פרק 7

מינימזציה (פישוט) של פונקציות בשיטת הטבלה

7.1 הקדמה :

שיטת הפישוט באמצעות מפת קרנו היא נוחה כל עוד מספר המשתנים אינו גדול מ-5 או מ-6. ככל שמספר המשתנים גדל אזי מספר הרבועים הרב מונע בחירה נבונה של רבועים סמוכים שכדאי לצרף. (כלומר זו לא דרך שיטתית שמביאה לפישוט מכסימלי אלא תלוי ביכולת אנושית לזהות תבניות).

מטרה : פיתוח דרך שיטתית לפישוט פונקציות בוליאניות .

השיטה נקראת **שיטת הטבלה** . (TABULATION METHOD).

שיטה זו מבטיחה ייצור ביטוי מפושט בצורה סטנדרטית (היינו שיטתית) עבור פונקציה נתונה.

ניתן להשתמש בה לפישוט פונקציות בעלות מספר רב של משתנים.

יתרון גדול של השימוש בשיטה: השיטה מתאימה לחישובים שמתבצעים ע"י מכונה (כפי שנראה מבחינה אנושית אמנם זה עבודה מיגעת). שיטת הטבלה ידוע גם בשם QUINE MCCLUSKEY (ע"ש ממציא השיטה).

תאור השיטה בצורה כללית ביותר . (**נדבר בשלב זה על פישוט בצורת SOP**) .

האלגוריתם (השיטה) מורכב משני חלקים :

שלב א': מציאת כל הגורמים המועמדים להיכלל בפונקציה המפושטת (ע"י חיפוש ממצה, שנסבירו בהמשך) גורמים אלו נקראים רכיבים "ראשונים" או PRIME IMPLICANT (PI).

שלב ב': מבין כל הרכיבים הראשונים (שנמצאו בשלב א') יש לבחור את אלה הנותנים ביטוי בעל מספר גורמים קטן ביותר (שלב זה נקרא בחירת רכיבים ראשונים שיוצרים את הפונקציה המצומצמת).

7.2 תאור האלגוריתם בצורה מפורטת עבור פונקציה בצורת SOP .

7.2.1 קביעת רכיבים ראשונים (PRIME IMPLICANT).

ראשית, יש לרשום את הפונקציה באמצעות מכפלות סטנדרטיות אשר מגדירות את הפונקציה (ע"י טבלת אמת למשל וכו') לאחר מכן נבצע תהליך זיווג (MERGE) שבסופו נקבל רכיבים ראשונים. בתהליך הזיווג משוים כל מכפלה סטנדרטית לכל מכפלה סטנדרטית אחרת. אם שתי מכפלות סטנדרטיות נבדלות במשתנה אחד בלבד, משמיטים משתנה זה ומתקבל גורם בעל ליטרל אחד פחות. יש לחזור על תהליך זה עבור כל מכפלה סטנדרטית עד אשר החיפוש הממצה יסתיים. מחזור תהליך הזיווג חוזר על עצמו עבור הגורמים החדשים שנמצאו עד עתה. יש להמשיך במחזור שלישי ובמחזורים נוספים, עד אשר במעבר יחיד, אי אפשר להשמיט עוד ליטרלים (או לא נוכל לזווג).

הגורמים שלא ניתן היה לזווגם במשך התהליך יוצרים את הרכיבים הראשונים.

דוגמא: פשט את הפונקציה הבאה באמצעות שיטת הטבלה:

$$F(w,x,y,z)=\sum(0,1,2,8,10,11,14,15)$$

נרשום הטבלה ואחר נסביר איך מקבלים אותה.

עמודה 1		עמודה 2		עמודה 3	
ערך דצימלי	w,x,yz	משודכים	w,x,yz	משודכים	w,x,yz
0	√ 0000	(0,1)	000–	(0,2,8,10)	–0–0
1	√ 0001	(0,2)	√ 00–0	(0,8,2,10)	–0–0
2	√ 0010	(0,8)	√ -000	(10,11,14,15)	1–1–
8	√ 1000	(2,10)	√ -010	(10,14,11,15)	1–1–
10	√ 1010	(8,10)	√ 10–0		
11	√ 1011	(10,11)	√ 101–		
14	√ 1110	(10,14)	√ 1–10		
15	√ 1111	(11,15)	√ 1–11		
		(14,15)	√ 111–		

הסבר לאופן קבלת הטבלה

שלב 1: מחלקים את המכפלות הסטנדרטיות בהצגתן הבינרית לקבוצות בהתאם למספר ה-1-ים שהן מכילות, כפי שניתן לראות בעמודה (1) של הטבלה.

נעשה זאת על-ידי חלוקת המכפלות הסטנדרטיות לחמש קבוצות, המופרדות בקווים אופקיים. הקבוצה הראשונה מכילה את המספר שאין בו 1-ים. הקבוצה השניה מכילה את המספרים שבהם יש 1 יחיד. הקבוצות השלישית, הרביעית והחמישית מכילות את המספרים שבהם יש שניים, שלושה וארבעה 1-ים בהתאמה. שווי-הערך העשרוניים של המכפלות הסטנדרטיות מופיעים אף הם – לצורך נוחות בזיהוי המספרים.

שלב 2: ניתן לצרף כל שתי מכפלות סטנדרטיות הנבדלות זו מזו במשתנה אחד בלבד, ולהשמיט את המשתנה המבדיל ביניהן. במילים אחרות ניתן לצרף שני מספרי מכפלות סטנדרטיות, אם ערכי הסיביות שלהם זהים בכל המקומות פרט לאחד. ההשוואה נעשית רק בין המכפלות הסטנדרטיות בקבוצה אחת לבין המכפלות הסטנדרטיות בקבוצה העוקבת (בכיוון מטה), משום שלא ניתן לזווג שני גורמים הנבדלים ביותר מסיבית אחת. את המכפלה הסטנדרטית בקבוצה הראשונה משווים לכל אחת משלוש המכפלות הסטנדרטיות בקבוצה השנייה. אם שני מספרים כלשהם זהים בכל המקומות פרט לאחד, נסמן √ לשתי המכפלות הסטנדרטיות כדי לציין שכבר השתמשנו בהן. הגורם המתקבל כתוצאה, יחד עם שווי-הערך העשרוניים, מופיע בעמודה (2) של

הטבלה. המשתנה שהושמט בעת הזיווג מסומן על-ידי מקף במקומו המקורי. במקרה זה המכפלה הסטנדרטית $m_0(0000)$ מצורפת ל- $m_1(0001)$ ומתקבל (-000). צירוף זה שקול לפעולה האלגברית הבאה :

$$m_0 + m_1 = w'x'y'z' + w'x'y'z = w'x'y'$$

המכפלה הסטנדרטית m_0 מצורפת גם ל- m_2 ומתקבל $(00-0)$ וכן ל- m_8 ומתקבל (-000). תוצאת השוואה זו נרשמת בקבוצה הראשונה של עמודה (2). כעת משווים בין המכפלות הסטנדרטיות של הקבוצות השנייה והשלישית של עמודה (1) כדי ליצור את הגורמים המופיעים בקבוצה השניה של עמודה (2). בין יתר הקבוצות של (1) נערכת השוואה באופן דומה, ובדרך זו נוצרות ארבע הקבוצות של (2).

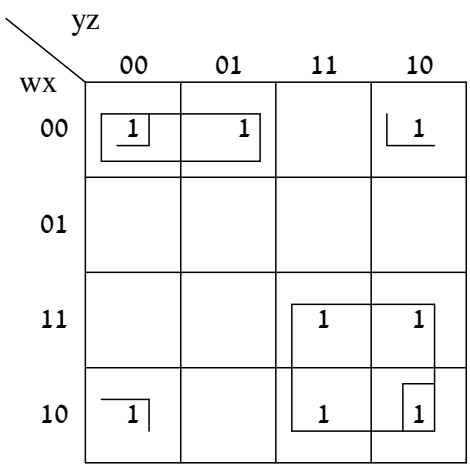
<u>שלב 3</u>: הגורמים שבעמודה (2) הינם בעלי שלושה משתנים בלבד. אם רשומה הספרה 1 מתחת למשתנה, פירושו שהמשתנה אינו מותג; ואם רשומה הספרה 0, פירושו שהוא מותג; ומקף פירושו שהמשתנה אינו נכלל בגורם. יש לחזור על תהליך החיפוש וההשוואה עבור הגורמים שבעמודה (2) כדי ליצור גורמים בעלי שני משתנים בעמודה (3). שוב, יש לזווג גורמים הנמצאים בשתי קבוצות עוקבות ואשר בהם <u>מופיעים מקפים באותו מקום</u>. שים לב, שהגורם (-000) אינו מתאים לשום גורם אחר מבחינת מיקום המקף שלו. לכן הסימן √ אינו מופיע לידו . שווי-הערך העשרוניים נכתבים בצידו השמאלי של כל גורם למטרות זיהוי. יש לחזור על תהליך ההשוואה בעמודה (3) ובעמודות הבאות אחריה, כל עוד מצליחים לזווג בין מכפלות. באופן שהוגדר בדוגמא הנוכחית הפעולה נפסקת בעמודה השלישית.

<u>שלב 4</u>: הגורמים בטבלה שלא סומנו ב-√ יוצרים את הרכיבים הראשוניים. בדוגמא זו הגורמים הללו הם $w'x'y'(-000)$ בעמודה (2), והגורמים $x'z'(-0-0)$ ו- $wy(1-1-)$ בעמודה (3). שים לב, שכל גורם בעמודה (3) מופיע פעמיים בטבלה, וכל עוד הגורם יוצר רכיב ראשוני **אין צורך להשתמש באותו גורם פעמיים**. סכום הרכיבים הראשוניים מהווה ביטוי מפושט עבור הפונקציה, משום שכל גורם בטבלה שסומן ב-√ נלקח בחשבון על-ידי גורם פשוט יותר בעמודה שאחריו. בדוגמא הזו סכום הרכיבים הראשוניים יוצר את הפונקציה המצומצמת בצורת סכום מכפלות :

$$F = w'x'y' + x'z' + wy$$

נשווה את תוצאה זו לתוצאה שמתקבלת בעזרת שיטת המפה.

האיור הבא מראה את אופן הפישוט של פונקציה זו באמצעות מפת קרנו :



שים לב לרביעיה בקצוות .

הצירופים של ריבועים סמוכים נותנים את שלושת הרכיבים הראשוניים של הפונקציה. הסכום של שלושה גורמים אלה הנו הביטוי המפושט בצורת סכום מכפלות.

חשוב לציין, שהדוגמא האחרונה נבחרה במתכוון כך שהפונקציה שלאחר הפישוט תתקבל מתוך סכום הרכיבים הראשוניים. בדרך כלל סכום הרכיבים הראשוניים אינו יוצר בהכרח את הביטוי בעל מספר הגורמים המינימלי. ניתן לראות זאת בדוגמא הבאה .

דוגמא שבה נדרש שלב ב' באלגוריתם.

מצא את כל הרכיבים הראשוניים של הפונקציה הזו :

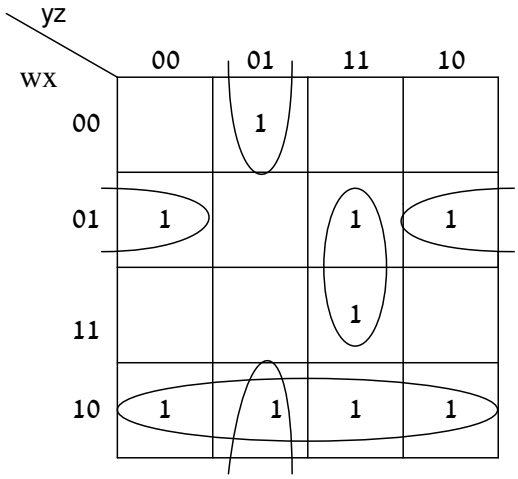
$$F(w,x,y,z)=\sum(1,4,6,7,8,9,10,11,15)$$

יש לחלק את מספרי המכפלות הסטנדרטיות לקבוצות כבטבלה הבאה.

ערך עשרוני	עמודה 1 wxyz	עמודה 2 wxyz משודכים		עמודה 3 wxyz משודכים	
1	0001 √	1, 9	-001	8, 9, 10, 11	10--
4	0100 √	4, 6	01-0	8, 10, 9, 11	10--
8	1000 √	8, 9	√100-		
6	0110 √	8, 10	√10-0		
9	1001 √	6, 7	011-		
10	1010 √	9 , 11	√10-1		
7	0111 √	10 ,11	√ 101-		
11	1011 √	7 , 15	-111		
15	1111 √	11 , 15	1-11		

רכיבים ראשוניים		
עשרוני	בינרי $w\ x\ y\ z$	גורם
1, 9	$-0\ 0\ 1$	$x'y'z$
4, 6,	$0\ 1-0$	$w'xz'$
6, 7,	$0\ 1\ 1-$	$w'xy$
7, 15,	$-1\ 1\ 1$	xyz
11, 15,	$1-1\ 1$	wyz
8, 9, 10, 11	$1\ 0--$	wx'

סכום הרכיבים הראשונים נותן ביטוי אלגברי תקף עבור הפונקציה. למרות זאת, ביטוי זה אינו בהכרח בעל המספר המינימלי של גורמים. ניתן לראות זאת מתוך התבוננות במפת הפונקציה של הדוגמה האחרונה .



הפונקציה המצומצמת, כפי שניתן לראות ממפת קרנו הינה : $F = x'y'z + w'xz' + xyz + wx'$

פונקציה זו מורכבת מסכום של ארבעה מתוך ששת הרכיבים הראשוניים שהתקבלו בשלב א של האלגוריתם .

בסעיף הבא נלמד את שיטת הטבלה לבחירת הרכיבים הראשוניים כדי לקבל את הפונקציה המצומצמת.

<u>מסקנה</u>: שלב א' באלגוריתם לא נתן מינימום וצריך שלב ב'.

7.2.2 <u>שלב ב באלגוריתם-בחירת רכיבים ראשוניים .</u>

בחירת הרכיבים הראשוניים היוצרים את הפונקציה המצומצמת נעשית מתוך טבלת הרכיבים הראשוניים. בטבלה זו כל רכיב ראשוני מיוצג בשורה, וכל מכפלה סטנדרטית שמופיעה בפונקציה-בעמודה. בכל שורה מופיעים X-ים כדי להראות את המכפלות הסטנדרטיות המרכיבות את הרכיבים הראשוניים. כעת בוחרים קבוצה מינימלית של רכיבים ראשוניים המכסה את כל המכפלות הסטנדרטיות של הפונקציה. דוגמא הבאה מבהירה את השיטה .

<u>דוגמא</u>: צמצם את הפונקציה שבדוגמא האחרונה . (הראינו ששלב א לא נתן לנו מינימום) .

צמצם $F(w,x,y,z) = \sum(1,4,6,7,8,9,10,11,15)$

הרכיבים הראשוניים לדוגמא זו מופיעים בטבלה הבאה הנקראת : **טבלת רכיבים ראשוניים** :

		1	4	6	7	8	9	10	11	15
$\sqrt{}\, x'y'z$	1, 9	X					X			
$\sqrt{}\, w'xz'$	4, 6		X	X						
$w'xy$	6, 7			X	X					
xyz	7, 15				X					X
wyz	11, 15								X	X
$\sqrt{}\, wx'$	8, 9, 10, 11					X	X	X	X	
		$\sqrt{}$	$\sqrt{}$	$\sqrt{}$		$\sqrt{}$	$\sqrt{}$	$\sqrt{}$	$\sqrt{}$	

בטבלה יש שש שורות, אחת לכל רכיב ראשוני (שהתקבל בדוגמא האחרונה בשלב א) ותשע עמודות, שכל אחת מהן מייצגת מכפלה סטנדרטית אחת של הפונקציה. בכל שורה מסומנים X-ים כדי לציין את המכפלות הסטנדרטיות הנכללות ברכיב ראשוני של שורה זו. למשל : שני ה-X-ים בשורה הראשונה מציינים , שהמכפלות הסטנדרטיות 1 ו- 9 נכללות ברכיב הראשוני x'y'z . רצוי לכתוב את שווה הערך העשרוני של הרכיב הראשוני בכל שורה . כך מקבלים בצורה נוחה את המכפלות הסטנדרטיות הנכללות בו . לאחר שסומנו כל ה- X –ים , בוחרים מספר מינימלי של רכיבים ראשוניים. נחפש כעת בטבלה את העמודות המכילות X אחד בלבד. בדוגמא זו יש ארבע מכפלות סטנדרטיות שבעמודותיהן מופיע X יחיד : 1, 4, 8, ו-10. המכפלה הסטנדרטית 1 מכוסה על-ידי הרכיב הראשוני $x'y'z$ ופירושו של דבר : בחירת הרכיב הראשוני $x'y'z$ מבטיחה, שהמכפלה הסטנדרטית 1 תיכלל בפונקציה. באופן דומה, המכפלה הסטנדרטית 4 מכוסה על-ידי הרכיב הראשוני $w'xz'$, והמכפלות הסטנדרטיות 8 ו-10 על-ידי הרכיב הראשוני wx' . רכיבים ראשוניים המכסים מכפלות סטנדרטיות בעלות X יחיד בעמודותיהן נקראים **רכיבים ראשוניים חיוניים** (EPI). כדי שהביטוי הסופי המפושט יכיל את כל המכפלות הסטנדרטיות, אין ברירה אלא לכלול את הרכיבים הראשוניים החיוניים. סימן √ יופיע בטבלה בעמודה הראשונה ליד הרכיבים הראשוניים החיוניים כדי לציין שהם נבחרו.

כעת נבדוק כל עמודה שהמכפלה הסטנדרטית שלה מכוסה על-ידי הרכיבים הראשוניים החיוניים שנבחרו. למשל, הרכיב הראשוני $x'y'z$ שנבחר מכסה את המכפלות הסטנדרטיות 1 ו-9. נסמן √ בתחתית העמודות 1 ו-9 (בשורה האחרונה בטבלה). באופן דומה, הרכיב הראשוני $w'xz'$ מכסה את המכפלות הסטנדרטיות 4 ו-6 ו- wx' מכסה את המכפלות הסטנדרטיות 8, 9, 10 ו-11.

נתבונן בטבלת הרכיבים הראשוניים בשורה האחרונה, ונראה שבחירת הרכיבים הראשוניים החיוניים מכסה את כל המכפלות הסטנדרטיות של הפונקציה פרט ל-7 ו-15. יש לכלול שתי מכפלות אלה על-ידי בחירת רכיב ראשוני (נוסף) אחד או יותר. בדוגמא זו ברור שהרכיב הראשוני xyz מכסה את שתי המכפלות הסטנדרטיות, ולכן יש לבחור אותו. מצאנו אפוא את הקבוצה המינימלית של רכיבים ראשוניים שסכומם נותן את הפונקציה המצומצמת הדרושה :

$$F = x'y'z + w'xz' + wx' + xyz$$

7.3 שיטת הטבלה עבור מכפלות סכומים (pos).

ניתן להתאים את שיטת הטבלה כך שנקבל ביטוי בצורת POS. תיאור השיטה :

א. התיחס לטבלת האמת למקומות בהם ערך הפונקציה הינו 0. רשום את המכפלות המתאימות למקומות אלו. (למעשה זו טבלת האמת של המשלים של הפונקציה).

ב. הפעל את שיטת הטבלה עבור המכפלות הסטנדרטיות שבשלב א'.

ג. בצע פעולת משלים על הביטוי שבשלב ב'. **תוצאה הינה ביטוי מפושט בצורת POS**.

7.4 שיטת הטבלה עבור פונקציה בעלת צירופים אדישים.

ניתן ליישם את שיטת הטבלה עבור פונקציה בעלת צירופים אדישים לאחר שנבצע שינוי קל בשיטת הטבלה.

בשלב א' של מציאת הגורמים הראשונים נכלול גם את המכפלות שמתאימות לצירופים האדישים. דבר זה יאפשר לקבל רכיבים ראשוניים בעלי מספר ליטרלים הקטן ביותר.

בשלב ב' של שיטת הטבלה כאשר בונים את טבלת הרכיבים הראשוניים, **לא** כוללים את הצירופים האדישים ברשימת המכפלות הסטנדרטיות שמופיעות בפונקציה. (רשימת המכפלות המופיעות בפונקציה ממוקמת בשורה אופקית עליונה בטבלת רכיבים ראשוניים).

הסיבה לכך : כיוון שצירופים אדישים אינם צריכים להיות מכוסים ע"י רכיבים ראשוניים שנמצאו בשלב א'.