פרק 6

מינימיזציה (פישוט) בשיטת המפה .

6.1 שיטת המפה (מפת קרנו)

6.1.1 מבוא

מורכבות השערים הלוגים שמממשים פונקציה בוליאנית נמצאת ביחס ישר למורכבותו של הביטוי האלגברי שבאמצעותו מממשים את הפונקציה.

הצגתה של פונקציה באמצעות טבלת אמת הינה יחידה, אולם כאשר הפונקציה מתוארת באופן אלגברי (מכפלת סכומים או סכום מכפלות) היא יכולה להופיע בצורות שונות.

ראינו שניתן לפשט פונקציות בוליאניות בשיטות אלגבריות (משפטים וכללים שראינו לעיל), אולם שיטה זו של פישוט (מינימיזציה) אינה נוחה כי איננה שיטתית (אין לה כללים מוגדרים כיצד להגיע למינימיזציה) שיטת המפה מספקת תהליך ישיר למינימיזציה של פונקציות בוליאניות .

שיטה זו נקראת **מפת "קרנו"** (ע"ש מציע השיטה). המפה הינה דיאגרמה שמורכבת מריבועים. כל ריבוע מייצג מכפלה סטנדרטית אחת. כיוון שניתן לבטא כל פונקציה כסכום של מכפלות סטנדרטיות (כפי שלמדנו) ניתן לזהות פונקציה בוליאנית בצורה גרפית במפה ע"י סימון "הרבועים" שמשתתפים בפונקציה. באמצעות המפה יכול המשתמש לגזור ביטויים אלגבריים חילופיים עבור פונקציה מסוימת ומתוכם יוכל לבחור את הפשוט ביותר.

עבור פונקציה בעלת n משתנים יש 2^n רבועים במפה. כל רבוע מתאים לסכום סטנדרטי או למכפלה סטנדרטית אחת.

6.2 הגדרות שונות .

6.2.1 <u>הגדרת מינימום עבור פונקציה בצורת SOP</u>: בהינתן פונקצית מיתוג : $f(x_1,x_2,,,,,,x_n)$

מצא ביטוי שקול ל-f בצורת סכום מכפלות כך ש- :

1. מספר המכפלות יהיה מינימלי.
2. מבין הביטויים המקיימים את 1, מצא את הביטוי בעל מספר ליטרלים מינימלי.

כלומר, אנו שואפים למינימום של מכפלות ולמינימום של איברים בכל מכפלה.

<u>דוגמא</u>

נתונה פונקציה בצורתה הקנונית :

$$f(x,y,z)= x'yz'+x'y'z'+xy'z'+x'yz+xyz+xy'z$$

a b c d e f

ניתן למזג את a,b, את b,c, את d,e, ואת e,f ולקבל :

$$f(x,y,z)=x'z'+y'z'+yz+xz$$

כל מחיקת מכפלה או ליטרל בביטוי זה תיתן ביטוי שאינו שקול ל- f. לכן לא ניתן יותר לצמצם את f.

6.2.2 <u>ביטוי בלתי ניתן לצמצום .</u>

<u>**הגדרה**</u> :

ביטוי בלתי ניתן לצמצום הינו סכום מכפלות, שמחיקת מכפלה או ליטרל ממנו יוצרת ביטוי שאינו שקול לביטוי המקורי.

בדוגמא דלעיל ניתן לבצע גם מיזוגים אחרים : a- b, d–e , c-f :

$$f(x,y,z)=x'z'+xy'+yz$$

גם ביטוי זה איננו ניתן לצמצום אבל הוא מצומצם יחסית לקודם .(יש בו 3 מכפלות במקום 4)

<u>**מסקנה.**</u>

ביטוי בלתי-ניתן לצמצום איננו בהכרח ביטוי מינימלי!

בנוסף, ביטוי מינימלי אינו בהכרח יחיד.

לדוגמא : בדוגמה שלפנינו f , ניתנת לרישום גם בתור :

$$f(x,y,z)=xy'+y'z'+xz$$

(<u>ע"י מיזוג : a- d, b–c , f-e</u>).

6.3 פישוט פונקציה בוליאנית כסכום מכפלות SOP.

6.3.1. תאור מפת קרנו של שני משתנים x,y .

בסעיף 5.4 בפרק זה ראינו את השיטה למציאת מכפלות סטנדרטיות .

טבלת מכפלות סטנדרטיות :

x	y	מכפלה
0	0	$x'y'$
0	1	$x'y$
1	0	xy'
1	1	xy

נרשום מפת קרנו של שני משתנים שתכיל את המכפלות הסטנדרטיות הללו.

y \ x	0	1
0	x'y'	xy'
1	x'y	xy

ה-0 ו-1 שרשומים בכל שורה ועמודה מציינים את ערכי המשתנים x ו-y. למעשה המפה של שני משתנים הינה. רישום בצורה שונה של טבלת המכפלות הסטנדרטיות דלעיל, למשל עבור $xy = 10$. מכפלה מתאימה הינה xy' וכו'.

שים לב: x הינו עם מותג (משלים x') בשורה בה $x = 0$ וללא מותג (x) בשורה בה $x = 1$ בצורה דומה לגבי משתנה y.

ניתן לרשום את המפה בצורה דומה ע"י סימון מכפלות כפי שלמדנו.

y \ x	0	1
0	m_o	m_2
1	m_1	m_3

6.3.2. <u>ייצוג פונקציה במפה</u>.

<u>דוגמאות</u>

<u>דוגמא 1</u>: נתונה פונקציה $F(x,y)=x\cdot y$

$F=1$ <u>רק</u> כאשר $x=y=1$.

כמו-כן xy הינו מכפלה סטנדרטית שמתאימה ל- m_3, לכן על מנת לייצג פונקציה זו במפה של שני משתנים, נרשום 1 במקום שמתאים למכפלה m_3 (או למצב $x=y=1$).

מפת $F(x,y)$:

y \ x	0	1
0		
1		1

מפה זו אומרת לנו ש-F מורכבת ממכפלה סטנדרטית אחת והיא: $x\cdot y$

<u>דוגמא 2</u>: נתונה הפונקציה $F(x,y)=x+y$

נמצא את המכפלות הסטנדרטיות שמהם מורכבת הפונקציה כפי שלמדנו ע"י רישום טבלת אמת של הפונקציה.

ערך עשרוני	x	y	$F(x,y)$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

מטבלה זו מקבלים את הפונקציה בצורת SOP:

$$F(x,y)=m_1+m_2+m_3=\sum 1,2,3$$

לכן במפת קרנו של הפונקציה נרשום 1 בכל המקומות שמתאימים למכפלות m_1,m_2,m_3 כלומר:

y \ x	0	1
0		1
1	1	1

6.3.3 <u>תאור מפת קרנו של שלושה משתנים</u> .

נתונים המשתנים הבאים x, y, z (כאשר נתייחס ל-x כסיבית ה- M.S.B).

עבור שלושה משתנים ישנן שמונה מכפלות סטנדרטיות כפי שראינו בסעיף 2.

<u>הערה חשובה</u>: את ערכי המשתנים במפת קרנו יש לרשום לפי סדר של קוד משקף GRAY (סיבה לרישום בסדר זה תובא בהמשך). במפה של שני משתנים לא ציינו זאת כיוון שעבור משתנה אחד קוד GRAY הינו 0,1.

x \ yz	00	01	11	10
0	m_o	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

שים לב: רשמנו את yz לפי סדר קוד GRAY.

<u>הסיבה לייצוג פונקציה באמצעות מפת קרנו</u>

נדון בשלב זה במפה של שלושה משתנים ולאחר מכן במקרה כללי.

כדי להבין את תועלת המפה לצורך פישוט פונקציה בצורת סכום מכפלות, חייבים להכיר תכונה בסיסית שיש לשני תאים (רבועים) <u>סמוכים</u> במפה. [בשלב <u>זה</u> תאים סמוכים הם תאים שיש להם צלע משותפת, למשל במפה של 3 משתנים הזוגות: m_o ו- m_1 ו- m_o ו- m_4 הינם שכנים]. כל שני תאים סמוכים <u>נבדלים</u> במשתנה אחד בלבד. הסיבה לכך: רישום המשתנים במפה נעשה עפ"י קוד GRAY .

למשל m_5 סמוך ל- m_7. מכפלה שמתאימה ל- m_5: $xy'z$ מכפלה שמתאימה ל- m_7: xyz. רואים ששתי מכפלות נבדלות במשתנה אחד והוא y. (x ו-z זהים בשתי המכפלות)

מכללי האלגברה הבוליאנית שלמדנו נובע שניתן לפשט את סכום (OR) של שתי מכפלות סטנדרטיות הנמצאים ברבועים סמוכים למכפלה אחת. מספר הליטרלים במכפלה שמתקבלת קטן ב-1 ממספר הליטרלים שבכל אחת מהמכפלות הסטנדרטיות.

כדי להבהיר זאת נתבונן בשני תאים סמוכים במפת קרנו של שלושה משתנים למשל m_5 ו- m_7.

$$m_5 + m_7 = xy'z + xyz = xz(y + y')$$
$$= xz \cdot 1 = xz$$

רואים כאן שבשעת פעולה ה-OR בין m_5 ו- m_7 הליטרל ששונה אינו מופיע בתוצאה. בדוגמא שעשינו משתנה y שהוא <u>השונה</u> אינו מופיע בתוצאה.

6.3.4 תאור השיטה למינימיזציה (פישוט) של פונקציה בצורת SOP באמצעות מפת קרנו

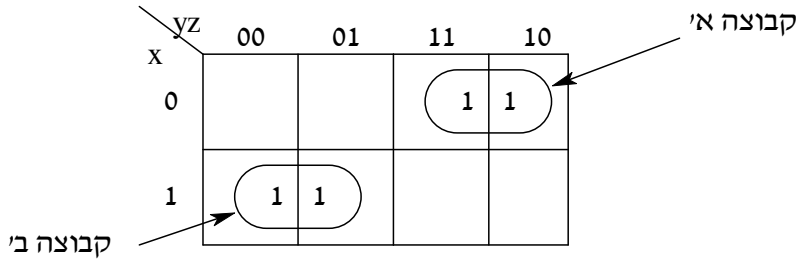
הערה: ראשית נבהיר את השיטה ע"י דוגמא ולאחר מכן נסביר את אופן הפישוט .

דוגמא: נתונה הפונקציה הבאה:

$$F(x,y,z)=\sum 2,3,4,5 = x'yz'+x'yz+xy'z'+xy'z$$ – x סיבית M.S.B

נדרש לפשט את הפונקציה באמצעות מפת קרנו.

שלב א': נייצג את הפונקציה במפת קרנו ע"י שנרשום 1 במפת קרנו בכל המקומות שמכילים את המכפלות הסטנדרטיות שמהם מורכבת הפונקציה m_2, m_3, m_4, m_5.



שלב ב': נצרף רבועים סמוכים, כפי שהסברנו לעיל. יש כאן שתי קבוצות של רבועים סמוכים והן מוקפות במפה. בכל קבוצה נשמיט את המשתנה השונה. בקבוצה א' נשמיט את z, ומשותף הוא $y=1$ $x=0$ ולכן המכפלה שמתקבלת מקבוצה ב' היא: xy'.

שלב ג': נבצע פעולת OR על מכפלות שקיבלנו (כתוצאה מצרוף תאים סמוכים לקבוצות) ונקבל:

$$F(x,y,z)=(x'y+xy')$$

שיטה כללית לפישוט באמצעות מפת קרנו.

הגדרה: תאים סמוכים (או שכנים) הינם תאים במפה אשר נבדלים זה מזה בערכו של ליטרל (משתנה או הופכי) אחד בלבד. הסמיכות קיימת בין:

א. תאים בעלי צלע משותפת ולא בעל קודקוד משותף (כלומר סמוך בצורה אופקית או אנכית ולא באלכסון). לדוגמא במפה של שלושה משתנים שהובאה לעיל: תא m_1 שכן עם תא m_0, m_3 ו-m_5 ולא עם m_4.

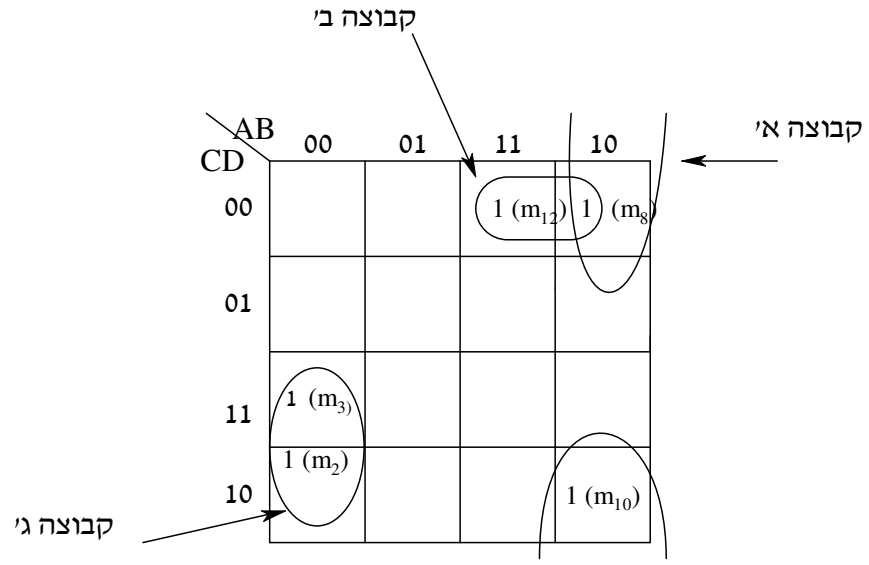
ב. קיימים תאים סמוכים שאינם בעלי צלע משותפת:
- שתי קצוות של כל שורה הינם סמוכים.
- שתי קצוות של כל עמודה הינם סמוכים.

דוגמא:

נתונה הפונקציה הבאה :

$$M.S.B-A \qquad f(A,B,C,D)=\sum 2,3,8,10,12$$

ראשית נייצג את הפונקציה במפה של ארבעה משתנים :



הסבר : צרפנו m_8 ל- m_{10} (הינם סמוכים כיוון שהינם קצוות עמודה) את m_3 ל- m_2 ואת m_8 ל- m_{12}.

[שים לב שגם m_2 סמוך ל- m_{10} אולם מיותר להוסיף קבוצה זו כיוון שאם נוסיף קבוצה זו נקבל גורם נוסף וזה לא יהיה מינימום. הסבר על זה יורחב בהמשך בנושא של PI ו- EPI].

<u>הערה</u> : שים לב צרפנו את m_8 ל- m_{10} <u>וגם</u> ל- m_{12}. מותר לצרף ביטוי יותר מפעם אחת.

הסבר : $f(A,B,C,D)=m_2+m_3+m_8+m_{10}+m_{12}$

אם נוסיף עוד פעם m_8 זה חוקי (כיון שלמדנו באלגברה בוליאנית $x+x=x$) כעת אם נוסיף עוד פעם m_8 נקבל :

$$f(A,B,C,D)=\underset{\text{קבוצה}}{\underset{\uparrow}{(m_2+m_3)}}+\underset{\text{קבוצה}}{\underset{\uparrow}{(m_8+m_{10})}}+\underset{\text{קבוצה}}{\underset{\uparrow}{(m_8+m_{12})}}$$

קיבלנו שלוש קבוצות שכל קבוצה מהווה מכפלה אחת של 3 ליטרלים.

עבור קבוצה א' : הושמט משתנה C ומקבלים : $AB'D'$.

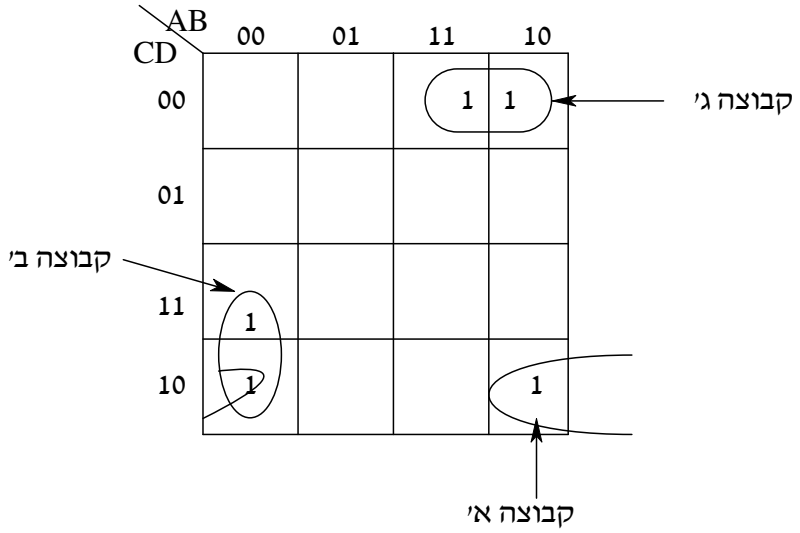
עבור קבוצה ב' : הושמט משתנה B ומקבלים : $AC'D'$.

עבור קבוצה ג' : הושמט משתנה D ומקבלים : $A'B'C$.

$$f(A,B,C,D)=AB'D'+A\cdot C'D'+A'B'C$$

שים לב : ניתן ליצר קבוצות שונות ולקבל אותו מינימום.

למשל :



בשני הפשוטים מקבלים פונקציה בעלת שלוש מכפלות כאשר בכל מכפלה שלושה ליטרלים.

6.4 יצירת קבוצות במפת קרנו.

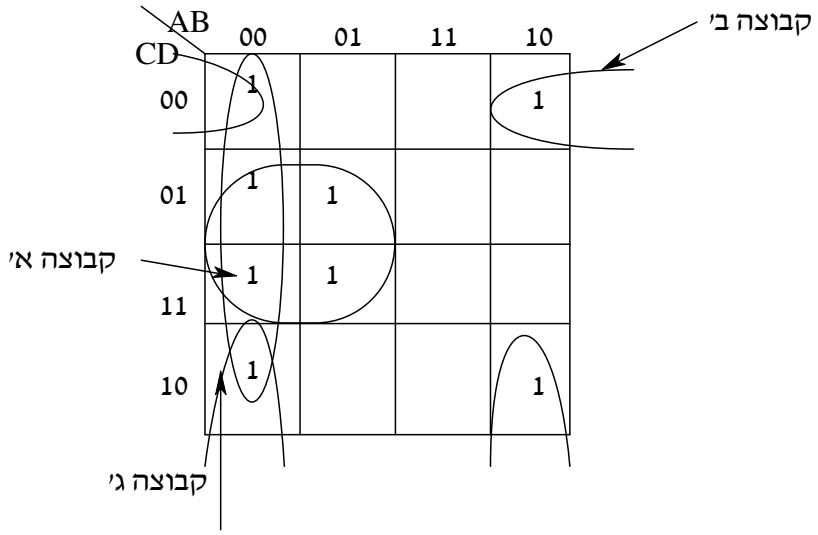
6.4.1. ראינו שניתן לצרף במפת קרנו שני תאים הסמוכים זה לזה ולקבל איבר יחיד שממנו "הוצא" משתנה אחד. בצורה דומה ניתן לצרף ארבעה תאים סמוכים ולקבל איבר יחיד שממנו הוצאו שני משתנים.

בצורה כללית תנאי לצרוף תאים סמוכים לקבוצה אחת :

אם נתונים 2^m תאים סמוכים נדרש שלכל תא יהיו m תאים ואזי ניתן לצרף את 2^m התאים הסמוכים לקבוצה אחת, ולקבל איבר יחיד שממנו הוצאו m משתנים.

דוגמא : נתונה מפת קרנו הבאה של פונקציה בת ארבעה משתנים :

הערה : אנו לא עוסקים כעת במינימום אלא ביצירת קבוצות .



יש במפה זו שלוש קבוצות של ארבעה תאים בכל אחת . במקרה זה $2^m = 4$ ולכן $m = 2$. בכל קבוצה "יוצאו" שני משתנים.

- אם נצרף את קבוצה א' נקבל איבר : $\overline{A} \cdot D$ (הוצאו משתנים B ו-C).
- בקבוצה ב' נקבל : $\overline{B} \cdot \overline{D}$
- בקבוצה ג' נקבל : $\overline{A} \cdot \overline{B}$

6.4.2 **פישוט מירבי של פונקציות ל-SOP (סכום מכפלות) באמצעות מפת קרנו .**

נתונה פונקציה שהובאה לצורת סכום מכפלות קנוניות. על מנת לפשט את הפונקציה באמצעות מפת קרנו יש להשתמש בעקרונות הבאים :

א. בבחירת קבוצת התאים הסמוכים חייבם לכלול כל תא שמכיל 1 , לפחות פעם אחת.
(כפי שהסברנו לעיל ניתן להשתמש בכל תא לפי הצורך – יותר מפעם אחת).

ב. רצוי לכלול בכל קבוצה מספר מירבי של תאים , כאשר גודל קבוצה הינו חזקה שלימה של 2 .

ג. מספר הקבוצות צריך להיות קטן כלל האפשר.

6.4.3 פונקציות מינימליות ותכונותיהן

עד כה ראינו את שיטת צמצום באמצעות מפת קרנו יותר בצורה טכנית . כעת נסביר את השיטה בצורה פורמלית . נתייחס כעת לפישוט בצורת **SOP .**

הגדרה : מכפלת ליטרלים p נקראת **גורר ראשוני** (PI, prime implicant) של פונקציה f , אם הקבוצה במפת קרנו - שאליה מתאימה מכפלת הליטרלים - **איננה מוכלת** בקבוצה גדולה יותר.

ביטוי מינימלי של פונקציה הינו סכום של גוררים ראשוניים.

השאלה היא : אילו גוררים ראשוניים נמצאים בביטוי המינימלי?

הגדרה: מכפלת ליטרלים P נקראת **גורר ראשוני חיוני** (EPI, Essential Prime Implicant) של פונקציה f אם קיים :

א) P הוא גורר ראשוני של f

ב) P מכסה לפחות מינטרם אחד של f (תא אחד במפת קרנו שערכו 1) שאיננו מכוסה על ידי אף גורר ראשוני אחר.

מסקנה : ביטוי מינימלי חייב להכיל את כל ה EPI .

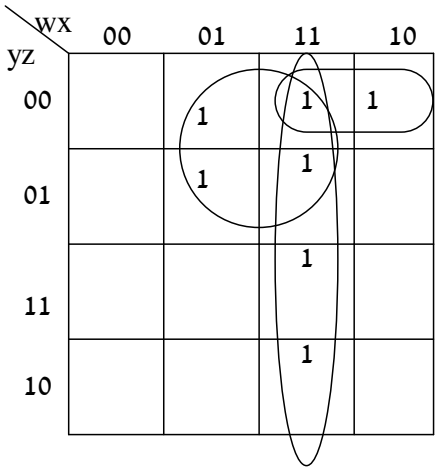
הערה: כל EPI הוא כמובן PI . ההפך כמובן לא בהכרח נכון .

6.5 תהליך קבלת ביטוי מינימלי לפונקציה f בצורת SOP .

1) מצא את כל הגוררים הראשוניים (PI) של f.
2) מצא מתוכם את כל הגוררים הראשוניים החיוניים (EPI) והכנס אותם לביטוי.
3) הוצא מרשימת ה- PI את כל ה- EPI וכן את כל ה- PI שכבר כוסו על ידי ה- EPI.
4) אם קבוצת ה- EPI מכסה את f – סיימנו. אחרת:

בחר PI נוספים כך ש- f תכוסה כולה וכן שמספרם יהיה מינימלי, ומבין כל הסכומים המקיימים תנאי זה בחר את בעל מספר הליטרלים הקטן ביותר. (שימו לב שהבעיה למעשה לא נפתרה לחלוטין, אבל עבור המערכות הקטנות שעוסקים בהן זה מספיק.)

דוגמה: $f(w,x,y,z)=\sum(4,5,8,12,13,14,15)$

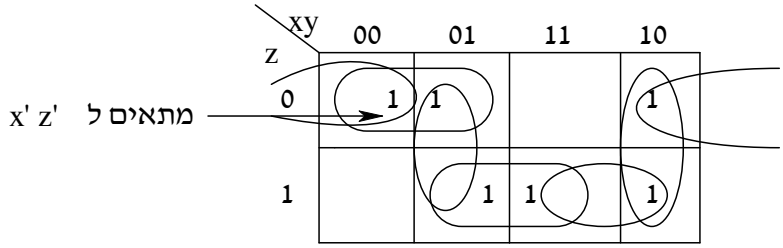


הגוררים ראשוניים הינם: xy' , wx , $wy'z'$. כל הגוררים ראשוניים הינם EPI.

הסבר: מצאנו שלוש קבוצות (קוביות) הכי גדולות שאינן מוכלות בקבוצות גדולות יותר ולכן קבוצות אלו הינם גוררים ראשוניים (PI)

מכיוון שכל קבוצה מכסה לפחות מינטרם אחד שאינו מכוסה ע"י אף גורר ראשוני אחר, לכן כל הגוררים הינם ראשוניים חיוניים (EPI).

דוגמה: $f(x,y,z)=\sum(0,2,3,4,5,7)$



גוררים ראשוניים:

$$x'z',\ x'y,\ yz,\ xz,\ xy',\ y'z'$$

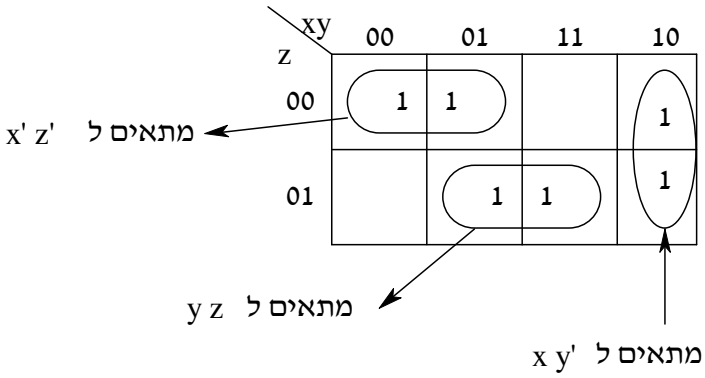
אף גורר ראשוני אינו EPI.

$$f = x'y + xz + y'z'$$

$$f = x'z' + yz + xy'$$

הסבר: אין באף גורר ראשוני מינטרם שאינו מכוסה ע"י גורר ראשוני אחר. למשל: בגורר ראשוני $x'z'$, שני המינטרמים שנמצאים בקבוצה מכוסים ע"י גוררים ראשוניים אחרים ולכן אף גורר ראשוני אינו EPI.

הפונקציה f בצורה מינימלית ע"י בחירת מספר מינימלי של גוררים ראשונים שמכסים את הפונקציה.



6.6. פישוט פונקציות בוליאניות כמכפלת סכומים POS

כפי שראינו כשפונקציה נתונה כמכפלת סכומים (POS) יש להתיחס לאותם צירופים שבהם ערך הפונקציה הינו 0. לכן בבואנו לפשט פונקציה כמכפלת סכומים נרשום 0 באותם תאים שמייצגים את ה"סכומים".

6.6.1 אלגוריתם לפישוט פונקציה כמכפלת סכומים.

אלגוריתם זה דומה לאלגוריתם של פישוט פונקציה בתור SOP, אלא שהפעם מצרפים לקבוצה תאים במפה שערכם 0, וכל קבוצה מהווה סכום.

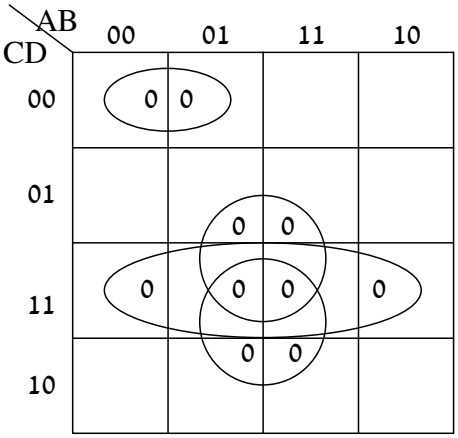
הבדל נוסף : משתנה שערכו 0 יופיע בפונקציה ללא היפוך.

משתנה שערכו 1 יופיע בפונקציה מהופך.

דוגמא :

$$f(A,B,C,D)=\pi(0,3,4,5,6,7,11,13,14,15)$$

הצמצום ל-POS מתבצע לפי כלל שנלמד : $(A+X)(A+X')=A$



$$f(A,B,C,D)=(A+C+D)\cdot(C'+D')\cdot(B'+D')(B'+C')$$

6.7 מפת קרנו של חמישה משתנים.

המפה מורכבת משתי מפות של ארבעה משתנים הצמודות זו לזו. המפה הימנית משוקפת (היפוך ימין-שמאל). משתנים : v, w, x, y, z (v- סיבית ה- M.S.B).

yz \ vwx	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

השכנות בין תאים בשני החצאים מתקיימת באופן מלא אם כי ציור הקוביות איננו רציף גיאומטרית.
דוגמא :

yz \ vwx	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01	1		1	1	1	1		1
11		1	1			1	1	
10	1	1	1			1	1	

$$f(v,w,x,y,z) = \sum(1,2,6,7,9,13,14,15,17,22,23,25,29,30,31) = wy'z + w'x'y'z + xy + v'w'yz'$$

הסבר : יש לחשוב על מפה של חמישה משתנים כמורכבת משתי מפות של ארבעה משתנים. באיור למעלה יש קו אנכי מודגש שמפריד בין שתי המפות (של 4 משתנים כל מפה)וזהו ציר סימטריה.

כאשר מתיחסים לכל מפת ארבעת המשתנים בנפרד היא שומרת על ה"שכנות" כפי שהוגדר לעיל דהיינו כל תא יש לו ארבעה שכנים, <u>ובנוסף</u> לכך שכן <u>חמישי</u> . השכן החמישי הינו תמונת הראי ביחס לציר הסימטריה .

לדוגמא : בטבלה העליונה תא 29 יש לו ארבעה שכנים במפה הימנית ובנוסף לכך גם תמונת ראי ביחס לציר הסימטריה והוא תא מס' 13.

6.8 צירופי ברירה (Don't Care)

כאשר נדרש לתכנן ולממש פונקצית מיתוג, לעיתים ערך הפונקציה איננו מוגדר עבור ערכים מסויימים של משתנים :

- צירופי כניסה מסוימים לא ייתכנו, או
- ערך הפונקציה עבור צירופי כניסה כאלה אינו מעניין.

צירופי כניסות כאלה ייקראו צירופי ברירה (Don't-care combinations), וערך הפונקציה עבורם יסומן ב- $\emptyset$.

ניתן להחליף $\emptyset$ ב- 0 או ב- 1 לפי הנוחות (לצורך קבלת ביטוי מינימלי).

דוגמה א':

צמצם את הפונקציה f שהקלט שלה הוא ספרה עשרונית בקוד BCD והפלט הוא $f=1$ אם הספרה מתחלקת ב- 3 ללא שארית.

פתרון

נקצה ארבעה משתני כניסה $w\ x\ y\ z$ לציון הספרה. נניח ש- w הינו ה-M.S.B צירופי הכניסה 10 עד 15 אינם חוקיים.

(כיון שמדובר בקוד BCD)

ערך הפלט יהיה 1 עבור הקלטים 0, 3, 6, 9 :

$$f(w,x,y,z)=\sum(0,3,6,9)+\sum_{\phi}(10,11,12,13,14,15)$$

כאשר $\sum_{\phi}$ מכיל את הצירופים האדישים.

סימון **נוסף** לצירופים אדישים : $d(....)$

yz \ wx	00	01	11	10
00	1		ϕ	
01			ϕ	1
11	1		ϕ	ϕ
10		1	ϕ	ϕ

$$f_{\min}=w'x'y'z'+x'yz+xyz'+wz$$

$$=\sum(0,3,6,9,11,13,14,15)$$

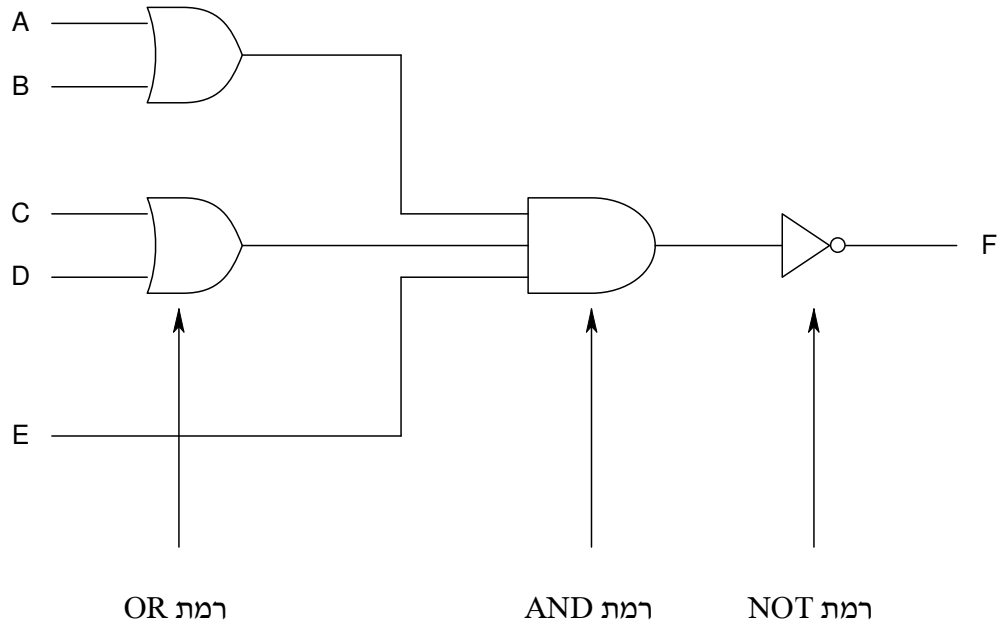
6.9 שיטות למימוש פונקציות ע"י שערים.

6.9.1 מימוש בשיטת : **OR-AND-NOT** .(רמה ראשונה OR אח"כ AND ואח"כ NOT).

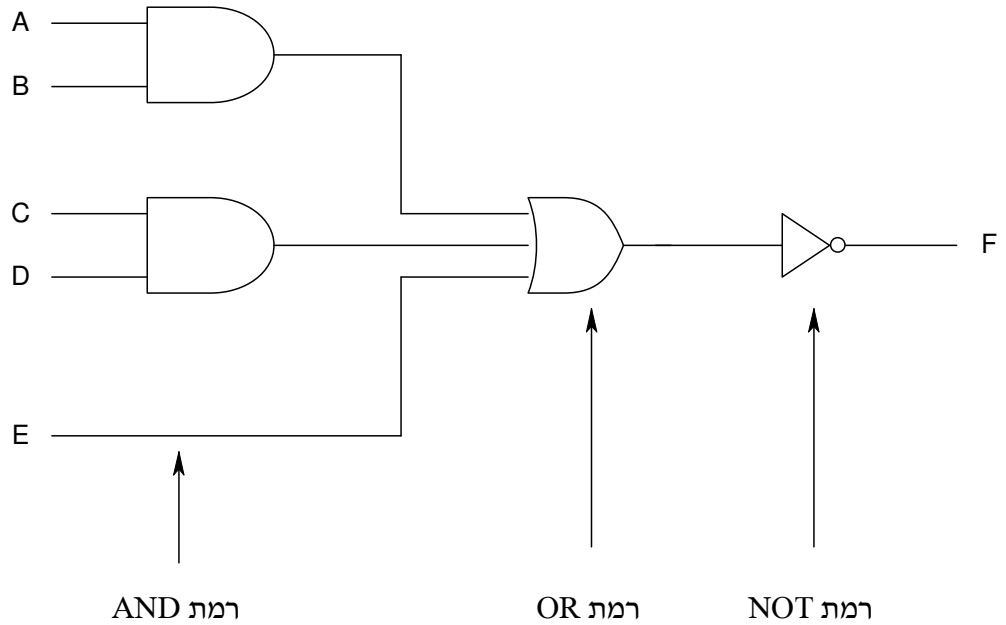
מימוש זה מתאים למכפלת סכומים (לאו דוקא סטנדרטים). לדוגמא נתונה הפונקציה הבאה :

$$F = \left[(A+B)(C+D)E\right]'$$

מימוש הפונקציה :



6.9.2 מימוש בשיטת: AND-OR-NOT

מימוש זה מתאים לפונקציה שמתוארת ע"י סכום מכפלות (לאו דוקא סטנדרטיות) לדוגמא:

$F = (AB + CD + E)'$.