0	4	0
1	0	1	5	1
1	1	0	6	0
1	1	1	7	1

תשובה 15

.1

נסדר את המכפלות הסטנדרטיות בסדר עולה
↓

$$F(A,B,C) =$$

$$A'B'C' + A'B'C + A'BC' + A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$$
$$= A'(B'C' + B'C + BC' + BC) + A(B'C' + B'C + BC' + BC)$$
$$= (A'+A)(B'C' + B'C + BC' + BC) = B'C' + B'C + BC' + BC$$
$$= B'(C'+C) + B(C'+C) = (B'+B)(C'+C) = C'+C = 1$$

.2 נוכיח באינדוקציה את המשפט:
הסכום של כל 2^n המכפלות הסטנדרטיות האפשריות של פונקציה בוליאנית בעלת n משתנים הוא 1.

עבור n=1: $F(A) = A+A'$
$= 1$ לפי כלל 5(א)

נניח כי המשפט נכון עבור n-1 משתנים; כלומר: נניח כי הסכום של כל 2^{n-1} המכפלות הסטנדרטיות של פונקציה בוליאנית בעלת n-1 משתנים הוא 1.
ונוכיח שהמשפט נכון עבור n משתנים:
תהי F פונקציה בעלת n משתנים: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ויהיו m_i $(0 \le i \le 2^n-1)$ 2^n המכפלות הסטנדרטיות האפשריות:

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i$$

מחצית מ-2^n המכפלות הסטנדרטיות מכילות את x_1, ואילו במחצית האחרת מופיע x_1'.

נוציא את x_1 מחוץ לסוגריים מתוך $2^n/2=2^{n-1}$ המכפלות המכילות אותו,
ונוציא את x_1' מחוץ לסוגריים מתוך $2^n/2$ המכפלות הנותרות, ונקבל:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = x_1\Big(\sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} m_j\Big) + x_1'\Big(\sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} m_j\Big)$$

שני המחוברים שהתקבלו מכילים סכום משותף: $\sum_{j=0}^{2^{n-1}} m_j$, וניתן להוציאו מחוץ לסוגריים.

נקבל:
$$= (x_1+x_1')\sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} m_j$$

היות ש- $x_1+x_1'=1$ נקבל:
$$= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} m_j$$

קיבלנו את סכום 2^{n-1} המכפלות הסטנדרטיות האפשריות עבור פונקציה בעלת n-1 משתנים.

מהנחת האינדוקציה נובע כי סכום זה שווה ל-1, ולכן

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

מש"ל

תשובה 16

.1 $F(A,B,C,D) = D(A'+B) + B'D = A'D + BD + B'D = A'D + (B+B')D$

$$= A'D + D = D$$

↓

לפי משפט 6(א)

F היא פונקציה של ארבעה משתנים; ל-D חסרים שלושה ליטרלים, ולכן נרחיבו למכפלה סטנדרטית כדי לקבל את סכום המכפלות הסטנדרטיות עבור F:

$$F = D = (A+A')(B+B')(C+C')D$$
$$= A'B'C'D + A'B'CD + A'BC'D + A'BCD +$$
$$AB'C'D + AB'CD + ABC'D + ABCD$$
$$= m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9 + m_{11} + m_{13} + m_{15}$$

כלומר: $F(A,B,C,D) = \Sigma(1,3,5,7,9,11,13,15)$

נוכל לקבל את הצגת F כמכפלה של סכומים סטנדרטיים ישירות מתוך ההצגה כסכום של מכפלות סטנדרטיות; לשם כך ניקח את כל המספרים בין 0 ל- $2^4-1=15$, החסרים ב-Σ שלעיל; נקבל: $F(A,B,C,D)=\Pi(0,2,4,6,8,10,12,14)$

כעת נראה כיצד ניתן לקבל את ההצגה כמכפלה של סכומים סטנדרטיים מבלי להיעזר בסכום המכפלות הסטנדרטיות שהתקבל:

$$F = D = AA'+ BB'+ CC'+ D = AA'+ BB'+(C+D)(C'+ D)$$
$$= AA'+(BB'+ C + D)(BB'+C'+D)$$
$$= AA'+(B+C+D)(B'+C+D)(B+C'+D)(B'+C'+D)$$
$$= [AA'+(B+C+D)(B'+C+D)][AA'+(B+C'+D)(B'+C'+D)]$$
$$= (AA'+B+C+D)(AA'+B'+C+D)(AA'+B+C'+D)(AA'+B'+C'+D)$$

פתיחת סוגריים וסידור
הסכומים הסטנדרטיים
המתקבלים בסדר עולה

$$= (A+B+C+D)(A+B+C'+D)(A+B'+C+D)(A+B'+C'+D)(A'+B+C+D)$$
$$(A'+B+C'+D)(A'+B'+C+D)(A'+B'+C'+D)$$
$$= M_0M_2M_4M_6M_8M_{10}M_{12}M_{14} = \Pi(0,2,4,6,8,10,12,14)$$

.2 $F(w,x,y,z) = y'z + wxy' + wxz' + w'x'z$

הצגת F כסכום מכפלות:

$$F = (w+w')(x+x')y'z + wxy'(z+z') + wx(y+y')z' + w'x'(y+y')z$$
$$= wxy'z + wx'y'z + w'xy'z + w'x'y'z + wxy'z + wxy'z' +$$
$$+ wxyz' + wxy'z' + w'x'yz + w'x'y'z$$

נשאיר מופע אחד לכל מכפלה סטנדרטית השייכת ל-F (כלומר: נשמיט שני מופעים של $wxy'z$ ומופע אחד של $w'x'y'z$ לפי משפט 1) ונסדר את המכפלות הסטנדרטיות הנותרות בסדר עולה. נקבל:

$$F = w'x'y'z + w'x'yz + w'xy'z + wx'y'z + wxy'z' + wxy'z + wxyz'$$
$$= \Sigma(1,3,5,9,12,13,14)$$

ומכאן: $F = \Pi(0,2,4,6,7,8,10,11,15)$

.3 $F(x,y,z) = 1$

זוהי פונקציה של שלושה משתנים השווה ל-1. בתשובה 15 הוכחנו, כי הסכום של כל 2^n המכפלות הסטנדרטיות האפשריות של פונקציה בוליאנית בת n משתנים שווה ל-1. מכאן שבהצגת F כסכום של מכפלות סטנדרטיות מופיעות כל $2^3=8$ המכפלות הסטנדרטיות שניתן ליצור בעזרת שלושה משתנים; דהיינו:

$$F = \sum_{i=0}^{7} m_i = \Sigma(0,1,2,3,4,5,6,7)$$

לא ניתן לייצג את הפונקציה כמכפלה של סכומים סטנדרטיים. (נעיר שאי אפשר לייצג את הפונקציה $F(...)=0$ כסכום של מכפלות סטנדרטיות.)

תשובה 17

.1 יש להוכיח כי

$$F(A,B,C) = (A'+B'+C')(A'+B'+C)(A'+B+C')(A'+B+C)(A+B'+C')$$
$$(A+B'+C)(A+B+C')(A+B+C) = 0$$

בתשובה 15(1) הוכחנו כי

$$A'B'C' + A'B'C + A'BC' + A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC = 1$$

אולם זוהי הטענה הדואלית לטענה שאנו מבקשים להוכיח. לכן לפי ההוכחה בתשובה 15(1) ועל-סמך עקרון הדואליות:

$$F(A,B,C) = \Pi(0,1,2,3,4,5,6,7) = 0$$

2. נסמן את n המשתנים ב-$x_1, x_2, \ldots, x_n$.
עלינו להוכיח כי $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Pi(0,1,2,\ldots,n-1) = 0$
נוכיח באינדוקציה כי $\Sigma(0,1\ldots,n-1) = 1$ באופן דומה לתשובה 15(2) ועל-סמך עקרון הדואליות נקבל כי $\Pi(0,1,\ldots,n-1)=0$.

תשובה 18

1. $F(A,B,C,D) = \Sigma(0,2,6,11,13,14)$
ניתן לבטא את המשלים של F כסכום של מכפלות סטנדרטיות באופן הזה:

$$F'(A,B,C,D) = \Sigma(1,3,4,5,7,8,9,10,12,15)$$
$$= m_1+m_3+m_4+m_5+m_7+m_8+m_9+m_{10}+m_{12}+m_{15}$$

ניקח כעת את המשלים של F', ונקבל בעזרת משפט דה-מורגן את F בצורת מכפלה של סכומים סטנדרטיים:

$$F = (m_1+m_3+m_4+m_5+m_7+m_8+m_9+m_{10}+m_{12}+m_{15})'$$
$$= m_1'm_3'm_4'm_5'm_7'm_8'm_9'm_{10}'m_{12}'m_{15}' = M_1M_3M_4M_5M_7M_8M_9M_{10}M_{12}M_{15}$$

$m_j'=M_j$ על פי טבלה 2.3

$$= \Pi(1,3,4,5,7,8,9,10,12,15)$$

2. $F(x,y,z) = \Pi(0,3,6,7)$
כדי לקבל את הצורה הקנונית האחרת של F נהפוך Π ל-Σ ונרשום בסוגריים של ה-Σ את כל המספרים החסרים בהצגה המקורית של F בעזרת Π:

$$F(x,y,z)=\Sigma(1,2,4,5)$$

תשובה 19

צורה סטנדרטית של פונקציה נבדלת מצורה קנונית בכך שגורמיה אינם מכילים בהכרח את כל המשתנים (אלא יכולים להכיל פחות).
כאשר מממשים פונקציה בוליאנית בעזרת שערים, מעדיפים מימוש הדורש מספר מינימלי של שערים. מכאן שצורה סטנדרטית עדיפה על צורה קנונית, שכן רק לעתים רחוקות תהיה הצורה הקנונית בעלת מספר משתנים מינימלי. (בצורה קנונית - כל מכפלה סטנדרטית או סכום סטנדרטי חייבים להכיל את כל המשתנים!)
כאשר קוראים פונקציה מטבלת האמת, מתקבלת הצורה הקנונית.

תשובה 20

הביטוי המתאר את הפונקציה exclusive-OR הוא $x \oplus y = x'y + xy'$

נמצא את המשלים שלו: $(x \oplus y)' = (x'y + xy')' = (x'y)'(xy')'$

$$= (x+y')(x'+y)$$

הביטוי שהתקבל עבור המשלים של $x \oplus y$ הוא הדואלי של $x \oplus y$.

תשובה 21

1. נראה כי האופרטור עיכוב איננו חילופי ואיננו קיבוצי:

חילופיות:

כדי להראות שהאופרטור איננו חילופי מספיק להראות עבור זוג אחד של ערכי x,y כי $x/y \neq y/x$.

ניקח למשל $y=1$, $x=0$.

$$x/y = xy' = 0\cdot1' = 0\cdot0 = 0$$

$$y/x = x'y = 0'\cdot1 = 1\cdot1 = 1$$

ומכאן ש- $x/y \neq y/x$ עבור $xy = 01$.

קיבוציות:

שוב, נראה שהאופרטור איננו קיבוצי באמצעות דוגמה נגדית.

ניקח למשל $xyz = 111$.

$$(x/y)/z = xy'z' = 1\cdot1'\cdot1' = 1\cdot0\cdot0 = 0$$

$$x/(y/z) = x(yz')' = x(y'+z) = 1\cdot(1'+1) = 1\cdot((0+1) = 1\cdot1 = 1$$

ומכאן ש- $(x/y)/z \neq x(y/z)$ עבור $xyz = 111$.

2. נראה שהאופרטור exclusive-OR חילופי וקיבוצי:

חילופיות:

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = xy' + x'y = yx' + y'x = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x}$$

קיבוציות:

א.

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} &= (xy' + x'y) \oplus z \\ &= (xy' + x'y)z' + (xy' + x'y)'z \\ &= (xy' + x'y)z' + (xy + x'y')z \\ &\downarrow \\ &* \\ &= x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz \\ &= \Sigma\ (1,2,4,7)\end{aligned}$$

המעבר * נעשה על-סמך הפעולות האלגבריות האלה:

$$(xy' + x'y)' = (xy')'(x'y)' = (x'+y)(x+y') =$$

$$= xx' + x'y' + xy + yy' = xy + x'y'$$

ב.
$$\mathbf{x \oplus (y \oplus z)} = x \oplus (yz' + y'z) =$$
$$= x'(yz'+y'z) + x(yz'+y'z)'$$
$$= x'(yz' + y'z) + x(yz + y'z')$$
לפי * ב-(א)
$$= x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz$$
$$= \Sigma(1,2,4,7)$$

מכאן שמתקיים $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$; דהיינו, האופרטור exclusive-OR קיבוצי.

3. יש להראות כי האופרטורים NOR ו-NAND אינם פילוגיים זה ביחס לזה.

נראה תחילה כי האופרטור NAND($\uparrow$) אינו פילוגי ביחס לאופרטור NOR($\downarrow$):

מספיק להראות כי עבור **xyz=000**, למשל, $x\uparrow(y\downarrow z) \neq (x\uparrow y)\downarrow(x\uparrow z)$.

$$\mathbf{x\uparrow(y\downarrow z)} = x\uparrow(y+z)' = [x(y+z)']' = \mathbf{x'+y+z}$$
$$\mathbf{(x\uparrow y)\downarrow(x\uparrow z)} = (xy)'\downarrow(xz)' = [(xy)'+(xz)']' = xy\cdot xz = \mathbf{xyz}$$

מכאן נובע כי עבור xyz=000,
$$x\uparrow(y\downarrow z) = x'+y+z = 0'+1+1 = 1$$
$$(x\uparrow y)\downarrow(x\uparrow z) = xyz = 0\cdot 0\cdot 0 = 0$$

כלומר, האופרטור $\uparrow$ אינו פילוגי ביחס לאופרטור $\downarrow$.

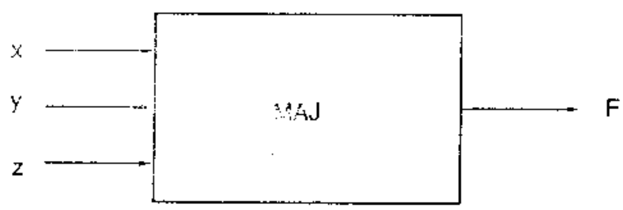
נראה כעת כי האופרטור $\downarrow$ אינו פילוגי ביחס לאופרטור $\uparrow$; כלומר, נראה כי $(x\downarrow y)\uparrow(x\downarrow z) \neq x\downarrow(y\uparrow z)$ עבור שלשה אחת של ערכי x,y,z.

$$\mathbf{x\downarrow(y\uparrow z)} = x\downarrow(yz)' = x\downarrow(y'+z') = [x+(y'+z')]' = x'\cdot(y'+z')' = \mathbf{x'yz}$$
$$\mathbf{(x\downarrow y)\uparrow(x\downarrow z)} = (x+y)'\uparrow(x+z)' = (x'y')\uparrow(x'z') = (x'y'\cdot x'z')'$$
$$= (x'y'z')' = \mathbf{x+y+z}$$

ועבור xyz = 001:
$$x\downarrow(y\uparrow z) = x'yz = 0'\cdot 0\cdot 1 = 0$$
$$(x\downarrow y)\uparrow(x\downarrow z) = x+y+z = 0+0+1 = 1$$

תשובה 22

יהי MAJ שער-רוב בעל שלוש כניסות. נסמן ב-F את הפונקציה הבוליאנית הממומשת באמצעות שער-רוב בעל שלוש כניסות:



ניצור טבלת אמת עבור F על פי הגדרת שער-רוב:

x y z	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

מתוך הטבלה נקבל ביטוי המתאר את F: $F = x'yz + xy'z + xyz' + xyz$

נפשט כעת את הביטוי שהתקבל עבור F: $F = x'yz + xy'z + xyz' + xyz =$

$= x'yz + xyz + xy'z + xyz + xyz' + xyz$

$= yz(x'+x) + xz(y'+y) + xy(z'+z) = xy + xz + yz$

מכאן רואים, כי מספיק ששניים משלושת המשתנים x,y,z יהיו שווים ל-1 כדי ש-F תהייה שווה ל-1.

תשובה 23

הטבלה עבור A ו-F היא כלהלן:

x y z	$A = x \oplus y$	$F = A \oplus z = x \oplus y \oplus z$
0 0 0	0	0
0 0 1	0	1
0 1 0	1	1
0 1 1	1	0
1 0 0	1	1
1 0 1	1	0
1 1 0	0	0
1 1 1	0	1

תשובה 24

מספר הרגליים הדרושות לכל שער שווה למספר הכניסות + 1 (עבור היציאה).
נחשב את מספר השערים שאריזה מסוג TTL SSI בעלת 14 רגליים יכולה להכיל - בכל אחד מהמקרים האלה:

1. האריזה מכילה שערים מסוג exclusive-OR בעלי שתי כניסות:
לכל שער exclusive-OR דרושות 3 רגליים (שתיים לכניסות ואחת ליציאה);
מכאן שמספר השערים שהאריזה יכולה להכיל הוא 4 = 12/3.

2. א. באופן דומה לסעיף 1, מספר השערים מסוג NAND בעלי ארבע כניסות,
שהאריזה יכולה להכיל, הוא 2 = 12/(4+1)=12/5.
ב. מספר השערים מסוג NAND בעלי שמונה כניסות, שהאריזה יכולה להכיל הוא
1 = 12/(8+1)=12/9.

תשובה 25

ניצור טבלת אמת (במונחי H ו-L) המייצגת שער AND בלוגיקה חיובית (H=1, L=0). נראה שטבלה זו מהווה טבלת אמת של שער OR בלוגיקה שלילית (H=0, L=1). טבלה זו נתונה להלן:

x	y	z
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H

עבור לוגיקה חיובית (L=0, H=1) נקבל את הטבלה הזו:

x	y	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

וזוהי טבלת אמת של שער AND.
עבור לוגיקה שלילית (L=1, H=0) נקבל:

x	y	z
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

וזוהי טבלת אמת של שער OR.

מכאן ששער AND של לוגיקה חיובית הנו שער OR של לוגיקה שלילית.

כעת נראה כי גם ההפך נכון.

ניצור טבלת אמת המייצגת שער OR בלוגיקה חיובית, ונראה כי היא מהווה טבלת אמת של שער AND בלוגיקה שלילית:

x	y	z
L	L	L
L	H	H
H	L	H
H	H	H

עבור לוגיקה חיובית נקבל:

x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

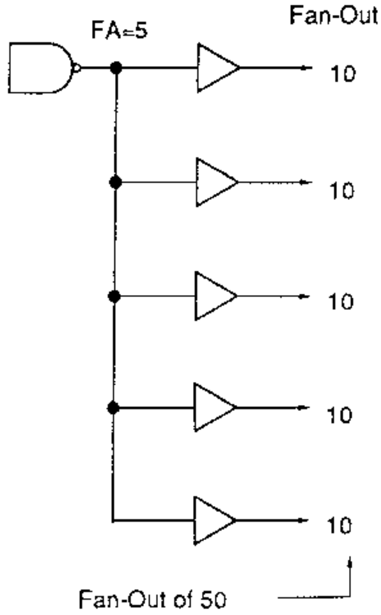
וזוהי טבלת האמת של שער OR.

ואילו עבור לוגיקה שלילית נקבל את טבלת האמת של שער AND:

x	y	z
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

תשובה 26

נחבר את היציאה של השער NAND לחמישה שערי חוצץ מקבילים (נתון כי דרגת ההעמסה של השער NAND הנתון היא 5, ולכן ניתן לעשות זאת). כעת נחבר כל שער חוצץ לעשרה שערים, וכך קיבלנו חיבור ל-50 שערים:



גת
ער

פרק 3

פישוט פונקציות בוליאניות

בפרק זה נלמד שתי שיטות לפישוט פונקציות בוליאניות: שיטת המפה ושיטת הטבלה. כמו כן נראה כיצד ניתן לממש את הפונקציה המפושטת בעזרת שערים לוגיים. לפישוט פונקציה בוליאנית יש חשיבות רבה, כאשר רוצים לממש את הפונקציה בעזרת שערים. ברוב המיקרים פישוט הפונקציה לפני מימושה מביא לחסכון במספר ניכר של שערים ושל כניסות לשערים.

סעיף 3.1

בפרק הקודם (2) ראינו שאין דרך אחידה לפשט פונקציות בוליאניות באמצעים אלגבריים (דהיינו בעזרת הכללים והמשפטים של האלגברה הבוליאנית).
נלמד עתה שיטת פישוט שתתבסס על תהליך קבוע, ללא תלות בפונקציה מסוימת.
שיטה זו נקראת שיטת המפה.

קרא את הסעיף כולו.

סעיף 3.2

בסעיף זה נלמד כיצד ניתן לפשט בשיטת המפה פונקציות בוליאניות של שניים או שלושה משתנים (מספר המשתנים במפה שווה למספר המשתנים בפונקציה שרוצים לפשט). הפונקציות שנפשט בסעיף זה נתונות בצורת סכום מכפלות סטנדרטיות או בצורת סכום מכפלות. הפונקציות שיתקבלו אחרי הפישוט יהיו בצורת סכום מכפלות.

קרא את הסעיף כולו.

עקרונות שיטת המפה:

1. יש לצרף מספר מקסימלי של ריבועים סמוכים; כך יקטן מספר הליטרלים בגורם שיתקבל.
2. מותר להשתמש באותו ריבוע יותר מפעם אחת; דבר זה אף רצוי, משום שהוא מסייע להקטין את מספר הליטרלים בפונקציה המופשטת.
3. מספר הריבועים הסמוכים שניתן לצרף הוא תמיד חזקה של 2. במפה של שני משתנים ניתן לצרף $2^1=2$ או $2^2=4$ ריבועים; במפה של שלושה משתנים ניתן לצרף 2, 4 או $2^3=8$ ריבועים.

הסבר לאיור 3.2(2)

$$\begin{aligned} x+y &= x(y+y') + y(x+x') \\ &= xy + xy' + yx + yx' \\ &= xy + xy' + x'y = m_1 + m_2 + m_3 \end{aligned}$$

הסבר נוסף לדוגמה 3.4

נצרף את 2 הריבועים הסמוכים שמכפלותיהם הסטנדרטיות הן m_4 ו- m_5 ונקבל את הגורם xy'.

נצרף כעת את ארבעת הריבועים: m_6, m_4, m_2, m_0, ונקבל את הגורם בעל הליטרל היחיד z'. שים לב שהשתמשנו ב-m_4 פעמיים!

שאלה 1

מצא את הביטויים המתקבלים לאחר הפישוט בצורת סכום מכפלות עבור הפונקציות הבוליאניות האלה:

1. $F_1 = x'y' + yz + x'yz'$
2. $F_2(x,y,z) = \Sigma(3,5,6,7)$

סעיף 3.3

בסעיף זה נלמד לפשט פונקציות של ארבעה משתנים בעזרת מפה של ארבעה משתנים. מספר הריבועים שניתן לצרף במפה כזו הוא 2, 4, 8 או $2^4=16$ ריבועים.

קרא את הסעיף כולו.

שאלה 2

מצא את הביטוי המתקבל לאחר הפישוט בצורת סכום מכפלות עבור הפונקציה הבוליאנית $F = ABD + A'C'D' + A'B + A'CD' + AB'D'$.

סעיף 3.4

פישוט פונקציות של חמישה ושישה משתנים.

קרא את הסעיף כולו.

שאלה 3

מצא את הביטוי המתקבל לאחר הפישוט בצורת סכום מכפלות עבור הפונקציות הבוליאניות האלה:

1. $F_1(A,B,C,D,E) = \Sigma(0,1,4,5,16,17,21,25,29)$
2. $F_2(A,B,C,D,E) = BDE + B'C'D + CDE + A'B'CE + A'B'C + B'C'D'E'$

סעיף 3.5

בסעיף זה נראה כיצד ניתן לקבל ביטוי בצורת מכפלת סכומים אחרי הפישוט בשיטת המפה.

קרא מתחילת הסעיף עד סוף דוגמה 3.8 (ובכלל זה איור 3.15).

שאלה 4

פשט לצורת **מכפלת** סכומים את הפונקציה $F(A,B,C,D) = \Pi(0,1,2,3,4,10,11)$.

שאלה 5

נתונה טבלת האמת הזו:

x	y	z	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

1. בטא את F_1 ואת F_2 כמכפלה של סכומים סטנדרטיים.
2. פשט את הפונקציות לצורת סכום מכפלות.
3. פשט את הפונקציות לצורת מכפלת סכומים.

שאלה 6

מצא את הביטוי המתקבל לאחר פישוט הפונקציה

$F = (A'+B'+D')(A+B'+C')(A'+B+D')(B+C'+D')$

1. בצורת סכום מכפלות;
2. בצורת מכפלת סכומים.

שאלה 7

ממש את שני הביטויים שהתקבלו בשאלה 6 בעזרת שערי OR ו-AND.

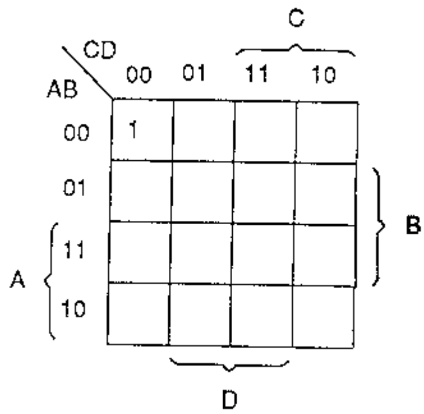
סיים לקרוא את סעיף 3.5.

הערה: אם הפונקציה נתונה בצורה קנונית של סכום מכפלות סטנדרטיות (למשל), אז כל מכפלה סטנדרטית מיוצגת במפה על ידי ריבוע אחד, ויש התאמה חד-ערכית בין ריבוע במפה לבין המכפלה הסטנדרטית שלו בפונקציה. לעומת זאת, אם הפונקציה נתונה בצורה סטנדרטית של סכום מכפלות (למשל), אין צורך להרחיבה לצורה קנונית, שכן ההרחבה למכפלות סטנדרטיות תיעשה במהלך רישום גורמי הפונקציה במפה.

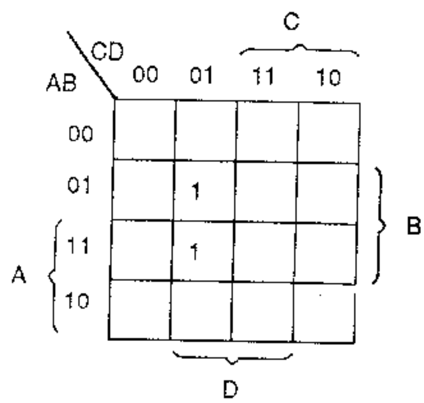
נניח שברצוננו לתאר את הפונקציה הבאה בעזרת מפה:

$$F(A,B,C,D) = A'B'C'D' + BC'D + A'C' + A$$

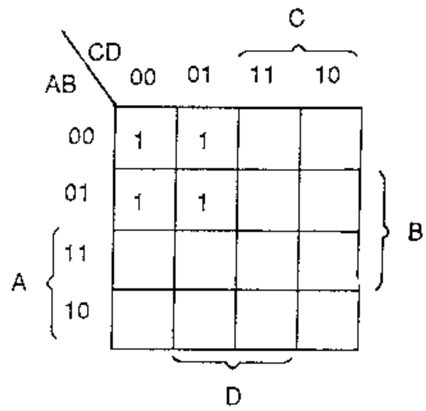
בפונקציה זו רק הגורם הראשון (A'B'C'D') מהווה מכפלה סטנדרטית, והוא יירשם כפי שהוא במפה.



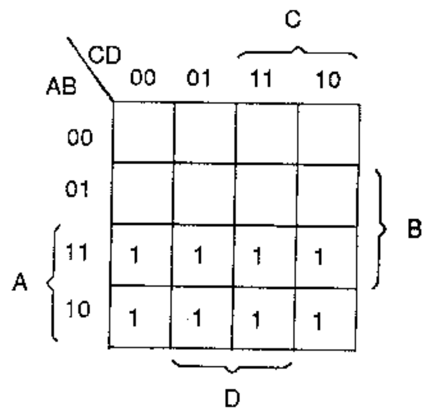
הגורם השני, BC'D, מתאים לריבועים במפה שעבורם B=1, C=0, D=1, והם בלתי תלויים ב-A. לכן עבור גורם זה נסמן 1-ים במפה בריבועים האלה:



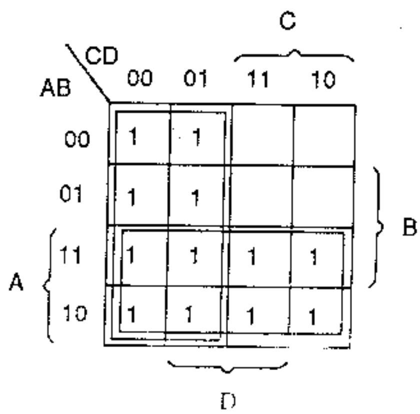
באופן דומה יירשם הגורם השלישי $A'C'$ כמתואר להלן:



לבסוף, עבור הגורם A נסמן בכל ריבוע במפה שבו $A=1$. (ערכם של המשתנים האחרים אינו חשוב).



את המפה המלאה של הפונקציה F מקבלים, אם מצרפים את המפות החלקיות של כל הגורמים בפונקציה:



מאיור זה רואים כי $F(A,B,C,D) = A + C'$.

פישוט מרבי של פונקציה בוליאנית בשיטת המפה

נתונה פונקציה בצורה סטנדרטית או קנונית (או שהובאה לאחת הצורות האלו).
כדי לפשט את הפונקציה בשיטת המפה יש להשתמש בעקרונות האלה:

1. כשבוחרים קבוצת ריבועים סמוכים, חייבים לכלול כל ריבוע לפחות פעם אחת, וכפי שכבר נאמר, אפשר להשתמש פעמים אחדות בכל ריבוע, לפי הצורך.
2. רצוי לכלול בכל קבוצה את המספר המקסימלי האפשרי של ריבועים.
3. מספר הקבוצות של ריבועים סמוכים צריך להיות קטן ככל האפשר.

בעזרת המפה ניתן לפשט פונקציה בוליאנית לצורת סכום מכפלות או לצורת מכפלת סכומים (כלומר לכל אחת מהצורות הסטנדרטיות).

סעיף 3.6

בסעיף הקודם ראינו כיצד ניתן לממש את הפונקציה המפושטת בעזרת שערי AND ו-OR בלבד. בסעיף זה נלמד כיצד ניתן לממש פונקציה בעזרת שערי NAND או NOR (אלה השערים הבסיסיים שבהם משתמשים בכל המשפחות הלוגיות של מעגלים משולבים).

קרא עד סוף התת-סעיף מימוש בעזרת שערי NAND (ובכלל זה דוגמה 3.9).

7

שאלה 8

פשט את הפונקציה הבאה וממש אותה בעזרת שערי NAND. הצע שתי דרכים למימוש:

$$F = AC' + ACE + ACE' + A'CD' + A'D'E'$$

סיים לקרוא את סעיף 3.6.

הטרנספורמציה מדיאגרמת AND-OR לדיאגרמת NOR-NOR מתוארת באיור 3.20. הפונקציה בצורת מכפלת סכומים ממומשת ב-(1)3.20 בעזרת שערי AND ו-OR. ב-(2)3.20 הוחלפו שערי ה-OR בשערי NOR, ושער ה-AND הוחלף בשער NOR בעל סמל invert-AND. המשתנה הבודד E הושלם ומחובר אל ה-invert-AND שברמה השנייה. ב-(3)3.20 שער ה-NOR של היציאה מסורטט שוב בעזרת הסמל המוסכם. שער NOR בעל כניסה אחת משלים את המשתנה E.

הכללים לקבלת דיאגרמת NOR מתוך פונקציה בוליאנית הם כדלקמן:
1. פשט את הפונקציה ובטא אותה בצורת מכפלת סכומים.
2. סרטט שער NOR לכל גורם במכפלת הסכומים דלעיל שהוא בעל שני ליטרלים לפחות. הכניסות לכל שער הן הליטרלים של הגורם.
3. סרטט שער NOR יחיד (תוך שימוש בסמל הגרפי של invert-AND או OR-invert) ברמה השנייה, שכניסותיו באות מהיציאות של שערי הרמה הראשונה.

4. גורם בעל ליטרל יחיד דורש מהפך ברמה הראשונה, או שיילקח המשלים שלו בתור כניסה לשער ה-NAND שברמה השנייה.

שאלה 9

ממש את הפונקציה שבשאלה 8 בעזרת שערי NOR.

סעיף 3.7

פונקציה בוליאנית מפושטת המבוטאת באחת משתי הצורות הסטנדרטיות ניתן לממש בעזרת שתי רמות של שערים. ראינו עד כה כיצד ניתן לממש בעזרת שערי AND ו-OR בלבד או בעזרת **שערי** NAND בלבד **או** בעזרת שערי NOR בלבד. כעת נלמד אפשרויות נוספות למימוש בעל שתי רמות של שערים.

קרא עד סוף **התת-סעיף** צורות מנוונות וצורות לא מנוונות.

שאלה 10

רשום את שמונה הצורות המנוונות בעלות שתי רמות של שערים, והראה שהן מתנוונות לפעולה יחידה.

סיים לקרוא את סעיף 3.7.

שאלה 11

ממש את הפונקציה $F = AC' + ACE + ACE' + A'CD' + A'D'E'$ (משאלה 8) בעזרת הצורות בעלות שתי רמות האלה:

1. AND-NOR
2. NAND-AND
3. OR-NAND
4. NOR-OR

סעיף 3.8

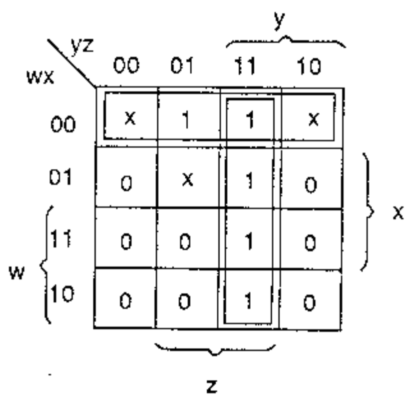
בסעיף זה נלמד מה הם צירופים אדישים וכיצד ניתן לפשט פונקציה בעלת צירופים אדישים.

קרא את הסעיף כולו.

הסבר נוסף לדוגמה 3.12

האפשרות שנבחרה לפשט את הפונקציה F בעזרת המפה שבאיור 3.26(1) היא, כאמור, צירוף X אחד ל-1-ים.

אפשרות אחרת לפישוט המובילה לביטוי בעל מספרים ליטרלים זהה:

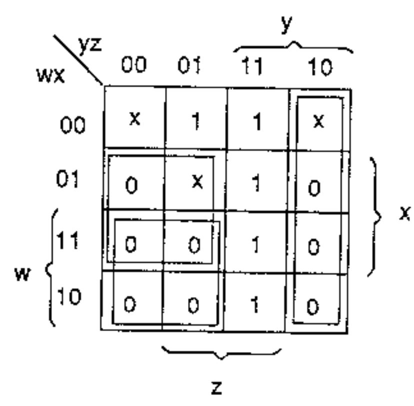


$$F = w'x' + yz$$

האפשרות שנבחרה לפשט את המשלים של הפונקציה F מתוארת באיור 3.26(2).

אחת האפשרויות האחרות, הפחות טובות, היא זו:

2



$$F' = yz' + wy' + xy'$$

$$F = (yz')'\cdot(wy')'\cdot(xy')'$$

$$= (y'+z)(w'+y)(x'+y)$$

ברור שאפשרות זו פחות טובה מהאפשרות שנבחרה. הביטוי בצורת מכפלת סכומים שהתקבל מורכב משלושה גורמים במקום שניים; מספר הליטרלים בו הוא 6 במקום 4.

לסיכום: אופן הפישוט של פונקציה בוליאנית בעלת צירופים אדישים הוא כלהלן:

1. יש לרשום 1-ים בריבועים המתאימים למכפלות סטנדרטיות שעבורן הפונקציה שווה ל-1. יש לרשום X-ים בריבועים המתאימים לצירופים האדישים הנתונים. ביתר הריבועים יש לרשום 0-ים.
2. כעת ניתן לפשט את הפונקציה לאחת משתי הצורות הסטנדרטיות:
   א. סכום מכפלות - יש לצרף X-ים ל-1-ים כך שמספר הריבועים הסמוכים שייכללו יהיה מקסימלי. (לא כל ה-X-ים חייבים להיכלל!). כעת ניתן לקבל מהמפה את הפונקציה בצורת סכום מכפלות. אפשר לנסות לצרף X-ים ל-1-ים בכמה אופנים, לקבל עבור כל אחד מאופנים אלה פונקציה בצורת סכום מכפלות ולבחור את הביטוי בעל מספר ליטרלים מינימלי (דהיינו הפשוט ביותר).
   ב. מכפלת סכומים - יש לצרף X-ים ל-0-ים באופן שיתקבל הביטוי הפשוט ביותר עבור המשלים של הפונקציה. לאחר קבלת הביטוי המפושט עבור 'F מהמפה (בצורת סכום מכפלות) יש להשלימו, וכך מתקבלת F בצורת מכפלת סכומים.

שאלה 12

פשט את הפונקציה הבוליאנית F בעלת הצירופים האדישים d

1. לצורת סכום מכפלות;
2. לצורת מכפלת סכומים.

F = ACE + A'CD'E' + A'C'DE

d = DE' + A'D'E + AD'E'

שאלה 13

הביטוי הבוליאני B'DE' + BE התקבל לאחר פישוט הביטוי A'BE + BCDE + BC'D'E + A'B'DE' + B'C'DE'. האם יש כאן צירופים אדישים? אם כן, מה הם?

סעיף 3.9

קרא את הסעיף כולו.

סעיף 3.10

בסעיף זה נלמד כיצד למצוא את הרכיבים הראשוניים של פונקציה בוליאנית נתונה. סכומם של רכיבים אלו מהווה ביטוי אלגברי תקף (בצורת סכום מכפלות) עבור הפונקציה הנתונה, אך הוא אינו בהכרח מצומצם (כלומר הפשוט ביותר).

קרא את הסעיף כולו.

שאלה 14

מצא את הרכיבים הראשוניים של הפונקציות הבוליאניות הבאות בעזרת שיטת הטבלה:

1. $F_1(A,B,C,D,E,F,G) = \Sigma(20,28,52,60)$
2. $F_2(A,B,C,D,E,F,G) = \Sigma(20,28,38,39,52,60,102,103,127)$

סעיף 3.11

עתה, לאחר שאנו יודעים כיצד למצוא את הרכיבים הראשוניים של פונקציה נתונה, נלמד כיצד לבחור מביניהם את אלה שסכומם נותן ביטוי מצומצם עבורה.

קרא את הסעיף כולו.

נעיר שהשיטה המוצגת לקבלת "כיסוי מינימלי" לא תמיד אפשרית (יתכן למשל שאין שום רכיב ראשוני חיוני). ואולם, קיימים אלגוריתמים למציאת כיסוי מינימלי כגון זה.

שאלה 15

צמצם את הפונקציות הבוליאניות שבשאלה 14 בעזרת שיטת הטבלה.

דוגמה לפישוט פונקציה בעלת צירופים אדישים בעזרת שיטת הטבלה:

$F = ACE + A'CD'E' + A'C'DE$

$d = DE' + A'D'E + AD'E'$

פונקציה זו פושטה בעזרת המפה בתשובה 12.

יש לבצע שינוי קל בשיטת הטבלה, כדי שנוכל לפשט בעזרתה פונקציה בעלת צירופים אדישים. כאשר מוצאים את הרכיבים הראשוניים, יש לכלול את הצירופים האדישים ברשימת המכפלות הסטנדרטיות - כדי להקטין ככל האפשר את מספר

הליטרלים ברכיבים הראשוניים שיתקבלו. ואולם, כאשר בונים את טבלת הרכיבים הראשוניים (כדי לבחור את הרכיבים הראשוניים המכסים את המכפלות הסטנדרטיות), אין לכלול את הצירופים האדישים ברשימת המכפלות הסטנדרטיות, משום שאין צורך לכסותם בעזרת הרכיבים הראשוניים שנמצאו.

1. מציאת הרכיבים הראשוניים של הפונקציה:

מהמפה שסורטטה בתשובה 12 עבור F ו-d נובע כי:

$F(A,C,D,E) = \Sigma(3,4,13,15)$

$d(A,C,D,E) = \Sigma(1,2,5,6,8,10,12,14)$

נבנה את הטבלה שבאמצעותה נוכל למצוא את הרכיבים הראשוניים (זכור כי כעת אנו כוללים את הצירופים האדישים ברשימת המכפלות הסטנדרטיות):

	(1)	(2)	(3)
0001	1√	1,3(2)	2,6,10,14(4,8)
0010	2√	1,5(4)	2,6,10,14(4,8)
0100	4√	2,3(1)	4,5,12,13(1,8)
1000	8√	2,6(4)√	4,5,12,13(1,8)
		2,10(8)√	4,6,12,14(2,8)
0011	3√	4,5(1)√	4,6,12,14(2,8)
		4,6(2)√	8,10,12,14(2,4)
0101	5√	4,12(8)√	8,10,12,14(2,4)
0110	6√	8,10(2)√	
1010	10√	8,12(4)√	12,13,14,15(1,2)
1100	12√		12,13,14,15(1,2)
		5,13(8)	
1101	13√	6,14(8)	
1110	14√	10,14(4)	
		12,13(1)	
1111	15√	12,14(2)	
		13,15(2)	
		14,15(1)	

להלן הרכיבים הראשוניים:

גורם	סימון בינרי ACDE	סימון עשרוני
A'C'E'	00-0	1,3(2)
A'D'E	0-01	1,5(4)
A'C'D	001-	2,3(1)
DE'	--10	2,6,10,14(4,8)
CD'	-10-	4,5,12,13(1,8)
CE'	-1-0	4,6,12,14(2,8)
AE'	1--0	8,10,12,14(2,4)
AC	11--	12,13,14,15(1,2)

בחירת רכיבים ראשוניים:

		3	4	13	15
A'C'E'	(1,3)	X			
A'D'E	(1,5)				
A'C'D	(2,3)	X			
DE'	(2,6,10,14)				
CD'	(4,5,12,13)		X	X	
CE'	(4,6,12,14)		X		
AE'	(8,10,12,14)				
√AC	(12,13,14,15)			X	X
				√	√

ובעצם לא היה צורך להכניס לכאן שורות שהן קבוצה של צירופים אדישים בלבד (שורות שבהן אין X-ים כלל).

הרכיב הראשוני החיוני היחיד כאן הוא AC, והוא מכסה את המכפלות הסטנדרטיות שמספריהן 13 ו-15.

כדי לכסות את המכפלות הסטנדרטיות שמספריהן 3 ו-4 נבחר **אחד** מבין הרכיבים הראשוניים A'C'E' ו-A'C'D (לכיסוי 3) **ואחד** מבין הרכיבים הראשוניים CD' ו-CE' (לכיסוי 4).

נקבל אפוא שפונקציה מצומצמת היא למשל, $F = AC + A'C'D + CD'$.

סיכום פרק 3

בפרק זה למדנו כיצד לפשט פונקציות בוליאניות וכיצד לממשן בעזרת שערים לוגיים.

פישוט פונקציה בוליאנית בשיטת המפה לצורת סכום מכפלות

1. לכל מכפלה סטנדרטית שעבורה ערך הפונקציה הוא 1 נרשום 1 בריבוע המתאים במפה.
2. נצרף ריבועים סמוכים של 1-ים לקבוצות:
   * מספר הריבועים הסמוכים של 1-ים שניתן לצרף לקבוצה הוא חזקה של 2.
   * יש לצרף מספר מקסימלי של ריבועים סמוכים של 1-ים לקבוצה.
   * כל ריבוע של 1 חייב להכלל לפחות באחת מהקבוצות.
   * מותר לצרף את אותו הריבוע ליותר מקבוצה אחת; דבר זה אף רצוי, משום שהוא מסייע להקטין את מספר הליטרלים בפונקציה המפושטת.
   * מספר הקבוצות צריך להיות קטן ככל האפשר.
3. הפונקציה המפושטת היא סכום של מכפלות שכל אחת מייצגת קבוצה שנוצרה בשלב 2.

פישוט פונקציה בוליאנית בשיטת המפה לצורת מכפלת סכומים

במקום לצרף ריבועים של 1-ים, יש לצרף ריבועים של 0-ים, ובכך לקבל פישוט של 'F לצורת סכום מכפלות.

אחר כך משתמשים במשפט דה-מורגן כדי לקבל את המשלים של 'F, ובכך מקבלים פישוט של F לצורת מכפלת סכומים.

את הפונקציה המפושטת ניתן לממש, ישירות, בעזרת שערי AND ו-OR.

ניתן אף לממש את הפונקציה המפושטת בעזרת שערי NAND בלבד, או בעזרת שערי NOR בלבד.

כל המימושים האלה הם בעלי שתי רמות של שערים.

פישוט פונקציה בוליאנית בעלת צירופים אדישים בשיטת המפה

1. בריבועים המתאימים לצירופים האדישים יש לרשום X-ים. בשאר הריבועים יש לרשום 1-ים ו-0-ים כנדרש.
2. את הפונקציה אפשר לפשט באחד מהאופנים הבאים:

   א. **לסכום מכפלות**

   מותר לצרף לקבוצה 1-ים ו-X-ים כך שמספר הריבועים בקבוצה יהיה גדול ככל האפשר. אין הכרח לכלול ריבוע של X בקבוצה כלשהי.

   ניתן לצרף X-ים באופנים שונים ולבסוף לבחור בביטוי בעל מספר הליטרלים המינימלי.

ב. **למכפלת סכומים**

באופן דומה למתבצע בסכום מכפלות, מותר לצרף 0-ים ו-X-ים, ואת הביטוי המפושט שמתקבל עבור 'F בצורת סכום מכפלות צריך להשלים לביטוי עבור F בצורת מכפלת סכומים (בעזרת משפט דה-מורגן).

פישוט פונקציה בוליאנית בשיטת הטבלה לצורת סכום מכפלות

1. יש למצוא את הרכיבים הראשוניים של הפונקציה.
2. יש לבחור רכיבים ראשוניים המהווים "כיסוי מינימלי" של המכפלות הסטנדרטיות שעבורן ערך הפונקציה הוא 1.

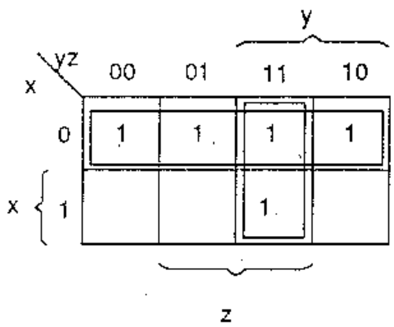
בתהליך דומה אפשר לפשט פונקציה בוליאנית לצורת מכפלת סכומים.

אפשר לפשט פונקציה בוליאנית בעלת צירופים אדישים בשיטת הטבלה. בשלב מציאת הרכיבים הראשוניים, ניתן להעזר בצרופים האדישים לצורך צירוף מכפלות. ואולם, אין צורך לכסות גורם שהוא צירוף אדיש.

תשובות לשאלות בפרק 3

תשובה 1

1. נפשט את הפונקציה הבוליאנית $F_1 = x'y' + yz + x'yz'$ בעזרת מפה של שלושה משתנים:

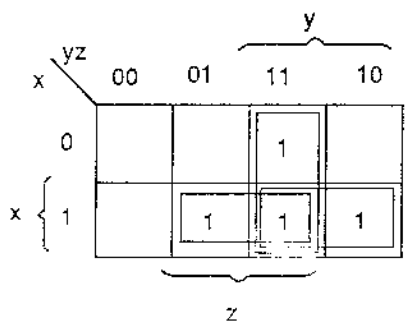


הגורם $x'y'$ הוא בעל שני ליטרלים (ואילו F היא פונקציה של שלושה משתנים); לכן מתאימים לו שני ריבועים במפה, והם 000 ו-001; הריבועים המתאימים ל-yz הם 011 ו-111; הגורם $x'yz'$ הוא בעל שלושה ליטרלים, ולכן מתאים לו ריבוע אחד במפה, והוא 010. בסך הכל סומנו 1-ים בחמישה ריבועים (כלומר, לפונקציה F_1 יש חמש מכפלות סטנדרטיות).

כדי לפשט את הפונקציה נצרף את ארבעת הריבועים שבשורה העליונה ונקבל את הליטרל x'; כעת נותר הריבוע 111, ואותו נצרף לריבוע 011 שבו כבר השתמשנו, ונקבל את הגורם yz.

הפונקציה המפושטת היא אפוא $F_1 = x' + yz$.

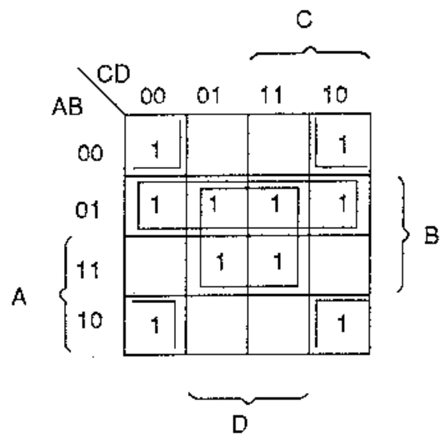
2. להלן המפה לפישוט הפונקציה F_2: $F_2 = \Sigma(3,5,6,7)$:



כל גורמי הפונקציה הנם מכפלות סטנדרטיות, ולכן במפה יש בדיוק ארבעה ריבועים המכילים 1-ים. נצרף זוגות ריבועים, כפי שניתן לראות במפה, ונקבל: $F_2 = xy + xz + yz$.

תשובה 2

להלן המפה לפישוט $F = ABD + A'C'D' + A'B + A'CD' + AB'D'$:



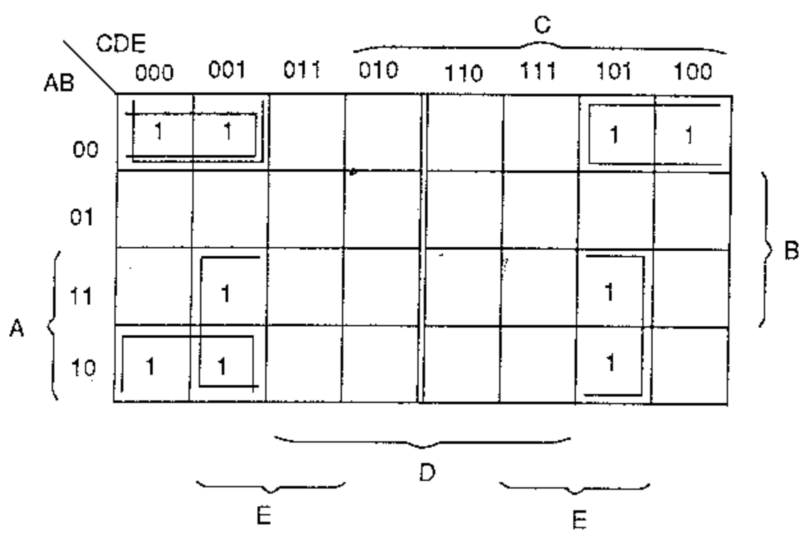
מכאן נקבל בעקבות הפישוט את הפונקציה $F = BD + B'D' + A'B$.

תשובה 3

נמצא את הביטוי המתקבל לאחר הפישוט בצורת סכום מכפלות של הפונקציות הבוליאניות הבאות:

1. $F_1(A,B,C,D,E) = \Sigma(0,1,4,5,16,17,21,25,29)$

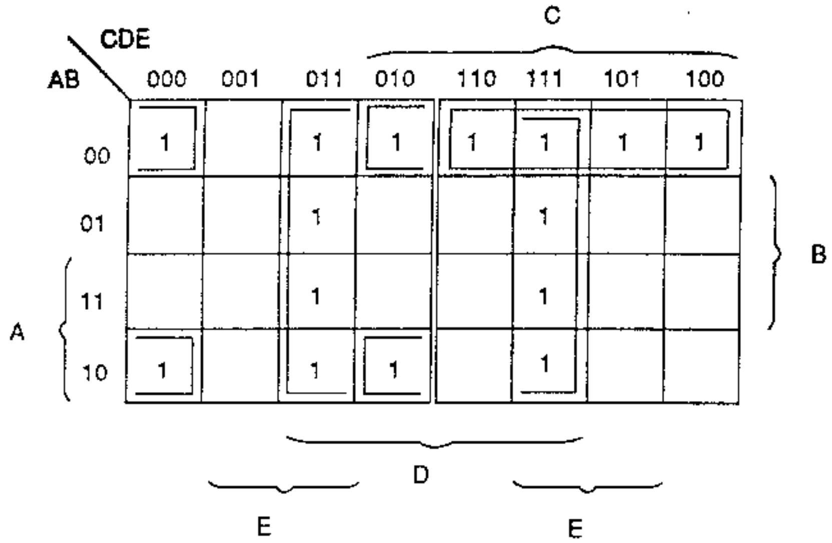
להלן המפה שבעזרתה נפשט את הפונקציה:



הביטוי המתקבל לאחר הפישוט הוא $A'B'D' + B'C'D' + AD'E$.

2. $F_2(A,B,C,D,E) = BDE + B'C'D + CDE + A'B'CE + A'B'C + B'C'D'E'$

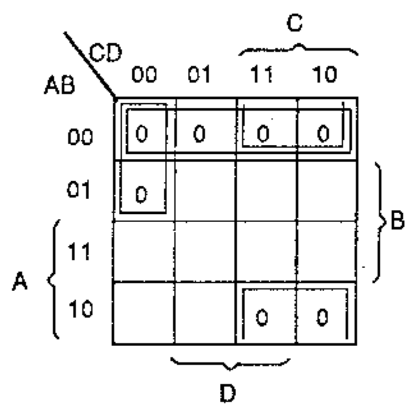
להלן המפה שבעזרתה ניתן לפשט את הפונקציה:



הביטוי המתקבל לאחר הפישוט הוא $DE + A'B'C + B'C'E'$.

תשובה 4

המפה לפישוט הפונקציה $F(A,B,C,D) = \Pi(0,1,2,3,4,10,11)$ היא:



נצרף ריבועים סמוכים המסומנים ב-0-ים ונקבל ביטוי בצורת סכום מכפלות עבור המשלים של F: $F' = B'C + A'B' + A'C'D'$.

נשתמש במשפט דה-מורגן כדי לקבל את F (כלומר את המשלים של F'):

$F = (B+C')(A+B)(A+C+D)$.

תשובה 5

להלן המפות עבור F_1 ו-F_2:

F_1

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

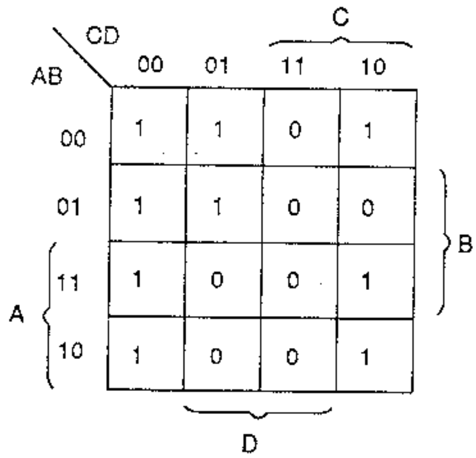
F_2

x \ yz	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

1. מתוך המפה של F_1 ניתן לקבל את המשלים של F_1 בצורת סכום מכפלות סטנדרטיות: $F_1' = x'y'z' + x'yz + xy'z + xyz'$ ובעזרת משפט דה-מורגן נקבל מתוך F_1' את F_1 בצורת מכפלת סכומים:
   $F_1 = (x+y+z)(x+y'+z')(x'+y+z')(x'+y'+z) = \Pi(0,3,5,6)$.
   באופן דומה: $F_2' = x'y'z' + x'y'z + x'yz' + xy'z'$.
   שים לב שלמשל לא צירפנו את שני ה-0-ים הסמוכים המסומנים בריבועים 000 ו-001 משום שאנו מעוניינים לקבל את F_2' בצורת סכום של מכפלות **סטנדרטיות.** $F_2 = (x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z)(x'+y+z) = \Pi(0,1,2,4)$.
2. את F_1 לא ניתן לפשט לצורת סכום מכפלות; רואים זאת במפה, שהרי אין שני ריבועים סמוכים המכילים 1-ים הניתנים לצירוף! (כלומר, הצורה המפושטת זהה למקורית.)
   פישוט F_2 לצורת סכום מכפלות: $F_2 = xy + xz + yz$.
3. את F_1 לא ניתן לפשט לצורת מכפלת סכומים, כיוון שאין שני ריבועים סמוכים במפה המכילים 0-ים (כלומר, הצורה המפושטת זהה להצגת F_1 בסעיף 1).
   פישוט F_2 לצורת מכפלת סכומים: $F_2' = x'y' + x'z' + y'z'$
   $F_2 = (x+y)(x+z)(y+z)$

תשובה 6

להלן המפה לפישוט הפונקציה $F = (A'+B'+D')(A+B'+C')(A'+B+D')(B+C'+D')$



ה-1-ים הרשומים במפה מייצגים את כל המכפלות הסטנדרטיות של הפונקציה F.

הריבועים המסומנים ב-0-ים מייצגים את כל המכפלות הסטנדרטיות של F'.

1. אם נצרף את הריבועים הסמוכים המסומנים ב-1-ים, נקבל אחרי הפישוט את הפונקציה בצורת סכום מכפלות: $F = A'C' + AD' + B'D'$.
2. אם נצרף את הריבועים הסמוכים המסומנים ב-0-ים, נקבל אחרי הפישוט את המשלים של הפונקציה בצורת סכום מכפלות: $F' = AD + CD + A'BC$.

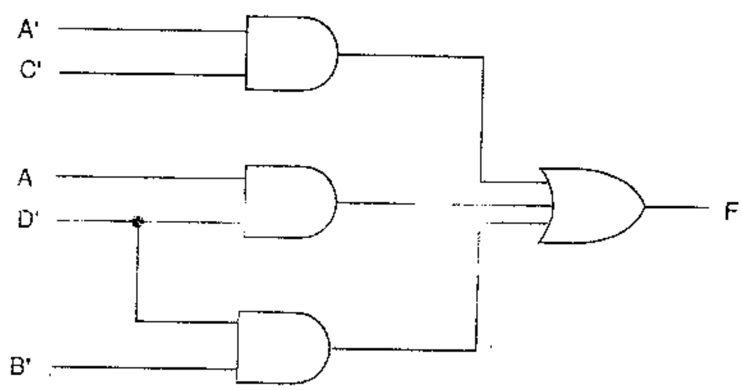
   אם נפעיל את משפט דה-מורגן על F', נקבל אחרי הפישוט את הפונקציה F בצורת מכפלת סכומים: $F = (A'+D')(C'+D')(A+B'+C')$.

תשובה 7

הביטוי שהתקבל עבור F בצורת סכום מכפלות הוא

$F = A'C' + AD' + B'D'$.

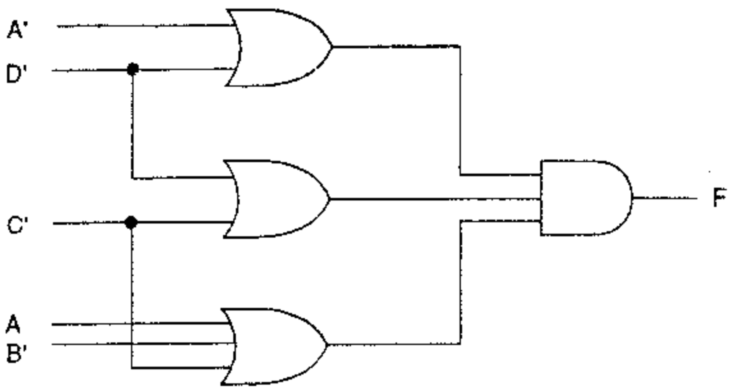
נממש אותו בעזרת שערי OR ו-AND:



הביטוי שהתקבל עבור F בצורת מכפלת סכומים הוא

$F = (A'+D')(C'+D')(A+B'+C')$.

נממש אותו בעזרת שערי OR ו-AND:



תשובה 8

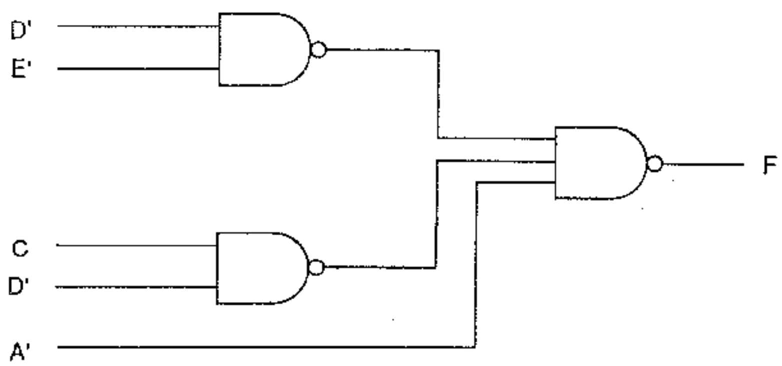
נפשט את הפונקציה $F = AC' + ACE + ACE' + A'CD' + A'D'E'$ לצורת סכום מכפלות בעזרת המפה הזו:

AC \ DE	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

כדי לפשט נצרף את ה-1-ים שבמפה.

הפונקציה המתקבלת אחרי הפישוט היא $F = A + D'E' + CD'$.

נסרטט מימוש בעזרת שערי NAND עבור הפונקציה שהתקבלה:



פרק 4

לוגיקה צירופית I

בפרקים הקודמים, ראינו כיצד ניתן לפשט פונקציות נתונות בעזרת משפטים מאלגברה בוליאנית. הפישוט נעשה בשיטת המפה או בשיטת הטבלה. בפרק זה נשתמש בידע שרכשנו כדי לבנות מעגלים צירופיים - פשוטים עד כמה שניתן - המיישמים פונקציות נתונות.

סעיפים 4.1, 4.2

תחילה נבין מהו מעגל צירופי. מעגל צירופי מורכב ממשתני כניסה, משערים לוגיים וממשתני יציאה:

משתני הכניסה הם המשתנים של הפונקציה שרוצים לממש. לדוגמה: אם נרצה לממש את הפונקציה F=A+BC, משתני הכניסה למעגל הצירופי יהיו A,B,C.

השערים הלוגיים מהווים את גוף המעגל, ובאמצעותם מממשים פעולות שונות כגון OR, AND ו-NOT.

משתני היציאה הם הפונקציות שרוצים לממש. בדוגמה שלעיל משתנה היציאה הוא F.

הבעיה העומדת בפנינו היא זו: כיצד לעצב מעגל צירופי (המורכב מהשערים הלוגיים הנתונים) שאם בכניסותיו יהיו משתני הכניסה, יציאתו (או יציאותיו) תייצג את הפונקציה המבוקשת? הנוהל לעיצוב מעגל צירופי מוסבר בסעיף 4.2.

קרא את הסעיפים 4.1 ו-4.2.

נמחיש את תהליך העיצוב של מעגלים צירופיים בעזרת כמה דוגמאות.

שאלה 1

למעגל צירופי יש ארבע כניסות ויציאה אחת. היציאה שווה ל-1, אם מתקיימת אחת האפשרויות האלה: א. כל הכניסות שוות ל-1. ב. שום כניסה אינה שווה ל-1. ג. מספר אי-זוגי של כניסות שווה ל-1.

1. בנה את טבלת האמת.
2. מצא את פונקציית הפלט המופשטת בצורת סכום מכפלות.
3. מצא את פונקציית הפלט המפושטת בצורת מכפלת סכומים.
4. סרטט את שתי הדיאגרמות הלוגיות.

שאלה 2

עצב מעגל צירופי המקבל מספר בן שלוש סיביות ומחולל פלט בינרי השווה לריבוע מספר הקלט.

שאלה 3

יש לכפול שני מספרים בינריים, שאורך כל אחד מהם שתי סיביות, כדי ליצור את מכפלתם הבינרית. יהיו שני המספרים מיוצגים באמצעות a_1, a_0 ו-b_1, b_0; האינדקס 0 מציין את הסיבית הכי פחות משמעותית.

1. קבע מהו מספר משתני היציאה הנדרש.
2. מצא את הפונקציות הבוליאניות המפושטות עבור כל יציאה.

שאלה 4

חזור על שאלה 3 אבל הפעם יש ליצור את הסכום של שני מספרים בינריים.

סעיף 4.3

נציג עתה עיצוב של מעגלים צירופיים המבצעים חיבור וחיסור. תחילה נעצב מעגל המממש פעולות חיבור.

קרא מתחילת סעיף 4.3 עד התת-סעיף "חצי מחבר" (לא כולל).

נניח שברצוננו לחבר שתי ספרות בינריות A ו-B. התוצאה של פעולת סיכום מורכבת משתי סיביות: האחת - סכום הספרות; והשנייה - הנשא שנוצר בפעולת החיבור.
לכן למעגל הצירופי שנעצב יהיו שתי כניסות (A ו-B בדוגמה זו) ושתי יציאות - האחת תייצג את הסכום ותיקרא S, והאחרת תייצג את הנשא ותיקרא C. המעגל הצירופי המבצע פעולת חיבור זו נקרא **חצי מחבר**.
אחרי שהבעיה הוגדרה, קל לרשום את טבלת האמת של פונקציה זו. לאחר שנכין את טבלת האמת, נוכל לבטא את פונקציית הפלט במונחים של משתני כניסה.
בפרק 2 ראינו, שניתן לרשום ביטוי בוליאני בצורות שונות. כשנרצה לממש את הביטוי באמצעות שערים לוגיים, ייווצרו מעגלים צירופיים שונים - לכל ביטוי בוליאני יתאים מעגל מסוים. לכן יש צורות רבות שבהן ניתן לממש חצי מחבר.

קרא בסעיף 4.3 את התת-סעיף "חצי מחבר".

בעזרת המעגל הלוגי הנקרא חצי מחבר ניתן לממש פונקציות שונות. נשתמש במעגל הצירופי שייצרנו **כיחידה** בתוך מעגל צירופי גדול יותר.

שאלה 5

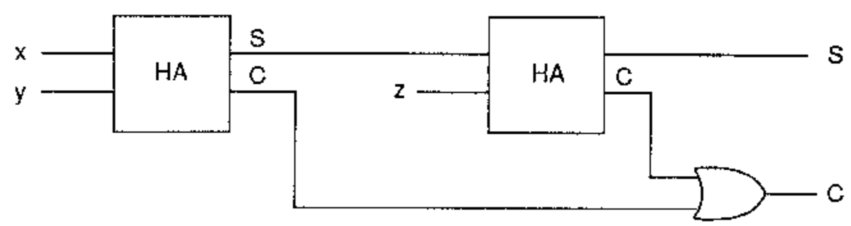
ממש את ארבע הפונקציות הבוליאניות הבאות תוך שימוש בשלושה חצי מחברים (איור 4.2(5)):

1. $D = A \oplus B \oplus C$
2. $E = A'BC+AB'C$
3. $F = ABC'+(A'+B')C$
4. $G = ABC$

דוגמה נוספת למעגל צירופי שניתן לממש בעזרת חצאי מחברים היא מחבר מלא. זו בעצם המטרה שלשמה יצרו חצי מחבר.
כאשר מחברים שני מספרים בינריים בעלי יותר מספרה אחת, תחילה מחברים את זוג הסיביות הימני ביותר, מתקדמים שמאלה, ובכל פעם מוסיפים לזוג הסיביות שמחברים את הנשא שנוצר מחיבור זוג הסיביות הקודם.
מחבר מלא מבצע חיבור של שתי סיביות ושל הנשא מחיבור שתי הסיביות הפחות משמעותיות (הזוג הקודם). למחבר מלא יש שלוש כניסות: שתי הסיביות המחוברות, x ו-y, והנשא הקודם z. היציאות של מחבר מלא הן הסכום S והנשא של השלב הנוכחי - C.
עיצוב מפורט של מחבר מלא מוצג בתת-סעיף "מחבר מלא".

סיים לקרוא את סעיף 4.3.

בסעיף מוכח באופן פורמלי שהמימוש של מחבר מלא בעזרת שני חצאי מחברים ושער OR הוא נכון.
קל יותר להבין את המימוש באופן הבא:



הפלטים של חצי המחבר הראשון הם ספרת היחידות של x+y ונשא. המחבר השני מוסיף לספרת היחידות של x+y את z והפלט s שלו הוא ספרת היחידות של x+y+z. בחיבור x+y+z נוצר נשא אם אחד מחצאי המחברים יצר פלט C=1. לפיכך הפלט C של שער ה-or שווה ל-1 אם בחיבור x+y+z נוצר נשא.
אם נחבר כמה מחברים מלאים בטור באופן שיציאת הנשא (C) של האחד מהווה את כניסת z של המחבר המלא הבא, נוכל ליצור מעגל צירופי שבעזרתו ניתן לחבר

מספרים בינריים מרובי ספרות. כניסת z של המחבר המלא הראשון תהיה כמובן 0.

סעיף 4.4

נעבור עתה למעגלים צירופיים המממשים פעולת חיסור.

קרא בסעיף 4.4 עד התת-סעיף "מחסר מלא" (לא כולל).

קראת בסעיף שניתן להעזר במחבר מלא לצורך פעולת החיסור. למרות זאת, אנו טורחים לפתח לוגיקה נפרדת לצורך פעולת החיסור. היתרון בכך הוא, שבמעגל הצירופי שנפתח תתבצענה פחות פעולות לוגיות מאשר במעגל הצירופי שיוסיף פעולות על מעגל החיבור, וכך תהיה פעולת החיסור מהירה יותר.

שאלה 6

ממש את חצי המחסר על-פי הביטויים הבוליאניים, המובאים בסעיף, המתארים את יציאותיו.

כדי לחסר מספרים בינריים מרובי ספרות לא נוכל להסתפק בחצי מחסר, מכיוון שבעיצובו של חצי מחסר לא לקחנו בחשבון, שסיבית המחוסר יכולה להשתנות עקב פעולת החיסור שנעשתה על שתי הסיביות הפחות משמעותיות.

נבהיר זאת בעזרת התרגיל הזה: 10-01=?.

תחילה נחסר את הספרה הימנית ביותר של המחסר מהספרה הימנית ביותר של המחוסר (0-1). במקרה זה 0<1, ולכן יש לשאול 1 מהספרה הבאה של המחוסר. כאשר נבצע את פעולת החיסור של זוג הסיביות הבא (1-0), נצטרך לקחת זאת בחשבון. מכאן ניתן להבין שכדי לבצע פעולת חיסור יש לעצב מעגל בעל שלוש כניסות: שתי כניסות עבור הסיביות שעליהן מתבצעת פעולת החיסור (x ו-y) וכניסה נוספת שתציין אם בפעולת חיסור קודמת הושאל 1 מסיבית המחוסר. לשם כך נבנה מחסר מלא. יציאות המחסר המלא תהיינה זהות ליציאות החצי מחסר.

סיים לקרוא את סעיף 4.4.

כדי לעצב את המחסר המלא נבנה תחילה את טבלת האמת של פונקציה זו. בטבלה זו שלוש עמודות עבור כניסות המחסר המלא - y,x ו-z ושתי עמודות עבור היציאות B ו-D.

היציאה B תקבל ערך 1, כאשר $x<y+z$. (במקרים אלו נלווה 1 מהספרה המשמעותית הבאה של המחוסר.)

את ערך היציאה D נמצא מתוך המשוואה $D=2\cdot B+x-y-z$.

נסביר זאת בעזרת הדוגמה הקודמת: נניח שרוצים לבצע את פועלת החיסור 10-01.

תחילה נבצע את הפעולה 0-1. לצורך זה נשאל 1 מהסיבית המשמעותית יותר של המחוסר, ופעולת החיסור תהיה $2\cdot1+0-1=1$. אם נתייחס לסימון כניסותיו ויציאותיו של מחסר מלא, אז $x=0,\ y=1,\ z=0,\ B=1,\ D=1$.

נחסר עתה את שתי הסיביות הבאות: 1-0. מכיוון שלהושאל 1 מסיבית המחוסר, פעולת החיסור תהיה $1-0-1=0$.

ערך כניסות המחסר המלא יהיו $x=1,\ y=0,\ z=1$.

היציאה D תקבל ערך 0, וכמוה היציאה B.

אחרי שבנינו את טבלת האמת, ניתן לבטא את היציאות B ו-D כפונקציה של הכניסות x,y ו-z, ואז נוכל לסרטט את הדיאגרמה הלוגית של מחסר מלא.

כבר נוכחנו לדעת, שניתן לממש פעולת חיסור בעזרת פעולות חיבור, אם מבצעים פעולת השלמה ל-2 של המחסר. הבה נבנה מעגל צירופי היוצר את המשלים ל-2 של מספר בינרי בן 4 ספרות.

שאלה 7

עצב מעגל צירופי אשר מקבל כקלט מספר בן ארבע סיביות ואשר הפלט שלו הוא המשלים ל-2 של מספר הקלט.

כשם שניתן לעצב מחבר מלא באמצעות שני חצאי מחברים ושער OR, כך ניתן לעצב מחסר מלא בעזרת שני חצאי מחסרים ושער OR. נעשה זאת.

שאלה 8

ממש מחסר מלא בעזרת שני חצאי מחסרים ושער OR.

סעיף 4.5

עד עתה הכרנו מעגלים צירופיים המבצעים פעולות אריתמטיות. נבחן יישום נוסף - המרת קוד.

קרא את סעיף 4.5 כולו.

נראה דוגמאות נוספות של מעגלים צירופיים ממירי קוד.

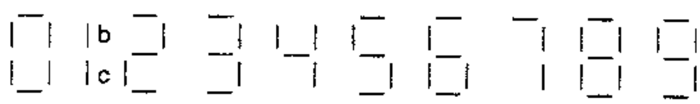
שאלה 9

עצב מעגל צירופי הממיר ספרה עשרונית מקוד 84-2-1 לקוד BCD.

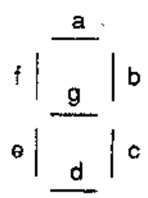
המעגל האחרון שנעצב יהיה המעגל המורכב המעניין ביותר מבין כל המעגלים שעיצבנו עד כה.

שאלה 10

מפענח מקוד BCD לתצוגת שבעה מקטעים הוא מעגל צירופי המקבל ספרה עשרונית ב-BCD ומייצר את היציאות המתאימות לצורך בחירת המקטעים שיוארו ואשר בעזרתם תוצג ספרה זו. שבע היציאות של המפענח (a,b,c,d,e,f,g) בוחרות את המקטעים המתאימים בתצוגה, כפי שמתואר באיור הבא (1). הסימון המספרי שנבחר לייצג את הספרה העשרונית מתואר באיור הבא (2). עצב את מעגל המפענח מקוד BCD לתצוגת שבעה מקטעים.



(2) סימון מספרי עבור תצוגה



(1) סימון מקטעים

סעיף 4.6

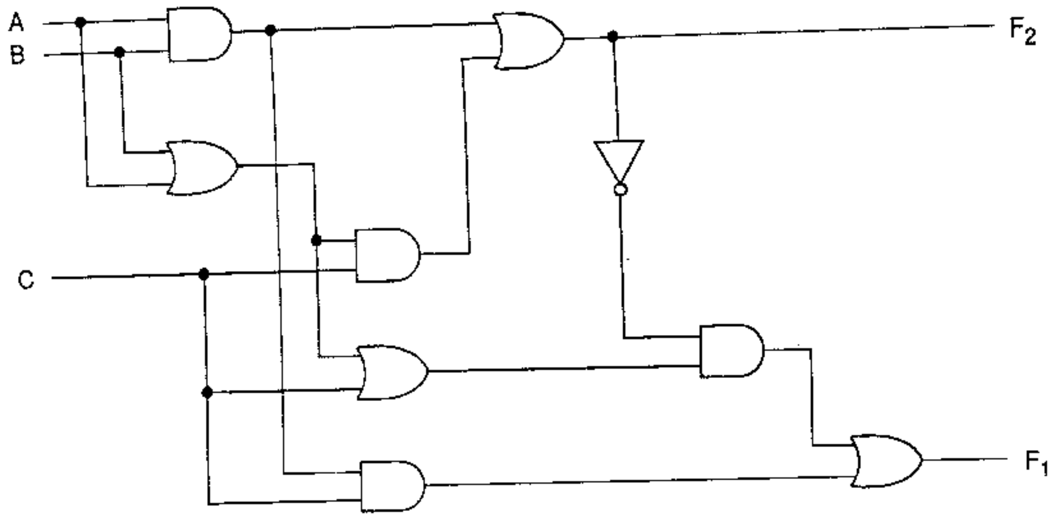
לאחר שהבנו את הנוהל לעיצוב מעגלים צירופיים המממשים פונקציות נתונות, נדון בתהליך ההפוך: איך ניתן לגלות מהי הפונקציה שמעגל צירופי נתון מממש. תהליך זה נקרא **ניתוח מעגל צירופי**.
סעיף 4.6 בספר דן בניתוח מעגלים צירופיים.

קרא בסעיף 4.6 עד אחרי טבלה 4.2.

נמחיש את תהליך ניתוח המעגלים הצירופיים בעזרת כמה דוגמאות נוספות.

שאלה 11

נתח את המעגל הצירופי בעל שתי יציאות המופיע באיור הבא. בנה את הפונקציות הבוליאניות עבור שתי היציאות והסבר את פעולת המעגל.



שאלה 12

בנה את טבלת האמת עבור המעגל המופיע באיור שבשאלה 11.

ניתוח מעגל צירופי בעל צירופי כניסה אדישים יהיה מסובך קצת יותר. תחילה נברר מהו מעגל צירופי בעל צירופי כניסה אדישים.
לכל מעגל צירופי בעל n כניסות יש 2^n צירופי כניסה או במלים אחרות: סיביות הכניסה שלו יכולות ליצור 2^n צירופים (משום שכל סיבית יכולה לקבל ערך 0 או ערך 1). לעתים ניתן לראות מהגדרת הבעיה, שחלק מצירופי הכניסה לא יווצרו לעולם. דוגמה לכך ראינו בסעיף 4.5 ("המרת קוד"), כאשר עיצבנו מעגל צירופי ממיר קוד מ-BCD ל-excess-3.
אף-על-פי שידוע לנו כי צירופי כניסה מסוימים לא ייווצרו לעולם, עלינו לבדוק אילו ערכים היו יציאות המעגל מקבלות, אילו צירוף כזה היה נוצר.

סיים לקרוא את סעיף 4.6.

סעיף 4.7

המעגלים הצירופיים שעיצבנו עד כה היו מורכבים משערי AND, OR ו-NOT.
החיסרון של שיטת מימוש זו הוא ניצול לא יעיל של מעגלים משולבים בבניית המעגלים (כל מעגל משולב מורכב מסוג אחד של שערים). מכאן, שככל שנשתמש בפחות **סוגים** של שערים, כך תוכל לחסוך במספר המעגלים המשולבים המשתתפים בעיצוב המעגל.

כל פונקציה לוגית - מורכבת ככל שתהיה - ניתן לבטא בעזרת ביטוי בוליאני המכיל את האופרטורים הלוגיים AND ,OR ו-NOT בלבד. לכן, אם נצליח לממש את שלושת האופרטורים הללו באמצעות שערי NAND (או NOR), הרי נוכל לממש כל פונקציה בוליאנית בעזרת מעגלים צירופיים המורכבים מסוג אחד של שערים, ובדרך זו ננצל טוב יותר את המעגלים המשולבים העומדים לרשותנו.

מימוש פונקציה בעזרת שערי NAND בלבד אינו בהכרח מימוש מינימלי מבחינת מספר השערים. כלומר, ייתכן שקיים מימוש הכולל פחות שערים ממנו.

סעיף 4.7 דן בעיצוב מעגלים צירופיים באמצעות שערי NAND בלבד.

קרא בסעיף 4.7 עד התת-סעיף "נוהל ניתוח" (לא כולל).

שאלה 13

המר את הדיאגרמה הלוגית שבאיור 4.8 למימוש NAND; היעזר בשיטת התרשים המלבני (איור 4.8 נמצא בספר בסוף סעיף 4.5).

שאלה 14

בנה דיאגרמת NAND של מחבר מלא מתוך הפונקציות הבוליאניות האלה:

$C=xy+xz+yz$

$S=C'(x+y+z)+xyz$

נוהל הניתוח של מעגלי NAND דומה בכל לנוהל הניתוח של מעגלי AND-OR שכבר נידון בהרחבה.

סיים לקרוא את סעיף 4.7.

קיימות שלוש שיטות לניתוח מעגלי NAND:

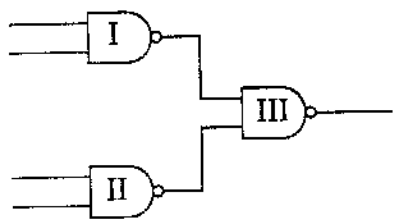
א. ניתן לקבל את טבלת האמת מתוך הפונקציות הבוליאניות של יציאות המעגל.

ב. ניתן לבנות את טבלת האמת ישירות מתוך סרטוט המעגל.

ג. ניתן להמיר את דיאגרמת ה-NAND לדיאגרמת AND-OR ולנתח דיאגרמה זו.

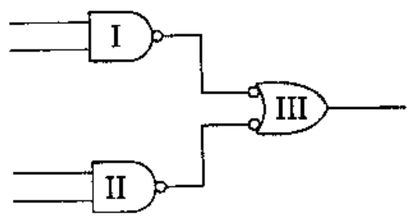
שתי השיטות הראשונות דומות מאוד לשיטות הניתוח שכבר הוסברו בפרק זה. נעסוק מעט בשיטה השלישית, שבה עלינו להמיר דיאגרמת NAND לדיאגרמת AND-OR. לשם כך נמיר תחילה את שערי הרמה האחרונה (אלה השערים שיציאותיהם אינן משמשות ככניסות לשערים אחרים) מ-AND-invert ל-invert-OR. באופן זה יצרנו מצב שבו על אותו קו במעגל נמצאים שני מהפכים.

נדגים זאת בתרשים פשוט. נניח שהמעגל שלנו הוא זה:



נמיר את שער III בשער invert-or.

יתקבל המעגל הזה:



ניתן לראות, שביציאה משער I יש מהפך, ובכניסה לשער III יש מהפך נוסף. שני מהפכים אלה מבטלים זה את זה, מכיוון ש-A=''(A'), ולכן ניתן להורידם. באופן דומה ניתן לבטל את המהפכים ביציאת שער II ובכניסת שער III. כך נוצר מעגל AND-OR שפעולתו זהה לפעולת מעגל ה-NAND המקורי.

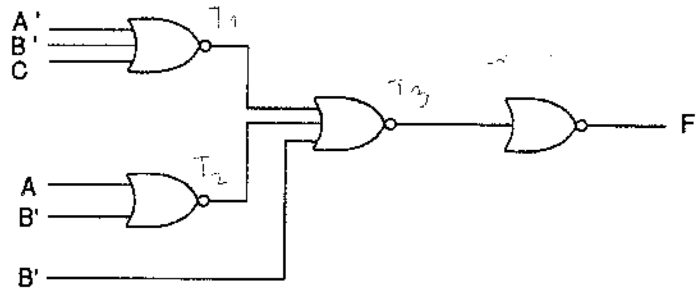
סעיף 4.8

בדומה לשער NAND גם שער NOR הוא שער אוניברסלי, ולכן ניתן לבנות מעגלים צירופיים המורכבים אך ורק משערי NOR. בכך דן סעיף 4.8.

קרא סעיף 4.8 כולו.

שאלה 15

קבע את הפונקציות הבוליאניות עבור היציאה F של המעגל שבאיור הבא. בנה מעגל שקול בעל מספר שערי NOR קטן יותר.



סעיף 4.9

עתה נבדוק שתי פונקציות לוגיות נוספות: פונקציית ה-exclusive-OR שסימונה $\oplus$ ופונקציית השקילות שסימונה $\odot$. פונקציות אלו אינן פונקציות בסיסיות, כלומר, ניתן לממשן בעזרת הפונקציות הלוגיות OR,AND,NOT.

אם כן, לשם מה הפונקציות האלה נחוצות? התשובה היא טכנית בעיקרה: במהלך עיצובם וניתוחם של מעגלים צירופיים התברר שפונקציות אלו נפוצות מאוד, ולכן הוחלט לייחד להן סימון מיוחד.

נשים לב לתכונה מיוחדת שלהן: פונקציות אלו הן פונקציות משלימות, כאשר הן פועלות על מספר זוגי של משתנים; ושוות - כאשר הן פועלות על מספר אי-זוגי של משתנים. נוכיח זאת עבור שני משתנים (A,B) ועבור שלושה משתנים (A,B,C):

$$(A \oplus B)' = (AB'+A'B)' = (AB')'(A'B)' = (A'+B)(A+B') = AB+A'B' = A \odot B$$

$$\begin{aligned} A \odot B \odot C &= (A \odot B) \odot C = (AB+A'B') \odot C = (AB + A'B')C+(AB+A'B')'C' \\ &= ABC+A'B'C+A'BC'+AB'C' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \oplus B \oplus C &= (A'B+AB') \oplus C = ((A'B+AB')C'+(A'B+AB')'C) \\ &= A'BC'+AB'C'+(A'B)'(AB')'C = A'BC'+AB'C'+(A+B')(A'+B)C \\ &= A'BC'+AB'C'+ABC+A'B'C \end{aligned}$$

ולפיכך: $A \oplus B \oplus C = A \odot B \odot C$.

הסבר מפורט יותר על פונקציית ה-exclusive-OR ופונקציית השקילות תמצא בסעיף 4.9.

קרא את סעיף 4.9 כולו.

שאלה 16

עצב מעגל צירופי לבדיקת זוגיות זוגית של ארבע סיביות. נדרשת יציאה של 1 לוגי, כאשר ארבע הסיביות אינן יוצרות זוגיות זוגית.

לסיכום הדיון בפרק זה נחזור לכמה דוגמאות שבהן נממש פונקציות בעזרת שערי exclusive-OR:

שאלה 17

הראה כי המעגל שבאיור 4.21(2) הוא exclusive-OR.
(האיור נמצא בספר בסעיף 4.9).

שאלה 18

עצב מעגל צירופי הממיר מספר בן ארבע סיביות המיוצג בקוד משקף (טבלה 1.4) למספר בינרי בן ארבע סיביות. ממש את המעגל בעזרת שערי exclusive-OR.

שאלה 19

ממש את הפונקציה הבוליאנית שלהלן בעזרת שערי exclusive-OR ו-AND.

$F = AB'CD' + A'BCD' + AB'C'D + A'BC'D$

תשובות לשאלות בפרק 4

תשובה 1

1. טבלת האמת של הפונקציה:

a,b,c,d הן סיביות הקלט. F היא סיבית הפלט.

a	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
b	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
c	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
d	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
F	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1

2. מפת קרנו עבור הפונקציה:

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	0	1	0
11	0	1	1	1
10	1	0	1	0

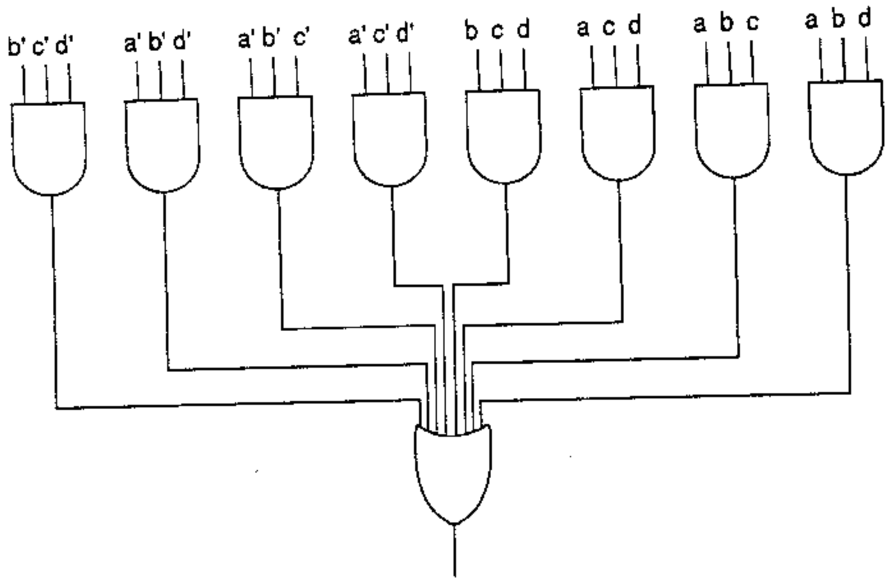
נבטא את הפונקציה המפושטת בצורת סכום מכפלות. לשם כך נתייחס לריבועים במפה המסומנים ב-1. $F = b'c'd'+a'b'd'+a'b'c'+a'c'd'+bcd+acd+abc+abd$.

3. נבטא את הפונקציה המפושטת בצורת מכפלת סכומים. לשם כך נתייחס לריבועים במפה המסומנים ב-0. $F'=a'b'cd+a'bc'd+a'bcd'+ab'c'd'+ab'c'd+ab'cd'$.

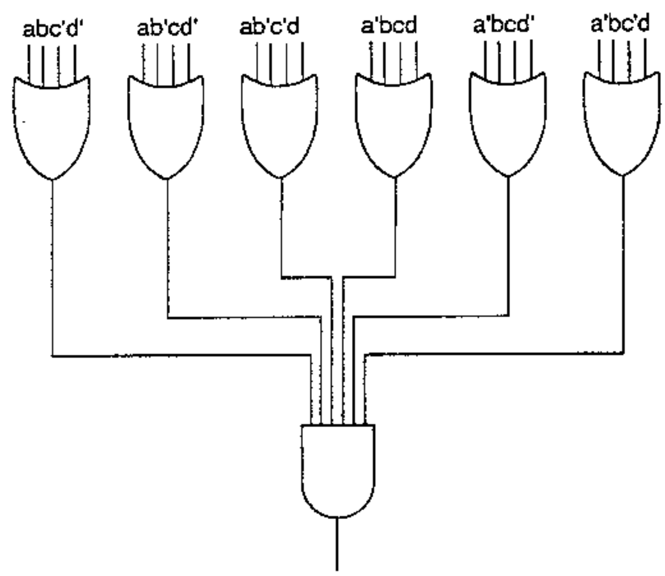
נפעיל את משפט דה-מורגן על ביטוי זה ונקבל:

$$F = (a+b+c'+d')(a+b'+c+d')(a+b'+c'+d)(a'+b+c+d)(a'+b+c+d')\cdot$$
$$\cdot(a'+b+c'+d)$$

4. הדיאגרמה הלוגית עבור סכום המכפלות (כדי לפשט את הסרטוט נציין בכניסות של כל שער את המשתנים):



והדיאגרמה הלוגית עבור מכפלת סכומים:



תשובה 2

ששת שלבי העיצוב של מעגל צירופי מתוארים בסעיף 4.2. נפעל לפיהם כדי לעצב את המעגל המבוקש.

1. תיאור הבעיה: יש לעצב מעגל צירופי המקבל מספר בן שלוש סיביות ומחולל פלט בינרי השווה לריבוע מספר הקלט.
2. קביעת מספר משתני הכניסה הקיימים ומספר משתני היציאה הנדרשים: על המעגל לקבל כקלט מספר בן שלוש סיביות. כל סיבית מהווה משתנה, ומכאן

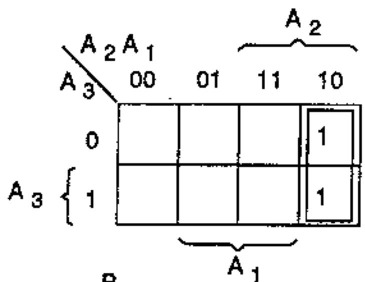
שיש שלושה משתני כניסה. מספר הקלט הגדול ביותר יכול להיות 111_2 (7_{10}). ריבועו (49_{10}) הוא 110001_2. במספר זה שש סיביות, ולכן יהיו שישה משתני פלט.

3. התאמת אותיות למשתני הכניסה והיציאה: נכנה את משתני הכניסה A_3,A_2,A_1 ואת משתני היציאה $B_6,\dots,B_1$.

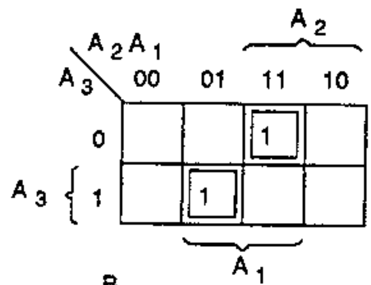
4. בניית טבלת האמת המגדירה את היחסים הנדרשים בין הכניסות ליציאות:

A_3	A_2	A_1	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	1

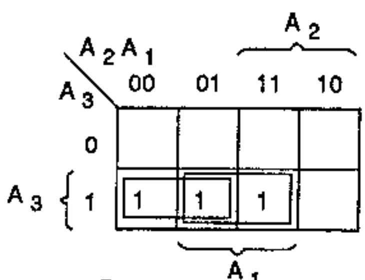
5. פישוט הפונקציה הבוליאנית עבור כל יציאה: מטבלת האמת ניתן לראות, ש-$B_1=A_1$ ו-$B_2=0$. לכן אין צורך לבנות את מפות קרנו של יציאות אלו. נבנה את מפות קרנו של שאר ארבע היציאות:



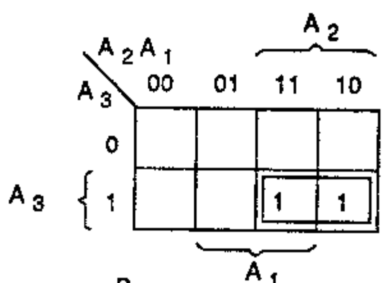
B_3



B_4



B_5



B_6

$B_3 = A_1'A_2$

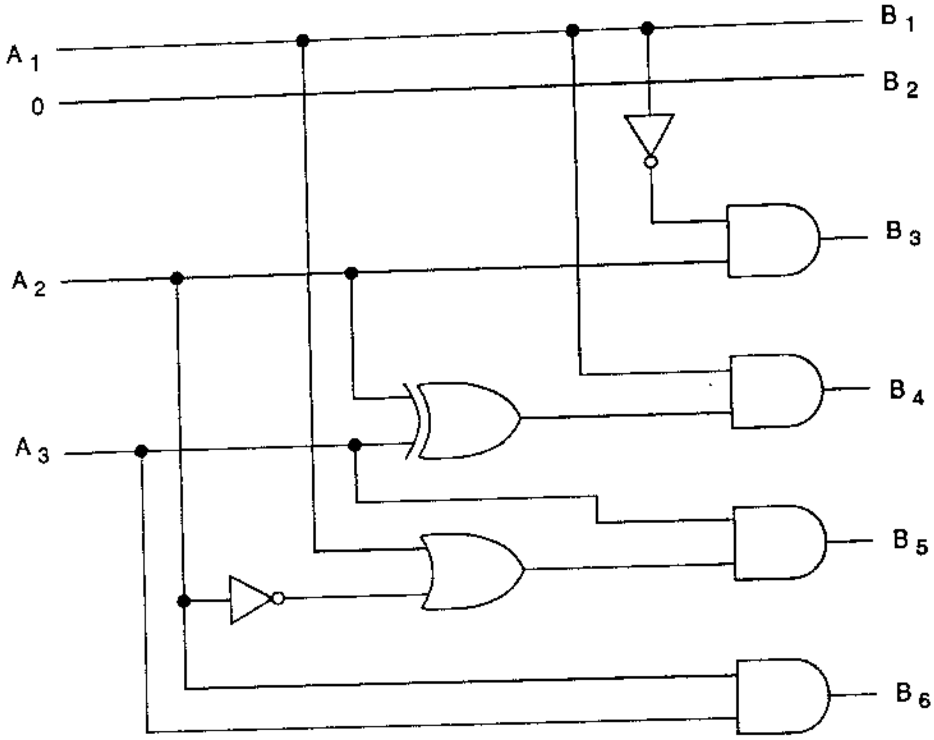
$B_4 = A_1A_2A_3'+A_1A_2'A_3=A_1(A_2A_3'+A_2'A_3)=A_1(A_2 \oplus A_3)$

$B_5 = A_3A_2'+A_3A_1=A_3(A_2'+A_1)$

$B_6 = A_2A_3$

נעיר שלמעשה אפשר להגיע לכך בלי מפות קרנו. לדוגמה B_6 מקבל ערך 1 רק כאשר $A_3A_2A_1$ הם 110 או 111 ואילו כל המצבים שבהם $A_3=A_2=1$. מכאן ברור ש- $B_6=A_3A_2$.

6. סרטוט הדיאגרמה הלוגית:

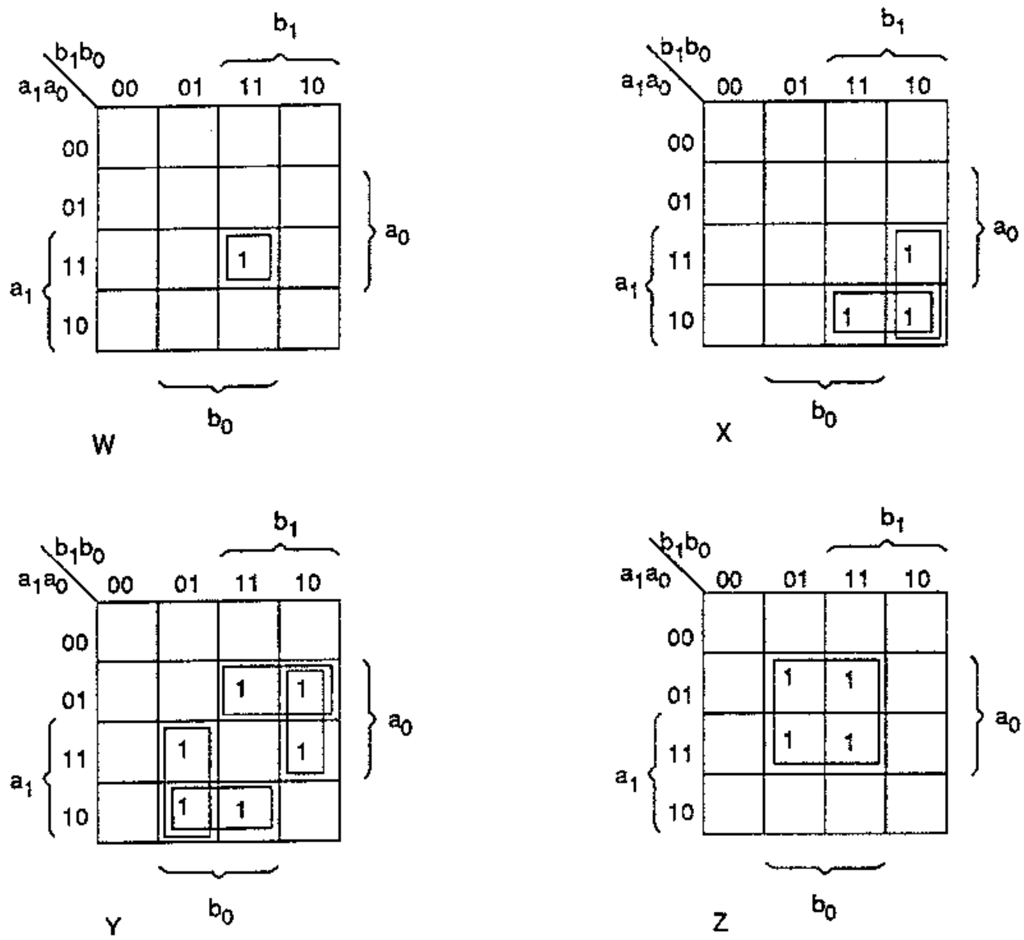


תשובה 3

1. התוצאה הגבוהה ביותר שיכולה להתקבל מכפל שני מספרים בינריים בני שתי סיביות כל אחד היא $11\cdot11=1001$ $(3\cdot3=9)$. כדי לבטא תוצאה זו נזדקק לארבעה משתני יציאה.
2. נכנה את משתני היציאה w,x,y,z.
   טבלת האמת של הפונקציה:

a_1	a_0	b_1	b_0	w	x	y	z
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1

נבנה את מפת קרנו עבור כל יציאה:



להלן הפונקציות המפושטות עבור כל יציאה:

$w = a_1 a_0 b_1 b_0$

$x = a_1 a_0' b_1 + a_1 b_1 b_0'$

$y = a_1 b_1' b_0 + a_1 a_0' b_0 + a_1' a_0 b_1 + a_0 b_1 b_0'$

$z = a_0 b_0$

תשובה 4

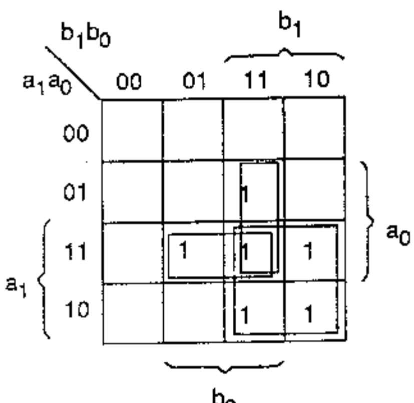
1. התוצאה הגדולה ביותר שיכולה להתקבל מחיבור של שני מספרים בינריים בני שתי סיביות כל אחד היא 11+11=110 (3+3=6). כדי לבטא תוצאה זו נזדקק לשלושה משתני יציאה.

2. נכנה את משתני היציאה x,y,z.

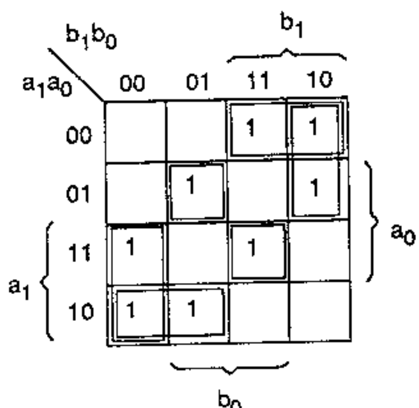
טבלת האמת של הפונקציה:

a_1	a_0	b_1	b_0	x	y	z
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0

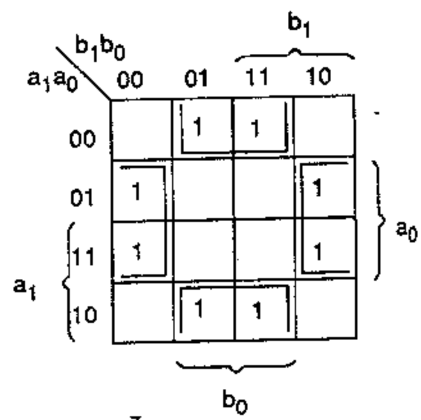
נסרטט את מפת קרנו עבור כל יציאה:



x



y



z

להלן הפונקציות המפושטות עבור כל יציאה:

$$x = a_1 b_1 + a_1 a_0 b_0 + a_0 b_1 b_0$$

$$y = a_1 b_1' b_0' + a_1' b_1 b_0' + a_1' a_0 b_1' b_0 + a_1 a_0 b_1 b_0 + a_1 a_0' b_1' + a_1' a_0' b_1$$

$$z = a_0 b_0' + a_0' b_0 = a_0 \oplus b_0$$

תשובה 5

נביא פונקציות אלו לצורה אחרת:

$D = A \oplus B \oplus C$

$E = A'BC+AB'C = (A \oplus B)C$

$F = ABC'+(A'+B')C = ABC'+(AB)'C = AB \oplus C$

$G = ABC$

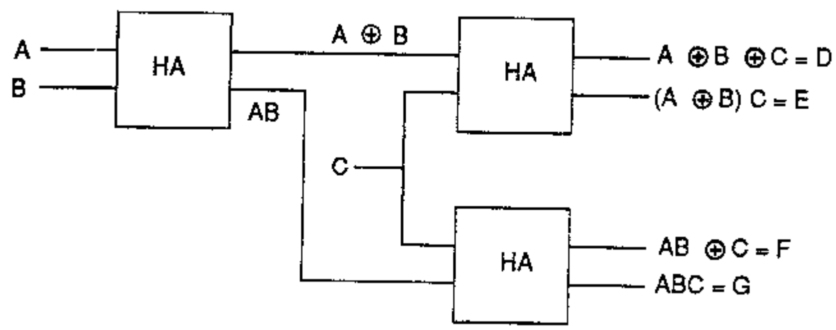
בחרנו להביא את הפונקציות לצורה זו דווקא (כלומר להשתמש רק בפעולות $\oplus$ ו- $\cdot$), מכיוון שפונקציות היציאה של חצי מחבר הן $S = A \oplus B$ ו- $C = AB$.

איך ניישם את הפונקציות בעזרת מעגל ספרתי?

את הפונקציה D הצגנו כשתי פעולות $\oplus$. לכן סביר להניח שתצטרך לעבור דרך שני חצאי מחברים, ונקבלה מתוך יציאות ה-S.

את הפונקציה E נקבל על-ידי כך שאת יציאת ה-S מחצי המחבר הראשון ואת המשתנה C נכניס לחצי המחבר השני. באופן דומה נקבל את F ואת G.

המעגל הספרתי יראה כך:

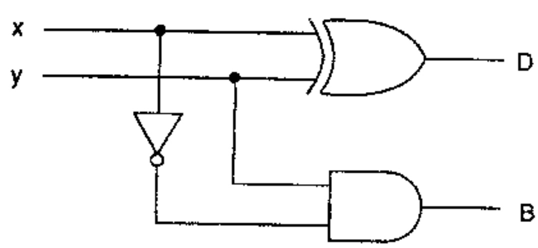


תשובה 6

הביטויים הבוליאניים עבור יציאת חצי המחסר הם $D=x'y + xy'= x \oplus y$

$B=x'y$

הדיאגרמה הלוגית היא:



תשובה 7

את המשלים ל-2 של מספר בינרי ניתן לקבל בשני שלבים:

א. הופכים את כל ה-0-ים ל-1-ים, ואת כל ה-1-ים ל-0-ים (כלומר יוצרים את המשלים ל-1).

ב. מוסיפים 1 למספר שהתקבל ומתעלמים מנשא שעשוי להתקבל.

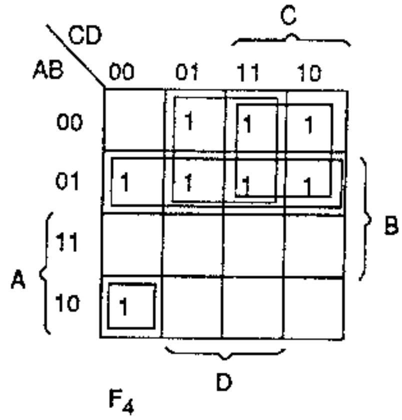
נשתמש בתהליך זה כדי לקבל את ערכם של משתני היציאה מתוך ערכם של משתני הכניסה.

משתני הכניסה ייקראו A, B, C, D.

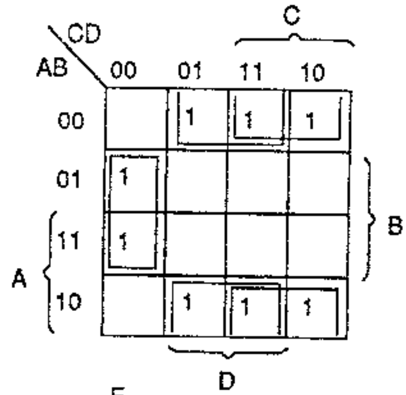
משתני היציאה ייקראו F_1, F_2, F_3, F_4.

A	B	C	D	F_4	F_3	F_2	F_1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

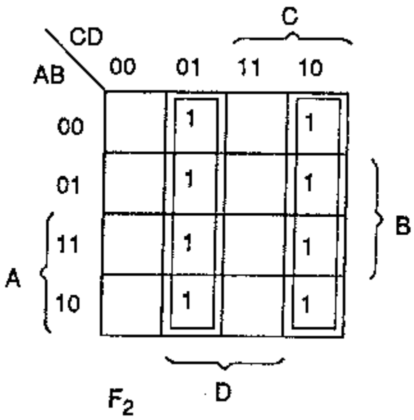
נפשט את פונקציות הפלט בעזרת מפות קרנו.



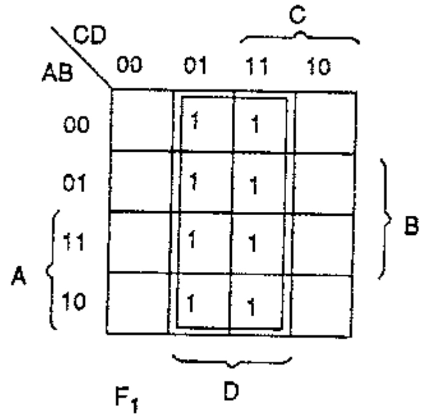
F_4



F_3



F_2



F_1

$F_4 = A'C+A'D+A'B+AB'C'D' = A'(B+C+D)+AB'C'D'$

$F_3 = BC'D'+B'D+B'C = BC'D'+B'(D+C)$

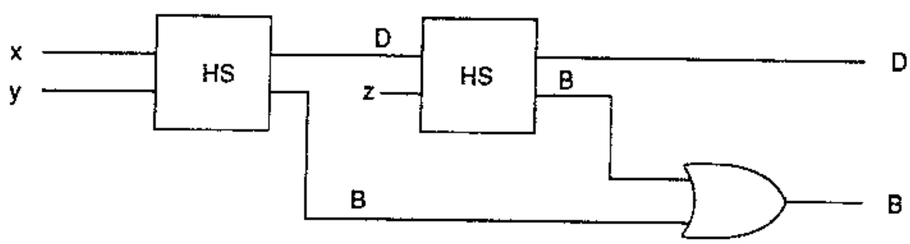
$F_2 = C'D+CD' = C \oplus D$

$F_1 = D$

סרטוט המעגל מושאר לסטודנט.

תשובה 8

נממש מחסר מלא בעזרת שני חצאי מחסרים ושער OR:



הפלט D של חצי המחסר הראשון הוא ספרת היחידות של x-y. חצי המחסר השני מחסר מזה את z ולכן הפלט D שלו הוא ספרת היחידות של x-y-z.

אם לצורך ביצוע x-y היה צורך בהשאלה הרי שפלט B של חצי המחסר הראשון שווה ל-1. אם לצורך חיסור z (מפלט D של חצי המחסר הראשון) היה צורך בהשאלה הרי שפלט B של חצי המחסר השני שווה ל-1. פלט B של שער ה-OR שווה ל-1 אם באחד משלבי החיסור היה צורך בהשאלה.

נראה, באופן פורמלי, שזה מימוש נכון:

נסמן את הפלטים של חצי מחסר: D_H ו-B_H ונסמן את הפלטים של מחסר מלא D_F ו-B_F. ראינו כבר ש:

$D_H = x'y+xy' = x \oplus y$

$B_H = x'y$

$D_F = x'y'z+x'yz'+xy'z'+xyz$

$B_F = x'y+x'z+yz$

לפיכך הפלט D_F הוא:

$$D_F=x'y'z+x'yz'+xy'z'+xyz=(x+y')(x'+y)z+x'yz'+xy'z'=$$
$$=(x'y+xy')z+(x'y+xy')z'=(x \oplus y)z+(x \oplus y)'z=(x \oplus y) \oplus z=$$
$$=D_{H1} \oplus z=D_{H2}$$

(1 - לחצי מחסר ראשון, 2 - לחצי מחסר שני)

והפלט B_F הוא:

$$B_F=x'y+x'z+yz=x'y+x'z(y+y')+yz(x+x')=x'y+x'yz+xyz+x'y'z=$$
$$=x'y(1+z)+xyz+x'y'z=x'y+xyz+x'y'z=x'y+(xy+x'y')z=$$
$$=x'y+(xy'+x'y)'z=x'y+(x \oplus y)'z=B_{H1}+(D_{H1})'z=B_{H1}+B_{H2}$$

תשובה 9

הקוד 84-2-1 הוא קוד בינרי שבו המשקל של הספרות הוא כלהלן: 1- עבור הספרה הכי פחות משמעותית, 2- עבור הספרה הבאה בתור, וכן הלאה.

טבלת האמת עבור פונקציה הממירה ספרה עשרונית המקודדת בקוד זה לקוד BCD היא:

	A B C D 8 4-2-1	w x y z 8 4 2 1
0	0 0 0 0	0 0 0 0
1	0 1 1 1	0 0 0 1
2	0 1 1 0	0 0 1 0
3	0 1 0 1	0 0 1 1
4	0 1 0 0	0 1 0 0
5	1 0 1 1	0 1 0 1
6	1 0 1 0	0 1 1 0
7	1 0 0 1	0 1 1 1
8	1 0 0 0	1 0 0 0
9	1 1 1 1	1 0 0 1

נפשט את פונקציית היציאה בעזרת מפות קרנו:

AB \ CD	00	01	11	10
00		x	x	x
01				
11	x	x	1	x
10	1			

W=AB+AC'D'

AB \ CD	00	01	11	10
00		x	x	x
01	1			
11	x	x		x
10		1	1	1

X=B'C+B'D+BC'D'

AB \ CD	00	01	11	10
00		x	x	x
01		1		1
11	x	x		x
10		1		1

Y=CD'+C'D

ומתוך התבוננות בטבלה ניתן לראות ש-Z=D.

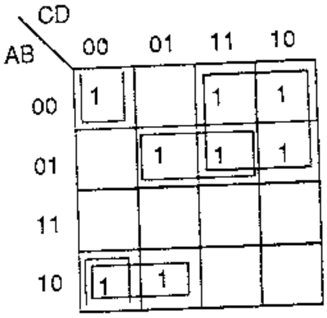
תשובה 10

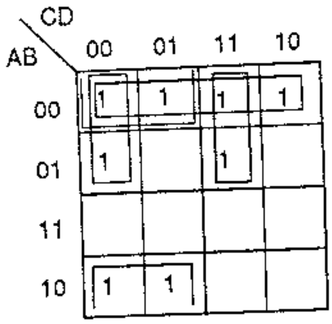
טבלת האמת בבעיה זו תהיה מורכבת מארבע עמודות עבור סיביות הקלט ושבע עמודות עבור סיביות הפלט. (המספר המקסימלי שאנו מעוניינים בו הוא 9, וייצוגו 1001; אפשר שהצירופים הבינריים בתחום 1001-1111 יהיו אדישים. ואולם, נניח שהחלטנו שעבור קלט לא חוקי לוח התצוגה לא יואר כלל.

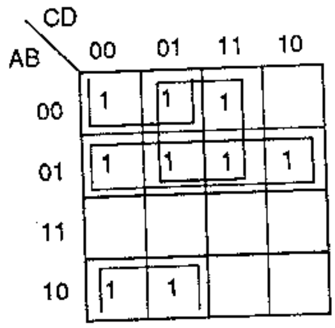
בעמודות הפלט יופיע התו 1, כאשר נרצה שאותו הסגמנט יובלט עבור סיביות הקלט הנתונות. לדוגמה: אם הקלט יהיה 0010. נרצה ליצור בתצוגה את המספר 2. נעשה זאת על ידי הבלטת הסגמנטים a,b,d,e,g.

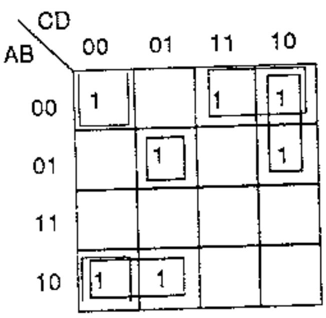
A	B	C	D	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

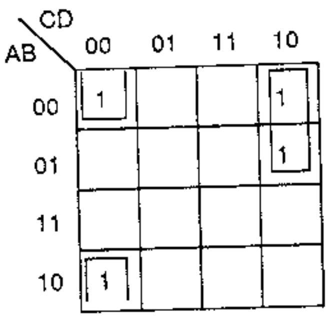
עתה נפשט כל אחת מפונקציות הפלט בעזרת מפת קרנו.

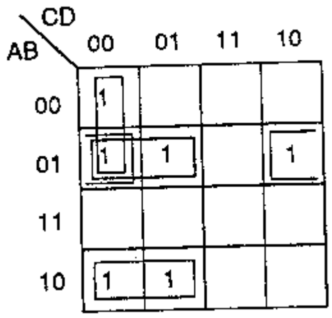

a

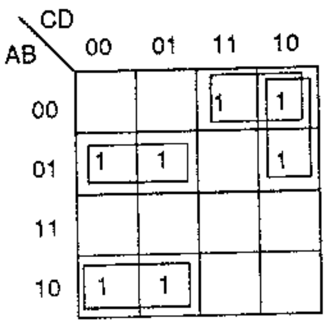

b


c


d


e


f


g

a = A'C+A'BD+B'C'D'+AB'C'

b = A'B'+A'C'D'+A'CD+B'C'

c = A'B+A'D+B'C'

d = A'CD'+A'B'C+B'C'D'+AB'C'+A'BC'D

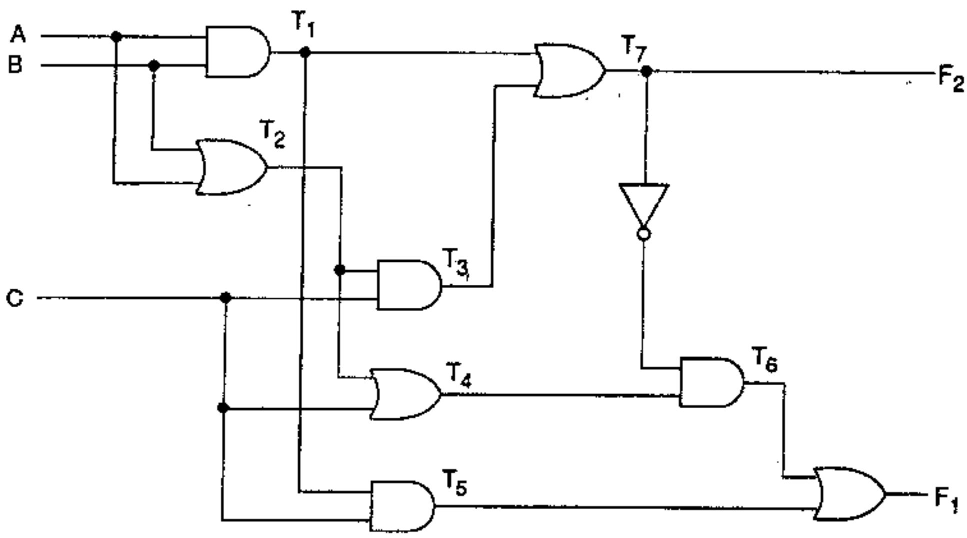
e = A'CD'+B'C'D'

f = A'BC'+A'C'D'+A'BD'+AB'C'

g = A'CD'+A'B'C+A'BC'+AB'C'

כשנממש את פונקציות הפלט בעזרת שערים, נשים לב למכפלות המשותפות לכמה פונקציות שאין צורך לממשן יותר מפעם אחת.

תשובה 11



תחילה נסמן את יציאות השערים $T_1,\ldots,T_7$. עתה נמצא את פונקציית היציאה של כל שער; נתחיל בשערים שכניסותיהם הם כניסות המעגל.

$T_1 = AB$

$T_2 = A+B$

$T_3 = T_2C=(A+B)C$

$T_4 = T_2+C = A+B+C$

$T_5 = T_1C = ABC$

$T_7 = T_1+T_3 = AB+(A+B)C=AB+AC+BC$

$T_6 = T_7'T_4 = (AB+AC+BC)'(A+B+C)$

$F_2 = T_7 = AB+AC+BC$

$F_1 = T_5+T_6 = ABC+(A+B+C)(AB+AC+BC)'$

$F_2 = AB+AC+BC$ וזו פונקצית היציאה של הנשא במחבר מלא.

$$F_1 = (AB+AC+BC)'(A+B+C)+ABC = (AB)'(AC)'(BC)'(A+B+C)+ABC$$
$$= (A'+B')(A'+C')(B'+C')(A+B+C)+ABC = A'B'C+A'BC'+AB'C'+ABC$$

וזו פונקצית היציאה של הסכום במחבר מלא.

לפיכך המעגל הצירופי מבצע פעולה של מחבר מלא.

תשובה 12

נבנה את טבלת האמת בשתי דרכים: א. מתוך פונקציות הפלט. ב. מתוך הדיאגרמה הלוגית של המעגל.

א. בשאלה 11 מצאנו את הביטויים הבוליאניים המתארים את פונקציות היציאה:

$F_2 = AB+AC+BC$

$F_1 = (AB+AC+BC)'(A+B+C)+ABC=F_2'(A+B+C)+ABC$

מביטויים אלו נבנה את טבלת האמת. בטבלת האמת יהיו שלוש עמודות עבור משתני הכניסה ושתי עמודות עבור משתני היציאה. עבור כל אחד מצירופי הכניסה (צירוף הסיביות בעמודות הקלט) נחשב את ערכם של משתני היציאה בעזרת הביטויים הבוליאניים המתארים אותם.

נקבל את טבלת האמת הזו:

A B C	F_1 F_2
0 0 0	0 0
0 0 1	1 0
0 1 0	1 0
0 1 1	0 1
1 0 0	1 0
1 0 1	0 1
1 1 0	0 1
1 1 1	1 1

ב. את טבלת האמת ניתן לבנות ישירות מתוך המעגל הצירופי הנתון. בשאלה 11 כבר סימנו יציאות השערים. נבנה טבלת אמת המורכבת משלוש עמודות עבור סיביות הקלט ומעמודה עבור כל שער לוגי במעגל הצירופי. בדוגמה זו יש תשעה שערים (אם ניקח בחשבון גם את שער ה-NOT). תחילה נמלא בטבלת האמת את העמודות השייכות לשערים לוגיים שבכניסותיהם משתני הכניסה, ואחר-כך נמשיך לשאר העמודות.

כלומר, העמודות שנמלא תחילה הן T_1 ו-T_2, ואחר-כך T_3,T_4,T_5 וכו'.

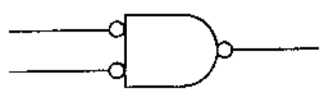
A B C	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_7	T_7'	T_6	F_1
0 0 0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0 0 1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
0 1 0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0 1 1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
1 0 0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
1 1 0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1	1	1	0	0	1

מהמעגל ניתן לראות ש-$F_2=T_7$.

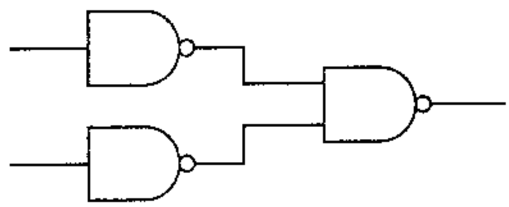
שתי טבלאות האמת שהתקבלו הביאו לתוצאות זהות.

תשובה 13

ראשית נמיר את שערי ה-AND-OR-NOT לשערי NAND. כדי לפשט את הסרטוט הומר שער ה-OR ל-

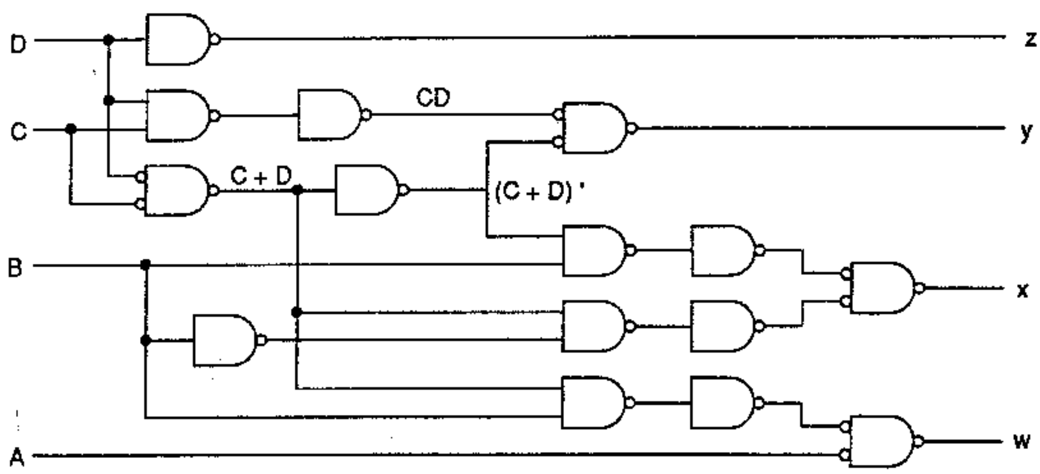


ולא ל-

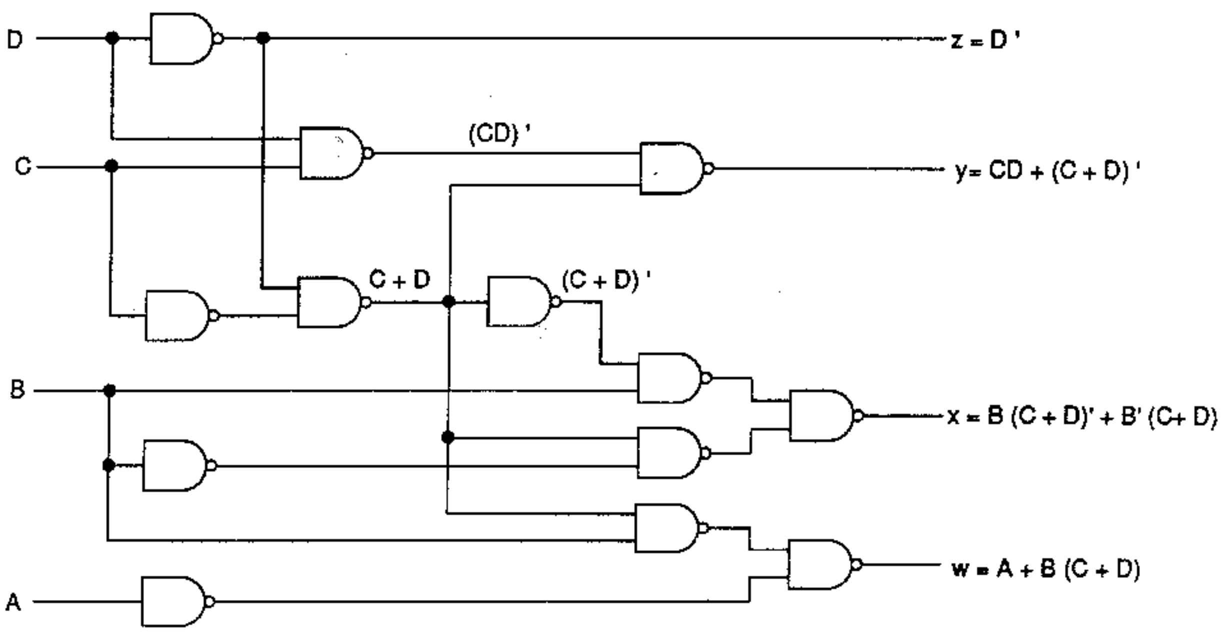


כלומר את שני המהפכים שבכניסות סימנו כעגולים, ולא כשערי NAND בעלי כניסה אחת.

הסרטוט שהתקבל:



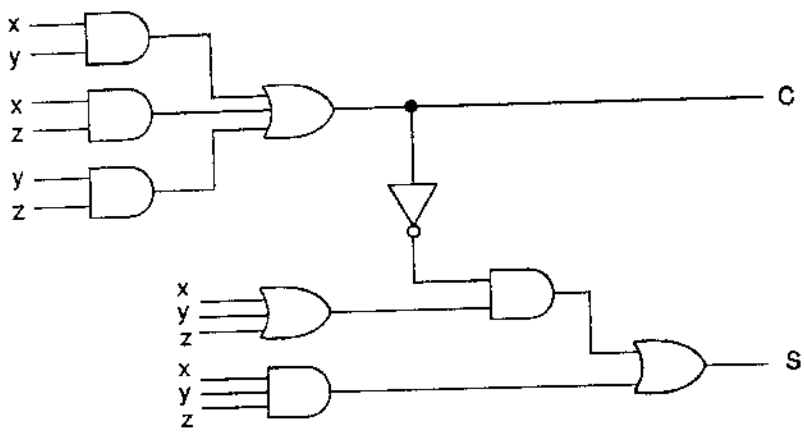
עתה נמחק כל שני מהפכים עוקבים. (שים לב שמהפך מופיע גם כעיגול וגם כשער NAND בעל כניסה יחידה). תתקבל הדיאגרמה הלוגית הזו:



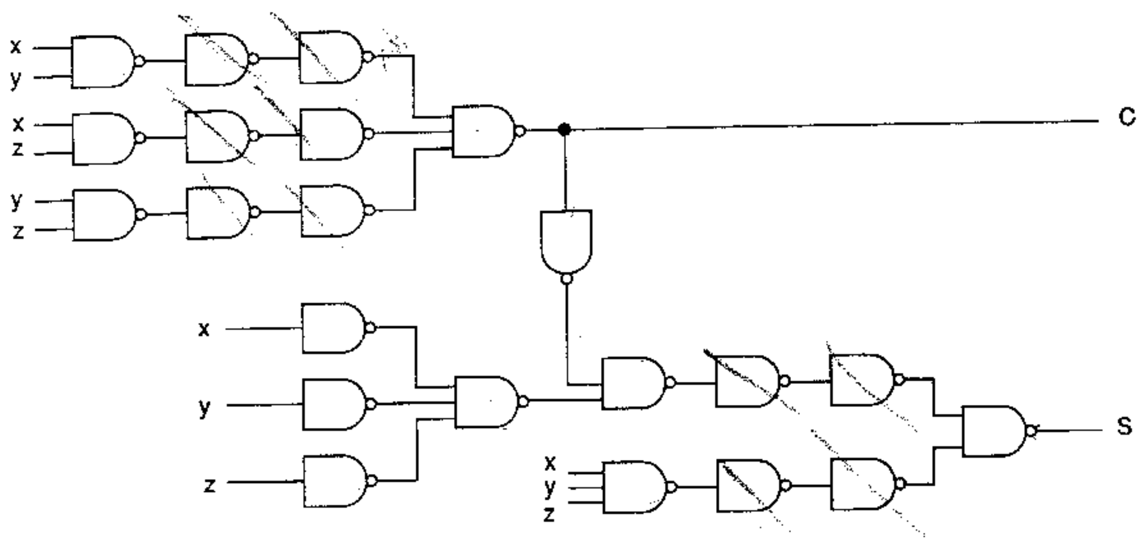
תשובה 14

$S = C'(x+y+z)+xyz \;,\; C = xy+xz+yz$

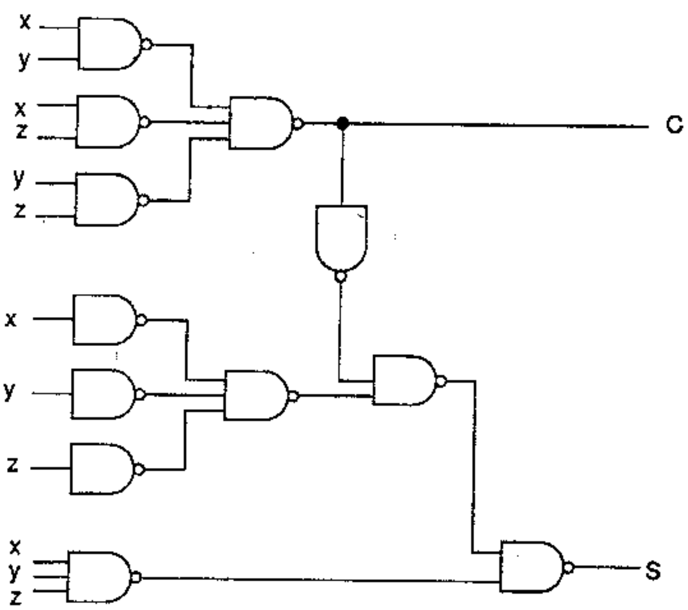
נממש בעזרת שערי AND-OR-NOT:



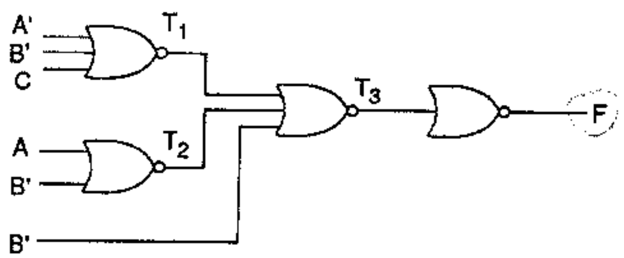
עתה נמיר דיאגרמה זו לדיאגרמה המורכבת משערי NAND בלבד.



נמחק מהדיאגרמה כל זוג שערים עוקבים. הדיאגרמה הלוגית המפושטת תיראה כך:



תשובה 15



תחילה נסמן את יציאות השערים ב-T_1, T_2, T_3. עתה נבטא את היציאות האלו כפונקציה של קווי הכניסה:

$T_1 = (A'+B'+C)' = ABC'$

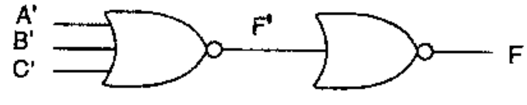
$T_2 = (A+B')' = A'B$

$T_3 = (T_1+T_2+B')' = (ABC'+A'B+B')'$

$F = [B(AC'+A')+B'] = [B(A'+C')+B']'' = B'+A'+C'$

פישטנו את הפונקציות בעזרת משפטי דה-מורגן ובעזרת השוויון $x+x'y = x+y$.

נממש פונקציה זו בעזרת שני שערי NOR.



תשובה 16

נכנה את סיביות הקלט x,y,z,p (x,y,z הן סיביות המידע, ו-p היא סיבית הזוגיות הזוגית).

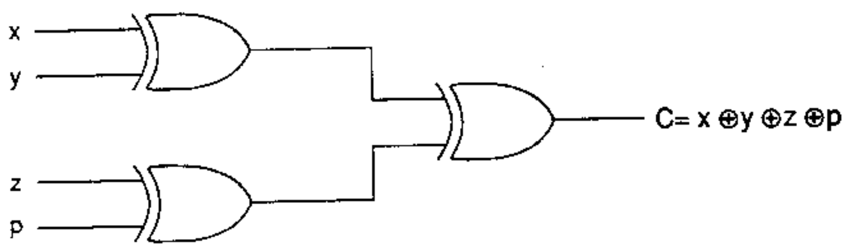
היציאה C תהיה שווה ל-1 כאשר ארבע הסיביות אינן יוצרות זוגיות זוגית ו-0 אחרת.

טבלת האמת של הפונקציה:

x	y	z	P	c
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

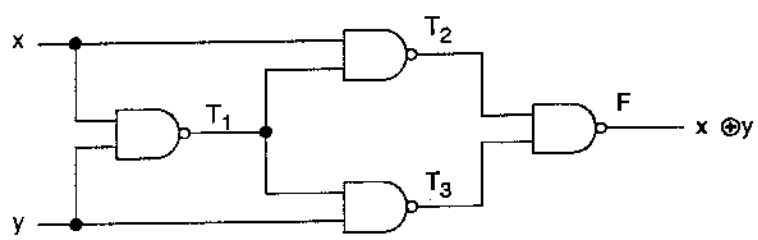
מטבלת האמת מקבלים: $c = \Sigma(1,2,4,7,8,11,13,14) = x \oplus y \oplus z \oplus p$.

המימוש של הפונקציה c יראה כך:



תשובה 17

נבדוק את האיור:



$T_1 = (xy)'$

$T_2 = (xT_1)' = (x(xy)')' = x'+xy = x'+y$

$T_3 = (T_1y) = ((xy)'y)' = xy+y' = x+y'$

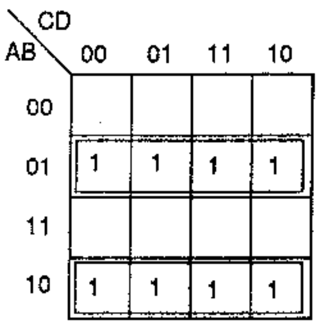
$F = (T_2T_3)' = ((x'+y)(x+y'))' = (x'+y)'+(x+y')' = xy'+x'y = x \oplus y$

תשובה 18

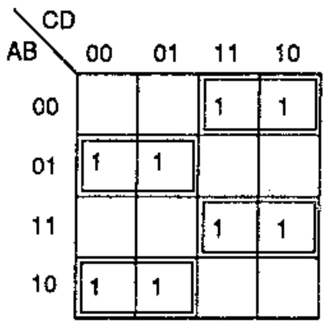
תחילה נרשום את טבלת האמת. בטבלה זו ארבע העמודות ABCD יציינו את סיביות הקלט, וארבע העמודות wxyz את סיביות הפלט.

A	B	C	D	w	x	y	z
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1

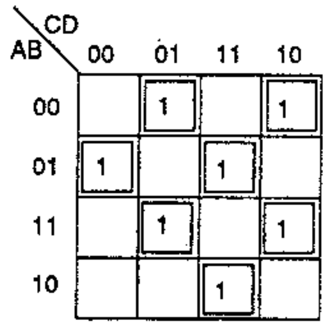
מהטבלה ניתן לראות ש-w=A. נפשט את שאר פונקציות הפלט:



x



y



z

$x = A'B+B'A=A \oplus B$

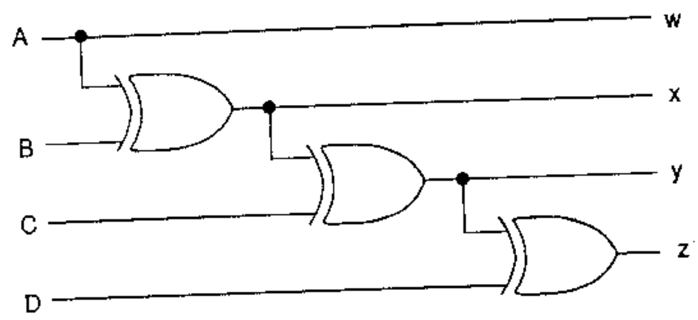
$y = A'B'C+A'BC'+ABC+AB'C' = A'(B \oplus C)+A(B \oplus C)' = A \oplus B \oplus C$

$z = A'B'C'D+A'B'CD'+A'BC'D'+A'BCD+ABC'D+ABCD'+AB'C'D'+AB'CD+ABC'D+ABCD'+AB'C'D'+AB'CD$

$= A'B'(C \oplus D)+A'B'(C \oplus D)'+AB(C \oplus D)+AB'(C \oplus D)'$

$= (C \oplus D)(A \oplus B)'+(C \oplus D)'(A \oplus B) = A \oplus B \oplus C \oplus D$

המימוש הלוגי של המעגל:

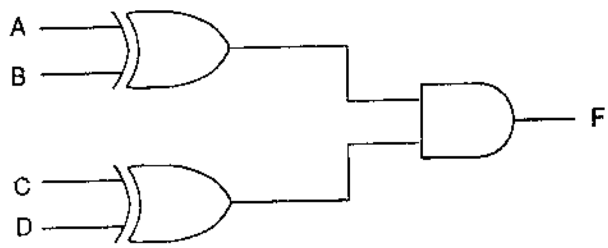


תשובה 19

$F = AB'CD'+A'BCD'+AB'C'D+A'BC'D$. נכתוב את F בצורה שונה מעט:

$$F = CD'(AB'+A'B)+C'D(AB'+A'B) = (AB'+A'B)(CD'+C'D) = (A \oplus B)(C \oplus D)$$

המימוש הלוגי של הפונקציה F ייראה כך:



פרק 5

לוגיקה צירופית II

סעיף 5.1

קרא את סעיף 5.1.

סעיף 5.2

קרא את סעיף 5.2 עד התת-סעיף "מעבר הנשא" - לא כולל.

שאלה 1

עצב ממיר קוד מ-Excess-3 ל-BCD. השתמש במחבר 4 סיביות מסוג MSI.

שאלה 2

בנה מחבר/מחסר 4 סיביות מקבילי באמצעות ארבעה שערי exclusive-OR ומחבר 4 סיביות. השתמש במשתנה כניסה בורר V באופן שכאשר V=0 המעגל מחבר, וכאשר V=1 המעגל מחסר. (רמז: השתמש בחיסור בעזרת משלים ל-2).

כאשר מעצבים מעגלים צירופיים יש לקחת בחשבון גורם חשוב - זמן ההשהיה של המערכת. זמן ההשהיה של מערכת הוא פרק הזמן העובר מהרגע שבו חל שינוי כלשהו ברמה הלוגית בכניסה מסוימת עד הרגע שבו ניתן להבחין בשינוי שהתרחש ביציאה בעקבות השינוי בכניסה (בהנחה שאמור להתרחש שינוי כזה).
אנו מעוניינים להקטין ככל האפשר את זמן ההשהיה כדי ליצור מערכות מהירות יותר.

ראינו כיצד ניתן לחבר מספרים בינריים מרובי-ספרות בעזרת מחבר בינרי מקבילי. עתה נראה מעגל צירופי המבצע את אותה הפעולה מהר יותר.

סיים לקרוא את סעיף 5.2.

בסעיף זה ראינו מהו מעגל יוצר נשא צפוי מראש. מעגל זה ניתן לשלב בתוך מעגל מחבר בינרי מקבילי ולקבל מחבר בינרי מקבילי מהיר יותר מזה שעוצב בעזרת מחברים מלאים בלבד.
כדי להשלים את עיצובו של מעגל יוצר נשא צפוי מראש נמצא את המשוואה עבור נשא היציאה C_5.

שאלה 3

קבל משוואה בת שתי רמות עבור נשא היציאה C_5 שבאיור 5.5.

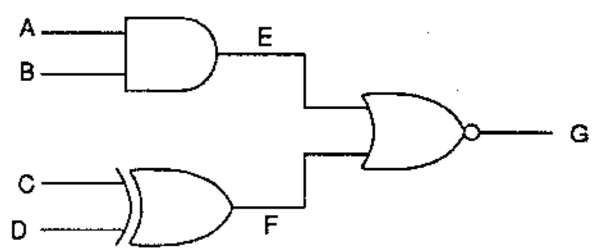
שאלה 4

1. בעזרת נוהל המימוש של AND-OR-INVERT המתואר בסעיף 3.7 הראה שניתן לבטא את נשא היציאה במעגל מחבר מלא באופן הזה

$$C_{i+1} = G_i + P_iC_i = (G_i'P_i' + G_i'C_i')'$$

2. מעגל משולב מטיפוס 74182 הוא מעגל MSI יוצר נשא צפוי מראש המייצר את הנשאים בעזרת שערי AND-OR-INVERT. מעגל ה-MSI מניח כי להדקי הכניסה יש המשלימים של ה-G-ים, ה-P-ים ושל C_1.
קבל את הפונקציות הבוליאניות עבור הנשאים הצפויים מראש C_2, C_3 ו-C_4 שבמעגל משולב זה. (רמז: השתמש בשיטה של הצבת משוואות כדי לקבל את הנשאים במונחים של C_1').

עתה נראה כיצד מחשבים את זמן ההשהיה של מעגל צירופי. זמן ההשהיה של מעגל צירופי שווה לסכום זמני ההשהיות של כל רמות המעגל. (מספר הרמות במעגל הוא המספר המירבי של שערים המחוברים בטור בין כניסות המעגל ליציאותיו.) אם ברמה מסויימת יש שערים מכמה סוגים (כלומר בעלי זמן השהיה שונה, לוקחים בחשבון את ההשהיה הגדולה מכולן, מכיוון שזמני ההשהיה הקצרים יותר ייבלעו בתוך זמן ההשהיה הארוך. נבהיר זאת בעזרת דוגמה. נתבונן במעגל שבאיור הזה:



מעגל זה הוא בעל שתי רמות של שערים, מכיוון שאות כניסה עובר דרך שני שערים. האות שייכנס דרך הכניסה A יעבור דרך שער AND ושער NOR, ולעומתו האות שייכנס דרך הכניסה C יעבור דרך שער XOR ושער NOR.
נסמן: d_1 - השהיית שער ה-AND, d_2 - השהיית שער ה-XOR, d_3 - השהיית שער ה-NOR אזי השהיית המעגל - d - שווה ל: $d = \max(d_1, d_2) + d_3$

סעיף 5.3

קרא את סעיף 5.3.

שאלה 5

כמה כניסות אדישות יש למחבר BCD?

סעיף 5.4

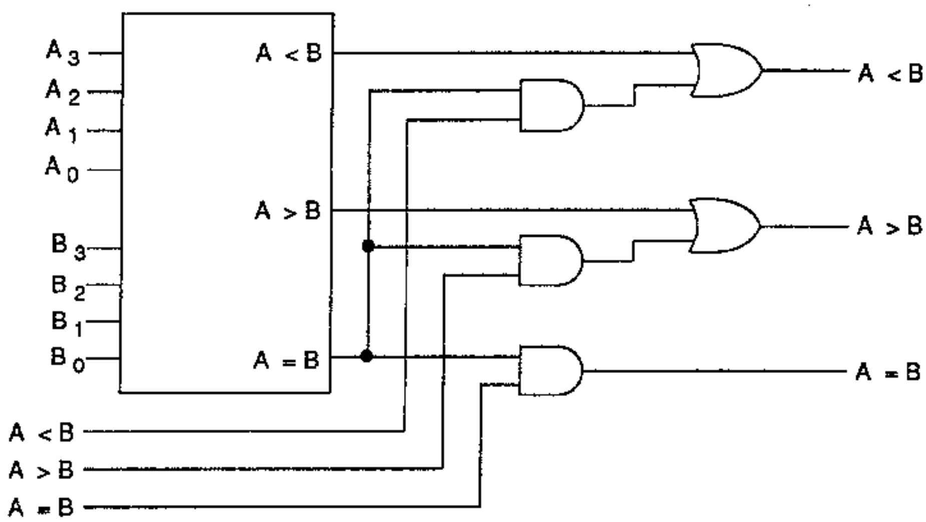
קרא את סעיף 5.4.

שאלה 6

עצב מעגל המשווה שני מספרים בני 4 סיביות, A ו-B. למעגל יש יציאה אחת, x, כך ש-$x=1$ אם $A=B$, ו-$x=0$ אם $A \neq B$.

שאלה 7

המעגל המשולב 74L85 הוא משווה גודל דומה לזה שבאיור 5.7 חוץ מהעובדה שיש לו שלוש כניסות נוספות ומעגלים פנימיים כפי שמתואר באיור הבא. בעזרת מעגלים משולבים אלה ניתן להשוות מספרים ארוכים, אם מחברים בטור משווי-גודל עוקבים. היציאות של דרגה כלשהי המטפלת בסיביות פחות משמעותיות עבור $A<B$, $A>B$ ו-$A=B$ מחוברות בהתאמה לכניסות $A<B$, $A>B$, ו-$A=B$ של הדרגה הבאה המטפלת בסיביות משמעותיות יותר. הדרגה המטפלת בסיביות הפחות משמעותיות חייבת להיות מעגל כגון זה המתואר באיור 5.7. אם משתמשים במעגל המשולב 74L85, חייבים לספק 1 לכניסה $A=B$ ו-0 לכניסות $A>B$ ו-$A<B$ של המעגל המשולב המטפל בארבע הסיביות הכי פחות משמעותיות. בנה מעגל המשווה שני מספרים בני 8 סיביות; השתמש במעגל אחד כמתואר באיור 5.7 ובמעגל המשולב 74L85. הסבר מדוע הוא אכן פועל כנדרש.



סעיף 5.5

קרא את סעיף 5.5 עד התת-סעיף "מקודדים" - לא כולל.

נחדד כמה נקודות במה שקראת זה עתה:

א. מדוע מידע בינרי מ-n קווי כניסה מפוענח על ידי 2^n קווי יציאה לכל היותר?

כניסה יכולה להיות במצב '0' לוגי או '1' לוגי בהתאם למשתנה שהיא מייצגת (אם המשתנה מותג - ערכה 0, ולא - ערכה 1. מספר הצירופים של n הכניסות, כאשר לכל כניסה יש שני ערכים אפשריים, הוא $2^n = \underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{n\text{ פעמים}}$

אם כמה מצירופי הכניסה לא יווצרו לעולם, ניתן להקטין את מספר היציאות. לכן מידע בינרי מ-n קווי כניסה מפוענח על ידי 2^n קווי יציאה **לכל היותר**.

ב. לכל יציאה מתאימה מכפלה סטנדרטית.

אם נסתכל על פונקציה של ארבעה משתנים F(A,B,C,D) הרי הצירוף 0101 מייצג את המכפלה הסטנדרטית A'BC'D. אם כניסות המפענח ירכיבו את הצירוף 0101, ערכה של יציאת המפענח המתאימה למכפלה הסטנדרטית A'BC'D יהיה 1.

ג. מהי כניסת האפשור?

כניסת האיפשור היא כניסת בקרה המאפשרת "להפעיל" או "לא להפעיל" מעגל צירופי. (בהתאם לכך המעגל הוא מאופשר או איננו מאופשר.) "הפעלת" מעגל צירופי פירושה שהערכים של יציאות המעגל הם פונקציה של כניסות המעגל.

אם המעגל אינו מאופשר, ערכן של יציאות המעגל קבוע וידוע מראש ללא תלות בכניסותיו.

שאלה 8

שנה את המפענח BCD לעשרוני שבאיור 5.10 כך שהיציאות שלו יהיו כולן 0-ים, כאשר חל צירוף כניסה בלתי-תקף.

שאלה 9

מעגל צירופי מוגדר על ידי שלוש הפונקציות האלה:

$$F_1 = x'y' + xyz'$$
$$F_2 = x'+y$$
$$F_3 = xy + x'y'$$

עצב את המעגל בעזרת מפענח ושערים חיצוניים.

סיים לקרוא את סעיף 5.5.

שאלה 10

בנה את טבלת האמת של מקודד עדיפות אוקטלי לבינרי.
צרף למקודד יציאה אשר תציין אם לפחות אחת הכניסות היא 1. את הטבלה ניתן לרשום ב-9 שורות; חלק מהכניסות יקבלו ערכים אדישים.

סעיף 5.6

קרא את סעיף 5.6.

כל פונקציה בוליאנית ניתן לממש הן באמצעות מפענח והן באמצעות מרבב.
אם רוצים לממש פונקציה באמצעות מפענח, דרוש שער OR. המימוש באמצעות מרבב מסובך יותר. כדי לממש פונקציה של n משתנים דרוש מרבב בגודל 2^{n-1} ל-1.
להלן האלגוריתם למימוש פונקציה בוליאנית באמצעות מרבב:

1. בטא את הפונקציה בצורת סכום מכפלות סטנדרטיות.
2. חבר n-1 ממשתני הפונקציה לקווי הברירה של המרבב תוך שמירה על הסדר שלהם.
3. מצא את הערכים של 2^{n-1} כניסות הנתונים באופן הבא:

3.1 רשום את כל המכפלות הסטנדרטיות של הפונקציה.

3.2 סמן ב-$\surd$ את כל המכפלות הסטנדרטיות המכילות את המשתנה ה-n-י (שלא חובר לקווי הברירה) בצורתו המותגת. (שים לב שמספר המכפלות המסומנות שווה למספר המכפלות הלא מסומנות).

3.3 בנה טבלה במתכונת הזו:
לטבלה שתי שורות ו-2^{n-1} עמודות. סמן את העמודות ב-$I_0, I_1, \ldots, I_{2^{n-1}}$. השורה הראשונה תסומן במשתנה ה-n-י בצורתו המותגת, והשורה השנייה תסומן במשתנה ה-n-י בצורתו הרגילה. עתה בנה את הטבלה:

3.3.1 בשורה הראשונה כתוב לפי הסדר את המכפלות הסטנדרטיות שסומנו ב-$\surd$.
בשורה השנייה כתוב לפי הסדר את המכפלות הסטנדרטיות שלא סומנו ב-$\surd$.

3.3.2 הקף בעיגול את המכפלות הסטנדרטיות המרכיבות את הפונקציה.

3.3.3 עבור על הטבלה עמודה-עמודה:
אם אחת המכפלות הסטנדרטיות שבעמודה מסומנת, רשום תחת העמודה את סימון השורה שהמכפלה הסטנדרטית המסומנת נמצאת בה.
אם שום מכפלה סטנדרטית אינה מסומנת, רשום תחת העמודה 0.
אם שתי המכפלות הסטנדרטיות מסומנות, רשום תחת העמודה 1.

3.3.4 בכניסות המרבב המסומנות ב-$I_0, \ldots, I_{2^{n-1}}$, רשום את הסימונים שתחת עמודות הטבלה באופן שהסימן שתחת עמודה I_j יירשם בכניסת המרבב I_j.

כך ממשים פונקציה של n משתנים על ידי מרבב בעל 2^{n-1} קווי כניסה.

שאלה 11

עצב יחידה אריתמטית עשרונית בעלת שני משתני ברירה - V_1 ו-V_0 ושתי ספרות BCD - A ו-B. היחידה אמורה לבצע ארבע פעולות אריתמטיות התלויות בערכים של משתני הברירה כפי שמתואר בטבלה:

V_1	V_0	פונקציית פלט
0	0	A + (המשלים ל-9 של B)
0	1	A + B
1	0	A +(המשלים ל-10 של B)
1	1	A + 1

השתמש בפונקציות MSI עבור העיצוב. כמו כן הנה כי נתון לך מעגל המשלים ל-9 ספרה בקוד BCD.

שאלה 12

ממש את הפונקציה הבוליאנית שבדוגמה 5.4 בעזרת מרבב 8 ל-1, כאשר A ,B ו-D מחוברים אל קווי הברירה s_2, s_1 ו-s_0 - בהתאמה.

מרבב כפול מורכב משני מרבבים בעלי כניסות איפשור נפרדות וקווי ברירה משותפים.

שאלה 13

בנה מרבב 8 ל-1 באמצעות מרבב 4 ל-1 כפול. השתמש בתרשים מלבני.

סעיף 5.7

קרא את סעיף 5.7.

שאלה 14

הראה שניתן להשתמש ב-ROM בגודל 32×8 למימוש מעגל היוצר ריבוע בינרי של מספר בן 5 סיביות, כאשר $A_0=B_0$ ו-$B_1=0$. מעגל דומה מוצג באיור 5.24(1). סרטט תרשים מלבני ורשום את ארבע הכניסות הראשונות ואת ארבע הכניסות האחרונות שבטבלת האמת של ה-ROM.

שאלה 15

איזה גודל ROM נחוץ לשימושים שלהן?

1. מחבר/מחסר BCD בעל כניסת בקרה לברירה בין חיבור לחיסור.
2. כופל בינרי של שני מספרים בני 4 סיביות.
3. מרבב 4 ל-1 כפול בעל כניסות ברירה משותפות.

סעיף 5.8

כשרוצים לממש פונקציה בעלת צירופים אדישים רבים. השימוש ב-ROM אינו יעיל, מפני שחלק גדול מה-ROM אינו מנוצל. במקרים כאלו כדאי להשתמש ב-PLA.

קרא את סעיף 5.8.

שאלה 16

בנה טבלת תכנות PLA עבור ממיר קוד מ-BCD ל-Excess-3 המוגדר בסעיף 4.5.

סעיף 5.9

קרא את סעיף 5.9.

סיכום פרק 5

מחבר n סיביות בינרי מקבילי הוא פונקציה ספרתית היוצרת את הסכום האריתמטי של שני מספרים בינריים בשיטה מקבילית (כלומר n זוגות הסיביות של שני המחוברים- מחוברים בו זמנית). הפונקציה מורכבת מ-n מחברים מלאים המחוברים זה לזה כאשר נשא היציאה ממחבר מלא אחד מחובר אל נשא הכניסה של המחבר המלא הבא.

חיבור שני מספרים בינריים במקביל מחייב שכל הסיביות המחוברות יהיו זמינות לחישוב בו-זמנית. זמן ההשהיה המרבי במחבר מקבילי הוא הזמן הנדרש לנשא לעבור דרך המחברים המלאים. מאחר שכל סיבית S_i ביציאת הסכום (S) תלויה בנשא הכניסה, הערך של S_i בכל דרגה נתונה במחבר יתייצב רק לאחר שהגיע נשא הכניסה אל אותה הדרגה.

זמן מעבר הנשא מגביל איפוא את מהירות החיבור של שני מספרים באופן מקבילי. קיימות כמה טכניקות שנועדו להקטין את זמן השהיית הנשא במחבר מקבילי. הטכניקה הנפוצה ביותר משתמשת בעיקרון של **נשא צפוי מראש**.

מחבר BCD הוא מעגל המחבר באופן מקבילי שתי ספרות עשרוניות המיוצגות בקוד BCD ויוצר ספרת סכום שאף היא ב-BCD.

מחבר עשרוני הוא מעגל המחבר באופן מקבילי שתי ספרות עשרוניות המיוצגות בקידוד בינרי כלשהו.

מחבר עשרוני מקבילי המחבר n ספרות עשרוניות זקוק ל-n דרגות של מחבר BCD. נשא היציאה מדרגה אחת חייב להיות מחובר לנשא הכניסה של הדרגה הגבוהה הבאה.

משווה גודל הוא מעגל צירופי המשווה שני מספרים, A ו-B וקובע את היחס בין גודליהם. תוצאת ההשוואה מבוטאת בעזרת שלושה משתנים בינריים המציינים אם A>B, A=B, או A<B.

שם המעגל	מספר הכניסות	מספר היציאות	מה מבצע המעגל
מפענח	n כניסות נתונים. תיתכן גם כניסת אפשור.	m יציאות כאשר $m \le 2^n$	בוחר מ-m היציאות של המעגל את היציאה המייצגת את המכפלה הסטנדרטית של n משתני הכניסה.
מפלג	n כניסות ברירה וכניסת נתונים אחת. בסך הכל n+1 כניסות.	m יציאות כאשר $m \le 2^n$	בוחר על פי קווי הברירה את אחת היציאות. יציאה זו תקבל את הערך של כניסת הנתונים.
מקודד	2^n כניסות או פחות.	n יציאות	כל כניסה למקודד מייצגת מכפלה סטנדרטית אחת. ביציאות המקודד נמצא הקידוד הבינרי של המכפלה הסטנדרטית שנבחרה בכניסות. רק כניסה אחת יכולה להיבחר בו-זמנית.
מרבב	2^n כניסות נתונים ו-n קווי ברירה. בסך הכול $n+2^n$ כניסות. תיתכן גם כניסת אפשור.	יציאה אחת	קווי הברירה בוחרים אחת מכניסות הנתונים. היציאה תקבל את ערך הכניסה הנבחרת.

ניתן לממש כל מעגל צירופי בעל n כניסות ו-m יציאות בעזרת מפענח n ל-2^n ו-m שערי OR. לשם כך יש לבטא את הפונקציות הבוליאניות עבור המעגל בצורת סכום של מכפלות סטנדרטיות. המפענח משמש ליצירת 2^n המכפלות הסטנדרטיות של n משתני הכניסה ושערי ה-OR החיצוניים יוצרים את סכומי המכפלות (הדרושים לביטוי הפונקציות הבוליאניות). למרות שניתן, כאמור, לממש כל מעגל צירופי בשיטת המפענח, חובה להשוות את המימוש שהתקבל עם כל המימושים האפשריים האחרים כדי לקבוע מהו הפיתרון הטוב ביותר. (במקרים שבהם למעגל הצירופי יש יציאות רבות וכל פונקצית יציאה מבוטאת בעזרת מספר קטן של מכפלות סטנדרטיות - עשויה שיטת המפענח לספק את המימוש הטוב ביותר).

קווי אפשור מספקים דרך נוחה לחבר שתי אריזות של מעגלים משולבים או יותר כדי להרחיב את הפונקציה הספרתית לפונקציה דומה בעלת מספר גדול יותר של כניסות ויציאות (למשל, ניתן לחבר שני מפענחים 3 ל-8 בעלי כניסות איפשור כדי ליצור מפענח 4 ל-16).

ניתן לממש כל פונקציה בוליאנית בעזרת מרבב 2^n ל-1. אם נתונה פונקציה בוליאנית של n+1 משתנים, ניקח n מהמשתנים הללו ונחברם אל קווי הברירה של המרבב. במשתנה הבודד שנותר נשתמש עבור כניסות המרבב. אם A הוא המשתנה הבודד הזה, כניסות המרבב יהיו A, 'A, 0 או 1.

ROM הוא אמצעי זיכרון שבו מאוחסנת כמות קבועה של מידע בינרי. תחילה חייב המשתמש לציין את המידע הבינרי, ולאחר מכן משובץ המידע ביחידת ה-ROM - כדי ליצור את תבנית החיבורים הפנימית. מרגע שבו נוצרה תבנית עבור ROM היא נשארת קבועה, גם אם זרם החשמל ינותק ויחובר שוב לאחר מכן.

ROM מורכב מ-n קווי כניסה ומ-m קווי-יציאה.

כל צירוף סיביות של משתני הכניסה נקרא **מען**.

מען הוא בעיקרו מספר בינרי המציין את אחת המכפלות הסטנדרטיות של n משתנים.

כל צירוף סיביות היוצא מקווי היציאה נקרא **מלה** (מספר הסיביות במלה שווה למספר קווי היציאה m).

מלת פלט תיבחר על ידי מען יחיד, ומאחר שקיימים ב-ROM 2^n מענים שונים, יש 2^n מלים שונות האמורות להיות מאוחסנות ביחידת ROM.

המלה המתקבלת בקווי היציאה בכל זמן נתון תלויה בערך המען המוזן אל קווי-הכניסה. גודל ה-ROM הוא $\underbrace{m}_{\text{גודל מלה}} \times \underbrace{2^n}_{\text{מספר המלים}}$.

ה-ROM הוא יחידה המממשת כל מעגל צירופי.

מימוש מעגל צירופי באמצעות ROM נעשה באופן הבא: תחילה אנו קובעים את גודל ה-ROM הנדרש על פי מספר הכניסות והיציאות שבמעגל. לאחר מכן עלינו לבנות את טבלת האמת לתכנות ה-ROM.

ה-0-ים (או ה-1-ים) שבפונקציות היציאה של טבלת האמת מציינים ישירות את המגשרים שיש להסיר כדי ליצור את המעגל הצירופי בצורת סכום של מכפלות סטנדרטיות.

את המסלולים הנחוצים ב-ROM ניתן לתכנת בשני אופנים. הראשון נקרא **תכנות על ידי מיסוך** השני נקרא **PROM**.

כל הנוהלים לתכנות ה-ROM הם נוהלי חומרה (למרות השימוש במלה "תכנות") והם בלתי-הפיכים - מהרגע שבו נתבצע התכנות אי-אפשר לשנות את התבנית שנקבעה.

מעגל צירופי עשוי להכיל לעתים צירופים אדישים. במקרים שבהם מספר הצירופים האדישים הוא רב חסכוני יותר להשתמש במערך לוגי הניתן לתכנות - **PLA**.
להבדיל מ-ROM, אין ה-PLA מספק פענוח מלא של המשתנים ואינו מייצר את כל המכפלות הסטנדרטיות. כאשר מממשים מעגל צירופי באמצעות PLA, יש לעשות הכל כדי להפחית (על ידי פישוט) את מספר גורמי המכפלה השונים, מכיוון של-PLA יש מספר סופי של גורמי AND. מספר הליטרלים שבגורם אינו חשוב, מכיוון שעומדים לרשותנו כל משתני הכניסה.

בפרק זה הכרנו כמה מעגלי MSI ו-LSI. מעגלים אלו קיימים בשוק, וניתן לשלבם בתוך מעגלים צירופיים גדולים יותר. יש לזכור שמעגלי ה-MSI וה-LSI בנויים מאותם שערים לוגיים בסיסיים: OR, AND ומהפכים.
באופן עקרוני אפשר לוותר עליהם ולעצב מעגלים צירופיים מהשערים הלוגיים הבסיסיים. בכל זאת משתמשים במעגלי ה-MSI וה-LSI, ויש לכך כמה סיבות:
א. השימוש בהם מקל על עיצוב המעגלים, מכיוון שניתן לעצב מעגל ברמה של דיאגרמת בלוקים ואין צורך לרדת לרמה של שערים.
ב. קל יותר לנתח מעגלים הבנויים מרכיבים סטנדרטיים.
ג. רכיבי MSI ו-LSI זמינים בשוק, ועיצוב מעגל בעזרתם מקטין את עלות החומרה.

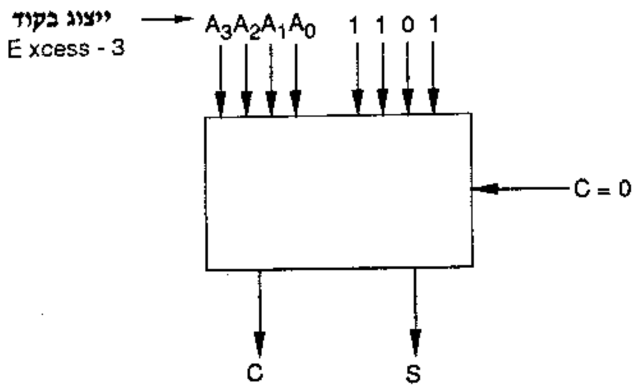
תשובות לשאלות פרק 5

תשובה 1

ראינו בספר הלימוד שיש להוסיף 0011 בינרי כדי לעבור מקוד BCD לקוד Excess-3. לפיכך, אם נסמן את ספרות הקוד Excess-3 ב-$A_3A_2A_1A_0$ ואת ספרות BCD ב-$B_3B_2B_1B_0$ הרי שקל לקבוע את מימוש הפונקציה הדרושה באמצעות מחבר מלא.

$$B_2B_1B_1B_0 = A_3A_2A_1A_0 - 3_{10} = A_3A_2A_1A_0 + (\text{המשלים ל-2 של } 3_{10})$$
$$= A_3A_2A_1A_0 + 1101$$

הדיאגרמה הלוגית תיראה כך:



תשובה 2

פעולת חיסור ניתן לממש על ידי פעולת חיבור בין המחוסר לבין המשלים ל-2 של המחסר.

פעולת השלמה ל-2 פירושה: א. הפיכת 0-ים ל-1-ים ולהפך;

ב. הוספת 1 למספר שהתקבל בשלב א'.

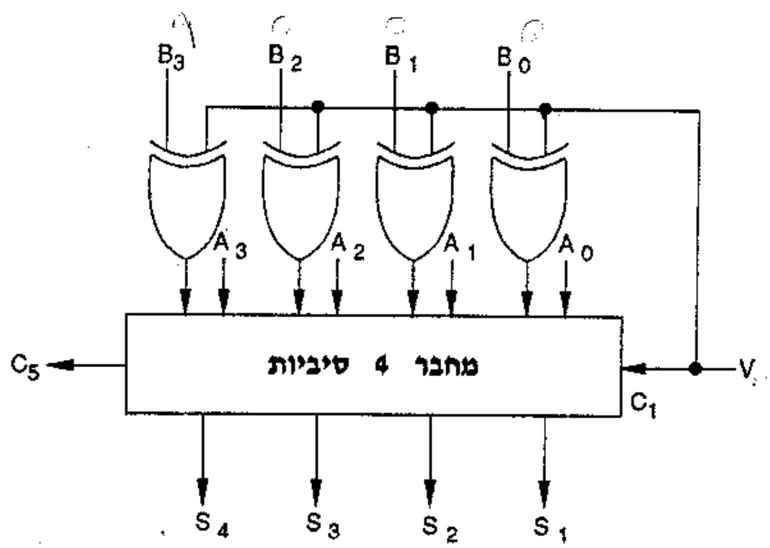
נראה איך ניתן לממש את שני השלבים בעזרת ארבעה שערי exclusive-OR ומשתנה כניסה V.

אם V=0, הרי יש לבצע פעולת חיבור, ולכן אין צורך לשנות את המספרים הנתונים. אם V=1 יש לבצע השלמה ל-2.

לפני-כן נבחן את טבלת האמת של פונקצית ה-XOR: $X \oplus Y = F$

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

נניח שבמקרה שלנו $x=V$ ו-y הוא סיבית של המחוסר. מה נקבל מהפעולה $V \oplus y$? כאשר $V=0$ ‏,$F=y$, וכאשר $V=1$ ‏$F=y'$. נוכל להיעזר בשערי ה-XOR שבכניסותיהם סיבית ה-V וסיבית מחוסר כדי לקבל את המשלים ל-1 של המחוסר. זהו השלב הראשון בפעולת ההשלמה ל-2. את השלב השני נייּשם באופן שכניסת ה-C (הנשא הנכנס) תקבל את ערכו של V. אם $V=1$ אז למספרים המחוברים ייווסף 1.
נסמן מספר אחד ב-$A_3A_2A_1A_0$ ואת המספר שמחברים או מחסרים ב-$B_3B_2B_1B_0$ והדיאגרמה הלוגית היא זו:



תשובה 3

ראינו שהמשוואה לקבלת הנשא ה-i היא $C_{i+1} = G_i + P_iC_i$ כאשר $G_i = A_iB_i$ ו- $P_i = A_i \oplus B_i$. לכן עבור i=5 ‏$C_5 = G_4 + P_4C_4$.
כאשר הוכחנו ש- $C_4 = G_3 + P_3G_2 + P_3P_2G_1 + P_3P_2P_1C_1$.
ולכן: $C_5 = G_4 + P_4(G_3 + P_3G_2 + P_3P_2G_1 + P_3P_2P_1C_1)$

$$= G_4 + P_4G_3 + P_4P_3G_2 + P_4P_3P_2G_1 + P_4P_3P_2P_1C_1$$

תשובה 4

1. כדי לממש את AND-OR-INVERT של פונקציה יש לבנות את מפת קרנו ולמצוא מתוכה את 'F כסכום של מכפלות. לשם כך נסתכל על המשבצות המכילות 0.

$C_{i+1} = G_i + P_iC_i$

נבנה את מפת קרנו:

כאשר $G_i=1$ אז $C_{i+1}=1$.

כאשר גם $P_i=1$ וגם $C_i=1$ אז $C_{i+1}=1$.

בכל שאר המקרים $C_{i+1}=0$

P_i

	$\boxed{0}$	0	1	$\boxed{0}$
G_i	1	1	1	1

C_i

$$C_{i+1}' = G_i'P_i' + G_i'C_i'$$
$$C_{i+1} = (C_{i+1}')' = (G_i'P_i' + G_i'C_i')'$$

2. בחלק הקודם הוכחנו את השוויון $C_{i+1} = (G_i'P_i' + G_i'C_i')'$.
נשתמש בו ונקבל:

$$C_2 = (G_1'P_1' + G_1'C_1')'$$
$$C_3 = (G_2'P_2' + G_2'C_2')' = [G_2'P_2' + G_2'\underbrace{(G_1'P_1' + G_1'C_1')}_{C_2'}]' =$$
$$= (G_2'P_2' + G_2'G_1'P_1' + G_2'G_1'C_1')'$$
$$C_4 = (G_3'P_3' + G_3'C_3')' =$$
$$= [G_3'P_3' + G_3'(G_2'P_2' + G_2'G_1'P_1' + G_2'G_1'C_1')]'$$
$$= (G_3'P_3' + G_3'G_2'G_1'P_1' + G_3'G_2'G_1'C_1')'$$

תשובה 5

במחבר מספרים בקוד BCD בעל 9 כניסות מספר אפשרויות הקלט הוא $2^9=512$ (כלומר, בטבלת האמת יש 512 שורות). כמה מאפשרויות אלו ננצל? כל אחד ממספרי הקלט יכול להיות בתחום 0-9 (כלומר 10 ערכים שונים) ולכן יש $10\cdot10=100$ צירופים עבור שני מספרי קלט. כניסת הנשא יכולה לקבל שני ערכים, ולכן בסך הכול יש $100\cdot2=200$ אפשרויות. מכאן שיש $512-200=312$ כניסות אדישות.

תשובה 6

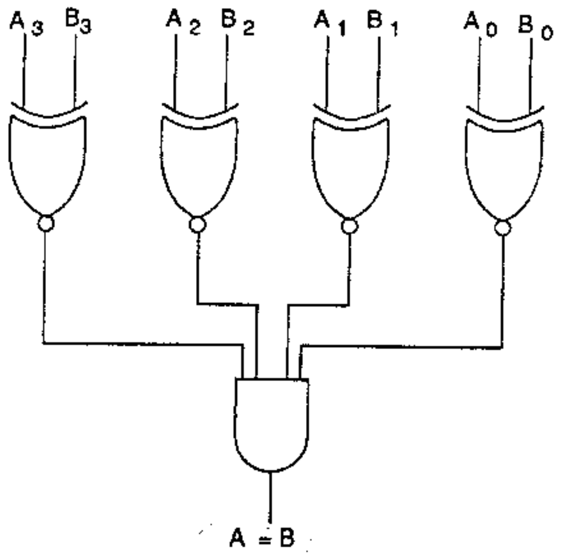
שני מספרים בינריים שווים, אם כל סיביותיהם שוות בהתאמה; כלומר אם $A_i=B_i$, $0\le i\le3$.

כדי לגלות שוויון בין מספרים נשתמש בשער ה-exclusive-NOR שהוא שער ה-exclusive-OR עם מהפך ביציאה. היציאה של שער ה-exclusive-OR היא 1 אם

ורק אם שני המספרים שבכניסותיו שונים. אם יש ביציאה מהפך, היציאה היא 1 אם ורק אם המספרים שבכניסות שווים.

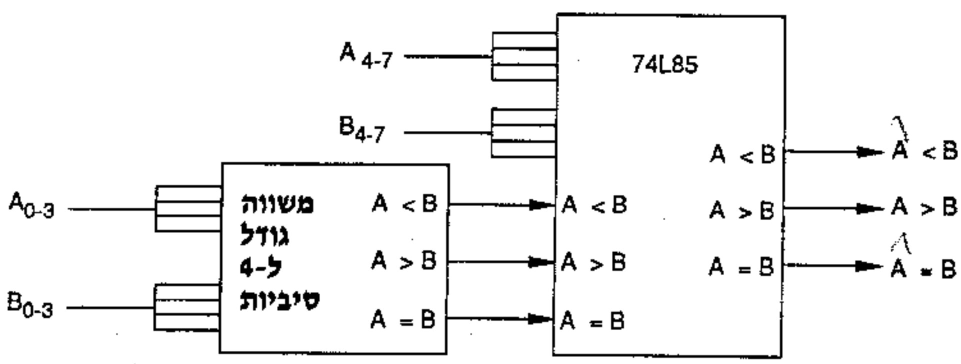
אם כל היציאות של שערי exclusive-NOR יהיו שוות ל-1, אז $A_i=B_i$, $0\le i\le 3$, ולכן $A=B$.

המעגל הלוגי ייראה כך:



תשובה 7

אם מחברים בטור שני משווי גודל, ניתן להשוות בין מספרים בעלי יותר מארבע סיביות. ראשית נראה את הדיאגרמה הלוגית עבור משווה גודל של שני מספרים בני 8 סיביות כל אחד.



מתי $A=B$? כאשר גם $A_i=B_i$, $0\le i\le 3$, וגם $A_i=B_i$, $4\le i\le 7$.

לכן היציאה $A=B$ מהמשווה השני תקבל ערך 1, כאשר היציאה $A=B$ מהמשווה הראשון שווה ל-1 וגם ארבע הסיביות המשמעותיות של A שוות ל-4 הסיביות המשמעותיות של B.

$A<B$ בשני המקרים האלה:

1. ארבע הסיביות היותר משמעותיות של A ו-B שוות ו- $B_3B_2B_1B_0 > A_3A_2A_1A_0$;
2. $B_7B_6B_5B_4 > A_7A_6A_5A_4$; ואין חשיבות לסיביות המשמעותיות פחות.

הפלט $A<B$ של המעגל 74L85 אכן שווה ל-1 אם קרה אחד ממקרים אלו.
ניתוח האפשרות $A>B$ דומה לניתוח האפשרות $A<B$ בשינוי סימן.

תשובה 8

איור 5.9 מציג מפת קרנו של המפענח מקוד BCD לעשרוני. ה-X-ים שבמפה מציינים צירופים אדישים (קלט לא תקף במקרה זה). אם נרצה שבמקרים אלו הפונקציה תקבל ערך 0, נחליף את ה-X-ים ב-0-ים. מפת קרנו המתוקנת תיראה כך:

wx \ yz	00	01	11	10
00	D_0	D_1	D_3	D_2
01	D_4	D_5	D_7	D_6
11	0	0	0	0
10	D_8	D_9	0	0

$D_0 = w'x'y'z'$ $\quad$ $D_5 = w'xy'z$

$D_1 = w'x'y'z$ $\quad$ $D_6 = w'xyz'$

$D_2 = w'x'yz'$ $\quad$ $D_7 = w'xyz$

$D_3 = w'x'yz$ $\quad$ $D_8 = wx'y'z'$

$D_4 = w'xy'z'$ $\quad$ $D_9 = wx'y'z$

על ידי פונקציות אלו ניתן לממש את המשווה.

תשובה 9

כדי לעצב מעגל צירופי בעזרת מפענח יש לרשום את פונקציות היציאה כסכום של מכפלות סטנדרטיות. במקרה שלפנינו יש שלושה משתני כניסה: x,y,z.

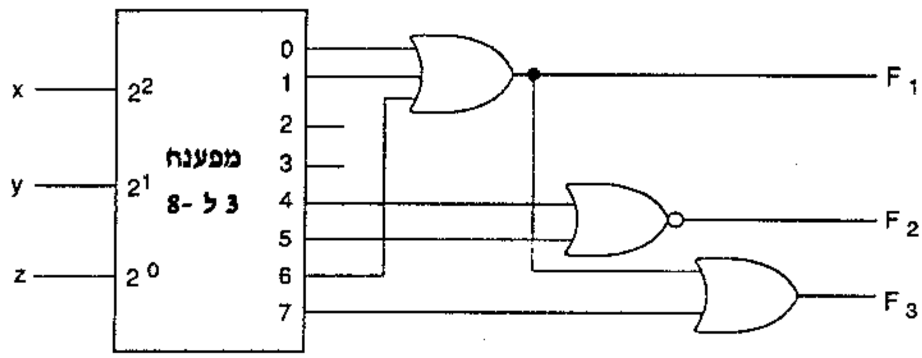
$$F_1 = x'y' + xyz' = x'y'(z+z') + xyz' = x'y'z' + x'y'z + xyz' = \Sigma(0,1,6)$$

$$F_2 = x' + y = x'(y+y')(z+z') + y(x+x')(z+z')$$
$$= x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + xyz + x'yz + xyz' + x'yz'$$
$$= \Sigma(0,1,2,3,6,7)$$

$$F_3 = xy + x'y' = xy(z+z') + x'y'(z+z')$$
$$= xyz + xyz' + x'y'z + x'y'z' = \Sigma(0,1,6,7)$$

נפשט את המעגל (כלומר ננסה להפחית את מספר השערים בו).

פישוט ראשון: $F_3 = F_1 + m_7$. פישוט שני: $F_2' = \Sigma(4,5)$.
והמעגל עצמו ייראה כך:



תשובה 10

במקודד עדיפות - אם יותר מכניסה אחת שווה ל-1, לוקחים בחשבון את הכניסה בעלת המספר הסידורי הנמוך ביותר. בטבלת האמת של מקודד עדיפות נוסיף על העמודות עבור סיביות הקלט והפלט עמודה E שתציין אם הייתה כניסה בעלת ערך של 1.

D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	x y z E
0	0	0	0	0	0	0	0	0 0 0 0
1	0	0	0	0	0	0	0	0 0 0 1
X	1	0	0	0	0	0	0	0 0 1 1
X	X	1	0	0	0	0	0	0 1 0 1
X	X	X	1	0	0	0	0	0 1 1 1
X	X	X	X	1	0	0	0	1 0 0 1
X	X	X	X	X	1	0	0	1 0 1 1
X	X	X	X	X	X	1	0	1 1 0 1
X	X	X	X	X	X	X	1	1 1 1 1

תשובה 11

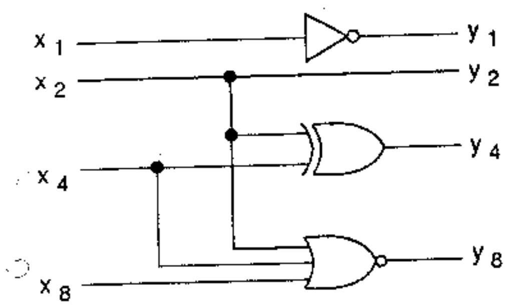
כדי לעצב מעגל זה נשתמש ביחידות הבאות:

1. מרבב (עיצובו מתואר באיור 5.17)
2. מחבר BCD (עיצובו מתואר באיור 5.6)
3. מעגל צירופי היוצר את המשלים ל-9 של סיפרה המיוצגת בקוד BCD.

לא נפרט את עיצובו של מעגל זה, מכיוון שנוהל העיצוב כבר נלמד בפרק 4.
הביטויים הבוליאניים עבור פונקציות היציאה y_1, y_2, y_4, y_8 הם אלה (ה-x_i-ים הם הכניסות למעגל):

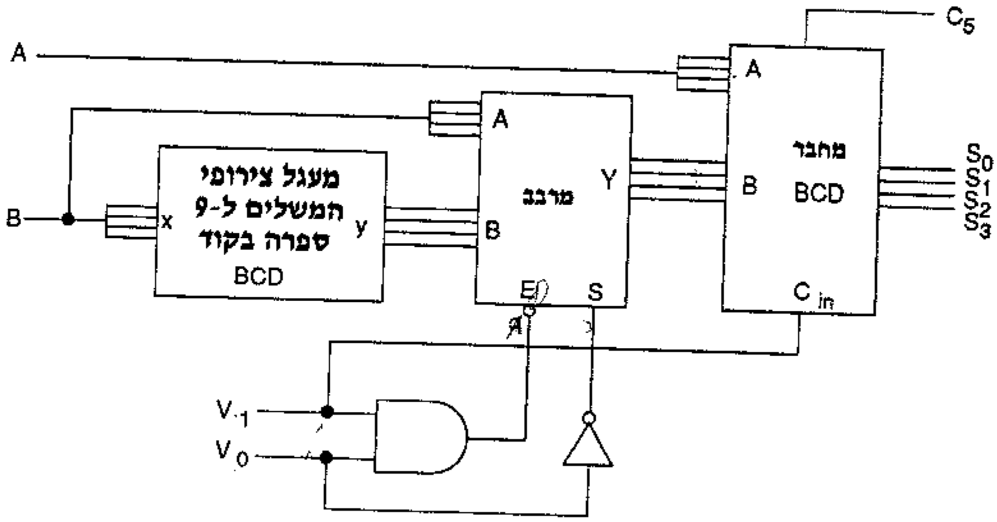
$$y_1 = x_1'$$
$$y_2 = x_2$$
$$y_4 = x_2 \oplus x_4$$
$$y_8 = (x_2+x_4+x_8)'$$

המעגל הצירופי ייראה כך:



עתה נעצב את המעגל הצירופי הנדרש.
פעולות תיבור ניתן לממש בעזרת המחבר העשרוני. אחת מכניסות המחבר תהיה המספר A. הכניסה השנייה מוגדרת על ידי צירוף הסיביות V_0 ו-V_1.
כדי לקבל את הכניסה השנייה נשתמש במרבב.
למרבב יש שתי קבוצות של קווי כניסה. קווי היציאה יקבלו את הערך של אחת מקבוצות קווי הכניסה; את הקבוצה נבחר על פי קווי הברירה E ו-S.
במקרה שלנו ניתן לראות, שבכניסה השנייה למחבר צריך להיות המספר B או המשלים ל-9. את המשלים ל-10 נקבל על ידי מציאת המשלים ל-9 והוספת 1 דרך כניסת הנשא. כאשר $V_0=V_1=1$, הכניסה השנייה למחבר צריכה להיות 0 וכניסת הנשא 1.

בהתחשב בזה כניסות המרבב יהיו B והמשלים ל-9 של B (נקבל אותו מהמעגל הצירופי שעיצבנו בתחילת התשובה).
נקבל את המעגל הצירופי הזה:



תשובה 12

הפונקציה הנתונה היא $F = \Sigma(0,1,3,4,8,9,15)$.

אם המשתנים A, B ו-D יהיו קשורים לקווי הברירה, אז קווי הכניסה יוכלו לקבל את אחד הערכים 0,1,C,C'.

מספרי המכפלות שבהן C=1 מסומנות ב-√.

0 0 0 0	
0 0 0 1	
0 0 1 0	√
0 0 1 1	√
0 1 0 0	
0 1 0 1	
0 1 1 0	√
0 1 1 1	√
1 0 0 0	
1 0 0 1	
1 0 1 0	√
1 0 1 1	√
1 1 0 0	
1 1 0 1	
1 1 1 0	√
1 1 1 1	√

נבנה את טבלת המימוש:

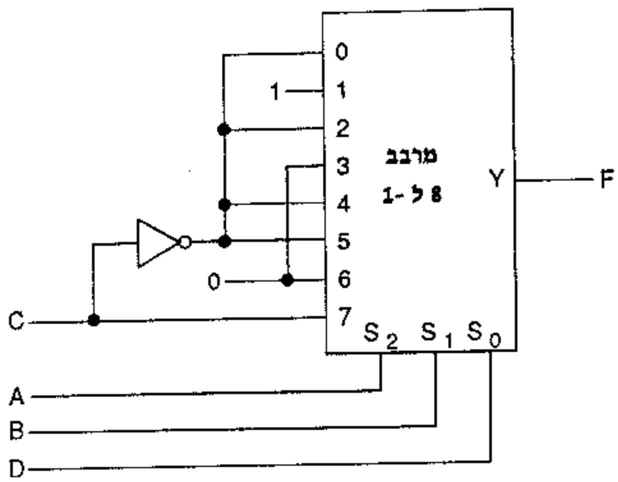
לטבלה זו שתי שורות, המסומנות ב-C' וב-C:

ב-C' יירשמו מספרי המכפלות שבהן C=0; ב-C יירשמו מספרי המכפלות שבהן C=1.

מעל לכל העמודות בטבלה נרשום את מספרי הכניסות למפענח.

	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
C'	0	1	4	5	8	9	12	13
C	2	3	6	7	10	11	14	15
	C'	1	C'	0	C'	C'	0	C

הקפנו בעיגול את המכפלות המרכיבות את הפונקציה. עתה נבחן כל עמודה בטבלה.
אם רק המספר בשורה של C' מוקף בעיגול - הכניסה הרשומה מעל לעמודה תקבל ערך C'. אם רק המספר בשורה של C מוקף בעיגול - הכניסה תקבל ערך C.
אם שני המספרים מסומנים - ערך הכניסה 1. אם שום מספר אינו מסומן - ערך הכניסה 0. ערכי הכניסות רשומים מתחת לטבלה.
המימוש ייראה כך:

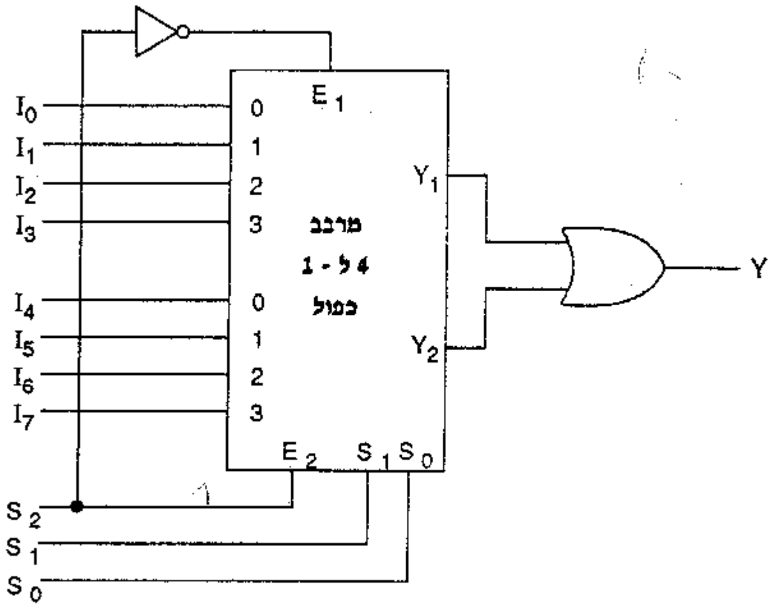


תשובה 13

מרבב כפול מורכב, כאמור, משני מרבבים 4 ל-1 (בעלי כניסות אפשור נפרדות וקווי ברירה משותפים). כדי להפוך מרבב 4 ל-1 כפול למרבב 8 ל-1 עלינו לבצע את הפעולות הבאות:

1. ליצור משתי יציאות המעגל יציאה אחת. ניתן לעשות זאת בעזרת שער OR (כאשר אחת מיציאות המרבבים 4 ל-1 שווה ל-1, גם יציאת המרבב 8 ל-1 שווה ל-1).
2. להפעיל בכל פעם מרבב 4 ל-1 אחד בלבד. ניתן לעשות זאת, אם נאפשר מרבב אחד בכל פעם. נבחר את אחד המשתנים של הפונקציה בתור בורר בין המרבבים. את המשתנה נחבר לכניסת אפשור אחת, ואת אותו המשתנה נחבר דרך שער מהפך לכניסת האפשור של המרבב האחר. כאשר המשתנה יהיה שווה ל-1, מרבב אחד יאופשר, וכאשר הוא יהיה שווה ל-0 - המרבב האחר יאופשר.

להלן הדיאגרמה הלוגית:



שים לב ש-S_1S_0 בוררים בין הכניסות של המרבב המאופשר בצורה נכונה.

תשובה 14

המספר הגדול ביותר שניתן להציג בעזרת חמש סיביות הוא $11111_2=31_{10}$, וריבועו $31_{10}\cdot 31_{10}=961_{10}=1111000001_2$.

מכיוון שעלינו לאחסן ב-ROM 32 מספרים (0 עד 31), ה-ROM צריך להכיל 32 מענים. מספר הסיביות בכל מען צריך להספיק כדי לאחסן את המספר הגדול ביותר (קרי $1111000001_2=961_{10}$). לכאורה יש צורך בעשר סיביות, אך נוכל להסתפק בשמונה, משום שאת שתי הסיביות הכי פחות משמעותיות ניתן לקבל ישירות מהכניסות ל-ROM והקבוע 0, ולכן אין צורך לאחסן אותן. מכאן שבכל מען יש שמונה סיביות. גודל ה-ROM, אם כן, הוא 32×8.

בכל מען יאוחסנו שמונה הסיביות המשמעותיות ביותר של ריבוע המען:

במען 00000 יאוחסן 00000000 ($B_0=0$, $B_1=0$) כי $0^2=0$.

במען 00001 יאוחסן 00000000 ($B_0=1$, $B_1=0$) כי $1^2=1$.

במען 00010 יאוחסן 00000001 ($B_0=0$, $B_1=0$) כי $2^2=4$.

במען 00011 יאוחסן 00000010 ($B_0=1$, $B_1=0$) כי $3^2=9$.

.

.

.

במען $11100_2=28_{10}$ יאוחסן 11000100 ($B_0=0$, $B_1=0$) כי $28^2=784$.

במען $11101_2=29_{10}$ יאוחסן 11010010 ($B_0=1$, $B_1=0$) כי $29^2=841$.

במען $11110_2=30_{10}$ יאוחסן 11100001 ($B_0=0$, $B_1=0$) כי $30^2=900$.

במען $11111_2=31_{10}$ יאוחסן 11110000 ($B_0=1$, $B_1=0$) כי $31^2=961$.

תשובה 15

1. מספר המענים הדרוש הוא 2^{10} מכיוון של-ROM יש 10 כניסות (שני מספרים בעלי ארבע סיביות כל אחד, סיבית לנשא/השאלה וסיבית בקרה הקובעת אם לחבר או לחסר).

   התוצאה הגבוהה ביותר שניתן לקבל בחיבור שני המספרים כשיש נשא היא $1001+1001+1=10011$ בבסיס 2. לכן צריך 5 יציאות. מכאן שגודל ה-ROM הוא $2^{10}\times5=1024\times5$.

2. מספר המענים הדרוש הוא 2^8, מכיוון של-ROM יש שמונה כניסות (שני מספרים בעלי ארבע סיביות כל אחד).

   התוצאה הגבוהה ביותר שניתן לקבל בכפל של שני מספרים היא $1111\times1111=11100001$ בבסיס 2. לכן צריך 8 יציאות. מכאן שגודל ה-ROM הוא $2^8\times8=256\times8$.

3. מספר הכניסות למרבב 4 ל-1 כפול הוא 10 (4 כניסות $\times$ 2 + 2 קווי ברירה).
   לכן מספר המענים הוא 2^{10}.

   לכל אחד משני המרבבים המרכיבים את המרבב הכפול יש יציאה אחת, ולכן למעגל יש שתי יציאות. מכאן שבכל מען יש שתי סיביות.
   גודל ה-ROM הוא $2^{10}\times2 = 1024\times2$.

תשובה 16

באיור 4.7 נמצאים הביטויים הבוליאניים עבור יציאות ממיר קוד מ-BCD ל-Excess-3, ואלו הם:

$w = A+BC+BD \qquad x = B'C+B'D+BC'D' \qquad y = CD+C'D' \qquad z = D'$

אם תבדוק תקבל ש-

$w' = A'B'+A'C'D' \qquad x' = B'C'D'+BC+BD \qquad y' = C'D+CD' \qquad z' = D$

נבחר את w,x',y,z ליציאות של שער ה-OR (בחירה זו נובעת מהעובדה של-w ול-x' יש שני גורמים משותפים). להלן טבלת תכנות ה-PLA:

גורם מכפלה		כניסות A B C D	יציאות w x y z	
A	1	1 - - -	1 - - -	
BC	2	- 1 1 -	1 1 - -	
BD	3	- 1 - 1	1 1 - -	
B'C'D'	4	- 0 0 0	- 1 - -	
CD	5	- - 1 1	- - 1 -	
C'D'	6	- - 0 0	- - 1 -	
D'	7	- - - 0	- - - 1	
			T C T T	T/C

פרק 6

דלגלגים

סעיף 6.1

קרא בסעיף 6.1 את שתי הפסקאות הראשונות (עד איור 6.1).

נמחיש את ההבדל שבין מערכת סדרתית למערכת צירופית בעזרת שני מנעולים: המנעול האחד(א) נפוץ בתיקי מנהלים, והמנעול האחר(ב) נפוץ בכספות, למשל. נוכל לפתוח את מנעול א, אם ניצור צירוף מספרי מסוים אשר נקבע מראש. כלומר, המנעול פועל לפי עקרון הפעולה של מערכת צירופית. יציאת המנעול (האם הוא פתוח או נעול) ברגע מסוים תלויה בכניסותיו (מצב גלגלי הספרות) באותו רגע - ובהן בלבד.

כדי לפתוח את מנעול ב' יש לסובב את הגלגל שלוש פעמים רצופות - בכל סיבוב עד מספר קבוע מראש. כלומר, ניתן לפתוח את המנעול, רק אם הגלגל עבר סדרה של מספרים קבועים מראש. יציאת המנעול - בכל רגע - תלויה לא רק במספר שבכניסתו, אלא גם בשני המספרים הקודמים שהופיעו בכניסתו. במנעול כזה צריכים להיות שני חלקים: חלק אחד - צירופי - תפקידו לבדוק אם המספר בכניסה ברגע מסוים הוא נכון; והחלק האחר - תפקידו לזכור את מצב המנעול. באופן עקרוני ניתן להפריד כל מעגל סדרתי לשני חלקים: החלק הראשון הוא מעגל צירופי, והחלק האחר בנוי מיחידות זיכרון (ראה איור 6.1).

סיים לקרוא את הסעיף.

סעיף 6.2

קרא בסעיף 6.2 את התת-סעיף "מעגל דלגלג בסיסי".

הדלגלג הבסיסי מגיב בכל זמן לכל שינוי בכניסותיו (R ו-S) על פי טבלת האמת (בלי תלות בזמן שהשינוי מתרחש), ולכן הוא דלגלג אסינכרוני. מכאן והלאה נעסוק בדלגלגים סינכרוניים, כלומר בדלגלגים מתוזמנים.

כדי להפוך את הדלגלג הבסיסי לדלגלג סינכרוני יש להוסיף לדלגלג הבסיסי כניסה שתפקידה לפקח על פעולת הדלגלג באופן שכניסותיו ישפיעו על מצבו רק בזמנים מסוימים (בזמנים שאין הכניסות יכולות להשפיע ישמור הדלגלג על מצבו הקודם).

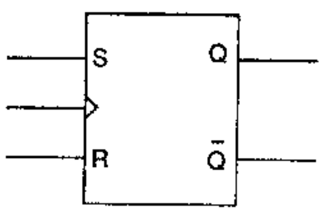
כניסה זו יכולה להיות כניסת אפשור או כניסת שעון (דופק שעון).

אנו נדון בדלגלגים מבוקרי-שעון, כלומר בדלגלגים שהכניסה המפקחת על פעולתם היא דופק שעון.

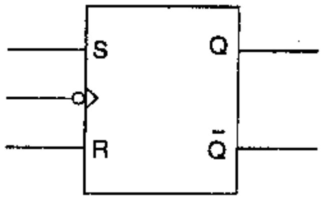
קרא את התת-סעיף "דלגלג RS מבוקר-שעון".

שים לב שבשני הדלגלגים מסוג RS - הבסיסי והמבוקר-שעון יש כניסות R ו-S, אך פעולות הכניסות הללו אינן שוות בשני הדלגלגים: הכניסות R ו-S נכנסות "ישירות" לדלגלג הבסיסי כאשר הוא עומד בפני עצמו, אך אינן נכנסות "ישירות" לדלגלג הבסיסי שהוא "לב" הדלגלג מבוקר-השעון.
כאשר מתרחש מעבר בדופק שעון הכניסה, הדלגלג RS המבוקר-שעון פועל כדלגלג RS בסיסי; ולא - הדלגלג שומר על מצבו הקודם, בלי תלות בצירוף הכניסות R ו-S.
שים לב שאם CP=R=S=1, הרי מתקבל מצב שבו Q=Q'=0, ואולם ברגע ש-CP ישתנה ל-0 ייווצר מצב לא ברור: Q ו-'Q ישתנו באופן בלתי-מבוקר בין הערכים 0,0 ל-1,1, עד שבמקרה אחת היציאות תקדים את האחרת; נקבל באופן מקרי את אחד משני המצבים האלה: Q'=1, Q=0 או Q'=0, Q=1.
המשולש הקטן המופיע בחלק (2) של איור 6.4 מציין שהדלגלג מגיב למעבר חיובי בדופק שעון הכניסה - מרמה 0 לרמה 1 (דהיינו מגיב לעליית דופק השעון). כלומר, מצב הדלגלג משתנה בעקבות עליית דופק השעון (מצב הדלגלג אינו משתנה ברגע שערך השעון עולה, אלא לאחר השהיה מסוימת).
משולש בעל עיגול (היפוך) מציין שהדלגלג מגיב למעבר שלילי בדופק השעון - מרמה 1 לרמה 0 (דהיינו מגיב לירידתו).
סימונים אלה תקפים כמובן לא רק לדלגלג RS, אלא לכל דלגלג.

א. דלגלג RS מגיב לעליית דופק השעון (למעבר חיובי).



ב. דלגלג RS מגיב לירידת דופק השעון (למעבר שלילי).



בניגוד לתגובת הדלגלג **למעבר** בדופק השעון תיתכן תגובה **לרמה** של השעון; כלומר, דרוש משך זמן מינימלי שהשעון יהיה ברמה 1, כדי שמצב הדלגלג ישתנה.

שאלה 1 3

בנה דיאגרמה לוגית של דלגלג RS מבוקר-שעון הבנוי מארבעה שערי NAND.

קרא את התת-סעיף "דלגלג D".

דלגלג RS יכול להגיב בשלושה אופנים חוקיים לפי ערכי כניסותיו (R ו-S):
1. שמירת מצב
2. מצב set ‏(Q=1)
3. מצב reset ‏(Q=0).

פעמים רבות מספיק דלגלג בעל שני אופני פעולה בלבד: set ו-reset. לדלגלג כזה מספיקה כניסה אחת. על פי הרמה הלוגית (0 או 1) בכניסה זו ייקבע מצב הדלגלג, כלומר ייקבע ערך יציאתו. דלגלג כזה נקרא דלגלג מסוג D.
פעולתו של דלגלג D מבוקר-שעון שווה לפעולתו של דלגלג RS מבוקר-שעון שבו מתקיים R=S'.
כל עוד CP=0, הערך האחרון שהיה בדלגלג נשמר. ערך זה נשמר (בלי תלות בשינויים ב-D) עד אשר CP=1. כלומר: ברגע ש-CP יורד ל-0, למעשה מתבצעת בתוך הדלגלג **נעילה** של הנתון האחרון שהיה ב-D. לכן דלגלג זה נקרא גם נועל D מבוקר.

שאלה 2 4

בנה דיאגרמה לוגית של דלגלג D מבוקר-שעון הבנוי משערי AND ו-NOR.

שאלה 3

הראה שניתן לבטל שער אחד בדלגלג D המבוקר-שעון שבאיור 6.5(1).

קרא את התת-סעיף "דלגלג JK".

נבהיר בעיה שאולי אתה מתלבט בה כעת. נניח שמצב הדלגלג הוא Q=1 (Q'=0), ונניח שהקלט הוא K=1, J=0, ומגיע דופק שעון (CP=1). אז יציאת שער ה-AND העליון היא 1, ולכן יציאת שער ה-NOR העליון היא 0 וכך נהפך Q ל-0.

אבל עקב כך אחת מכניסות שער ה-AND העליון אינה 1 עוד. אם המעגל מתוזמן היטב, אין הדבר מהווה בעיה. אמנם יציאת שער ה-AND העליון היא 0, אבל בינתיים הפך 'Q ל-1, ולכן יציאת שער ה-NOR העליון נשארת 0. אם המעגל אינו מתוזמן היטב, עלולה להיווצר בעיה; Q עלול להפוך שוב ל-1.

שאלה 4 5

דלגלג 'JK הוא דלגלג JK שיש לו מהפך בין הכניסה החיצונית 'K לבין הכניסה הפנימית K.

1. בנה את הטבלה האופיינית של הדלגלג 'JK.
2. מצא את המשוואה האופיינית שלו.
3. הראה שאיחוד שתי הכניסות החיצוניות לכניסה אחת (J=K') יוצר דלגלג D.

קרא את התת-סעיף "דלגלג T".

סעיף 6.3

קרא את סעיף 6.3 עד התת-סעיף "דלגלג אדון-עבד" - לא כולל.

כדי שמערכת סדרתית תפעל כשורה, כניסות המערכת צריכות להשפיע על מצב הדלגלג (לפי הפונקציה הבוליאנית שהמערכת הצירופית ממשת) בפרק הזמן שערך כניסת השעון הוא 1.

מה צריך להיות פרק הזמן שערך השעון הוא 1, כדי שדרישה זו תתקיים?

נניח שפרק הזמן שערך השעון הוא 1 הנו ארוך (המשמעות של "ארוך" בהקשר זה תובהר בהמשך). כלומר: פרק הזמן שהדלגלג רגיש לכניסותיו הוא ארוך. בהנחה זו תתרחש התופעה שלהלן:

כניסות הדלגלג נקבעות לפי הפונקציה הבוליאנית שבמערכת הצירופית. ערך הפונקציה תלוי בכניסות המערכת ובמצבו הנוכחי של הדלגלג. בפרק הזמן שערך השעון הוא 1 כניסותיו של הדלגלג משפיעות על מצבו. מצב הדלגלג יתעדכן אפוא על פי הערך בכניסותיו. שוב תחושב במערכת הצירופית הפונקציה הבוליאנית המתאימה, שתקבע ערכים חדשים בכניסות הדלגלג (לפי מצבו החדש של הדלגלג). הדלגלג עדיין רגיש לכניסותיו, כי הנחנו שפרק הזמן שערך השעון הוא 1 - ארוך, ולכן שוב ישתנה מצבו של הדלגלג וחוזר חלילה עד לסוף פרק הזמן שערך השעון הוא 1. (זוהי תופעת המעבר החוזר ונשנה.) אסור אפוא שפרק הזמן הזה יהיה ארוך מדי, כי אם

זמן ההשהיה של הדלגלגים + זמן ההשהיה של המערכת הצירופית > פרק הזמן שערך השעון הוא 1 = $t_w(1)$

אז המערכת אינה פועלת כשורה.

שים לב, זמן ההשהיה של דלגלג הוא פרק הזמן העובר מהרגע שמתרחש מעבר בדופק השעון (הכוונה למעבר המאפשר שינוי ביציאת הדלגלג) עד קבלת המצב החדש ביציאה.

עתה נבדוק מהו פרק הזמן המינימלי של $t_w(1)$ המאפשר עדכון של הדלגלגים. אם

זמן ההשהיה של הדלגלגים > $t_w(1)$

הדלגלגים אינם "מספיקים" להתעדכן בערך החדש שבכניסותיהם, מכיוון שהזמן שהדלגלגים פעילים (רגישים לכניסותיהם) קטן מהזמן הדרוש להם לתגובה (זמן ההשהיה שלהם). הדלגלגים יישארו במצבם הקודם, ולכן גם מצב זה יגרום לתוצאה שגויה.

מסקנה: כדי שמערכת סדרתית, כמו זו שתוארה באיור 6.1, תפעל כשורה, צריך להתקיים האי-שוויון הזה:

זמן ההשהיה של הדלגלגים + זמן ההשהיה של המערכת הצירופית > $t_w(1)$ > זמן ההשהיה של הדלגלגים

אי-שוויון זה מציב מגבלה חמורה ביותר על פרק הזמן $t_w(1)$. מבחינה מעשית לא ניתן לקיים מגבלה זו משתי סיבות עיקריות:

1. זמן ההשהיה של המערכת הצירופית אינו זמן קבוע, אלא יש לו תחום השתנות (החל בערך מינימלי וכלה בערך מקסימלי).
2. פרק הזמן $t_w(1)$ אינו קבוע, אלא נע בין ערך מינימלי לערך מקסימלי.

מדיון זה נסיק שמימוש מערכות סדרתיות בעזרת דלגלגים מבוקרי-שעון מציב מגבלות קשות מאוד על דופק השעון, ובמקרים מסוימים לא ניתן למנוע את תופעת המעבר החוזר ונשנה (היזכר בדלגלג JK ובדלגלג T).

בשני התת-סעיפים הבאים נדון בדלגלגים מסוג אדון-עבד ובדלגלגים מדורבני-קצה, אשר פותרים את הבעיה.

קרא את התת-סעיף "דלגלג אדון-עבד".

סיכום פעולת דלגלג אדון-עבד:

* כאשר דופק השעון (CP) עולה ל-1 - האדון מאופשר והכניסות R ו-S קובעות את מצב האדון (Y,Y').

כל פרק הזמן ש-CP=1, האדון רגיש לכניסותיו ואילו העבד חסום.

* כאשר CP יורד ל-0, האדון נחסם והעבד מאופשר. מצב זה מתקיים כל עוד CP=0. במשך זמן זה Y ו-Y' קבועים (כי האדון חסום), והם משמשים כניסות לעבד.

שאלה 5 6

סרטט דיאגרמה לוגית של דלגלג אדון-עבד מסוג JK הבנוי משערי NOR ומשערי AND.

קרא את התת-סעיף "דלגלג מדורבן-קצה".

כאמור, דלגלגים מדורבני-קצה מאופשרים לפרק זמן קצר. בתת-סעיף הראשון ראינו, כי קשה לקצר את משך דופק השעון. לדלגלגים מדורבני-קצה יש מנגנון פנימי המאפשר להפעילם לפרק זמן קצר ביותר. מצד אחד, פרק זמן זה צריך להיות ארוך דיו, כדי שהכניסות ישפיעו על קביעת מצב הדלגלג; ומצד שני, פרק זמן זה צריך להיות קצר דיו, כדי שלאחר עדכון מצב הדלגלג תיחסם השפעתן של כניסותיו.

קרא את התת-סעיף "כניסות ישירות".

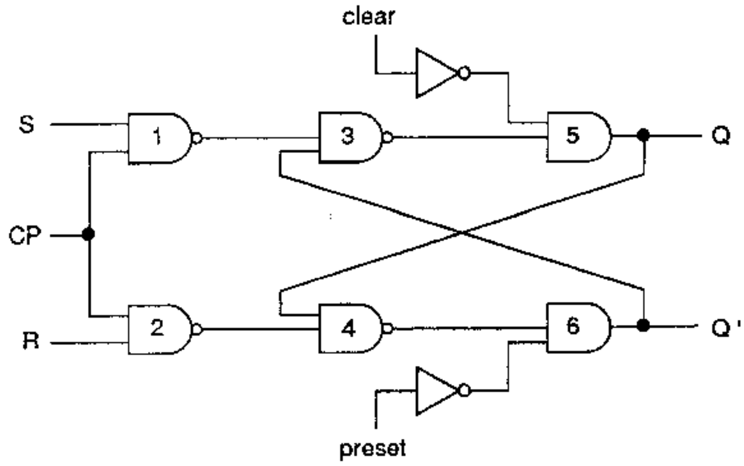
עד כה עסקנו בדלגלגים בעלי כניסות "רגילות", הנקראות כניסות עירור, ולחלק מהם הייתה גם כניסת שעון. בדרך-כלל יש לדלגלג כניסות נוספות, שתפקידן לקבוע את מצבו ההתחלתי של הדלגלג (0 או 1), בלי תלות בכניסות העירור והשעון. הכניסות הנוספות נקראות כניסות ישירות. המלה "ישיר" מציינת, שניתן לקבוע את מצב הדלגלג ישירות - בלי תלות בכניסות העירור והשעון.

אלה הכניסות הישירות:

1. איפוס ישיר (מסומן ב-clear): כניסה זו גורמת לאיפוס הדלגלג (Q=0).
2. preset ישיר: המלה set מציינת שצריך להתקיים Q=1 והתחילית pre מציינת שזה הערך ההתחלתי הדרוש.

כאמור, הכניסות הישירות אינן תלויות בכניסת השעון; לכן הן נקראות גם כניסות אסינכרוניות, שהרי הן אינן מתוזמנות. לעומת זאת, כניסות העירור - מתוזמנות (על ידי השעון).

האיור הבא מתאר דלגלג RS מבוקר-שעון בתוספת כניסות ישירות. גם לשאר הדלגלגים שתיארנו עד כה אפשר להוסיף כניסות ישירות בצורה דומה.



עתה ננתח את פעולת הדלגלג שלעיל:

1. כאשר clear=0 , preset=0:

יציאות השערים 5 ו-6 הן Q=Y ו-Q'=Y', בהתאמה; כלומר, מתקבל דלגלג RS מבוקר-שעון רגיל.

2. כאשר clear=1 , preset=0:

ביציאה של שער 5 מתקבל 0 בלי תלות ב-Y, ולכן Q=0. ערך זה של Q גורם שביציאה של שער 4 יתקבל Y'=1. הכניסות לשער 6 הן Y'=1 ו-(preset)'=1, ולכן ביציאה של שער 6 מתקבל Q'=1. מסקנה: צירוף זה של כניסות ישירות גורם ש-Q=0 (Q'=1) באופן בלתי-תלוי בכניסות העירור והשעון (S,R ו-CP).

3. כאשר clear=0 , preset=1:

ביציאה של שער 6 מתקבל 0, בלי תלות בכניסה האחרת של השער (Y'). לכן Q'=0 ומתקבל Y=1. ביציאה של שער 5 מתקבל Q=1, כי Y=1 וגם (clear)'=1. מסקנה: צירוף זה של כניסות ישירות גורם ש-Q=1 (Q'=0) באופן בלתי-תלוי בכניסות העירור והשעון.

4. הצירוף clear=1, preset=1 - אסור. בצירוף זה מקבלים Q=Q'=0 שהוא מצב בלתי-מוגדר.

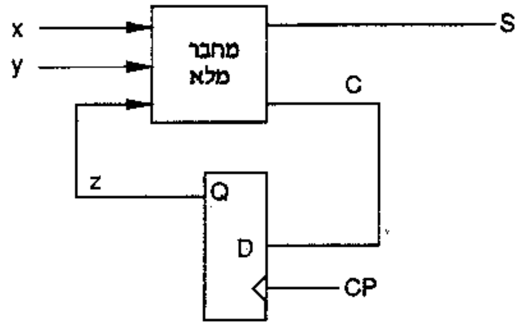
סעיף 6.4

קרא את סעיף 6.4 עד התת-סעיף "דיאגרמת מצבים" (ועד בכלל).

שאלה 6 7

למחבר המלא שבאיור הבא יש שתי כניסות חיצוניות: x ו-y; הכניסה השלישית, z, באה מיציאת הדלגלג D. יציאת הנשא מועברת לדלגלג בכל דופק שעון. היציאה החיצונית S נותנת את הסכום של x,y ו-z.

בנה טבלת מצבים ודיאגרמת מצבים עבור המעגל הסדרתי.



לפני שתפנה לשאלות 7, 8 שים לב!

תמיד משתמשים בדלגלגי אדון-עבד או בדלגלגים מדורבני-קצה, כך שעל המצב הבא של הדלגלגים משפיע המצב הנוכחי בלבד. אצל סטודנטים רבים מתעוררת בעיה כאשר יציאות של דלגלג אחד הן הכניסות של דלגלג אחר. מכיוון **שתמיד** לכל הדלגלגים מוזן אות CP בו זמנית - רק המצב הנוכחי של כל אחד מהם משפיע על המצב הבא של כל אחד מהם.

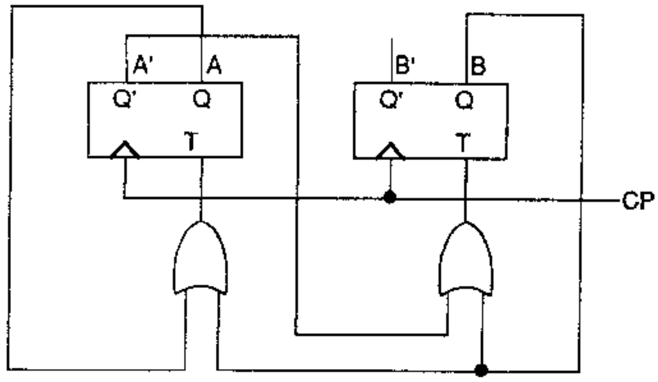
לגבי **היציאות:** הן בטבלת המצבים, הן בדיאגרמת המצבים מעוניינים לציין את ערכי היציאות כתוצאה מהמצב הנוכחי - ולא כתוצאה מהמצב הבא. הסיבה תובהר להלן.

במציאות כל היציאות ממומשות על-ידי דלגלגי D הנמצאים בקצות המעגל הצירופי. כאשר מגיע דופק שעון ייקבעו המצב הבא והיציאות (שאף הן כאמור דלגלגים) בהתאם למצב הנוכחי והכניסות.

לפיכך המערכת כולה מתוזמנת היטב.

שאלה 7

בנה טבלת מצבים ודיאגרמת מצבים עבור המעגל הסדרתי שבאיור הזה:



סיים לקרוא את הסעיף.

שאלה 8

למעגל סדרתי יש שני דלגלגים (A ו-B), שתי כניסות (x ו-y) ויציאה (z).
להלן פונקציות הכניסה של הדלגלגים ופונקציית היציאה של המעגל:

$JA = xB + y'B'$ $\qquad$ $KA = xy'B'$

$JB = xA'$ $\qquad$ $KB = xy' + A$

$$z = xyA + x'y'B$$

בנה את הדיאגרמה הלוגית, את טבלת המצבים ואת משוואות המצב.

סעיף 6.5

קרא בסעיף 6.5 את התת-סעיף "צמצום מצבים".

שאלה 9

1. צמצם את מספר המצבים שבטבלת המצבים הבאה וערוך את הטבלה המצומצמת מחדש.

המצב הנוכחי	המצב הבא		יציאה	
	x=0	x=1	x=0	x=1
a	f	b	0	0
b	d	~~e~~ a	0	0
~~c~~	f	~~e~~ b	0	0
d	g	a	1	0
~~e~~	d	~~c~~ a	0	0
f	f	b	1	1
g	g	~~h~~ d	0	1
~~h~~	g	a	1	0

2. עבור טבלת המצבים שלעיל מצא את סדרת היציאה הנוצרת מסדרת הכניסה 01110010011 החל במצב a.
3. חזור על חלק 2 של השאלה, אבל הפעם השתמש בטבלה המצומצמת שקיבלת בחלק 1 והראה שמקבלים את אותה סדרת יציאה.

סיים לקרוא את הסעיף.

שאלה 10

החלף את המצבים שבטבלה 6.4 בהשמה בינרית 2 שבטבלה 6.5 ובנה את טבלת המצבים הבינרית.

סעיף 6.6

קרא את סעיף 6.6 כולו.

שאלה 11

בנה את טבלת העירור של דלגלג 'JK המתואר בשאלה 4.

סעיף 6.7

קרא את סעיף 6.7 כולו.

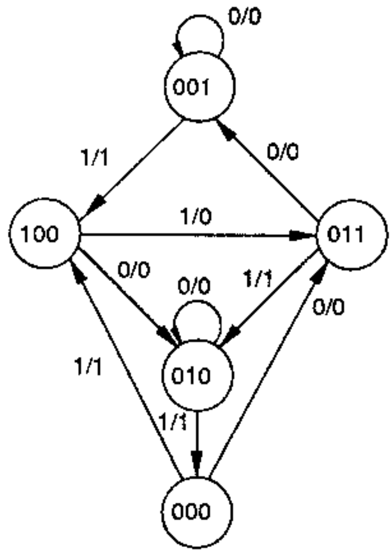
מעגל סדרתי הוא בעל **תיקון עצמי**, אם ממצב לא תקף הוא יעבור לאחר מספר כלשהו של דפקים לאחד המצבים התקפים.

מעגל סדרתי הוא בעל **אתחול עצמי**, אם ממצב כלשהו (תקף או לא תקף) הוא יעבור לאחר מספר כלשהו של דפקים למצב ההתחלתי.

אם כן, ניתן לאמר שהמעגל בדוגמה 6.2 הוא בעל תיקון עצמי ובעל אתחול עצמי. המצב ההתחלתי שלו הוא 001.

שאלה 12

למעגל סדרתי יש כניסה אחת ויציאה אחת. האיור שלהלן מציג את דיאגרמת המצבים שלו. המצב ההתחלתי הוא 000. עצב (ונתח) את המעגל הסדרתי בעזרת דלגלגי T.



סעיף 6.8

מונה הוא מערכת ספרתית, המסוגלת למנות את מספר הדפקים המוזנים לכניסת הדופק (דופק המנייה או השעון) ולהפיק ביציאותיה מספר זה בקוד ספרתי (בדרך-כלל בינרי). בסעיף זה נלמד לעצב מונים.

קרא את סעיף 6.8 כולו.

שים לב שהגדרת מונה בעל אתחול עצמי (המופיעה בסוף סעיף 6.8 בספר הלימוד) תואמת את הגדרת מעגל סדרתי בעל אתחול עצמי (המופיעה בסעיף 6.7 במדריך למידה זה), מכיוון שאם המונה מגיע לסדרת המנייה הרגילה, הוא בהכרח מגיע גם למצב ההתחלתי.

שאלה 13

עצב בעזרת דלגלגי T מונה בעל הסדרה הבינרית (מימין לשמאל) 0, 1, 3, 7, 6, 4 וחוזר חלילה.

סעיף 6.9

קרא את סעיף 6.9 עד התת-סעיף "משוואות מצבים עם דלגלגי JK" (לא כולל). אתה רשאי לפסוח על התת-סעיף הזה.

דוגמה מסכמת - פתיחת מנעול

נסיים פרק זה בדוגמת מנעול אשר נפתח אם גלגל הספרות עובר על שלוש ספרות (עשרוניות) מסוימות. נניח שברשותנו אמצעי מכני או חשמלי הפותח את המנעול, אם הוא מקבל עצמת זרם השווה למצב הלוגי 1.

כמו-כן, נניח שברשותנו אמצעי אחר המתרגם את מצב הגלגל לארבע כניסות בינריות x_3, x_2, x_1, x_0 באופן הזה:

מצב הגלגל	$x_3x_2x_1x_0$
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1

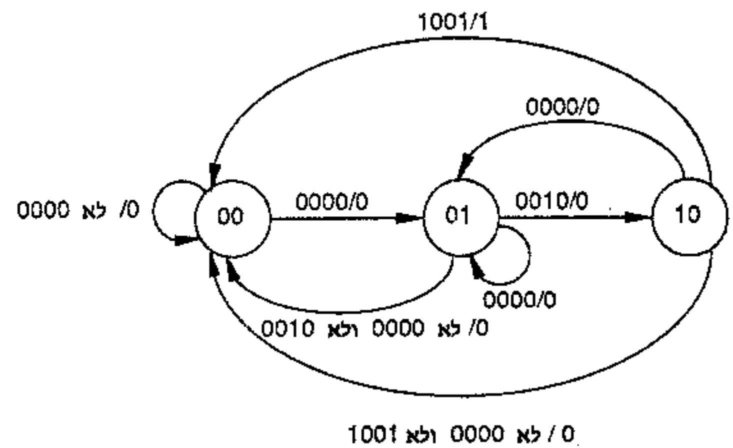
ברצוננו לבנות מעגל סדרתי שיציאתו תהיה 1, אם ורק אם סדרת הקלטים היא:

1) 0 0 0 0 (0)

2) 0 0 1 0 (2)

3) 1 0 0 1 (9)

להלן דיאגרמת המצבים המתאימה לבעיה (מצב התחלתי 00):



מצב 00: מצפים לסדרת הקלט הרצויה.

מצב 01: התקבל הקלט 0000, ומצפים להמשך הרצוי.

מצב 10: התקבלו הקלטים 0000 ו-0010 ומצפים ל-1001.

במקרה של פתיחה החלטנו לחזור למצב ההתחלתי.

שים לב שבכל מצב אם מתקבל קלט 0000 עוברים למצב 01, ולא למצב 00 (מכיוון שמצפים לקלטים 0010 ו-1001).

ניתן לבנות את המעגל הסדרתי הנדרש על פי הקלטים והמצב. אולם מטעמי נוחות לא ננתח את השפעת הכניסות x_3, x_2, x_1, x_0, אלא את השפעת המשתנים האלה:

E_1 - ערכו 1 אם ורק אם הכניסות הן 0000.

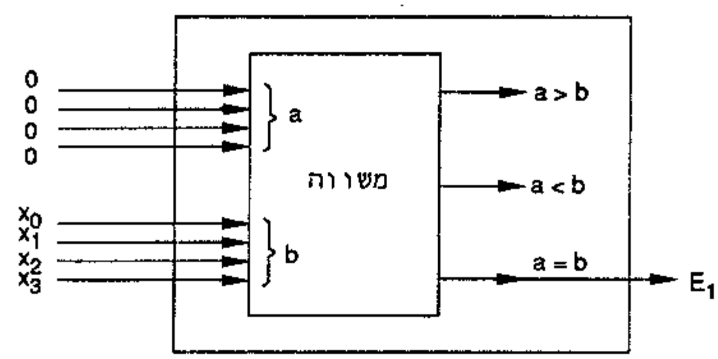
E_2 - ערכו 1 אם ורק אם הכניסות הן 0010.

E_3 - ערכו 1 אם ורק אם הכניסות הן 1001.

את E_1 ניתן לקבל בעזרת משווה (למדנו עליו בפרק 5) של $x_3x_2x_1x_0$ עם 0000 מציאת השוויון.

באותו אופן ניתן לקבל את E_2 ואת E_3 מציאת השוויון של משווה של $x_3x_2x_1x_0$ עם 0010 ועם 1001 (בהתאמה).

למשל:



להלן טבלת המצבים:

המצב הנוכחי S_1	S_0	E_1	E_2	E_3	המצב הבא S_1	S_0	יציאה y
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	X	X	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	X	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	X	0	0	0	0

נשתמש בדלגלגי T. להלן טבלת העירור של המעגל:

המצב הנוכחי S_1	S_0	E_1	E_2	E_3	המצב הבא S_1	S_0	יציאה y	כניסות הדלגלגים T_1	T_0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	X	X	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	X	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	X	0	0	0	0	1	0

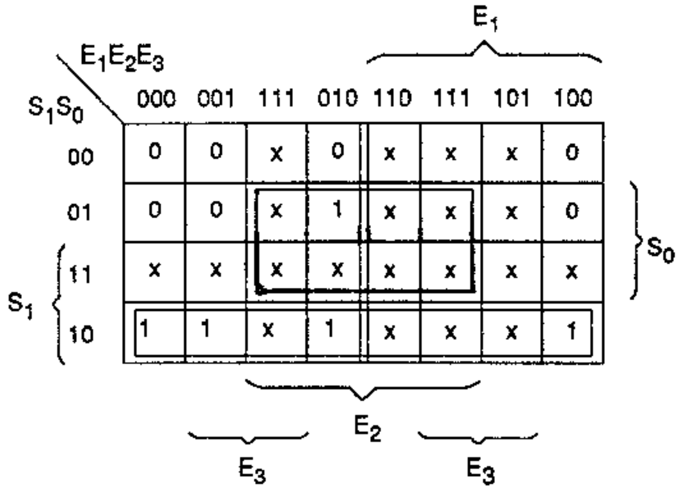
עתה נוכל לקבל את הפונקציות הבוליאניות עבור המעגל הצירופי.

$y = S_1S_0'E_1'E_2'E_3$. אך אנו יודעים שלא ייתכן ש-E_3 וגם E_2 או E_1 יהיו בעלי ערך 1 בו-זמנית. לפיכך מספיק לדרוש ש-E_3 יהיה בעל ערך 1. כלומר, $y = S_1S_0'E_3$. מטבלת העירור ניתן לראות ש-T_1 מקבל ערך 1, כאשר נמצאים במצב 01 וכן $E_2=1$ (נדרש גם $E_3=E_1=0$, אך זה מתקיים בהכרח כאשר $E_2=1$), וכאשר נמצאים במצב 10. לכן, $T_1 = S_1'S_0E_2 + S_1S_0'$.

ואולם לא קיים מצב 11. לכן מספיק לכלול בגורם הראשון את S_0, ולפיכך, $.T_1 = S_0E_2 + S_1S_0'$

כעת נראה כיצד מקבלים אותה התוצאה בעזרת מפת קרנו.

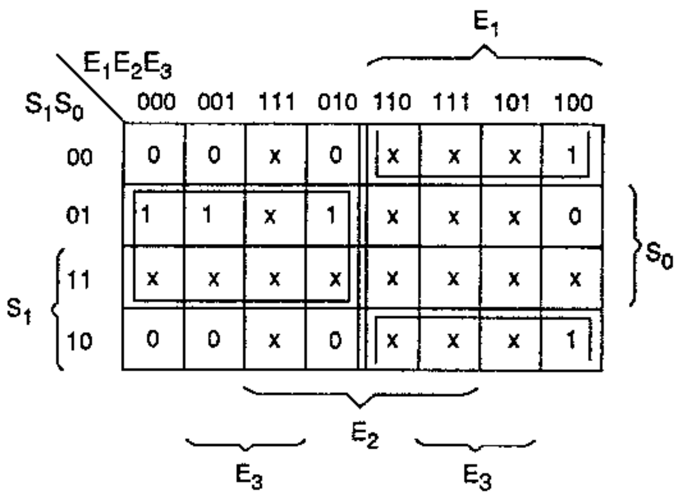
— y



שים לב שהשורה 11 מכילה X-ים, מכיוון שלא ייתכן מצב כזה. וכמו-כן לא ייתכן ששניים או שלושה E_1-ים יהיו בעלי ערך 1, ולכן העמודות שיש בהן יותר מ-1 בודד מכילות X-ים.

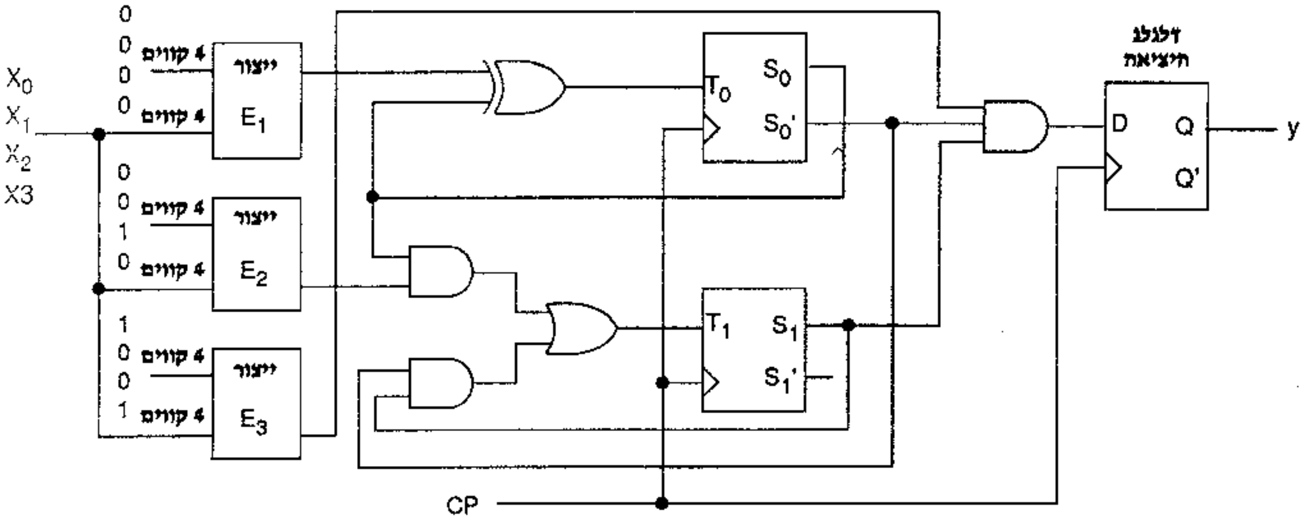
מהמפה רואים ש- $.T_1 = S_0E_2 + S_1S_0'$

את הפונקציה הבוליאנית עבור T_0 נקבל בעזרת מפת קרנו:



$$T_0 = S_0E_1' + S_0'E_1 = S_0 \oplus E_1$$

להלן המעגל הסדרתי (היציאה y ממומשת באמצעות דלגלג D, בהתאם לאמור בהערה שבעמוד 182):



X_0
X_1
X_2
X3
0
0
0
0
0
0
1
0
1
0
0
1
4 קווים
4 קווים
4 קווים
4 קווים
4 קווים
4 קווים
ייצור
E_1
ייצור
E_2
ייצור
E_3
T_0
S_0
S_0'
T_1
S_1
S_1'
CP
דלגלג
תיציאת
D
Q
Q'
y

סיכום פרק 6

במעגל סדרתי היציאות הן פונקציה של כניסות חיצוניות ושל מצבים פנימיים.
מונה הוא דוגמה של מעגל סדרתי.
מעגל סדרתי מורכב מכמה דלגלגים וממעגל צירופי.

מעגל סדרתי סינכרוני הוא מערכת שהתנהגותה מושפעת מאותות הכניסה בפרקי זמן מסוימים בלבד. אחת הדרכים להשיג סינכרון במעגל סדרתי סינכרוני היא להשתמש בדפקים בעלי משך מוגבל.

מעגל סדרתי אסינכרוני מגיב בכל זמן לכל שינוי בכניסותיו.

מעגלים סדרתיים סינכרוניים המשתמשים בדופקי שעון בכניסות של יחידות הזיכרון נקראים **מעגלים סדרתיים מבוקרי-שעון**.

יחידות הזיכרון במעגלים סדרתיים מבוקרי-שעון נקראות דלגלגים. **דלגלג** הוא התקן זיכרון לסיבית אחת. דלגלג יכול להיות במצב set או במצב clear. דלגלג יכול לשמור על מצבו הבינרי למשך זמן בלתי-מוגבל (כל עוד קיימת אספקת מתח למעגל), עד אשר אות כניסה ינחה אותו להחליף מצב.

דלגלג RS בסיסי הוא חלק עיקרי בכל סוגי הדלגלגים. זהו מעגל אסינכרוני: שינויים בכניסותיו, R ו-S, משפיעים מיד על יציאותיו.

הוספת כניסת שעון (וכמה שערים) לדלגלג בסיסי מאפשרת לשלוט על זמני הפעולה של הדלגלג.
דלגלג שיש לו כניסת שעון נקרא **דלגלג מבוקר-שעון**.

אם רוצים לאפשר שינוי מצבם של דלגלגים באופן אסינכרוני (ללא צורך בדופק), יש להוסיף לדלגלגים **כניסות ישירות**. כניסות אלה מאפשרות להביא את כל הדלגלגים למצב התחלתי לפני הפעלתם המבוקרת-שעון.

טבלה אופיינית של דלגלג מבוקר-שעון היא טבלה המסכמת את אופן פעולתו. עבור כל צירוף אפשרי של ערכי כניסות למצב נוכחי של הדלגלג - רשום בטבלה המצב הבא (שהוא מצב הדלגלג לאחר שחל דופק שעון נוסף).

מימוש מערכות סדרתיות בעזרת דלגלגים מבוקרי-שעון מציב מגבלות חמורות על דופק השעון, ולכן פותחו דלגלג אדון-עבד ודלגלגים מדורבני-קצה.

דלגלג מסוג **אדון-עבד** בנוי על פי עקרון ההפרדה של כניסות הדלגלג מיציאותיו. הוא מכיל שני דלגלגים מבוקרי-שעון, אדון ועבד, הפועלים בפרקי זמן שונים של דופק השעון. בפרק הזמן שאחד מהם יכול לפעול - השני חסום, ולהפך.

דלגלג **מדורבן-קצה** מפעילים בפרק זמן קצר מאוד: בעליית דופק השעון (קצה חיובי) או בירידתו (קצה שלילי). הודות לכך אין הדלגלג מאפשר שיתרחשו תופעות המעבר החוזר ונשנה.

טבלת מצבים של מעגל סדרתי מתקבלת מהדיאגרמה הלוגית של המעגל. היא מכילה שלושה חלקים: המצב הנוכחי, המצב הבא והיציאה.

את המידע הנמצא בטבלת מצבים ניתן לייצג באופן גרפי **בדיאגרמת מצבים.** בדיאגרמה זו עיגול מייצג מצב, וקשת מכוונת המחברת בין שני עיגולים מייצגת מעבר בין שני המצבים המתאימים.

בטבלת **עירור** רושמים צירופי כניסות (של הדלגלגים) הגורמים לשינויים האפשריים במצבי הדלגלגים. טבלה זו מקבלים מהטבלה האופיינית של סוג הדלגלג שמשתמשים בו.

משוואת מצב היא ביטוי אלגברי המציין את התנאים לשינוי מצב של דלגלג. אגפה השמאלי של המשוואה מציין את המצב הבא של הדלגלג, ואגפה הימני הוא פונקציה בוליאנית המציינת את תנאי המצב הנוכחי שיביאו לכך שהמצב הבא יהיה 1. את משוואת המצב מקבלים ישירות מטבלת המצבים.

ניתן לקצוב ערכים בינריים למצבים **(השמת מצבים)** באופן שיפחית את המחיר של החלק הצירופי של מעגל סדרתי. את ההשמה הבינרית בוחרים באופן שיתקבל מעגל צירופי פשוט עבור כניסות הדלגלגים.

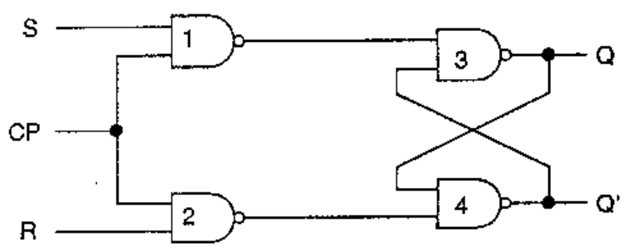
את **העיצוב** של מעגל סדרתי מבוקר-שעון מתחילים במפרט ומסיימים בדיאגרמה לוגית או ברשימת פונקציות שניתן לקבל מהן את הדיאגרמה הלוגית. אם מספר המצבים קטן מ-2^m (m מציין את מספר הדלגלגים במעגל) אז למעגל יש מצבים בינריים שאין משתמשים בהם. כשמעצבים את החלק הצירופי של המעגל הסדרתי, מתייחסים אל המצבים שאין משתמשים בהם כאל צירופים אדישים.

מהרגע שעוצב המעגל, m הדלגלגים שבו יכולים להיות בכל אחד מ-2^m המצבים האפשריים. אם כמה ממצבים אלה נלקחו כצירופים אדישים, יש לנתח את המעגל כדי לקבוע את השפעתם של מצבים בלתי-תקפים אלה. יש לקבוע מה יהיה המצב הבא אחרי מצב בלתי-תקף ולוודא שאחרי מספר מסוים (סופי) של דופקי שעון המעגל עובר ממצב בלתי-תקף (אם המעגל "נקלע" למצב כזה) למצב תקף (להמשך פעולתו הרגילה). תוצאת הניתוח היא טבלת מצבים או דיאגרמת מצבים.

תשובות לשאלות בפרק 6

תשובה 1

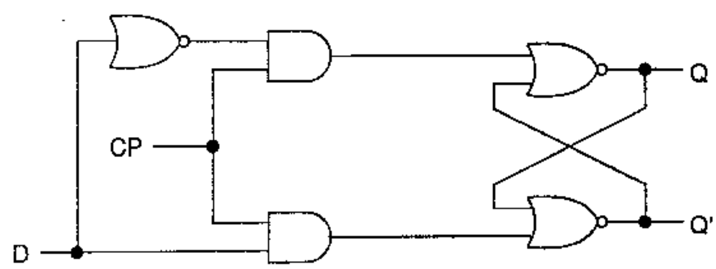
להלן דיאגרמה לוגית של דלגלג RS מבוקר-שעון הבנוי מארבעה שערי NAND:



כל עוד CP=0, תהיה כל אחת מיציאות השערים 1 ו-2 במצב 1, ללא תלות בערכי הכניסות S ו-R, ולכן מצב הדלגלג לא ישתנה. מצב ה-set מתקבל כאשר CP=1, S=1 ו-R=0. כדי לשנות למצב clear הכניסות חייבות להיות CP=1, S=0 ו-R=1.

תשובה 2

להלן הדיאגרמה של דלגלג D מבוקר-שעון הבנוי משערי AND ו-NOR:

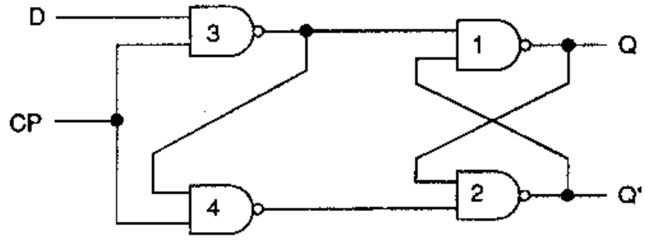


כאשר CP=1 ו-D=1 (D'=0), הדלגלג יעבור למצב set.

כאשר CP=1 ו-D=0 (D'=1), הדלגלג יעבור למצב clear.

תשובה 3

אם נבטל את שער ה-NAND שמספרו 5 (ושתפקידו להפך את הכניסה D) ויציאת שער 3 תהיה כניסה לשער 4 (במקום יציאת שער 5), נקבל:

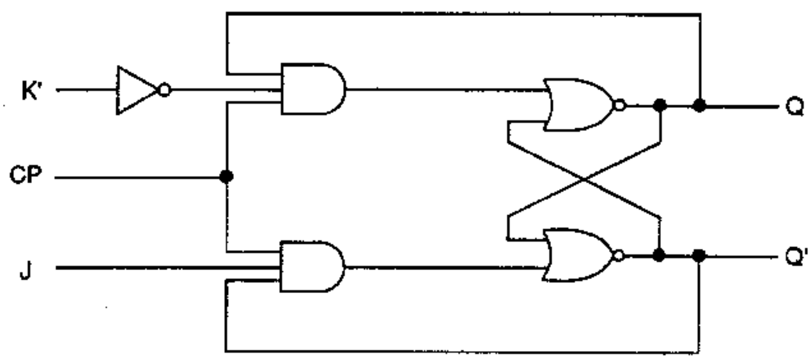


D	CP	יציאת שער 3
0	1	1
1	0	1
0	0	1
1	1	0

מהטבלה שלעיל ניתן לראות, שיציאת שער 3 מקבלת את הערך 'D חוץ מהמקרה ש-CP=0 ו- D=1. אך במקרה זה מכיוון ש- CP=0, הרי יציאת שער 4 תהיה 1 ללא תלות בערכה של הכניסה האחרת שלו (הבאה מיציאת שער 3), ולכן המעגל המצומצם שלעיל שקול לזה שבאיור 6.5(1).

תשובה 4

להלן דיאגרמה לוגית של דלגלג 'JK:

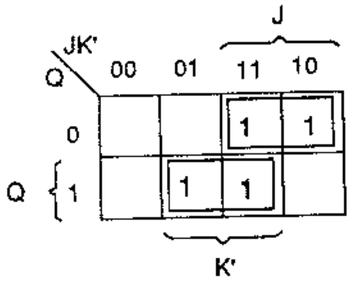


1. להלן הטבלה האופיינית של דלגלג 'JK:

Q	J	K'	Q(t+1)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

את הטבלה הזו קל לבנות בעזרת הטבלה האופיינית של דלגלג JK. שים לב שלמשל כאשר K'=0, J=1, ו-Q=1, הרי K=1, J=1, Q=1, ומהטבלה האופיינית של דלגלג JK אנו למדים ש- Q(t+1)=0.

2. כדי לקבל את המשוואה האופיינית של דלגלג 'JK נסרטט את המפה עבור הפונקציה הבוליאנית Q(t+1) שהתקבלה בטבלה האופיינית.



מכאן שהמשוואה האופיינית היא $Q(t+1) = JQ' + K'Q$. שים לב שזו בדיוק המשוואה האופיינית של דלגלג JK.

3. נאחד את שתי הכניסות החיצוניות J ו-'K, כלומר $J=K'$, ונסמן את ערכן (השווה) ב-D.

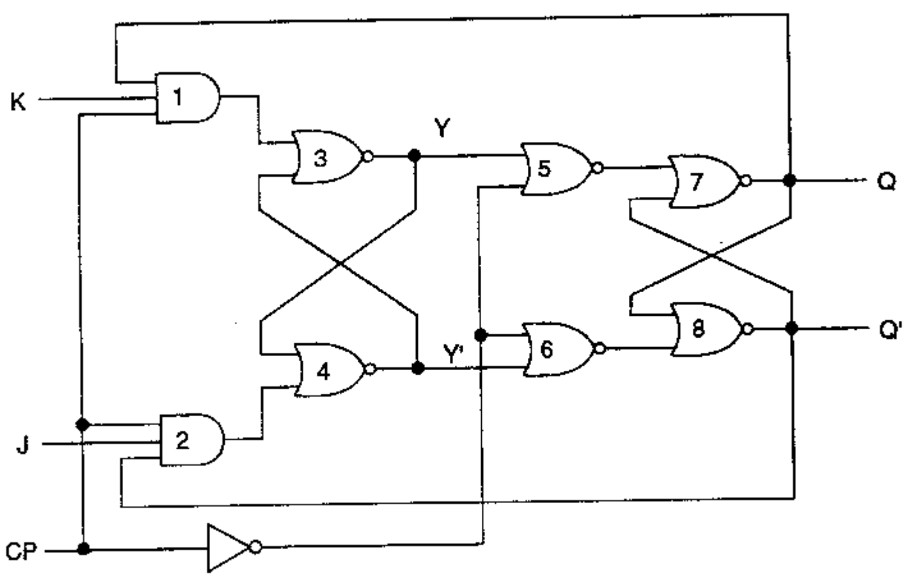
אם $D=0$, פירושו ש- $J=0$ ו- $K'=0$, ולכן לכל ערך של Q $Q(t+1)=0$.

אם $D=1$, פירושו ש- $J=1$ ו- $K'=1$, ולכן לכל ערך של Q $Q(t+1)=1$.

קיבלנו התנהגות של דלגלג מסוג D.

תשובה 5

לפניך דיאגרמה לוגית עבור דלגלג אדון-עבד מסוג JK הבנוי משערי NOR ומשערי AND.



השערים 1 עד 4 יוצרים את האדון, ואילו השערים 5 עד 8 יוצרים את העבד. כל חלק שווה לדיאגרמה הלוגית שבאיור 6.6. אולם הכניסות Q ו-'Q של כל חלק מגיעות מהיציאות Q ו-'Q (או Y ו-'Y) של החלק האחר.

כל עוד $CP=0$, האדון מבודד (הכניסות J ו-K אינן יכולות לשנות את מצבו), מכיוון שהכניסות של השערים 3 ו-4 הן 0. כש-CP עולה מ-0 ל-1, הוא משפיע על הדלגלג אדון, ומצבו של האדון יכול להשתנות עקב כך. כל עוד $CP=1$, יציאות

השערים 5 ו-6 הן 0, ולכן הדלגלג עבד מבודד. כשהדופק שב להיות 0, הדלגלג עבד עובר למצב שהדלגלג אדון נתון בו, והאדון שוב מבודד.

תשובה 6

להלן טבלת המצבים של המעגל:

המצב הנוכחי z	כניסות x	y	המצב הבא z	יציאה S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

כאשר המצב הנוכחי של הדלגלג הוא z=0 והכניסות למחבר המלא הן xy=00, אז יציאת הסכום תהיה S=0, והמצב הבא של הדלגלג z=0 (כי C=0).

כאשר המצב הנוכחי הוא z=0 ואחד מבין x,y הוא 1 והאחר 0, אז S=1 והמצב הבא הוא z=0.

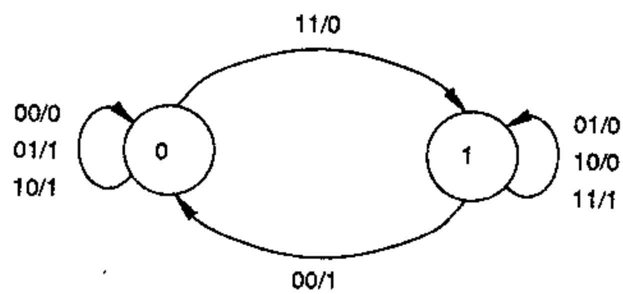
כאשר המצב הנוכחי הוא z=0 ו- xy=11, אז S=0 ו- C=1, ולכן המצב הבא הוא z=1.

כאשר המצב הנוכחי הוא z=1 ו-xy=00, אז S=1 והמצב הבא הוא z=0.

כאשר המצב הנוכחי הוא z=1 ואחד מבין x,y הוא 1 והאחר 0, אז S=0 ו- C=1, ולכן המצב הבא הוא z=1.

כאשר xyz=111, אז S=1 ו-C=1, ולכן המצב הבא הוא z=1.

להלן דיאגרמת המצבים:



המצב של z רשום בתוך העיגול. על המעברים רשום הצירוף המתאים של xy/S.

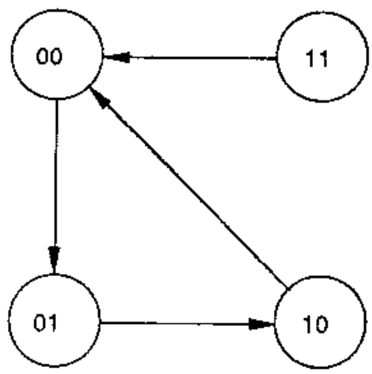
תשובה 7

להלן טבלת המצבים של המעגל הסדרתי:

המצב הנוכחי A B	המצב הבא A B
0 0	0 1
0 1	1 0
1 0	0 0
1 1	0 0

כאשר AB=00, הכניסה TA=0 והכניסה TB=1. על פי הטבלה האופיינית של דלגלג T - כאשר A=0 (המצב הנוכחי של A) ו-TA=0 (הכניסה T של A), המצב הבא של A יהיה 0. ובאשר ל-B - מכיוון ש-B=0 ו-TB=1, המצב הבא של B יהיה 1. לכן המצב הבא (של המצב הנוכחי AB=00) הוא AB=01. בצורה דומה, בדוק בעצמך את שאר המקרים שבטבלה.

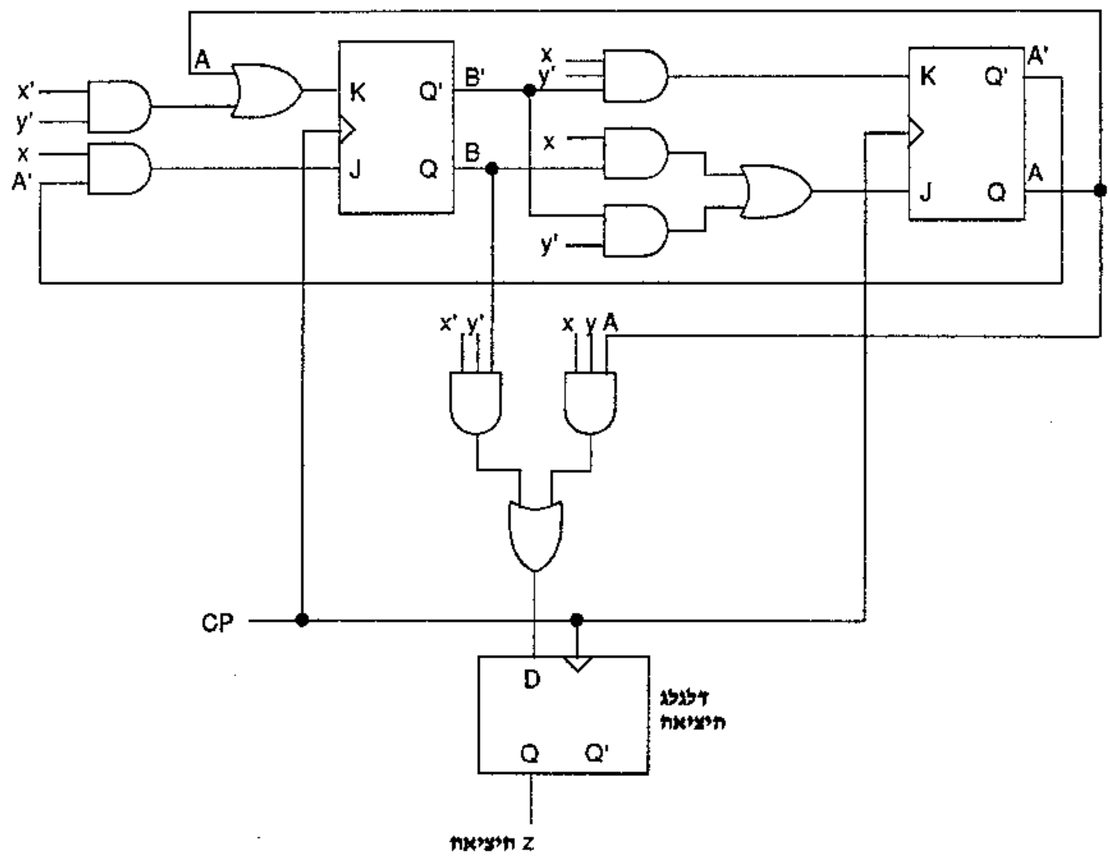
להלן דיאגרמת המצבים:



שים לב שאי-אפשר להגיע ממצב כלשהו למצב 11. לפיכך, אם ברגע שמפעילים את המערכת מתחילים במצב 00, על ידי clear, לעולם לא יהיה מצב 11; אם ברגע שמפעילים את המערכת מתחילים במצב 11, על ידי preset, זו הפעם הראשונה והאחרונה שהמצב יהיה 11.

תשובה 8

להלן הדיאגרמה הלוגית של המעגל (היציאה y ממומשת באמצעות דלגלג D, בהתאם לאמור בהערה שבעמוד 182):



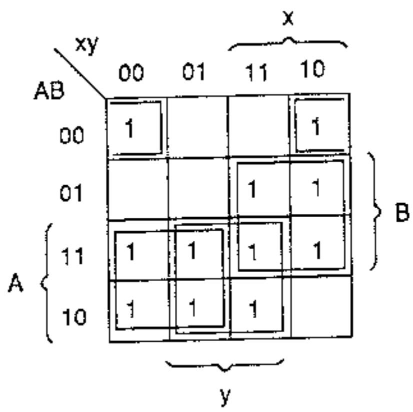
טבלת המצבים של המעגל היא כלהלן:

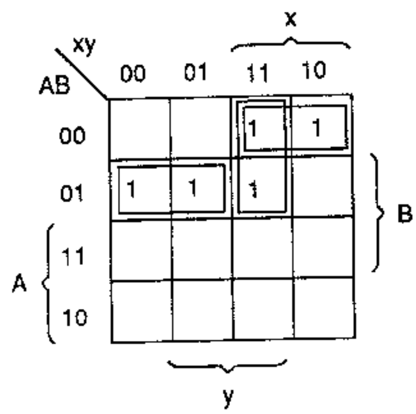
המצב הנוכחי	המצב הבא				יציאה z			
A B	xy=00 A B	xy=01 A B	xy=10 A B	xy=11 A B	xy=00	xy=01	xy=10	xy=11
0 0	1 0	0 0	1 1	0 1	0	0	0	0
0 1	0 1	0 1	1 0	1 1	1	0	0	0
1 0	1 0	1 0	0 0	1 0	0	0	0	1
1 1	1 0	1 0	1 0	1 0	1	0	0	1

כדי להשתכנע שהמצב הבא הוא אמנם כפי שרשום בטבלת המצבים נציג את הטבלה הזו:

המצב הנוכחי A B	x y	JA KA	JB KB	המצב הבא A B
0 0	0 0	1 0	0 0	1 0
0 0	0 1	0 0	0 0	0 0
0 0	1 0	1 1	1 1	1 1
0 0	1 1	0 0	1 0	0 1
0 1	0 0	0 0	0 0	0 1
0 1	0 1	0 0	0 0	0 1
0 1	1 0	1 0	1 1	1 0
0 1	1 1	1 0	1 0	1 1
1 0	0 0	1 0	0 1	1 0
1 0	0 1	0 0	0 1	1 0
1 0	1 0	1 1	0 1	0 0
1 0	1 1	0 0	0 1	1 0
1 1	0 0	0 0	0 1	1 0
1 1	0 1	0 0	0 1	1 0
1 1	1 0	1 0	0 1	1 0
1 1	1 1	1 0	0 1	1 0

כדי לקבל את משוואות המצב של הדלגלגים A ו-B נסרטט את מפות קרנו:





$A(t+1) = xB + x'A + y'A'B' + yA$

$B(t+1) = x'A'B + xyA' + xA'B'$

תשובה 9

1. להלן טבלת המצבים שלפיה נבצע צמצום מצבים:

המצב הנוכחי	המצב הבא x=0	המצב הבא x=1	יציאה x=0	יציאה x=1
a	f	b	0	0
b	d	c	0	0
c	f	e	0	0
d	g	a	1	0
e	d	c	0	0
f	f	b	1	1
g	g	h	0	1
h	g	a	1	0

נחפש בטבלה שני מצבים נוכחיים המקיימים את שני התנאים האלה:

א. עוברים לאותו המצב הבא עבור כל אחד משני ערכי הכניסה x.

ב. נותנים את אותה יציאה עבור כל אחד משני ערכי הכניסה x.

המצבים b ו-e מקיימים את התנאים האלה: עבור x=0 שניהם עוברים למצב d ולשניהם היציאה 0, ועבור x=1 שניהם עוברים למצב c ולשניהם היציאה 0. לכן המצבים b ו-e הנם שקולים וניתן למחוק את אחד מהם, למשל את e. נמחק את השורה של המצב הנוכחי e, ואת המצב e נחליף במצב b בכל פעם שהוא מופיע בעמודת המצב הבא (במקרה זה רק בשורה של המצב c).

באותו אופן ניתן לראות שהמצבים d ו-h שקולים, ולכן נמחק את שורת h ונחליף את מופעי h ב-d.

כעת רואים שעקב פעולת הצמצום הראשונה (מחיקת המצב e והחלפת e וב-b) המצבים a ו-c שקולים. נמחק את שורת c ונחליף c ב-a.

לאחר שלוש פעולות הצמצום מקבלים את הטבלה הזו:

המצב הנוכחי	המצב הבא		יציאה	
	x=0	x=1	x=0	x=1
a	f	b	0	0
b	d	a	0	0
d	g	a	1	0
f	f	b	1	1
g	g	d	0	1

2. להלן סדרת היציאה על פי הטבלה המקורית:

מצב:	a	f	b	c	e	d	g	h	g	g	h	a
כניסה:	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	
יציאה:	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	

3. להלן סדרת היציאה על פי הטבלה המצומצמת שהתקבלה בחלק 1:

מצב:	a	f	b	a	b	d	g	d	g	g	d	a
כניסה:	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	
יציאה:	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	

תשובה 10

נשתמש בהשמה הבינרית הזו:

מצב	השמה 2
a	000
b	010
c	011
d	101
e	111

מקבלים את טבלת המצבים הזו:

המצב הנוכחי		המצב הבא x=0	המצב הבא x=1	יציאה x=0	יציאה x=1
a	000	000	010	0	0
b	010	011	101	0	0
c	011	000	101	0	0
d	101	111	101	0	1
e	111	000	101	0	1

תשובה 11

כדי לבנות את טבלת העירור של דלגלג 'JK תחילה נשנה מעט את הטבלה האופיינית שלו המופיעה בתשובה (1)4.

J	K'	Q(t+1)
0	0	0
0	1	Q(t)
1	0	Q'(t)
1	1	1

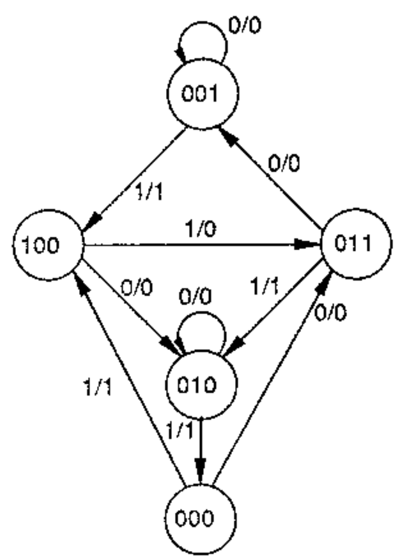
כעת נבנה את טבלת העירור על פי הטבלה האופיינית שקיבלנו לעיל:

Q(t)	Q(t+1)	J	K'
0	0	0	X
0	1	1	X
1	0	X	0
1	1	X	1

שים לב שזו טבלת העירור של דלגלג JK, אלא שבטור 'K ה-0 וה-1 הוחלפו זה בזה לעומת הטור K.

תשובה 12

להלן דיאגרמת המצבים הנתונה:



נעצב את המעגל הסדרתי המתאים בעזרת דלגלגי T.

דיאגרמת המצבים מורכבת מחמישה מצבים. כדי לייצגם דרושים שלושה דלגלגים; נסמנם ב-A, B ו-C. את משתנה הכניסה נסמן ב-x, ואת משתנה היציאה נסמן ב-y.

נבנה את טבלת המצבים עבור מעגל זה על פי דיאגרמת המצבים שלעיל:

המצב הנוכחי	המצב הבא x=0	המצב הבא x=1	יציאה x=0	יציאה x=1
ABC	ABC	ABC	y	y
000	011	100	0	1
001	001	100	0	1
010	010	000	0	1
011	001	010	0	1
100	010	011	0	0

אי-אפשר לצמצם מצבים.

עתה נראה כיצד ניתן לקבל את טבלה העירור.

טבלת העירור תכיל עמודות עבור הכניסות T של הדלגלגים שבאמצעותם נעצב את המעגל. כניסת הדלגלג A מצוינת ב-TA. כניסת הדלגלג B מצוינת ב-TB. כניסת הדלגלג C מצוינת ב-TC. נמצא את טבלת העירור של המעגל בעזרת טבלה 6.8(4).

כדי לקבל את טבלת העירור ביתר קלות נסדר את טבלת המצבים בצורה שונה (שבה המצב הנוכחי ומשתנה הכניסה מסודרים בצורת טבלת אמת).

המצב הנוכחי ABC	כניסה x	המצב הבא ABC	יציאה y	כניסות הדלגלגים TA	TB	TC
000	0	011	0	0	1	1
000	1	100	1	1	0	0
001	0	001	0	0	0	0
001	1	100	1	1	0	1
010	0	010	0	0	0	0
010	1	000	1	0	1	0
011	0	001	0	0	1	0
011	1	010	1	0	0	1
100	0	010	0	1	1	0
100	1	011	0	1	1	1

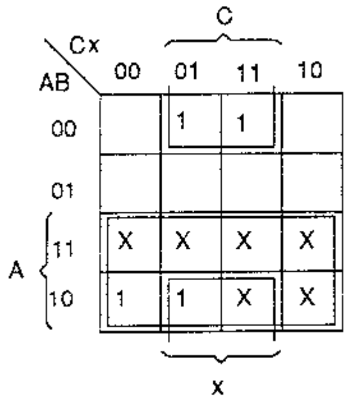
המעגל הסדרתי שעלינו לעצב מורכב משלושה דלגלגים A, B ו-C וממעגל צירופי. כניסות המעגל הצירופי מצוינות מתחת לעמודות של המצב הנוכחי ושל הכניסה x, ויציאות המעגל הצירופי מצוינות מתחת לעמודות של כניסות הדלגלגים.

עתה ניתן לקבל את הפונקציות הבוליאניות המפושטות עבור המעגל הצירופי. הכניסות הן, כאמור, המשתנים A, B, C ו-x; היציאות הן המשתנים TA, TB, TC ו-y.

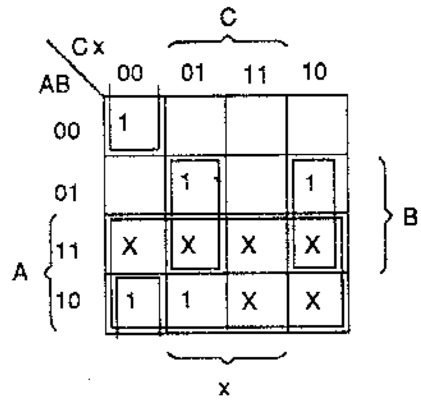
למעגל יש שלושה מצבים שאין משתמשים בהם: 101, 110 ו-111. כאשר כניסה x שהיא 0 או 1 מצורפת למצבים אלה, מקבלים שישה צירופים אדישים: 10, 11, 12,

13, 14 ו-15. ששת הצירופים הללו אינם רשומים בטבלה מתחת למצב נוכחי ולכניסה, ומתייחסים אליהם כאל צירופים אדישים.

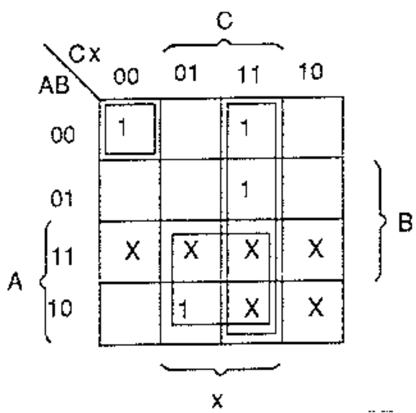
בעזרת המידע שבטבלת העירור נבנה מפות לפישוט פונקציות היציאה של המעגל הצירופי (מתחת למפות נרשום את פונקציות היציאה המפושטות):



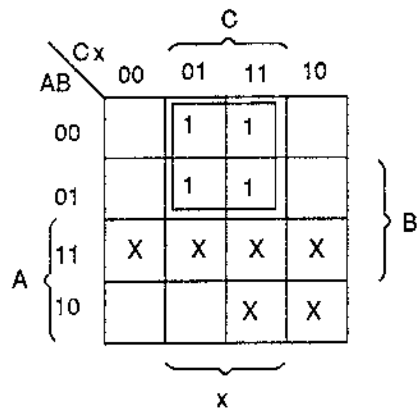
TA = A + B'x



TB = A+BC'x +BCx'+B'C'x'



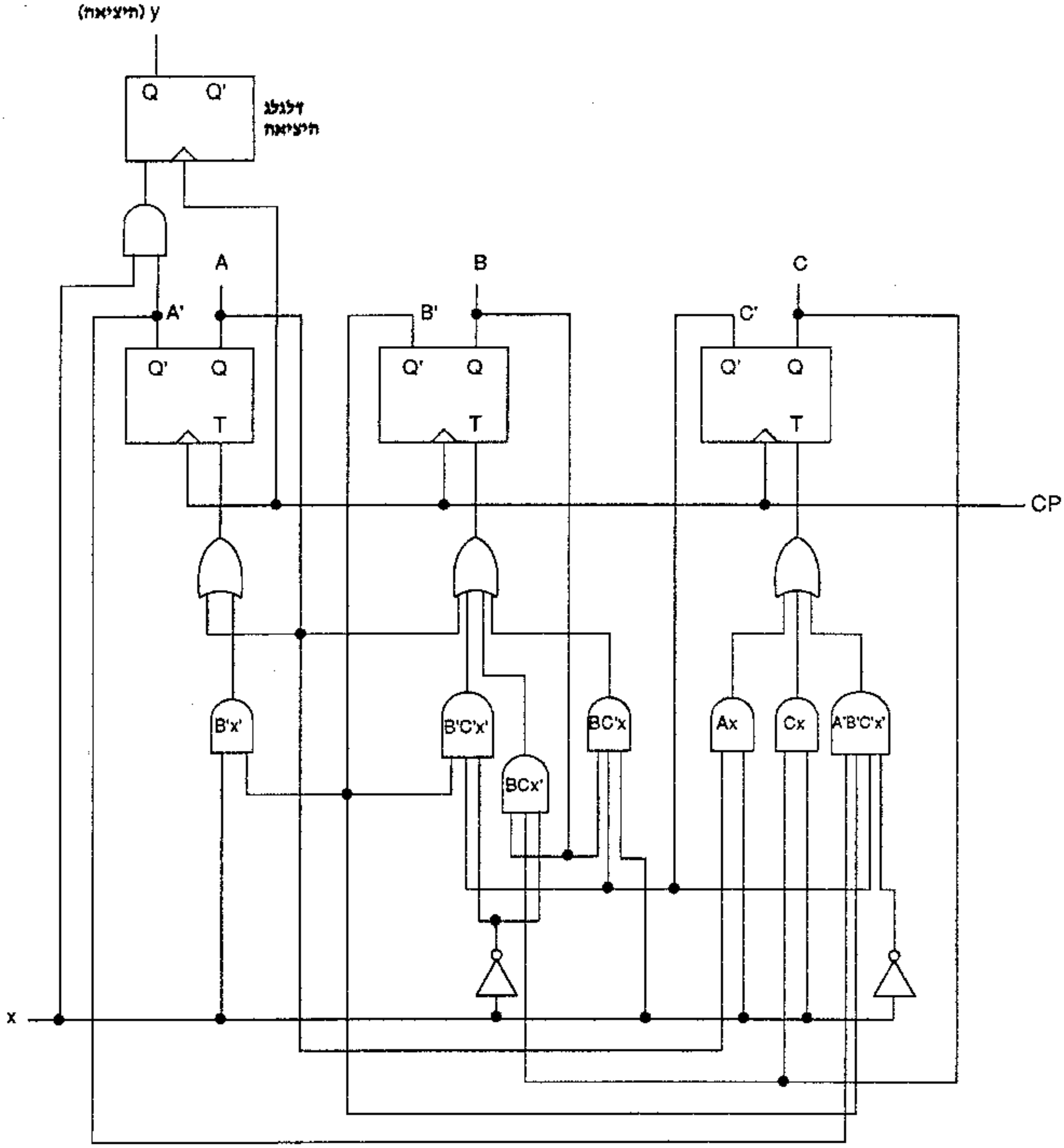
TC = Ax + Cx + A'B'C'x'



y = A'x

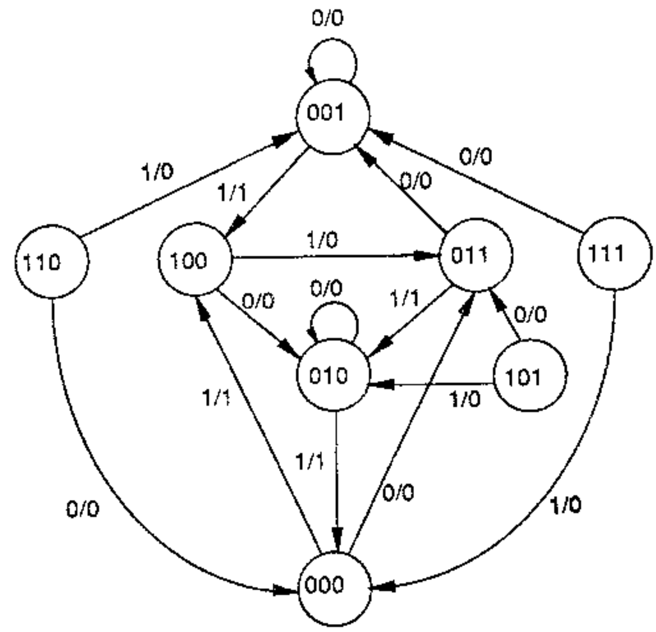
לכל אחת מהמפות שלעיל יש שישה X-ים בריבועי הצירופים האדישים: 10, 11, 12, 13, 14 ו-15.

להלן הדיאגרמה הלוגית שמקבלים מפונקציות בוליאניות אלה:



ניתוח המעגל שהתקבל:

להלן דיאגרמת המצבים:



אין משתמשים במצבים 101, 110 ו-111.

מהדיאגרמה שלעיל נובע כי המעגל פועל כשורה, כל עוד הוא נתון באחד המצבים התקפים: 000, 001, 010, 011, 100. אם בשלב כלשהו הוא יגיע לאחד המצבים הבלתי-תקפים 101, 110 או 111, הוא יעבור לאחד המצבים התקפים בדופק השעון הבא. לכן המעגל הוא בעל תיקון עצמי. המעגל הוא גם בעל אתחול עצמי, מכיוון שמכל מצב הוא עובר למצב ההתחלתי - 000.

תשובה 13

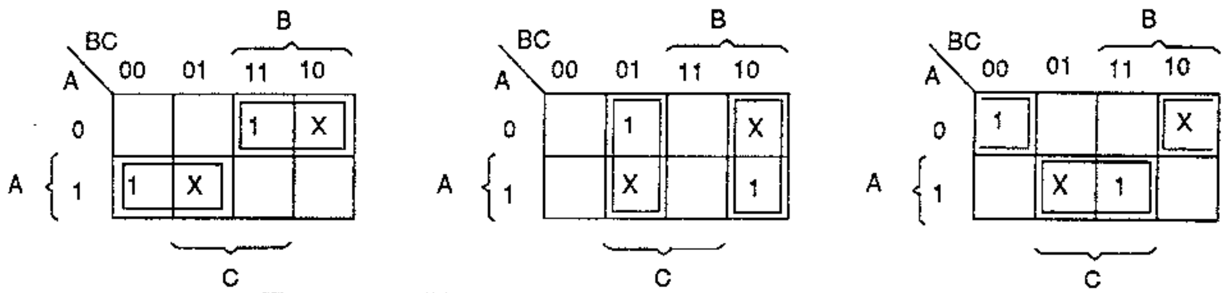
נעצב בעזרת דלגלי T מונה בעל הסדרה הבינרית 0, 1, 3, 7, 6, 4 וחוזר חלילה.

להלן טבלת העירור של מונה זה:

ABC	TA	TB	TC
000	0	0	1
001	0	1	0
011	1	0	0
111	0	0	1
110	0	1	0
100	1	0	0

$d(A,B,C) = \Sigma(2,5)$

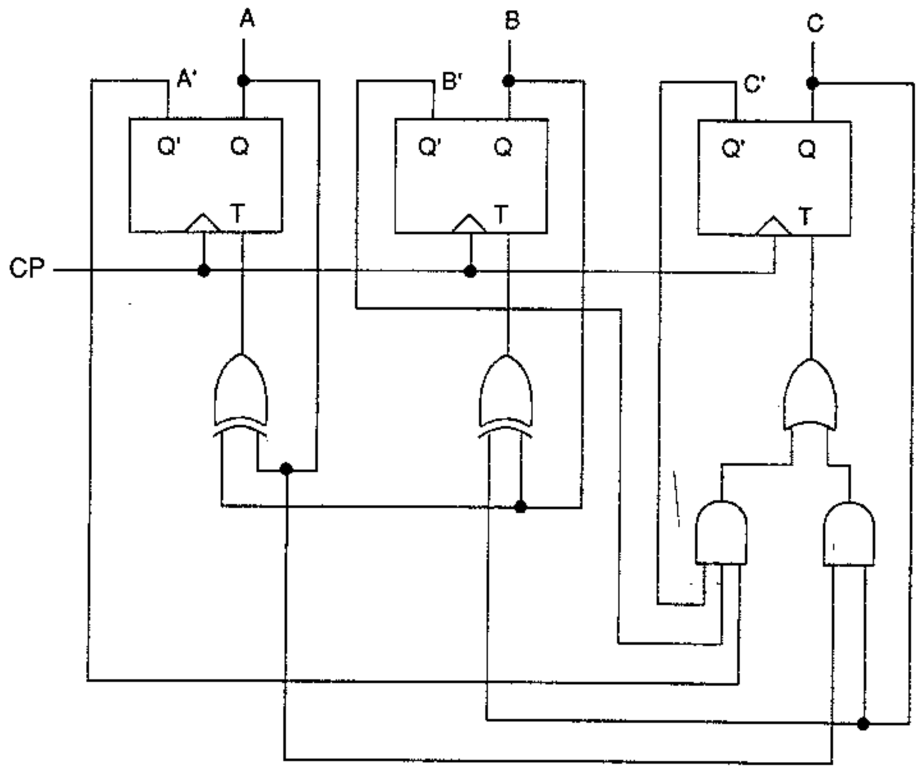
אין משתמשים במצבים 010, 101, ולכן אפשר להשתמש בהם כבצירופים אדישים כשמפשטים את פונקציות הכניסה של הדלגלגים.



$TA = A \oplus B$ $TB = B + C$ $TC = AC + A'C'$

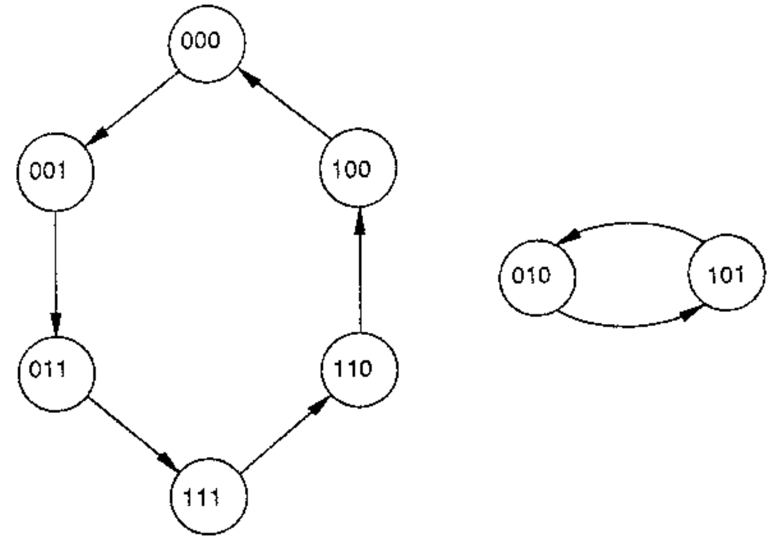
לחלופין אפשר לקבוע TC = AC + A'B'C (אם לא נשתמש בצירוף האדיש 010).

במקרה זה נקבל את המעגל הזה:



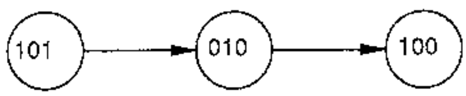
ניתוח המעגל:

להלן דיאגרמת המצבים:



מכאן רואים שאם המעגל נמצא במצב בלתי-תקף (אחד המצבים האדישים), אז הוא נמצא כל הזמן באחד המצבים הבלתי-תקפים.

אבל אם נשתמש בביטוי האחר המתקבל מהמפה - $TC = AC + A'B'C'$ - נקבל:



ומ-100 יגיע המונה למנייה הראשונה 000, ולכן המונה הוא בעל אתחול עצמי.

פרק 7

אוגרים, מונים ותאי זיכרון

בפרק זה נציג שלושה סוגים של מעגלים סדרתיים: אוגרים, מונים ותאי זיכרון. נעסוק בעיקר בשני הסוגים הראשונים.

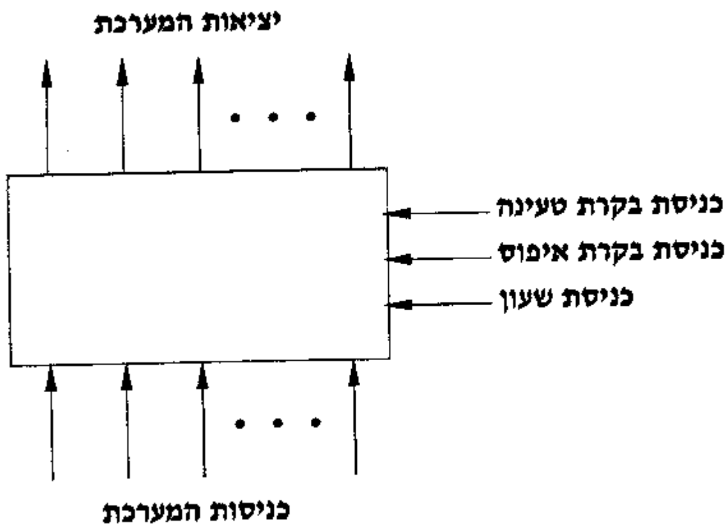
סעיף 7.1

קרא את סעיף 7.1 כולו.

סעיף 7.2

קרא את סעיף 7.2 עד התת-סעיף "מימוש באמצעות לוגיקה סדרתית" (לא כולל).

נבחן את המבנה הכללי של אוגר.



לא לכל אוגר יש כל כניסות הבקרה.

כניסת הבקרה של השעון הכרחית לסינכרון האוגר עם שאר רכיבי המערכת הספרתית.

כניסת האיפוס היא כניסה אסינכרונית; כלומר, ערכה יכול להשתנות בלי תלות בדופקי השעון.

אות בקרת הטעינה הוא אות בקרה סינכרוני.

כניסות הנתונים נטענות, כאשר ניתן אות בקרת טעינה (סוג הדרבון של האוגר קובע את החלק של מחזור השעון שבו יינתן אות בקרת הטעינה).

סיים לקרוא את הסעיף.

אם אינך זוכר מהו ROM, קרא שוב את סעיף 5.7.

שאלה 1

עצב את המעגל הסדרתי אשר טבלת המצבים שלו נתונה להלן. השתמש באוגר בעל 2 סיביות ובשערים צירופיים.

המצב הנוכחי A	המצב הנוכחי B	כניסה x	המצב הבא A	המצב הבא B
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

שאלה 2

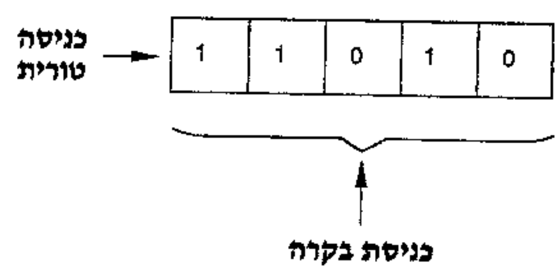
עצב מעגל סדרתי אשר דיאגרמת המצבים שלו נתונה באיור 6.27 (בפרק 6). השתמש באוגר בעל 3 סיביות וב- ROM בגודל 16×4.

סעיף 7.3

אוגרי הזזה הם קבוצה מיוחדת של אוגרים. התכונה המייחדת אותם היא שאפשר להזיז את המידע המאוחסן בהם.

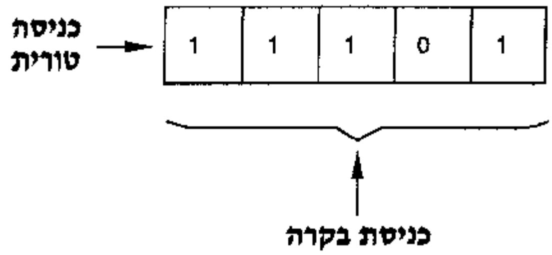
נמחיש זאת בעזרת דוגמה:

לפנינו אוגר הזזה בעל חמישה תאים. תוכן האוגר הוא 11010.

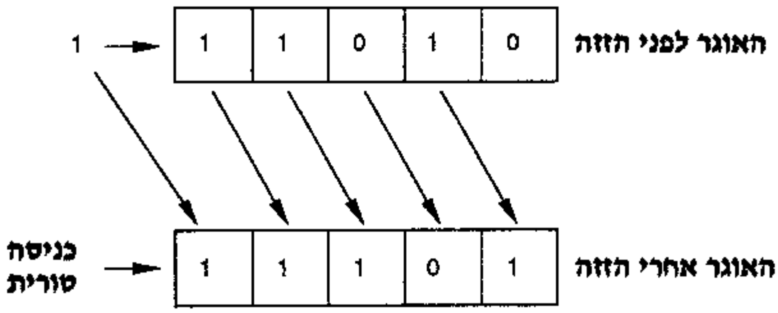


לאוגר יש שתי כניסות: כניסה טורית וכניסת בקרה.

כאשר ניתן אות הבקרה "הזז ימינה", תוכנו של כל תא עובר לתא שמימינו. לתא השמאלי ביותר ייכנס ערכה של הכניסה הטורית. אם נניח שערך הכניסה הטורית הוא 1, תוכן האוגר אחרי מתן אות הבקרה יהיה כלהלן:



נמחיש את הפעולה באופן גרפי:



קרא את סעיף 7.3 עד התת-סעיף "העברה טורית" (לא כולל).

שאלה 3

אוגר בעל 4 סיביות מאותחל ל-1101. האוגר מוזז שש פעמים ימינה, וקלט הכניסה הסדרתי הוא 101101 . מהו תוכן האוגר לאחר כל הזזה?

קרא את התת-סעיפים "העברה טורית" ו-"אוגר הזזה דו-כיווני בעל טעינה מקבילית".

שאלה 4

ניתן להשיג את אוגר ההזזה הדו-כיווני בעל טעינה מקבילית שבאיור 7.9 בצורת אריזה אחת של מעגל משולב.

1. סרטט תרשים של המעגל המשולב המתאר את כל הכניסות והיציאות של אריזה זו.

2. סרטט בעזרת שלושה מעגלים משולבים את התרשים המלבני של אוגר הזזה דו-כיווני בעל 12 סיביות.

נבחן עתה מעגל סדרתי המורכב משני אוגרי הזזה, מחבר ודלגלגים, המבצע חיבור טורי.

סיים לקרוא את סעיף 7.3.

שאלה 5

למחבר טורי כמו המחבר שבאיור 7.10 יש שני אוגרי הזזה בעלי 5 סיביות. האוגר A מאחסן את המספר הבינרי 00101 והאוגר B מאחסן את המספר הבינרי 00111. דלגלג הנשא Q מאופס. רשום את תוכנם של האוגר A והדלגלג Q לאחר כל הזזה.

סעיף 7.4

עתה נדון בסוג השני של מעגלים סדרתיים: מונים.
יש שני סוגים של מונים: מונים גליים ומונים סינכרוניים. תחילה נדון במונים הגליים.

קרא את סעיף 7.4 עד התת-סעיף "מונה BCD גלי" (לא כולל).

שאלה 6

שנה בעזרת דלגלגים המדורבנים במעבר החיובי את הסרטוט שבאיור 7.12 באופן שיתאר מונה 4 סיביות גלי.

לימוד פרק 7 מהתת-סעיף "מונה BCD גלי" עד סוף הפרק הוא רשות. הנך רשאי לסיים כאן את לימוד הפרק.

סיכום פרק 7

אוגרים

אוגר מורכב מדלגלגים (דלגלג עבור כל סיבית). ניתן לצרף לדלגלגים שערים לוגיים, ROM, PLA, מרבבים או דלגלגים יחידים נוספים.

דרכי העברת מידע בין אוגרים:

* העברה מקבילית - הנתונים מועברים מאוגר לאוגר בו-זמנית. לשם כך דרוש אוגר בעל כניסת בקרת טעינה.
* העברה טורית - הנתונים מועברים מאוגר לאוגר סיבית אחר סיבית. לשם כך דרוש אוגר הזזה וכניסת בקרת הזזה (ימינה או שמאלה).

אוגר הזזה דו-כיווני בעל טעינה מקבילית מאפשר להעביר נתונים בשתי הדרכים: הן באופן מקבילי והן באופן טורי (על ידי הזזה ימינה או שמאלה).

מונים

בחומר הלימוד יש רק מונים גליים.

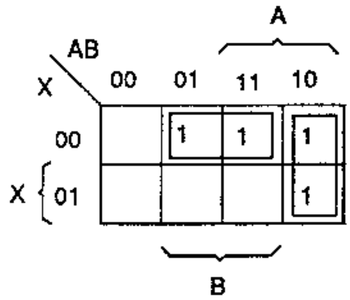
מונה גלי מורכב מסדרת דלגלגים (מסוג T או מסוג JK) שבה יציאת הדלגלג האחד מחוברת לכניסת ה-CP של הדלגלג הבא. דופק השעון מחובר רק לכניסת ה-CP של הדלגלג הראשון.

מבין המונים הגליים חומר הלימוד עוסק אך ורק במונים גליים בינריים (מונה מעלה ומונה מטה).

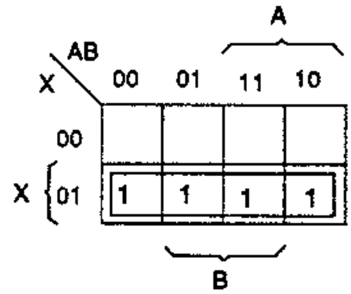
תשובות לשאלות בפרק 7

תשובה 1

בשאלה זו עלינו לעצב את המעגל הסדרתי שאת פעולתו מתארת טבלת המצבים הנתונה. כדי לעצב מעגל זה יש להשתמש בשני דלגלגים ובשערים צירופיים.
כדי למצוא את משוואות המצב של הדלגלגים ניעזר במפות קרנו:

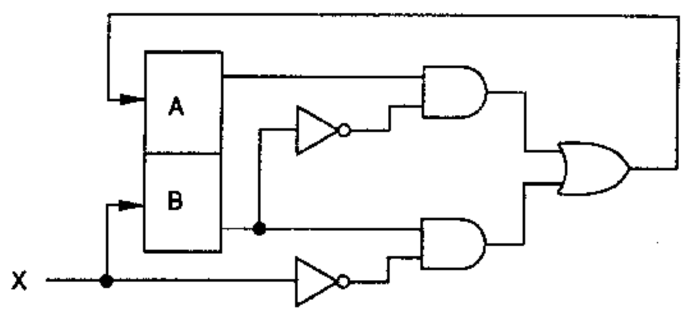


$A = AB' + Bx'$



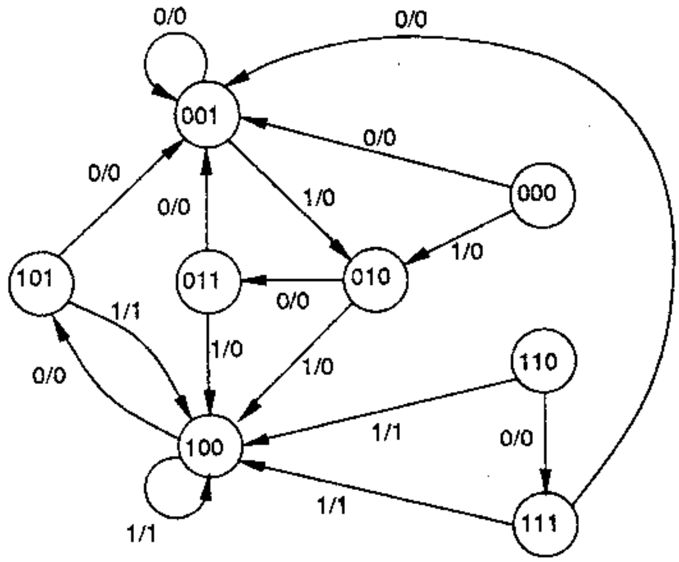
$B = x$

מקבלים את הדיאגרמה הלוגית הזו:



תשובה 2

יש לעצב מעגל סדרתי אשר דיאגרמת המצבים שלו, שנתונה באיור 6.27, היא:



נבנה את טבלת האמת של ה-ROM.

כניסות ה- ROM הן מצבי המערכת A,B,C והכניסה הנוספת - x. כלומר, ל-ROM הדרוש יש ארבע כניסות.

יציאות ה- ROM הן המצב הבא של המערכת A,B,C והיציאה הנוספת - y. כלומר, ל-ROM הדרוש יש ארבע יציאות.

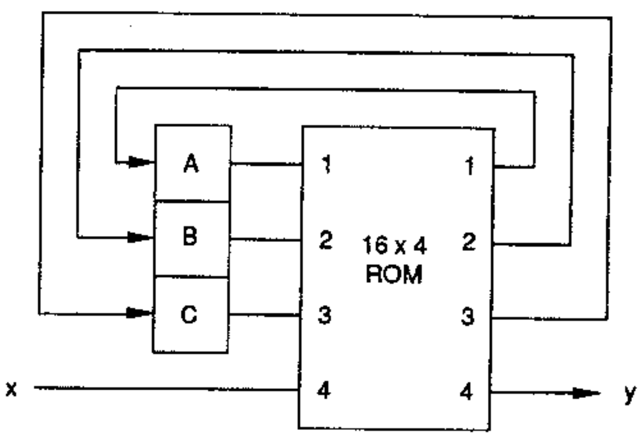
אם כן, גודל ה-ROM הוא $2^4 \times 4$. ערכי כניסות ה-ROM מייצגים מען בתוך ה-ROM, וביציאותיו מתקבלת המלה המאוחסנת במען הזה.

להלן טבלת האמת של ה-ROM:

0 0 0 0	0 0 1 0
0 0 0 1	0 1 0 0
0 0 1 0	0 0 1 0
0 0 1 1	0 1 0 0
0 1 0 0	0 1 1 0
0 1 0 1	1 0 0 0
0 1 1 0	0 0 1 0
0 1 1 1	1 0 0 0
1 0 0 0	1 0 1 0
1 0 0 1	1 0 0 1
1 0 1 0	0 0 1 0
1 0 1 1	1 0 0 1
1 1 0 0	1 1 1 0
1 1 0 1	1 0 0 1
1 1 1 0	0 0 1 0
1 1 1 1	1 0 0 1

בניית טבלת האמת של ה- ROM מסיימת את עיצוב המעגל.

להלן הדיאגרמה הלוגית שלו:



תשובה 3

בפעולת ההזזה ימינה כל אחת מהסיביות המאוחסנות באוגר מוזזת מקום אחד ימינה. הסיבית שהייתה במקום הימני ביותר נמחקת, ובמקום השמאלי ביותר נכנסת סיבית הקלט.

נסכם את התשובה בעזרת טבלה.

תוכן האוגר לפני הפעולה	סיבית הקלט	תוכן האוגר אחרי הפעולה
1 1 0 1	1	1 1 1 0
1 1 1 0	0	0 1 1 1
0 1 1 1	1	1 0 1 1
1 0 1 1	1	1 1 0 1
1 1 0 1	0	0 1 1 0
0 1 1 0	1	1 0 1 1

תשובה 4

1. לאוגר ההזזה הדו-כיווני בעל טעינה מקבילית יש עשר כניסות וארבע יציאות.

נמנה את כניסות האוגר:

כניסות בקרה: כניסת השעון (CP)

כניסת האיפוס (Clear)

שתי כניסות ברירה (Select- S_0,S_1)

כניסת נתונים טורית עבור הזזה ימינה

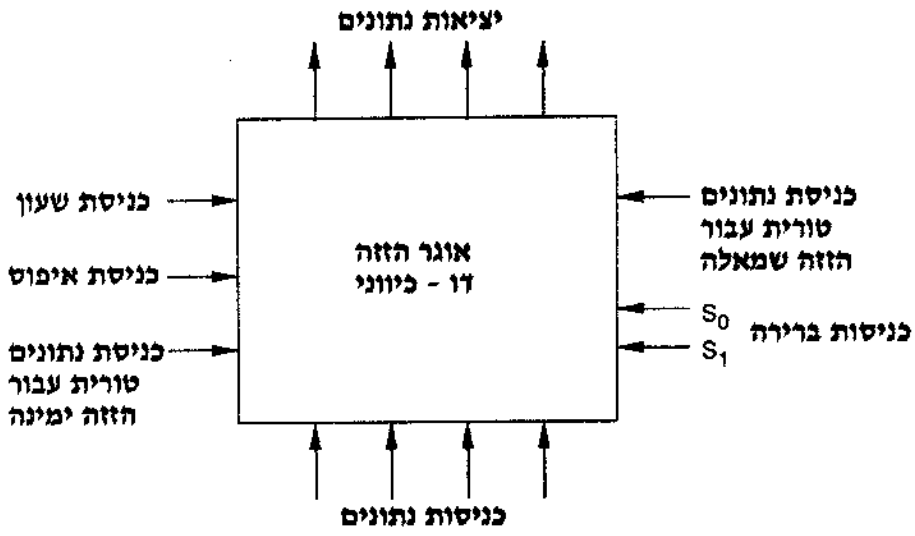
כניסת נתונים טורית עבור הזזה שמאלה

ארבע כניסות מקביליות עבור טעינת נתונים מקבילית

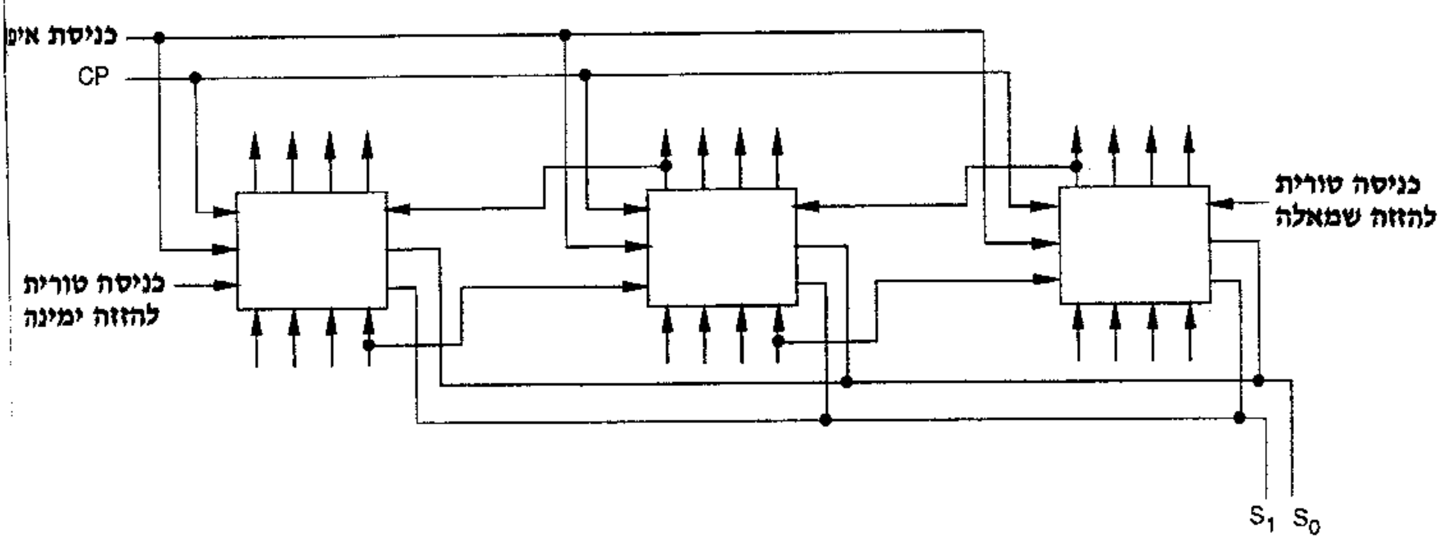
נמנה את יציאות האוגר:

ארבע יציאות מקביליות.

להלן תרשים מלבני של האוגר:



2. להלן תרשים מלבני של אוגר הזזה דו-כיווני בעל 12 סיביות. שים לב לכניסות הטוריות עבור שני סוגי ההזזות. הסיבית הימנית בכל אחד משני האוגרים הימניים מועברת לאוגר הסמוך בעת הזזה ימינה. פעולה דומה נעשית בזמן הזזה שמאלה.



תשובה 5

תוכן האוגר A לפני ההזזה	כניסות המחבר z y x	יציאות המחבר S	C	תוכן הדלגלג D (Q)	תוכן האוגר A לאחר ההזזה
0 0 1 0 1	0 1 1	0	1	1	0 0 0 1 0
0 0 0 1 0	1 1 0	0	1	1	0 0 0 0 1
0 0 0 0 1	1 1 1	1	1	1	1 0 0 0 0
1 0 0 0 0	1 0 0	1	0	0	1 1 0 0 0
1 1 0 0 0	0 0 0	0	0	0	0 1 1 0 0

תשובה 6

כדי לסמן את השינוי במעבר החיובי יש למחוק את המהפכים (העיגולים) בכניסות ה-CP. כמו-כן, במקום לחבר את היציאות (Q) לכניסות השעון יש לחבר אליהן את היציאות המשלימות (Q').

ניסת אינ
CP

ח טורית
ה ימינה