פרק 4 אלגברה בוליאנית

4.1 הגדרות בסיסיות

אלגברה בוליאנית – בדומה לכל מערכת מתמטית אחרת – ניתן להגדיר בתור: קבוצת איברים, קבוצת אופרטורים וכמה אקסיומות.

קבוצה זה אוסף של עצמים. אם S היא קבוצה, ו- y, x הם עצמים מסוימים, אזי פירושו של הסימון $x \in S$ הוא ש- x איבר בקבוצה S, ואילו הסימון : $y \notin S$ פירושו ש-y אינו איבר בקבוצה S.

קבוצה של איברים מסומנת ע"י זוג סוגרים (בצורת צמד) למשל: $A = \{1,2,3,4\}$. סימון זה פירושו שקבוצה A מכילה את המספרים 1 2 3 ו- 4.

אופרטור בינרי שמוגדר על קבוצת איברים S הוא: כלל שמתאים איבר יחיד לכל זוג איברים מתוך S. למשל נתבונן בביטוי : $a \times b = c$. נאמר ש-x הוא אופרטור בינרי (שמוגדר על S) אם הוא מגדיר כלל למציאת c עפ"י הזוג $\{a,b\}$ כאשר $a,b \in S$. (שים לב: יתכן ש-c לא שייך ל-S)

הגדרות למבנים אלגברים כללים:

1. **סגור** – קבוצה S נקראת סגורה ביחס לאופרטור בינרי, אם לכל זוג איברים מתוך S, האופרטור מגדיר כלל למציאת איבר יחיד שגם הוא שייך ל-S.

   דוגמאות :

   - קבוצת הטבעים $N = \{0,1,2,3...\}$ סגורה ביחס לאופרטור החיבור : + , כיוון שלכל $a,b \in N$ ניתן להתאים איבר C: $a+b=c$ ו- $C \in N$.
   - קבוצת הטבעים איננה סגורה ביחס לאופרטור החיסור – כי למשל $2,3 \in N$ אבל $2-3 \notin N$.

2. **חוק הקבוץ** – אופרטור בינרי •(כלשהוא) נקרא קבוצי אם לכל $z,x,y \in S$ קיים: (x•y)•z=x•(y•z)

   דוגמאות : - אופרטורי החיבור והכפל הינם קיבוציים .

   - אופרטורי החילוק והחיסור אינם קיבוציים . למשל: $(8:4):2 \neq 8:(4:2)$.

3. **חוק חילוף**: אופרטור בינרי • (כלשהוא)שפועל על קבוצה S נקרא **חלופי** (קומוטטיבי) אם לכל $x,y \in S$ קיים: x•y=y•x

   דוגמא : אופרטורי החילוק והחיסור אינם חילופיים ..

4.2 הגדרה אקסיומטית של אלגברה בוליאנית.

אלגברה בוליאנית מוגדרת עבור קבוצה B בת 2 איברים. $B = \{0,1\}$ באלגברה זו קימים 3 אופרטורים:

א. אופרטור **האיחוד** מסומן באחת מ-3 האפשרויות : + או **OR** או $\cup$.

ב. אופרטור **החיתוך** מסומן באחת מ-3 האפשרויות : • או AND או $\cap$.

ג. אופרטור **משלים** (NOT) . מסמנים את המשלים של x: ע"י x' או $\bar{x}$.

הערה: לגבי אופרטור **החיתוך (AND)** מקובל להשמיט את סימון האופרטור ולרשום את המשתנים צמודים זה לזה . למשל הביטוי : XY משמעותו : X•Y .

4.2.1 כללים עבור האופרטורים:

אופרטור NOT

x	x'
0	1
1	0

אופרטור OR

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

אופרטור AND

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4.2.2 כללים (תכונות יסודיות) של אלגברה בוליאנית . (נקראים : כללי HANTINGTON).

כלל 1) טענה : קבוצה B סגורה ביחס לכל אחד מהאופרטורים • , + או NOT.

ניתן להסיק זאת מהטבלאות של האופרטורים , כיוון שהתוצאה של כל פעולה היא 1 או 0 וכמובן ש- $1,0 \in B$.

כלל 2) א. $x+0=0+x=x$ ב. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

ניתן לאמת את הכלל מהטבלאות של האופרטורים ע"י בחירת כל האפשרויות היינו עבור $x=0$ $x=1$.

כלל 3) חילוף (קומטטיביות)

א. $x+y=y+x$.

הוכחה : באמצעות טבלת אמת

x	y	$x+y$	$y+x$
0	0	$0+0=0$	$0+0=0$
0	1	$0+1=1$	$1+0=1$
1	0	$1+0=1$	$0+1=1$
1	1	$1+1=1$	$1+1=1$

ב. $x \cdot y = y \cdot x$ ניתן להוכיח ע"י בניית טבלת אמת כפי שעשינו לעיל בסעיף א.

כלל 4) פילוג (דיסטריביטיביות)

א. $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

ניתן להראות ע"י בניית טבלת אמת עבור כל ערכים אפשריים של x,y,z, ועבור כל צירוף של x,y,z. נראה שערך של $x\cdot(y+z)$ זהה לערך של $x\cdot y+x\cdot z$.

ב. $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$ - כלל לא נכון באלגברה הרגילה .

<u>הוכחה</u>: עפ"י טבלת אמת.

כלל 5) א. $x+x'=1$

<u>הוכחה</u>: עבור $x=0$: $0+0'=0+1=1$

עבור $x=1$: $1+1'=1+0=1$

ב. $x\cdot x'=0$

<u>הוכחה</u>: כמו בחלק א .

רשימת הכללים דלעיל מהווים אקסיומות (הנחות יסוד <u>) שמהם ניתן להוכיח את המשפטים הבאים</u>.
לפני שנביא את המשפטים ונוכיחם נביא עקרון חשוב מאד של האלגברה הבוליאנית שנקרא: <u>עקרון הדואליות</u>.

4.3 <u>**עקרון הדואליות**</u>: אם בכלל נכון <u>או</u> במשפט <u>נכון</u> באלגברה בוליאנית , נחליף את האופרטורים (AND) ו-(OR) זה בזה וכן נחליף את כל ה-"0" ב- "1" ואת כל ה-"1" ב-"0" נקבל ביטוי בוליאני נכון.

<u>הערה חשובה</u>: במציאת ביטוי דואלי <u>לא</u> מחליפים <u>משתנים</u> למשל x ב-x' ולא x ב-y וכדומה, אלא רק "0" ב-"1", ואופרטורים AND ב-OR זה בזה .

<u>יתרון גדול בעקרון הדואליות</u> שאין צורך להוכיח 2 משפטים דואלים אחד עם השני , אלא מספיק להוכיח משפט אחד וממילא המשפט הדואלי נכון.

שים לב <u>שבכללים</u> שהובאו לעיל, לכל כלל 2 חלקים. 2 החלקים הינם דואלים .

דוגמאות :

למשל בכלל 3 : $x+y=y+x$

דואלי שלו הוא: $x\cdot y=y\cdot x$

למשל בכלל 5 : $x+x'=1$

דואלי שלו הוא: $x\cdot x'=0$

רשות : הוכחת עיקרון הדואליות . (עיין קודם במשפט 5 שמובא לקמן)

עקרון הדואליות בצורה פורמלית .

אם מתקיים :

$$P(x,y,\ldots,0,1,AND,OR,NOT)= Q(x,y,\ldots,0,1,AND,OR,NOT) \;*$$

מתקיים גם :

$$P(x,y,\ldots,1,0,OR,AND,NOT)= Q(x,y,\ldots,1,0,OR,AND,NOT)$$

הוכחה :

ניקח את הביטוי * ונעשה פעולת הופכי (NOT) על 2 צידי הזהות .

לאחר מכן נפעיל את חוקי דה –מורגן על 2 צידי הזהות ונקבל את הזהות הבאה :

$$P(x',y',\ldots,1,0,OR,AND,NOT)= Q(x',y',\ldots,1,0,OR,AND,NOT)$$

נציב בביטוי האחרון 'x במקום x (לכל המשתנים ב-2 האגפים) ונשתמש בעובדה ש- x"=x .

פעולות אלו מוכיחות את המשפט . [ניתן להוכיח את עקרון הדואליות ישירות באמצעות אינדוקציה]

4.4 משפטים באלגברה בוליאנית .

כעת נביא מספר משפטים ונוכיחם על סמך הכללים ושימוש גם בעקרון הדואליות : (אפשר להוכיח גם ע"י הצבת ערכים בטבלאות האמת).

משפט 1-א $x+x=x$

הוכחה : לפי כלל 2-ב $\leftarrow x+x=(x+x)\cdot 1=$

אפשר גם עפ"י הצבת ערכים.

לפי כלל 5-א $\leftarrow =(x+x)\ (x+x')=$

לפי כלל 4-ב $\leftarrow =x+x\cdot x'=$

לפי כלל 5-ב $\leftarrow =x+0=$

לפי 2-א $=x$

משפט 1-ב $x\cdot x=x$

הוכחה : לפי כלל 2-א $\leftarrow xx=xx+0=$

לפי כלל 5-ב $=xx+xx'=$

לפי כלל 4-א $=x(x+x')=$

לפי כלל 5-א $=x\cdot 1=$

לפי כלל 2-א $=x$

למעשה מיותר היה להוכיח משפט 1-ב כי הוא דואלי למשפט 1-א.

משפט 2-א $x+1=1$

הוכחה : לפי כלל 2-ב $\leftarrow x+1=1\cdot(x+1)$

לפי כלל 5-א $\leftarrow =(x+x')(x+1)=$

לפי כלל 4-ב $\leftarrow =x+x'\cdot 1=$

לפי כלל 2-ב $\leftarrow =x+x'=$

לפי כלל 5-א $=1$

משפט 2-ב $x\cdot 0=0$

הוכחה : ביטוי זה הינו דואלי למשפט- 2-א.

משפט 3 $(x')'=x$

לפי הצבת ערך : $(0')'=(1)'=0$

$(1')'=(0)'=1$

משפט 4-א $x+(y+z)=(x+y)+z$

משפט 4-ב $x(yz)=(xy)z$. (שים לב שהאופרטור בין המשתנים הינו AND.)

הוכחה : ניתן להוכיח באמצעות טבלת אמת.

משפט 5 **משפט דה מורגן.**

א. $(xy)'=x'+y'$ ב. $(x+y)'=x'\cdot y'$

אפשר לאמת את נכונות המשפט ע"י טבלת אמת.

משפט 6 א. $x + xy = x$

הוכחה: לפי כלל 2-ב $x + xy = x \cdot 1 + xy \leftarrow$

לפי כלל 4-א $= x(1 + y)$

לפי כלל 3-א $= x(y + 1)$

לפי משפט 2-א $= x \cdot 1$

לפי כלל 2-ב $= x$

ב. משפט דואלי ל-6א' $x \cdot (x + y) = x$

נוכיח את משפט 6-א לפי טבלת אמת .

x	y	xy	$x + xy$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

רואים בטבלה שבכל שורה : $x + xy = x$

משפט 7 א. $x + x'y = x + y$

ב. $x(x' + y) = xy$ (דואלי ל-א')

4.5 קדימות אופרטורים.

קדימות האופרטורים לצורך חישוב ערכם של ביטויים בוליאניים:

האופרטור	הקדימות
( )	1
NOT	2
AND	3
OR	4

כלומר: ביטוי בתוך סוגריים יש לחשב לפני ביצוע כל הפעולות האחרות. הפעולה הבאה מבחינת קדימות היא משלים (NOT) אחר כך AND ולבסוף OR.

לדוגמא: ביטוי בוליאני (או פונקציה כפי שנראה בהמשך)

$$F(x, y) = (xy + \bar{x}) \cdot y$$

לפי כללי הקדימות: קודם מבצעים חישוב בתוך סוגריים . בתוך סוגריים קודם משלים (NOT) אחר כך AND בין x ו- y לאחר מכן OR עם 'X ואח"כ AND עם y.

4.6 דף סכום של כללים ומשפטים באלגברה בוליאנית.

כלל 1 : קבוצה $B=\{0,1\}$ הינה סגורה ביחס לאופרטורים : AND, OR, NOT.

כלל 2 : א. $X+0=0+X=X$ ב. $x\cdot 1=1\cdot X=x$

כלל 3 : חילוף. א. $X+Y=Y+X$ ב. $X\cdot Y=Y\cdot X$

כלל 4 : פילוג. א. $X\cdot(Y+Z)=X\cdot Y+X\cdot Z$ ב. $X+(Y\cdot Z)=(X+Y)\cdot(X+Z)$

כלל 5 : א. $X+X'=1$ ב. $X\cdot X'=0$

משפט 1 : א. $X+X=X$ ב. $X\cdot X=X$

משפט 2 : א. X+1=1 ב. X·0=0

משפט 3 : (X')'=X

משפט 4 : א. $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$ ב. $X\cdot(Y\cdot Z)=(X\cdot Y)\cdot Z$

משפט 5 : (דה-מורגן) א. $(X\cdot Y)'=X'+Y'$ ב. $(X+Y)'=X'\cdot Y'$

דה-מורגן המוכלל : א. $(X_1\cdot X_2\cdots X_n)'=X'_1++++X'_n$ ב. $(X_1++++X_n)'=X'_1\cdots X'_n$

משפט 6 : א. $X+X\cdot Y=X$ ב. $X\cdot(X+Y)=X$

משפט 7 : א. $X+X'Y=X+Y$ ב. $X\cdot(X'+Y)=X\cdot Y$

4.7 מערכת פעולות שלמה

הגדרה : קבוצת פעולות נקראת שלמה אם ניתן להציג באמצעותה את כל הפונקציות הלוגיות.

כפי שלמדנו פעולות היסוד של האלגברה הבוליאנית הינן : AND, OR, NOT. באמצעותן ניתן לבטא כל קשר בין משתנים בוליאניים, כלומר כל פונקציה בוליאנית ניתנת לתיאור באמצעות משתניה ופעולות היסוד.

לכן : { ', + , • }היא קבוצה שלמה.

ע"י חוקי דה-מורגן ניתן להראות כי גם הקבוצות הבאות שלמות : $\{+,'\}$, $\{\cdot,'\}$. (נוכיח בתרגול).

טענה : הפעולה NOR המוגדרת ע"י $x \text{ NOR } y = (x+y)'$ הינה קבוצה שלמה.

הוכחה : נראה כי ניתן לממש קבוצה שלמה $\{\cdot,'\}$ ע"י NOR בלבד.

$$x \text{ NOR } x = (x+x)' = x'$$

$$(x \ NOR \ x) \ \ NOR \ \ (y \ NOR \ y) = (x'+y')' = x \cdot y$$

ממשנו פעולות AND ו- NOT וטענו לעיל שקבוצה שמכילה פעולות אלו הינה שלמה.

4.8 מערכת חצי שלימה.

הגדרה : מערכת פעולות נקראת חצי שלמה אם הינה שלמה רק בתוספת קבועים 0 או 1 או שניהם.

דוגמא : נתונה פונקציה $f(X,Y) = X'+Y$

א. מערכת זו אינה שלמה כי אי אפשר לממש X' $f(X,X) = X'+X = 1$

ב. בתוספת '0' אזי : $f(X,0) = X'$ ממשנו פעולות : $\{',+\}$ בתוספת קבוע 0 לכן מערכת חצי שלמה.

הערה : לא נכון לומר שניתן לייצר את X' ע"י $f(X,X') = X'+X' = X'$.

סיבה : לא ניתן לייצר את X' ללא שימוש בקבועים. אחרי שמצאנו ע"י שימוש בקבועים את x' ע"י $f(x,0)=x'$ אזי :

$f\left[\underbrace{f(X,0)}_{X'},Y\right] = (X')'+Y = X+Y$ - כלומר ממשנו $\{',+\}$ בתוספת קבוע ולכן הקבוצה חצי שלמה.