פרק-2

פעולות אריתמטיות

2 הקדמה : חיבור וחיסור מספרים עשרוניים.

חיבור: נתבונן בתהליך חיבור פשוט של 2 מספרים עשרוניים :

נשא	←	111
מחובר - 1	←	3587
		+
מחובר - 2	←	1976
תוצאה	←	5563

פעולה שמבצעים : בכל שלב מחברים 2 ספרות עשרוניות. מתחילים מהספרה הימנית ביותר (ספרת אחדות) לאחר מכן דרגה של ספרת עשרות וכו'.

לכל חיבור 2 ספרות ישנה תוצאה ויש "נשא" (CARRY). למשל : בחיבור דרגה ראשונה (של ספרות ה"אחדות" של המספרים) מחברים ספרות 6+7 תוצאה 13. הספרה 3 זו התוצאה ו-1 הינו הנשא לדרגה הבאה והוא נרשם מעל לדרגה השניה וכו'.

2.1 חיבור מספרים בינריים (בסיס -2) עבור מספרים חסרי סימן (UN-SIGNED)

חיבור בינרי פשוט מחיבור עשרוני היות שבסיס בינרי מכיל 2 ספרות בלבד : 0 ,1 .

נניח A, B 2 ספרות בינריות.

רוצים לבצע A + B.

לוח החיבור עבור A + B

הערך שרשום בכל תא מתאים ל- A + B.

שים לב $(10)_2 = 2$ (זו תוצאה מובנת $1+1=2$)

נרשום את לוח החיבור הבינרי בצורת טבלה שנקראת טבלת אמת :

A	B	נשא CARRY	סכום - S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

התוצאה מורכבת מ-2 סיביות : (CARRY S) כאשר CARRY סיבית M.S.B של התוצאה .
(תוצאה מתאימה לחוקי אריתמטיקה : $1+1=(10)_2$).

חיבור מספרים בינריים . (שמורכבים מכמה ספרות)

לפי כללי האריתמטיקה הרגילה, מופיע ה"נשא" כאשר סכום הספרות שווה או גדול מהבסיס של המספרים. (במקרה בינרי בסיס 2 ובמקרה עשרוני בסיס 10). הנשא מתחבר לדרגת הספרות שסמוכות משמאל לדרגה שבה נוצר הנשא.

עיין בדוגמא שניתנה בהקדמה לפרק זה. סכום 2 ספרות של דרגה ראשונה הוא 13. בתוצאה נרשמת ספרה 3 והנשא (שערכו 1) מחובר לסכום 2 ספרות של דרגה השניה וכן הלאה.

דוגמא חיבור בבסיס 2 (עפ"י לוח החיבור):

נשא →	1 11 1
מחובר -1 →	111010
	+
מחובר -2 →	101011
תוצאה →	1100101

2.2 חיסור מספרים בינריים

בפעולת חישוב בבסיס כלשהו קיים מושג של לוה (BORROW). לפי כללי האריתמטיקה מתקבל לוה (BORROW) מתקבל, כאשר המחסר גדול מהמחוסר ואזי מפחיתים את הלוה מן עמודת הספרות הסמוכה משמאל.

תזכורת : A – B A - נקרא מחוסר, B - נקרא מחסר

דוגמא : BORROW	←	1
מחוסר	←	210
		-
מחסר	←	9
תוצאה	←	201

לוח חיסור בינרי.

נתונות 2 סיביות A B. נדרש לחשב A-B .נרשום את כל האפשרויות בצורת טבלת אמת :

A	B	BORROW	(A – B)
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

תוצאה של A – B מורכבת מ-2 סיביות : (A-B) (BORROW כאשר BORROW - סיבית M.S.B.

הסבר לשורה שניה בלוח חיסור : $0 - 1 = -1$ ובמשלים ל-2 : (-1) מיוצג ע"י 11.

חיסור מספרים בינריים

דוגמא : נבצע את החיסור - של 2 מספרים עשרוניים חסרי סימן (5-11) - בצורה בינרית .

BORROW	←	1
מחוסר	←	1011
מחסר	←	- 0101
תוצאה	←	0110

2.3 כפל בינרי (עבור מספרים חסרי סימן)

לוח כפל בינרי עבור 2 סיביות : A ו- B .

A	B	A x B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

כפל מספרים בינריים חסרי סימן.

נעשה באותה שיטה שאנו מכירים בכפל עשרוני לדוגמא כפל שלמים : $(6)_{10} \times (5)_{10} = (30)_{10}$

נבצע את הכפל בצורה בינרית :

$$
\begin{array}{r}
(110)_2 \\
\times \\
\underline{(101)_2} \\
110 \\
000 \\
\underline{110} \\
(11110)_2 = (30)_{10}
\end{array}
$$

כפל מספרים בינריים לא שלמים:

נעשה באותה שיטה כפי שמכירים לגבי כפל מספרים עשרוניים למשל :

$$
\begin{array}{r}
(10.1)_2 \\
\times \\
\underline{(0.11)_2} \\
101 \\
\underline{1\,01} \\
(1.111)_2
\end{array}
$$

2.4 חילוק בינרי (עבור מספרים חסרי סימן)

לוח חילוק בינרי כולל 2 אפשרויות בלבד : $\frac{1}{1}=1$ $\frac{0}{1}=0$

חילוק שלם בשלם.

דוגמא : בצע את החישוב 33:3 בצורה בינרית.

תשובה : $(33)_{10}=(100001)_2$ $(3)_{10}=11$

```
   1011
 100001 | 11
-  11
  00100
-    11
   00011
-     11
      ======
```

תוצאה שהתקבלה : $(1011)_2=(11)_{10}$

חילוק שבר בשלם

דוגמא :

```
     1.0001
  100.0100 | 100
-  100
   ===0100
-     0100
      =====
```

חילוק שבר בשבר

מה שלמדנו בבסיס 10 לגבי חילוק שבר בשבר ניישם גם בבסיס 2. לדוגמא : $\frac{49.77}{23.7}$.

שואפים לכך שמחלק (מכנה) יהיה שלם. לשם כך נזיז את הנקודה במחלק ובמחולק ימינה

מקום אחד ונקבל : $\frac{49.77}{23.7}=\frac{497.7}{237}$

כעת חוזרים לסעיף 2.4 .

2.5 כפל וחילוק של מספרים מכוונים

קיימים אלגוריתמים לביצוע פעולות על מס' מכוונים בצורה ישירה. במסגרת קורס זה לא נלמד את האלגוריתמים. השיטה הפשוטה היא : לתרגם את 2 המספרים לחיוביים. לבצע פעולות כמו שעשינו לגבי מספרים חסרי סימן, ולבסוף אם תוצאה שלילית לבצע פעולת משלים ל-2 על התוצאה.

2.6 פעולות אריתמטיות עבור מספרים עם סימן (מכוונים)

2.6.1 מספרים המיוצגים בשיטת המשלים לאחד, (1's Complement)

תזכורת : בשיטה זאת כל מספר מכיל סיבית סימן שמסמנת אם המספר הוא שלילי או חיובי.

מספר חיובי מיוצג ע"י : 0 בסיבית ה- M.S.B ושאר סיביות הינן הערך .

מספר שלילי מיוצג ע"י : 1 בסיבית ה- M.S.B . את המספר השלילי מקבלים ע"י הפוך כל סיביות של המספר החיובי .

טווח ייצוג :

נתון מספר בינרי בגודל n סיביות .נסמן בתור A את תחום (טווח) הייצוג של הערכים העשרוניים . אזי קיים : $-(2^{n-1}-1) \le A \le (2^{n-1}-1)$

יתרון השיטה : חיבור/חיסור פשוטים :

חיבור : כמו חיבור בינארי רגיל, **בשינוי הבא** : אם יש carry out מהספרה האחרונה- **נוסיף 1** לתוצאה **ונתעלם מה- carry out** הזה

חיסור : חיבור של המספר הנגדי.

חסרונות: ייצוג כפול לאפס "+0"=000…0 , "-0"= 111…1

דוגמאות :

1100	-3
+	+
1011	-4
10111	-7
(זריקת נשא)	
+	
1	
1000 (→ 0111)	

אכן לאחר תיקון התוצאה קיבלנו 7-.

2.6.2 מספרים המיוצגים בשיטת שיטת המשלים לשתיים, 2's Complement

תזכורת : גם בשיטה זאת (כמו בשיטת המשלים ל-1)כל מספר מכיל סיבית סימן שמסמנת אם המספר הוא שלילי או חיובי אך הפעם משמעות ערך המספר היא :

מספר חיובי מיוצג ע"י : 0 בסיבית ה- M.S.B ושאר סיביות הינן הערך .

מספר שלילי מיוצג ע"י : 1 בסיבית ה- M.S.B . את המספר השלילי מקבלים ע"י פעולת המשלים ל-2 על המספר החיובי .

טווח ייצוג: $-2^{n-1}) \le A \le (2^{n-1}-1)$

יתרון השיטה : חיבור/חיסור פשוטים, ייצוג בודד לאפס.

חיבור/חיסור פשוטים. אם יש carry out **פשוט מתעלמים ממנו**.

חיסור : A-B=A+(-B) [כאשר -B הינו משלים ל-2 של B]

דוגמאות:

11011		-5		00111		7	
+		+		+		+	
11010		-6		10111		-9	
110101	⇔	-11		11110	⇔	-2	

מתעלמים מסיבית
אחרונה .שהיא
סיבית הנשא.

הערה : נדרשים 5 סיביות לתוצאה . (כדי לייצג את 11-)

כללים לחיבור במשלים ל-2:

- **גלישה** : חיבור של שני מספרים בעלי אותו סימן עלול להביא לגלישה. הגלישה מזוהה כאשר לתוצאה סימן שונה מהסימן של מהמחוברים . (חבור שני מספרים חיוביים והתוצאה שלילית או הפוך : חיבור 2 מספרים שליליים וקבלת תוצאה חיובית).
  לדוגמא, חיבור שני מספרים שליליים עם גלישה :

$(-4)+(-3)=100+101=1001=1 \neq -7$ [התעלמנו מנשא כאמור לעיל אולם תוצאה איננה נכונה]

דוגמא לחיבור שני מספרים חיוביים עם גלישה :

$3+3=011+011=110=-2 \neq 6$

- **חיבור שני מספרים בעלי סימן שונה אף פעם לא מביא לגלישה .**
- כפי שהזכרנו כבר : אם בחיבור 2 מספרים מכוונים יש נשא, **אזי מתעלמים** ממנו והתוצאה הינה נכונה .

2.7 רזולוציה (כושר אבחנה) של שיטת ייצוג מספרים.

הגדרה : רזולוציה של "שיטת ייצוג " מוגדרת כהפרש בין המספרים הקרובים ביותר באותה שיטת ייצוג. בשיטות הייצוג הבינריות שראינו קיבלנו רזולוציה אחידה 1 עבור מספרים שלמים (כי ההפרש בין 2 מספרים הקרובים ביותר הוא 1).

בייצוג מספרים בינריים שאינם שלמים בעלי נקודה קבועה (שיטת FIXED POINT) הרזולוציה שווה למשקל הסיבית הנמוכה ביותר (L.S.B.).

לדוגמא : מספרים בעלי 6 ספרות משמאל לנקודה ו-2 ספרות מימין לנקודה משקל ספרת ה-L.S.B הינו 2^{-2} ולכן הרזולוציה היא 2^{-2}.

דוגמא :

אם ניקח 2 מספרים שקרובים אחד לשני ושונים רק בספרת ה- L.S.B :

$$x\,x\,x\,x\,x\,x\cdot 10$$
$$x\,x\,x\,x\,x\,x\cdot 11$$

אם ניקח הפרש בין מספרים נקבל $(0.01)_2$ או $(0.01)_2 = (2^{-2})_{10}$.