פרק 5

פונקציות בוליאניות

5.1 הגדרת פונקציה בוליאנית .

משתנה בינרי יכול לקבל ערך 0 או 1.

פונקציה בוליאנית הינה ביטוי שמכיל : **משתנים בינריים** , אופרטורים : **OR, NOT,AND**
(לא כל האופרטורים חייבים להופיע בביטוי) **סוגריים** (לא חיב להופיע) וסימן **שוויון** .
עבור ערכים נתונים של המשתנים ,הפונקציה מקבלת ערך 0 או 1.

לדוגמא : נתונה הפונקציה $F_1 = xyz'$ אם נציב : $x = y = 1$ z=0 נקבל : $F_1=1$.

ניתן לתאר פונקציה בוליאנית ע"י **טבלת אמת**.

טבלת אמת הינה טבלה שבה רושמים את כל צירופי המשתנים האפשריים ועבור כל צרוף רושמים את ערך הפונקציה שמתאים לצרוף .

מס' השורות בטבלת האמת שמתארת פונקציה בוליאנית היא : 2^n , כאשר n מספר משתנים של פונקציה. את צירופי ה-0 ו-1 (של המשתנים) שבכל שורה ניתן לקבל ע"י שנרשום ערכים עשרוניים מ- 0 עד $(2^n - 1)$.

ליד כל ערך עשרוני נרשום את ייצוגו הבינרי .בכל שורה בטבלה מופיע ערך שמקבלת הפונקציה : 0 או 1.

נמחיש ע"י דוגמא : $F_1 = x + y'z$.

נבנה טבלת אמת של הפונקציה :

ערך דצימלי	x	y	z	F (ערך פונק.)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

כעת מתעוררת שאלה : האם ביטוי אלגברי שמתואר ע"י פונקציה בוליאנית הינו יחיד? כלומר, האם ניתן למצוא שני ביטויים שונים שמתארים את אותה פונקציה? התשובה הינה חיובית.

לדוגמא נתונות הפונקציות F_1 , F_2 הבאות :

$$F_1 = xy' + x'z$$

$$F_2 = x'y'z + x'yz + xy' = x'z(y'+y) + xy'$$

לפונקציות אלו ביטויים שונים אולם אם נבנה טבלת אמת של שתי הפונקציות נמצא ש- F_1 זהה ל-F_2 כיוון שעבור כל צירוף אפשרי של משתנים xyz נקבל בשתי הפונקציות ערך זהה.

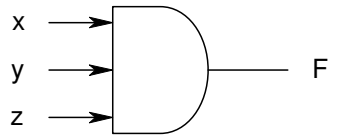
במילים אחרות טבלאות האמת של הפונקציות הינן **זהות** .

נראה בהמשך שבאלגברה בוליאנית מחפשים ביטויים פשוטים לפונקציה .

5.2 פעולות אלגבריות.

ליטרל (LITERAL) – כל אחד ממשתני הפונקציה (או הפוכו) נקרא ליטרל .למשל בביטוי $A\overline{B}$ יש שני ליטרלים: A ו- $\overline{B}$. כאשר מממשים פונקציה באמצעות שערים לוגים (נלמד בהמשך) אזי כל ליטרל בפונקציה מציין כניסה לשער מסוים. למשל : לפונקציה $F = A \cdot B + B'$ יש שלושה ליטרלים וכל איבר המופיע בביטוי, ממומש ע"י שער לוגי .

למשל: $F = x \cdot y \cdot z$. מימוש הפונקציה :



המינימזציה של מספר הליטרלים ושל מס' האיברים בפונקציה : $\left(F = \underbrace{A\overline{B}}_{\text{איבר}} + \underbrace{CDE}_{\text{איבר}} \right)$ גורמת להפחתת הציוד שדרוש למימוש המעגל (שערים בדרך כלל). לא תמיד ניתן, להקטין את שניהם (מספר ליטרלים ומספר איברים) בו זמנית.

בשלב זה נסתפק במינימזציה של מספר הליטרלים ע"י ביצוע פעולות אלגבריות.

(בעתיד נלמד דרכים שיטתיות למינימיזציה) .

בשלב זה של הקורס אין כללים מפורשים שביצועם יבטיח את קבלת התוצאה הסופית הראויה. השיטה היחידה שניתן לנסות היא ע"י שימוש בכללים ומשפטים יסודיים באלגברה בוליאנית כפי שלמדנו.

דוגמא:

פשט את הפונקציה הבוליאניות הבאה לפי כללים ומשפטים כך שמספר הליטרלים שיופיע בפונקציה יהיה מינימלי.

$$x(x'+y) = xx'+xy = 0 + xy = xy$$

5.3 משלים של פונקציה.

משלים של פונקציה F מסומן כ- F'. ניתן לקבל את F' באמצעות חוקי דה-מורגן.

ניתן להכליל את משפט דה-מורגן עבור מס' כלשהו של משתנים:

$$(A+B+C+...N)' = A' \cdot B'C'...N'$$

$$(AB...N)' = A'+B'...N'$$

דוגמאות:

מצא את המשלימים של הפונקציות:

א)

$$F_1 = x'yz + x'y'z$$

$$F_1' = (x'yz + x'y'z)' = (x'yz)' \bullet (x'y'z)'$$

$$= (x+y'+z')(x+y+z')$$

ב)

$$F_2 = [x(y'z'+yz]$$

$$F_2' = [x(y'z'+yz]' = x'+(y'z'+yz)'$$

$$= x'+(y'z')' \cdot (yz)' = x'+(y+z)(y'+z')$$

5.4 צורות קנוניות וסטנדרטיות של פונקציות.

5.4.1 מבוא

1.1 **מכפלה סטנדרטית (MINTERM)**

נתונים שני משתנים x, y. ניתן ליצור 4 מכפלות שונות. במכפלה הכוונה היא לפעולת AND בין משתנים ,כאשר משתנה יכול להופיע בצורה רגילה למשל x או בצורת הופכי (למשל x').

4 המכפלות האפשריות הן: $x \cdot y$ $x \cdot y'$ $x' \cdot y$ $x' \cdot y'$.

כל אחת מ-4 המכפלות נקראת MINTERM (או מכפלה סטנדרטית).

בצורה כללית: עבור n משתנים ניתן ליצור 2^n מכפלות סטנדרטיות (MINTERMS).

1.2 **סכום סטנדרטי (MAXTERM)**

כפי שהגדרנו מכפלות סטנדרטיות, ניתן להגדיר באופן דומה סכום סטנדרטי ששונה ממכפלה סטנדרטית בזה שפעולה בין משתנים הינה פעולת OR, וא"כ עבור 2 משתנים 4 הסכומים הסטנדרטים הינם: $x+y$, $x+y'$, $x'+y$, $x'+y'$.

עבור n משתנים קיימים 2^n סכומים סטנדרטים.

5.4.2. שיטה לבנית מכפלות וסכומים סטנדרטים עבור n משתנים.

נעשה דוגמא עבור $n = 3$ ונסמן את המשתנים: x, y, z.

בטבלה הבאה יופיעו מכפלות וסכומים סטנדרטים עבור $n = 3$. ההסבר יופיע לאחר רישום הטבלה.

ערך עשרוני של x y z	x y z ערך בינרי	מכפלות סטנדרטיות (MINTERM)		סכומים סטנדרטים (MAXTERM)	
		גורם	סימון	גורם	סימון
0	0 0 0	$x' \cdot y' \cdot z'$	m_0	$x+y+z$	M_0
1	0 0 1	$x' \cdot y' \cdot z$	m_1	$x+y+z'$	M_1
2	0 1 0	$x' \cdot y \cdot z'$	m_2	$x+y'+z$	M_2
3	0 1 1	$x' \cdot y \cdot z$	m_3	$x+y'+z'$	M_3
4	1 0 0	$x \cdot y' \cdot z'$	m_4	$x'+y+z$	M_4
5	1 0 1	$x \cdot y' \cdot z$	m_5	$x'+y+z'$	M_5
6	1 1 0	$x \cdot y \cdot z'$	m_6	$x'+y'+z$	M_6
7	1 1 1	$x \cdot y \cdot z$	m_7	$x'+y'+z'$	M_7

הסבר לשיטת בנית הטבלה:

א. בעמודה השמאלית רשמנו את הערכים בין 0 ל- (2^n-1) כאשר n – מספר המשתנים.

בדוגמא זו $n=3$ לכן הערכים הינם בין 0 ל-7. בצורת הרשום שרשמנו (x,y,z)

המשתנה x הוא ה-M.S.B.

ב. בעמודה השנייה נרשום את הערך העשרוני בצורה בינרית.

5.4.2.1 בנית מכפלות סטנדרטיות (MINTERMS): (מתייחס לדוגמא עבור n=3)

1. בנית הגורם:

כאמור לעיל כל מכפלה סטנדרטית הינה פעולת AND בין 3 משתנים שונים. כאשר אם סיבית המתאימה של המספר בייצוג הבינרי היא 0 אזי המשתנה המתאים הוא הופכי (מותג).

במידה וסיבית המתאימה הינה 1 אזי המשתנה מופיע בצורה ישירה (לא הופכית).

לדוגמא: בשורה ראשונה בטבלה $x\,y\,z=000$ לכן המכפלה המתאימה היא $x'\,y'\,z'$.

בשורה שניה $x\,y\,z=001$ ולכן המכפלה המתאימה היא $x'\,y'\,z$.

2. סימון: לכל מכפלה סטנדרטית יש סמל בטבלה m_j , כאשר j מציין את הערך העשרוני של המספר הבינרי באותה שורה.

3. תכונה של מכפלה סטנדרטית: אם נציב במכפלה מסוימת במקום המשתנים את הערך הבינרי המתאים (באותה שורה בטבלה) נקבל תמיד 1. למשל, מכפלה m_2 הינה: $x'\cdot y\cdot z'$ אם נציב $z=1$ $y=1$ $x=0$ נקבל תוצאת פעולת AND: 1.

5.4.2.2 בנית סכומים סטנדרטים (MAXTERMS) (מתייחס לדוגמא עבור n=3)

1. **בניית הגורם.**

כאמור לעיל כל סכום סטנדרטי הינו פעולת OR בין 3 משתנים שונים.

- אם הסיבית המתאימה של המספר בייצוג הבינרי הינה 0 אזי המשתנה המתאים מופיע בצורה ישירה (לא הופכי) בסכום הסטנדרטי.
- במידה והסיבית המתאימה ערכה 1 אזי המשתנה המתאים הוא הופכי (מותג).

לדוגמא: בשורה ראשונה $x\,y\,z=000$ לכן הסכום הסטנדרטי המתאים הוא: $x+y+z$.

2. סימון: לכל סכום סטנדרטי יש סמל בטבלה: M_j. כאשר j מציין את הערך העשרוני של המספר הבינרי באותה השורה.

3. תכונה של סכום סטנדרטי:

אם נציב ב- MAXTERM מסוים במקום המשתנים את הערך הבינרי המתאים (באותה שורה בטבלה) נקבל תמיד 0. למשל סכום M_6 : $x'+y'+z$.

אם נציב $x\,y\,z=110$ נקבל $0+0+0=0$.

5.5 קשר בין MAXTERM ו- MINTERM

שים לב שכל MAXTERM הוא משלים של ה- MINTERM באותה שורה בטבלה (לפי חוקי דה-מורגן) והפוך.

5.6 הגדרת מושגים: SOP ו-POS .

- סכום של מכפלות (**לאו דווקא סטנדרטיות**) נקרא **SOP** (**SUM OF PRODUCTS**).

למשל : $f(x, y, z) = x \bullet y + y \bullet z$. הפונקציה רשומה בצורת SOP . (המכפלות אינן סטנדרטיות)

- מכפלת סכומים (**לאו דווקא סטנדרטיים**) נקראת **POS** (**PRODUCTS OF SUMS**).

למשל : $f(x, y, z) = (x+y) \bullet (z+y)$. הפונקציה רשומה בצורת POS . (הסכומים אינם סטנדרטיים)

5.7 בניית פונקציה בוליאנית מתוך טבלת אמת

כללית : ניתן לבנות פונקציה בוליאנית מתוך טבלת אמת בשני אופנים :

- סכום של מכפלות סטנדרטיות.
- מכפלה של סכומים סטנדרטים.

נסביר את השיטה באמצעות דוגמא מסוימת ולאחר מכן נוכיח את השיטה.

דוגמא : נתונה פונקציה f של 3 משתנים x, y, z . הפונקציה מתוארת בטבלת האמת הבאה :

ערך עשרוני	x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

x - סיבית ה- M.S.B.

5.7.1 מציאת הפונקציה בתור סכום של מכפלות סטנדרטיות .

תאור השיטה : התבונן בטבלת האמת בשורות שבהן ערך הפונקציה הינו 1. בצע פעולות OR על כל המכפלות (ה- MINTERM) שמתאימות לשורות אלו. אם נבצע את האמור לעיל נקבל :

$$f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_7 = x'y'z + xy'z' + xyz$$

הסבר השיטה : לפי טבלת האמת של הפונקציה רק אם נציב ב-$f(x, y, z)$ את הערכים xyz=001 או xyz=100 או xyz=111 אז ערך הפונקציה 1 . (כיון שרק מכפלות אלו קיימות בפונקציה ולכן ברור שרישום הפונקציה בצורה מפורשת כדלעיל מתאים לטבלת האמת).

5.7.2 מציאת הפונקציה בתור מכפלת סכומים סטנדרטים.

5.7.2.1 טענה: נתונה טבלת האמת של פונקציה f. טבלת האמת של f' (משלים של פונקציה f) מתקבלת מטבלת האמת של f ע"י שנחליף 0 ב-1 ו-1 ב-0 בעמודה של ערכי הפונקציה בטבלת האמת של הפונקציה f .

(שהרי אם $f'(x_0, y_0, z_0) = 1 \Leftarrow f(x_0, y_0, z_0) = 0$)

בהתייחס לטבלת האמת שבדוגמא דלעיל נרשום את טבלת האמת של f' :

x	y	z	$f'(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

כעת נרשום את f' באמצעות סכום מכפלות סטנדרטיות (SOP סטנדרטי) :

$$f'(x, y, z) = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz'$$

כעת אם נבצע משלים על f' נקבל את f. (כיון שקיים $(f')' = f$)

לפי חוקי דה-מורגן נמצא את <u>משלים</u> של f' .

$$\begin{aligned}(f')' &= (x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz')' \\ &= (x+y+z)\cdot(x+y'+z)\cdot(x+y'+z')\cdot(x'+y+z')\cdot(x'+y'+z) \\ &= M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6\end{aligned}$$

מסקנה : בתהליך של מציאת <u>משלים</u> של f' (שהוא למעשה f) ביטאנו את פונקצית f כמכפלה של סכומים סטנדרטים (**MAXTERMS**).

מתוך הדוגמא נסביר את השיטה לבניית פונקציה בצורת מכפלת סכומים סטנדרטים , מתוך טבלת האמת :

התבונן בטבלת האמת של הפונקציה <u>בשורות שבהם ערך הפונקציה הינו 0</u>. בצע פעולות AND על כל הסכומים הסטנדרטים (MAXTERMS) שמתאימים לשורות אלו.

התוצאה שמתקבלת הינה : **הפונקציה בצורת מכפלת סכומים סטנדרטים**.

אם נבצע את האמור לעיל עבור הדוגמא בתחילת סעיף 3 נקבל :

$$f(x, y, z) = M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6$$

5.8 רישום פונקציות בצורות קנוניות .

הגדרה : פונקציה בוליאנית נקראת רשומה בצורה קנונית אם הינה רשומה באחת מהאופנים :

א) כסכום של מכפלות סטנדרטיות או ב) מכפלת סכומים סטנדרטים .

5.8.1 רישום פונקציה כסכום של מכפלות סטנדרטיות . (SOP סטנדרטי)

עבור n משתנים קיימות 2^n מכפלות סטנדרטיות ו- 2^n סכומים סטנדרטים.

(תזכורת : במכפלה סטנדרטית או בסכום סטנדרטי יש תמיד n ליטרלים).

לעיתים (כפי שנראה בהמשך לצורך מינימיזציה) נוח לבטא את הפונקציה ע"י סכום מכפלות סטנדרטיות.

במידה והפונקציה איננה נתונה בצורת SOP סטנדרטי, ניתן להביאה לצורה זו ע"י מציאת טבלת האמת של הפונקציה ואזי ניתן למצוא בצורה פשוטה את ה-SOP הסטנדרטי וה-POS הסטנדרטי כפי שלמדנו בסעיף 5.7. (בהמשך נראה שיטה נוספת).

דוגמא : נתונה הפונקציה הבאה : $F(A,B,C) = A + B'C$.

רשום את הפונקציה כ- SOP סטנדרטי .(סכום של מכפלות סטנדרטיות)

פתרון : נרשום את טבלת האמת של הפונקציה :

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

לכן :

$F(A,B,C) = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$ (A - סיבית ה- M.S.B)

נוהגים לסמן פונקציה בוליאנית שמבוטאת בצורת SOP סטנדרטי בצורה הבאה :

$$F(A,B,C) = \sum 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$$

כאשר $\sum$ מציין פעולת OR על כל המכפלות הסטנדרטיות אשר מופיעות בפונקציה.

כאשר המכפלות שמופיעות בפונקציה הינן לדוגמא : $m_i\ m_k\ m_j$ רושמים בתוך ה-$\sum$ את האינדכסים : i, k, j בצורה : $\sum(i, j, k)$.

5.8.2 **<u>רישום פונקציה בצורת מכפלת סכומים סטנדרטים .</u>** (POS סטנדרטי)

במידה והפונקציה איננה רשומה בצורת POS סטנדרטי ,מוצאים את טבלת האמת של הפונקציה, ומתוך טבלת האמת נמצא את ה-POS הסטנדרטי כפי שלמדנו.

<u>סימון פונקציה בצורת הרשומה בצורת POS סטנדרטי .</u>

נניח שהפונקציה רשומה בצורה הבאה :

$$F(x,y,z)=M_0\cdot M_2\cdot M_4\cdot M_5$$

נוח לסמן בצורה הבאה :

$$F(x,y,z)=\pi(0,2,4,5)$$

כאשר π מציין פעולת AND על הסכומים שמופיעים בפונקציה. נניח שסכומים שמופיעים בפונקציה הינם M_k, M_j, M_i , אזי רושמים בתוך ה-π את האינדכסים i, j, k כלומר :

$$F=\pi(i,j,k).$$

5.8.3 **<u>המרת צורות קנוניות של פונקציה.</u>**

רישום פונקציה בצורת SOP סטנדרטי או POS סטנדרטי נקראת צורה **<u>קנונית</u>** של הפונקציה.

תאור שיטה למעבר מצורה קנונית אחת לשניה : החלף את הסימונים $\sum$ ו-π זה בזה ורשום את המספרים שאינם מופיעים בצורה המקורית. למשל :

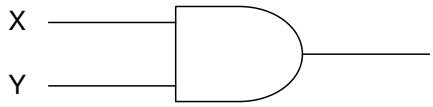
$$F(x,y,z)=\sum 0,2,4,5$$

המספרים החסרים הינם : 1, 3, 6, 7

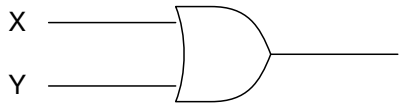
לכן : $F(x,y,z)=\pi(1,3,6,7$.

5.9 שערים לוגיים ספרתיים

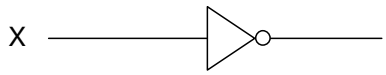
1) AND $F = (X \cdot Y)$



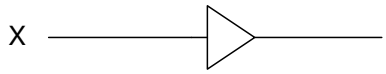
2) OR $F = (X+Y)$



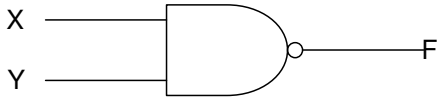
3) NOT $F = X'$



4) BUFFER X

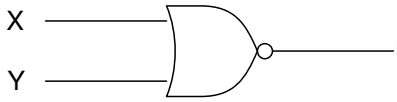


5) NAND $F = (X \cdot Y)'$



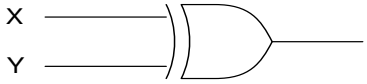
-סימון נוסף ל NAND: $F = X \uparrow Y$

6) NOR $F = (X+Y)'$



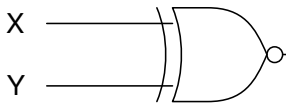
-סימון נוסף ל NOR : $F = X \downarrow Y$

7) XOR $F = X'Y+XY'$



סימון נוסף: $X \oplus Y$

8) XNOR $F = XY+X'Y'$

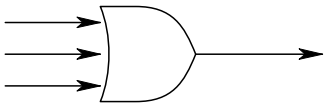


סימון נוסף: $X \odot Y$

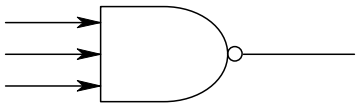
<u>שערים מרובי כניסות</u> :

קיימים שערים לוגיים עבור יותר מ-2 כניסות למשל :

שער OR בעל 3 כניסות



שער NAND בעל 3 כניסות



5.10 רישום פונקציה הרשומה בצורת SOP (לאו דווקא סטנדרטי) לצורה קנונית ללא שימוש בטבלת <u>אמת</u>.

נתון ביטוי f בצורת סכום מכפלות (לאו-דווקא סטנדרטי).

1. בדוק כל מכפלה בביטוי : אם היא מינטרם, עבור למכפלה הבאה.
2. אחרת :

2.1 כפול את המכפלה ב- $\left(x_i + x'_i\right)$ עבור כל משתנה x_i החסר במכפלה.

2.2 פתח סוגריים ובטל מכפלות חוזרות.

<u>דוגמא</u> :

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x'y + z' + xyz \\
&= x'y(z+z') + z'(x+x')(y+y') + xyz \\
&= x'yz + \underline{x'yz'} + z'xy + \underline{z'x'y} + z'xy' + z'x'y' + xyz \\
&= x'yz + x'yz' + xyz' + xy'z' + x'y'z' + xyz \\
&= x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z' + xyz' + xyz \\
&= \sum(0,2,3,4,6,7) \\
&= \prod(1,5) \\
&= (x+y+z')(x'+y+z')
\end{aligned}
$$