תוכן העניינים

משוואות מסדר ראשון

משוואות מסדר גבוה

טבלת הנגזרות

$x' = 1$	2	$(c)' = 0$ (c - קבוע)	1
$(u \cdot v)' = u'v + uv'$	4	$(u + v - w)' = u' + v' + w'$ (u, v, w - פונקציות של x)	3
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	6	$(c \cdot u)' = cu'$	5
$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2} \cdot v'$	8	$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$	7
$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} u'$	10	$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ α - מספר ממשי	9
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	12	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	11
$(\ell^u)' = \ell^u \cdot u'$	14	$(\ell^x)' = \ell^x$ $\ell \approx 2.7\ldots$	13
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	16	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $a > 1$ (a- קבוע)	15
$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	18	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	17
$(\sin x)' = \cos x$	20	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$	19
$(\cos x)' = -\sin x$	22	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	21
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	24	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	23
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	26	$(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	25
$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	28	$(\cot u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	27
$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	30	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	29
$(f[g(x)])' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$	32	$(arc\cot u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$	31
$x'_y = \frac{1}{y'_x}$	34	$y'' = (y')'$	33

טבלת האינטגרלים

.1 $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$	.2 $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
.3 $(\alpha \neq -1)$ $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	.4 $\int dx = x + c$
.5 $(\alpha \neq -1)$ $\int (ax+b)^{\alpha} dx = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	.6 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
.7 $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + c$	.8 $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\|ax+b\| + c$
.9 $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + c$	.10 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\| + c$
.11 $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$	.12 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$
.13 $\int \sin x dx = -\cos x + c$	.14 $\int \cos x dx = \sin x + c$
.15 $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$	,16 $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
.17 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$	.18 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
.19 $\int \ell^x dx = \ell^x + c$	.20 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$
.21 $\int \ell^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ell^{ax+b} + c$	.22 $\int a^{bx+d} dx = \frac{a^{bx+d}}{b\ln a} + c$
.23 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\|f(x)\| + c$	

שיטות אינטגרציה מיוחדות.

1. אינטגרציה בחלקים: $\int udv = uv - \int vdu$

2. החלפת משתנה: $\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int F(t)dt$

הפרדת משתנים

צורת המשוואות :

$$y' = f(x)\cdot g(y)$$
$$M(x)\cdot N(y)dx + P(x)\cdot Q(y)dy = 0$$

פתרון :

$$\int\frac{Q(y)}{N(y)}dy = -\int\frac{M(x)}{P(x)}dx + C$$

דוגמה :

$$x^2y^2\frac{dy}{dx}+1 = y \Rightarrow x^2y^2\frac{dy}{dx} = y-1$$
$$\Rightarrow x^2y^2dy = (y-1)dx \Rightarrow \frac{y^2}{y-1}dy = \frac{dx}{x^2}$$

קיימת הפרדת משתנים. שלב הבא אינטגרציה :

$$\int\frac{y^2}{y-1}dy = \int\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \left[\frac{1}{2}y^2 + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x}+c\right]$$

זה הפתרון.

פתור את המשוואות הבאות ומצא את הפתרון הכללי

1.1 $xy' + y = 0$ ✓ $\left[y = \frac{c}{x}\right]$

1.2 $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$ ✓ $\left[(1+y)(1-x) = c\right]$

1.3 $(1+e^x)y\cdot y' = e^x$ ✓ $\left[\frac{1}{2}y^2 = \ln(1+e^x)+c\right]$

1.4 $y' = 2^{x+y}$ ✓ $\left[2^x + 2^{-y} = c\right]$

1.5 $e^y(1+x^2)y' - 2x(1+e^y) = 0$ ✓ $\left[1+e^y = c(1+x^2)\right]$

1.6 $(4+x^2)y' = 4$ ✓ $\left[y = 2arctg\frac{x}{2}+c\right]$

1.7 $e^{-y}(1+y') = 1$? $\left[e^x = c(1-e^{-y})\right]$

1.8 $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy$ ✓ $\left[arctgx + arctgy = c\right]$

פתור את המשוואות הבאות ומצא פתרון פרטי

1.9 $\frac{y}{x}y' + e^y = 0 \;,\; y(1) = 0$ $\left[2e^{-y}(1+y) = 1+x^2\right]$

1.10 $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx \;,\; y(0) = 0$ $\left[\frac{y^3}{3} + \frac{\pi}{4} = arctge^x\right]$

1.11 $y' \cdot \ln y = y \;,\; y(2) = 1$ $\left[x - 2 = 0.5 \cdot \ln^2 y\right]$

1.12 $ydx - xdy = 0 \;,\; y(1) = 1$ $\left[y = x\right]$

1.13 $dy + ytgxdx = 0 \;,\; y(0) = 1$ $\left[y = \cos x\right]$

1.14 $(y-a)dx + x^2dy = 0 \;,\; y(1) = 0$ $\left[a - y = \frac{a}{e}e^{\frac{1}{x}}\right]$

משוואות מסוג $y' = f(ax+by)$

הצבה $t = ax + by$ מביאה לצורת הפרדת משתנים

דוגמה : פתור משוואות

$$y' = 2x + y$$

$$t = 2x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 2 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = t + 2 \Rightarrow \frac{dt}{t+2} = dx \Rightarrow \int\frac{dt}{t+2} = \int dx + c$$

$$\ln|t+2| = x + \ln c \Rightarrow t = -2 + ce^x$$

פתרון :

$$y = ce^x - 2x - 2$$

אחרי הצבה

מצא את הפתרון כללי

$$y' = \frac{1}{x-y} + 1$$

נציב $z = x - y$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx} \Rightarrow 1 - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z} \Rightarrow z^2 = -2x + c$$

פתרון : $(x-y)^2 = -2x + c$

פתור את המשוואות הבאות ומצא פתרון פרטי

1.9 $\frac{y}{x}y' + e^y = 0 \ , \ y(1) = 0$ $\quad \left[2e^{-y}(1+y) = 1 + x^2\right]$

1.10 $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx \ , \ y(0) = 0$ $\quad \left[\frac{y^3}{3} + \frac{\pi}{4} = arctge^x\right]$

1.11 $y' \cdot \ln y = y \ , \ y(2) = 1$ $\quad \left[x - 2 = 0.5 \cdot \ln^2 y\right]$

1.12 $ydx - xdy = 0 \ , \ y(1) = 1$ $\quad \left[y = x\right]$

1.13 $dy + ytgxdx = 0 \ , \ y(0) = 1$ $\quad \left[y = \cos x\right]$

1.14 $(y-a)dx + x^2dy = 0 \ , \ y(1) = 0$ $\quad \left[a - y = \frac{a}{e}e^{\frac{1}{x}}\right]$

משוואות מסוג $y' = f(ax+by)$

הצבה $t = ax + by$ מביאה לצורת הפרדת משתנים

דוגמה : פתור משוואות

$$y' = 2x + y$$

$$t = 2x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 2 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = t + 2 \Rightarrow \frac{dt}{t+2} = dx \Rightarrow \int\frac{dt}{t+2} = \int dx + c$$

פתרון :

$$\ln|t+2| = x + \ln c \Rightarrow t = -2 + ce^x$$

אחרי הצבה

$$y = ce^x - 2x - 2$$

מצא את הפתרון כללי

$$y' = \frac{1}{x-y} + 1$$

נציב $z = x - y$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx} \Rightarrow 1 - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z} \Rightarrow z^2 = -2x + c$$

פתרון : $(x-y)^2 = -2x + c$

משוואות הומוגניות

הגדרה : הפונקציה $f(x,y)$ היא פונקציה הומוגנית בסדר n ליחס המשתנים x,y , אם קיימת פונקציה זהה עבור פרמטר α כלשהו.

$$f(\alpha x,\alpha y)=\alpha^n f(x,y)$$

דוגמאות :

א. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ זו פונקציה הומוגנית בסדר 1

$$f(\alpha x,\alpha y)=\sqrt[3]{(\alpha x)^3+(\alpha y)^3}=\alpha^3\sqrt{x^3+y^3}$$

ב. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{y}$ זו פונקציה הומוגנית מסדר 0

$$f(\alpha x,\alpha y)=\frac{\alpha x-\alpha y}{\alpha y}=\frac{x-y}{y}$$

ג. $f(x,y)=x^2-y$ זו פונקציה לא הומוגנית

הגדרה : משוואה דיפרנציאלית

$$y'=f(x,y)$$

היא הומוגנית אם $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית
כדי לפתור משוואה מסוג זה יש להציב :

$$z=\frac{x}{y}\Rightarrow y=zx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$$

לאחר ההצבה

$$y'=f(x,y)\Rightarrow z+xz'=f(1,z)$$

אנו מגיעים להפרדת משתנים

$$\int\frac{dz}{f(1,z)-z}=\int\frac{dx}{x}+c$$

דוגמה : פתור את המשוואה

$$xdy=(x+y)dx\Rightarrow y'=\frac{x+y}{x}\Rightarrow y=zx\Rightarrow y'=z+xz'\Rightarrow z+xz'=1+z$$

צריך לפתור את המשוואה $xz'=1$

$$dz=\frac{dx}{x}\Rightarrow z=\ln|x|+c$$

פתרון סופי $y=x(\ln|x|+c)$

קבע אלו מפונקציות הבאות הומוגנית או לא וקבע את הסדר של הפונקציה

$x^2 - xy$	[סדר 2]
$\frac{xy}{x^2+y^2}$	[סדר 0]
$\frac{xy}{x+y^2}$	[אינה הומוגנית]
$x + y\cos\frac{y}{x}$	[סדר 1]
$\arcsin xy$	[אינה הומוגנית]
$\arcsin\frac{y}{x}$	[סדר 0]
$arctg\frac{xy}{x^2+y^2}$	[סדר 0]
$arctg(x^2+y^2)$	[אינה הומוגנית]
$xe^{\frac{y}{x}} + ye^{\frac{x}{y}}$	[סדר 1]
$\ln x - \ln y$	[סדר 0]
$\sqrt{x^2+2xy+3y^2}$	[סדר 1]
$x^5 + yx^4$	[סדר 5]
$x^5 + yx^3 + y^5$	[אינה הומוגנית]
$xy + e^{\frac{x}{y}} + e^{xy}$	[אינה הומוגנית]
$(2x^2+xy)xy$	[סדר 4]
$\frac{x\sin x}{x+y}$	[אינה הומוגנית]
$\frac{xe^x}{(x+y)e^y}$	[אינה הומוגנית]
$\frac{x^2e^{\frac{x}{y}}}{x^2+xy}$	[סדר 0]

$t^2(x^2-xy)$ $= (tx)^2 - txty =$

$\frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}}\frac{txty}{(tx)^2+(ty)^2}$

$t^2\frac{xy}{tx+ty^2}$

$t(x+y\cos\frac{y}{x}\cancel{\frac{t}{t}})$

?

$\frac{y}{x}\cancel{\frac{t}{t}}$

$\frac{t^2}{\cancel{t^2}}$

?

$t(xe^{\frac{ty}{tx}}+ye^{\frac{tx}{ty}})$

$\ln(\frac{x}{y})$

t^2 t^2 t^2

t^2 t^2 t^4

t t ?

$\frac{t}{t(t+1)}$?

$= \frac{\cancel{t^2}(x^2e^{\frac{tx}{ty}})}{\cancel{t^2}(x^2+xy)}$

$\left[x = y\sqrt{-2\ln cy'}\right]$ $\qquad y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ **3.1**

$\left|\sin\dfrac{y}{x} = cx\right|$ $\qquad y' = \dfrac{y}{x} + tg\dfrac{y}{x}$ **3.2**

$\left[x^2 + 2xy - y^2 = c\right]$ $\qquad (x+y)dx + (x-y)dy = 0$ **3.3**

$\left[y^2 - x^2 = cx\right]$ $\qquad (x^2 + y^2) = 2xyy'$ **3.4**

$\left[x^2 + y^2 = cy\right]$ $\qquad (x^2 - y^2)y' = 2xy$ **3.5**

$\left[2y(y-2x)^3 = c(y-x)^2\right]$ $\qquad y' = \dfrac{2y^2 - xy}{x^2 - xy + y^2}$ **3.6**

$\left[3x^4 + 8x^3y + 6x^2y^2 = c\right]$ $\qquad y'(2x^2 + 3xy) = -3(x+y)^2$ **3.7**

$\left[cy = e^{\frac{y}{x}}\right]$ $\qquad (x^2 - xy)y' + y^2 = 0$ **3.8**

$\left[xy\cos\dfrac{y}{x} = c\right]$ $\qquad (x\cos\dfrac{y}{x})(ydx + xdy) = y\sin\dfrac{y}{x}(xdy - ydx)$ **3.9**

$\left[2x^2 + y^2 = c\sqrt{x^2 + y^2}\right]$ $\qquad y^3y' + 3xy^2 + 2x^3 = 0$ **3.10**

$\left[y = ce^{y/x}\right]$ $\qquad y'x^2 + y^2 = xyy'$ **3.11**

משוואות דיפרנציאליות מסוג

$$y' = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2})$$

צריך לשנות את המשתנים x,y למשתנים u,v דרך העברת ראשית הצירים ל x,y לנקודת חיתוך x_0, y_0.
הקווים הבאים

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

משתנים חדשים יהיו $u = x - x_0$ ו $v = y - y_0$.

מקבלים

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

ומגיעים למשוואה חדשה

$$\frac{dv}{du} = f(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v})$$

וזוהי משוואה הומוגנית.
דוגמה :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1, y_0 = 2$$

מעבר למשתנים חדשים

$$u = x - 1, v = y - 2 \Rightarrow x = u + 1, y = v + 2$$

מקבלים

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{1 - z}{1 + z} \Rightarrow \frac{(1 + z)dz}{1 - 2z - z^2} = \frac{du}{u}$$

פתרון

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1 - 2z - z^2\right| = \ln|u| - \frac{1}{2}\ln c$$

ותוצאה סופית

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = c$$

$y' = \dfrac{2x+3y-1}{-3x-y+5}$ **4.1**

$\left[y = -3x + 5 \pm \sqrt{7(x-2)^2 + \dfrac{1}{c}}\right]$

$(x+2y+1)y' = 2x+4y+3$ **4.2**

$\left[e^{5y-10x} = c(2x+4y+2.8)\right]$

$y' = -\dfrac{2(x-2y+1)}{5x-y-4}$ **4.3**

$\left[(x+y-2)^2 = c(2x-2)\right]$

$y' = \dfrac{7x-3y-7}{-3x+7+3}$ **4.4**

$\left[(y-x+1)^2(y+x-1)^5 = c\right]$

$y' = -\dfrac{x-3y+2}{3x-y-2}$ **4.5**

$\left[c(y+x-2)^2 = y-x\right]$

$y' = \dfrac{x-2y+9}{3x-6y+19}$ **4.6**

$\left[3y - x = 9\cdot\ln|x-2y+1| + c\right]$

$y' = \dfrac{2x+2y-1}{-x-y+2}$ **4.7**

$\left[x+y+1 = ce^{\frac{2x+y}{3}}\right]$

$y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$ **4.8**

$\left[y+2 = ce^{-2\,arctg\frac{y+2}{x-3}}\right]$

$(y+2)dx = (2x+y-4)dy$ **4.9**

$\left[(y+2)^2 = c(x+y-1)\right]$

משוואות ליניאריות

משוואות מסוג

$+ p(x)y = f(x)$

4.1

אם $f = 0$ זו משוואה הומוגנית

$+ p(x)y = 0$

אם $f \neq 0$ זו משוואה אי הומוגנית

4.2

4.3

אם $f = 0$ אז קיימת הפרדת משתנים

4.4 $+ p(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + c \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln c \qquad (c > 0)$

או פתרון כללי

4.5

$= ce^{-\int p(x)dx}$

4.6

אם $f \neq 0$ מציבים את ההצבה הבאה :

4.7 $= u(x) \cdot v(x)$

כאשר $u(x)$ -

זה פתרון של משוואה הומוגנית כלומר

4.8

$\iota' + p(x)u = 0$

ואז מקבלים

4.9

$$y' = (u \cdot v)' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' + p(x)u \cdot v = f(x) \Rightarrow$$

$$v(u' + p(x)u) + uv' = f(x) \Rightarrow v' = \frac{f(x)}{u(x)}.$$

$$v = \int \frac{f(x)}{u(x)} dx + c$$

פתרון כללי

$$y = u(x) \cdot (\int \frac{f(x)}{u(x)} dx + c)$$

דוגמה א

$$y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln c \Rightarrow y = cx$$ (זה הפתרון)

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \Rightarrow y = u \cdot v$$

$$u' - \frac{u}{x} = 0 \Rightarrow u = x \Rightarrow y' = (x \cdot v)' = xv' + v$$

$$xv' + v - v = x^2 \Rightarrow v' = x \Rightarrow v = \int xdx + c = \frac{x^2}{2} + c$$

והפתרון

$$y = cx + \frac{x^3}{2}$$

דוגמה ב

$$y' - yctgx = 2x\sin x$$

נציב

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + uv'$$

u - פתרון של משוואה הומוגנית ולכן

$$u' - uctgx = 0 \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int ctgxdx \Rightarrow \ln u = \ln|\sin x| \Rightarrow u = \sin x$$

נציב למשוואה המקורית

$$v(u' - uctgx) + uv' = 2x\sin x \Rightarrow \sin x\frac{dv}{dx} = 2x\sin x \Rightarrow v = \int 2xdx + c$$

פתרון כללי

$$y = \sin x(x^2 + c)$$

פתרו את המשוואות ההומוגניות הבאות :

5.1 $y' + tgx \cdot y = 0$ — $[y = c \cdot \cos x]$

5.2 $z' + \frac{z}{a^2 - t^2} = 0$ — $\left[z^{2a} = c\frac{t-a}{t+a}\right]$

5.3 $-xy' + y = 0$ — $[y = cx]$

5.4 $y' + xy = 0$ — $\left[y = ce^{-\frac{x^2}{2}}\right]$

5.5 $y' + \cos x \cdot y = 0$ — $[y = ce^{-\sin x}]$

5.6 $y' + e^x y = 0$ — $[y = ce^{-e^x}]$

פתור את המשוואות האי הומוגניות הבאות :

5.7 $xy' - 2y = 2x^4$ — $[y = cx^2 + x^4]$

5.8 $y' + ytgx = \frac{1}{\sin x}$ — $[y = \sin x + c\cos x]$

5.9 $x^2y' + xy + 1 = 0$ — $[xy = c - \ln x]$

5.10 $y' = 2x(x^2 + y)$ — $[y = ce^{x^2} - x^2 - 1]$

5.11 $ydx + (xy + x - 3y)dy = 0$ — $[xy = 3(y-1) + ce^{-y}]$

5.12 $y' + 2xy = 4x$ — $[y = 2 + ce^{-x^2}]$

5.13 $y' - \frac{1}{x}y = x^2 + 3x - 2$ — $[2y = x^3 + 6x^2 - 4x\ln x + cx]$

5.14 $(2x + y)dy = ydx + 4(\ln y)dy$ — $[x = 2\ln y - y + 1 + cy^2]$

5.15 $y' = \frac{y}{3x - y^2}$ — $[x = cy^3 + y^2]$

5.16 $dx + x\cos y dy = 0$ — $[x = ce^{-\cos y}]$

משוואות בצורת דיפרנציאל שלם

סוג משוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

ומתקיים $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

מכאן נובע $M=\frac{\partial u}{\partial x}$ ו $N=\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du=0\Rightarrow u=c$$

פתרון כללי:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)\Rightarrow u=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+c(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx+c'(y)=N(x,y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow N(x,y)\Big[_{x_0}^{x}+c'(y)=N(x,y)$$

$$N(x_0y)=c'(y)\Rightarrow c(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0y)dy+c$$

פתרון

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+c$$

du - הוא דיפרנציאל שלם

דוגמה א

$$(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$$
$$M=x+y+1$$
$$N=x-y^2+3$$
$$\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y}=\frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x}\Rightarrow 1=1$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+y+1\Rightarrow u=\int(x+y+1)dx+c(y)$$
$$u=\frac{x^2}{2}+xy+x+c(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+c'(y)=x-y^2+3\Rightarrow c'(y)=-y^2+3\Rightarrow$$
$$c(y)=\int(-y^2+3)dy+c=-\frac{y^3}{3}+3y+c$$
$$u=\frac{x^2}{2}+xy+x+3y-\frac{y^3}{3}+c$$

<u>פתרון:</u>

$$u=3x^2+6xy+6x+18y-2y^3=c$$

דוגמה ב

$$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$$
$$M=\frac{2x}{y^3}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}$$
$$N=\frac{y^2-3x^2}{y^4}\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}\Rightarrow u=\int\frac{2x}{y^3}dx+c(y)=\frac{x^2}{y^3}+c(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{y^2-3x^2}{y^4}=-\frac{3x^2}{y^4}+c'(y)\Rightarrow c'(y)=\frac{1}{y^2}\Rightarrow$$
$$c(y)=\int\frac{1}{y^2}dy+c\Rightarrow c(y)=-\frac{1}{y}+c$$
$$u(x,y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+c$$

לכן הפתרון הוא $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c$

פתור את המשוואות הבאות :

6.1 $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$ $\left[3x^2y-y^3=c\right]$

6.2 $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$ $\left[xe^{-y}-y^2=c\right]$

6.3 $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$ $\left[4y\ln x+y^4=c\right]$

6.4 $3x^2(1+\ln y)dx=(2y-\frac{x^3}{y})dy$ $\left[x^3(1+\ln y)-y^2=c\right]$

6.5 $\left(\frac{2x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos^2 y-1}dy=0$ $\left[\frac{1+x^2}{\sin y}+2x=C\right]$

6.6 $(2-9xy^2)dx+(4y^2-6x^3)ydy=0$ $\left[2x\ -3x^3y^2+y^4=c\right]$

6.7 $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy=0$ $\left[x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^4=c\right]$

6.8 $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$ $\left[\frac{x^2}{2}+xy+y^2=c\right]$

6.9 $(x^2+y^2+2x)dx+(2xy)dy=0$ $\left[\frac{x^3}{3}+xy^2+x^2=c\right]$

6.10 $xdx+ydy=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ $\left[x^2+y^2-2arctg\frac{x}{y}=c\right]$

6.11 $(y\cos x+\cos y)dx+(\sin x-x\sin y)dy=0$ $\left[y\sin x+x\cos y=0\right]$

6.12 $(\ln y+\frac{y}{x})dx+(\ln x+\frac{x}{y})dy=0$ $\left[x\ln y+y\ln x=c\right]$

גורם אינטגרציה

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \quad , \quad M'_y \neq N'_x$$

μ - גורם אינטגרציה

$$\mu M dx+\mu N dy=0 \qquad (\mu M)'_y=(\mu N)'_x$$

$$\mu\frac{\partial m}{\partial y}+M\frac{\partial \mu}{dy}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x}\Rightarrow M\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

דוגמה

$$(y+xy^2)dx-xdy=0, \qquad M=y+xy^2, N=-x.$$

הנחה μ- לא תלוי מ x, $M'_y \neq N'_x$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=-\frac{2}{y}\Rightarrow\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=-\frac{2}{y}$$

אחרי פעולה $\mu=\frac{1}{y^2}$

$$\frac{1}{y^2}(y+xy^2)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

פתרון

$$U=\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+c \quad , \quad \frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=c$$

פתור את המשוואות הבאות:

7.1 $x^2y^3+x(1+y^2)y'=0$ גורם $\mu=\frac{1}{xy^3}$

7.2 $ydx+(2x-ye^y)dy=0$ גורם $\mu=y$

7.3 $xdy-ydx=x^2e^xdx$ $\left[y=cx+xe^x\right]$

7.4 $y^2dy+ydx-xdy=0$ $\left[\frac{y^2+x}{y}=c\right]$

7.5 $y(x+y)dx-x^2dy=0$ $\left[\frac{x}{y}+\ln x=c\right]$

משוואות ברנולי

$n \neq 0, n \neq 1$ $y' + f(x)y = g(x)y^n$

הצבה $z = y^{-n+1}$ $\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

חילוק ב y^n $y^{-n}y' + f(x)y^{-n}y = g(x)$

אחרי הצבה

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x)$$

קיבלנו משוואה ליניארית אי הומוגנית

דוגמה $y' + xy = x^3y^3$

אחרי הצבה $z = y^{-2}$, $z' = -2y^{-3}y'$

$z' - 2xz = -2x^3$

הצבה חדשה $z = uv \Rightarrow u' - 2xu = 0$

פתרון $z = uv = x^2 + 1 + ce^{x^2}$

פתרון כללי $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + ce^{x^2}}}$

פתור את המשוואות

8.1 $y' - y = xy^5$ $\left[\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + ce^{-4x}\right]$

8.2 $y' + 2xy = -xy^4$ $\left[\frac{1}{y^3} = -\frac{1}{2} + ce^{3x^2}\right]$

8.3 $y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4$ $\left[\frac{1}{y^3} = -1 - 2x + ce^x\right]$

8.4 $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$ $\left[\frac{1}{y} = -\sin x + ce^x\right]$

8.5 $y^{-3}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = 1 + \ln x$ $\left[\frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3(\frac{2}{3} + \ln x) + c\right]$

משוואות מסדר גדול מסדר ראשון

$$F\left(x, y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y\right) = 0$$

הורדת סדר

למשוואות בצורה $F(y,y',\ldots,y^{(k)})$ שבלתי תלויות מ x ניתן להוריד את סדר המשוואה בעזרת ההצבה $y' = z(y)$

לדוגמה המשוואה $2yy'' = y'^2 + 1$

הצבה $z = y'$

$$y' = z(y) \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} y_x{}' = z\frac{dz}{dy}$$

$$2yz\frac{dz}{dy} = z^2 + 1 \Rightarrow \int \frac{dz^2}{z^2+1} = \int \frac{dy}{y} + c \Rightarrow$$

$$\ln(z^2+1) = \ln y + c \Rightarrow z^2 = cy - 1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{cy-1} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{cy-1} \Rightarrow \pm\int \frac{dy}{\sqrt{cy-1}} = \int dx$$

פתרון סופי $\pm 4(cy-1) = c^2(x + c_0)$

הורד את סדר המשוואה ופתור :

1.1 $y^3y''=1$ $\left[c_1y^2-1=(c_1x+c_2)^2\right]$

1.2 $y''=2yy'$ $\left[\begin{array}{l} y=c_1tg(c_1x+c_2) \\ \ln\left|\dfrac{y-c_1}{y+c_1}\right|=2c_1x+c_2\,, y=c \\ y(c-x)=1 \end{array}\right]$

1.3 $y''y+1=y'^2$ $\left[\begin{array}{l} c_1y=\pm\sin(c_1x+c_2) \\ c_1y=\pm sh(c_1x+c_2), y=c\pm x \end{array}\right]$

1.4 $y'''=y''^2$ $\left[\begin{array}{l} y=c_3-(x+c_1)\ln c_2(x+c_1) \\ y=c_1x+c_2 \\ y=-c_1\ln|y|+x+c_2\,, y=c \end{array}\right]$

1.5 $yy''=y'^2-y'^3$

1.6 $y''=e^y$ $\left[\begin{array}{l} e^y\sin^2(c_1x+c_2)=2c_1^{\,2} \\ e^y(x+c)^2=2 \\ e^y sh^2(c_1x+c_2)=2c_1^{\,2} \end{array}\right]$

1.7 $xy^{(4)}=1$ $\left[6y=x^3\ln|x|+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4\right]$

1.8 $(y'+2y)+y''=y'^2$ $\left[\begin{array}{l} x=u-\ln(u+1)+c_2 \\ u=\pm\sqrt{1+4c_1y} \\ y=c, y=ce^{-x} \end{array}\right]$

מצא את הפתרון פרטי

1.9 $\begin{array}{l} yy''=2xy'^2 \\ y(2)=2 \\ y'(2)=\dfrac{1}{2} \end{array}$ $\left[(3-x)y^5=8(x+2)\right]$

משוואות לינאריות מסדר 2 עם מקדמים קבועים

משוואה הומוגנית

$$y'' = py' + qy = 0$$

מחפשים פתרון בצורה

$$k = const \quad y = e^{kx}$$

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx} \Rightarrow \text{הצבה} \Rightarrow e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

מקבלים משוואה אופיזית

$$k^2 pk + q = 0$$

$$k_1 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad , \quad k_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

ישנם שלוש אפשרויות :

1 $k_1 \neq k_2$ (k_1, k_2 ממשיים)

2 $k = k_1 = k_2$

3 $k_1 \neq k_2$ (k_1, k_2 מרוכבים)

אפשרות מס' 1

פתרון כללי

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_2 x}$$

דוגמה א

$$y'' + y' - 2y = 0 \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0$$

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -2$$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

אפשרות מס' 2

פתרון כללי

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}$$

דוגמה ב

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k = 2$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

אפשרות מס' 3

פתרון כללי

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

כאשר

$$k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$$

דוגמה ג

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \Rightarrow k_1 = -1 + 2i, k_2 = -1 - 2i$$

$$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2)$$

פתור את המשוואות הבאות

2.1 $y''-y'-2y=0$ $\left[y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}\right]$

2.2 $y''+24y'+144y=0$ $\left[y=e^{-12x}(c_1+c_2x)\right]$

2.3 $y''-y'-6y=0$ $\left[y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}\right]$

2.4 $y''-5y=0$ $\left[y=c_1e^{-\sqrt{5}x}+c_2e^{\sqrt{5}x}\right]$

2.5 $y''-2y'+121y=0$ $\left[y=e^{11x}(c_1+c_2x)\right]$

2.6 $y''-4y'+20y=0$ $\left[y=e^{2x}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x)\right]$

2.7 $y''+49y=0$ $\left[y=c_1\cos 7x+c_2\sin 7x\right]$

2.8 $y''+2\sqrt{3}y'+7y=0$ $\left[y=e^{-\sqrt{3}x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)\right]$

2.9 $y''+3y=0$ $\left[y=c_1\cos\sqrt{3}x+c_2\sin\sqrt{3}x\right]$

2.10 $y''+4y=0$ $\left[y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right]$

2.11 $y''+4y'+3y=0$ $\left[y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}\right]$

2.12 $y''+y'-2y=0$ $\left[y=c_1e^{-\frac{5x}{2}}+c_2e^{\frac{x}{2}}\right]$

2.13 $y''-2y'=0$ $\left[y=c_1+c_2e^{2x}\right]$

2.14 $y''+2y'+10y=0$ $\left[y=e^{-x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)\right]$

2.15 $y''-4y'+5y=0$ $\left[y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)\right]$

2.16 $4y''+4y'+y=0$ $\left[y=e^{-\frac{x}{2}}(c_1+c_2x)\right]$

2.17 $2y''-5y'+2y=0$ $\left[y=ce^{2x}+c_2e^{\frac{x}{2}}\right]$

משוואות לא הומוגניות $y^2 + py' + qy = f(x)$

דוגמה א

$$y'' + 4y' + 3y = x \Rightarrow y = y_0 + y^*$$

y_0 - פתרון של משוואה הומוגנית

y^* - פתרון של משוואה לא הומוגנית

$$y_0'' + 4y_0' + 3x = 0 \Rightarrow y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

אחרי ההצבה

$$y^* = A_0 x + A_1$$

$$4A_0 + 3(A_0 x + A_1) = x \qquad 3A_0 = 1 \ , \ 4A_0 + 3A_1 = 0 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{3} \ , \ A_1 = -\frac{4}{9}$$

$$y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$

פתרון כללי

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$

דוגמה ב

$$y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x} \Rightarrow y = y_0 + y^*$$

$$y_0'' + 9y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

אחרי ההצבה

$$y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$$

$$\left[9(Ax^2 + Bx + C) + 6(2Ax + B) + 2A + 9(Ax^2 + Bx + C)\right]e^{3x} = (x^2 + 1)e^{3x}$$

מגיעים למערכת משוואות

$$\begin{cases} 18A = 1 \\ 12A + 18B = 0 \\ 2A + 6B + 18C = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{18}, B = -\frac{1}{27}, C = \frac{5}{81}$$

$$y^* = (\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81})e^{3x}$$

פתרון כללי

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + (\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81})e^{3x}$$

דוגמה ג

$$y'' + 4y = \cos 2x \quad , \quad y = y_{0+} y^*$$

$$y_0'' + 4y_0 = 0 \Rightarrow \quad y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

אחרי הצבה

$$y^{*'} = 2x(-A\sin 2x + B\cos 2x) + A\cos 2x + B\sin 2x$$

$$y^{*''} = 4x(-A\cos 2x - B\sin 2x) + 4(-A\sin 2x = B\cos 2x)$$

$$A = 0 \quad , \quad B = \frac{1}{4}$$

<u>פתרון כללי:</u>

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x$$

דוגמא ד

$$y'' + 2y' + 5y = 2\cos x \quad , \quad y = y_0 + y^*$$

$$y_0'' + 2y_0' + 5y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$$

$$y^* = A\cos x + B\sin x$$

אחרי הצבה

$$-`A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x$$

$$-A + 2B + 5A = 2 \quad , \quad -B \quad , \quad -2A + 5B = 0 \Rightarrow A = \frac{2}{5} \quad , \quad B = \frac{1}{5}$$

<u>פתרון כללי:</u>

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

$\left[y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}e^x\right]$	$y''+y'=e^x$	2.18
$\left[y=C_1+C_2e^{-x}+0.5x\right]$	$y''+y'=0.5$	2.19
$\left[y=(C_1+C_2x)e^{-x}-2\right]$	$y''+2y'+y=-2$	2.20
$\left[y=C_1+C_2e^{-8x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x\right]$	$y''+8y'=8x$	2.21
$\left[y=C_1\cos x+C_2\sin x+2e^x\right]$	$y''+y=4e^x$	2.22
$\left[y=e^x(C_1+C_2e^x)+2x^2e^x\right]$	$y''-2y'+y=4e^x$	2.23
$\left[y=C_1e^x+C_2e^{-x}+2xe^x\right]$	$y''-y=4e^x$	2.24
$\left[y=e^{mx}(C_1+C_2x)+\frac{e^x}{(m-1)^2}\right]$	$y''-2my'+m^2y=e^x$ $(m\neq 1)$	2.25
$\left[\begin{array}{l} y=e^{mx}(C_1+C_2x)+ \\ +\frac{(m^2-n^2)\sin nx+2mn\cos nx}{(m^2-n^2)^2}\end{array}\right]$	$y''-2my'+m^2y=\sin x$ $(m\neq n)$	2.26
$\left[\begin{array}{l} y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+ \\ +\frac{2\cos mx+3\sin mx}{a^2-m^2}\end{array}\right]$	$y''+a^2y=2\cos mx+3\sin mx$ $m\neq a$	2.27
$\left[\begin{array}{l} y=C_1+C_2e^{5x}-0.2x^3-0.12x^2-0.048x \\ +0.02(\cos 5x-\sin 5x)\end{array}\right]$	$y''-5y'=3x^2+\sin 5x$	2.28
	$y''-2y'+2y=e^x+x\cos x$	2.29
$\left[y=C_1\cos x+C_2\sin x+2x\cos x+x^2\sin x\right]$	$y''+y=-2\sin x+4x\cos x$	2.30

מצא את הפתרון פרטי

$\left[y=-\frac{3}{8}+\frac{11}{8}e^{-2x}+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}x^2\right]$	$y''+2y'=1-x$ $y(0)=1$ $y'(0)=-2$	2.31
$\left[y=e^{-3x}\left(x+\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{5}(4\sin x-3\cos x)\right]$	$y''+6y'+9y=10\sin x$ $y(0)=0$, $y'(0)=0$	2.32
$\left[y=\cos x+x\sin x\right]$	$y''+y=2\cos x$ $y(0)=1$, $y'(0)=0$	2.33

משוואות לינאריות מסדר **n** עם מקדמים קבועים.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y + a_0 = f(x)$$

משוואות הומוגניות

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

מחפשים פתרון בצורה $y = e^{kx}$ $k = const$

מקבלים משוואה אופיינית

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0 = 0$$

קיימים n שורשים $k_1 k_2 \dots k_n$

פתרון כללי:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}$$

אם $k_1 \neq k_2 \dots \neq k_n$ אחר שיטות דומות לפרק קודם

דוגמה א

$$y^{IV} - y = x^3 + 1 \Rightarrow k^4 - 1 = 0$$

$$k_1 = -1 \quad k_2 = -1 \quad k_3 = i \quad k_4 = -i$$

$$y = y_0 + y^* \Rightarrow y_0^{IV} - y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3$$

אחרי הצבה

$$-A_0 x^3 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1$$

$$A_0 = -1 \quad A_1 = 0 \quad A_2 = 0 \quad A_3 = -1$$

$$y^* = -x^3 - 1$$

פתרון כללי:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - 1 - x^3$$

דוגמה ב

$$y^{IV} - y = 5\cos x \Rightarrow y_0 + y^* = y$$

$$y^* = x(A\cos x + B\sin x) \Rightarrow \qquad A = 0 \quad B = -\frac{5}{4}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{5}{4} x \sin x$$

$\left[y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{-2x}\right]$	$y'''+y''-2y'=0$	3.1
$\left[y=C_1+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}+C_4x^2e^{x}\right]$	$y^{IV}-6y'''+12y''-8y'=0$	3.2
$\left[y=C_1e^{x}+C_2\cos 3x+C_3\sin 3x\right]$	$y'''-y''+9y'-9=0$	3.3
$\left[y=C_1+C_2x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\right]$	$y^{IV}+4y''=0$	3.4

משוואות לינאריות עם מקדמים משתנים (משוואות של אוילר- קושי)

משוואות מסוג הבא

$$a_nx^4y^{(n)}+...+a_1xy'+a_0y=0$$

או מסוג

$$a_n(bx+c)^4y^{(n)}+...+a_1(bx+c)y'+a_0y=0$$

בעזרת הצבה $x=e^t$

או במתאים הצבה $z=bx+c$ | $z=e^t$

מעברים לסוג משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים

דוגמה א

$$x^2y''+\frac{5}{2}xy'-y=0$$

$$y=x^k\Rightarrow k(k-1)+\frac{5}{2}k-1\Rightarrow\quad k_1=0.5\quad,\quad k_2=-2$$

פתרון כללי: $(x>0)$

$$y=C_1x^{0.5}+C_2x^{-2}$$

דוגמה ב

$$x^2y''+xy'+y=0$$

$$y=x^k\Rightarrow k(k-1)+k+1=0\qquad k_{1,2}=\pm i$$

פתרון כללי: $(x>0)$

דוגמה ג

$$y=C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x$$

$$x^2y''-xy'+y=0$$

$$y=x^k\Rightarrow k(k-1)-k+1=0\Rightarrow$$

פתרון כללי: $(x>0)$

$$y=(C_1+C_2\ln x)x$$

פתור את המשוואות הבאות

$\left[y=C_1x^2+C_2x^3\right]$	$x^2y''-4xy'+6y=0$	4.1
$\left[y=C_1x^3+C_2x^{-1}\right]$	$x^2y''-xy'-3y=0$	4.2
$\left[y=C_1+C_2\ln\lvert x\rvert+C_3x^3\right]$	$x^2y'''-2y'=0$	4.3
$\left[y=x\left(C_1+C_2\ln\lvert x\rvert\right)+2x^3\right]$	$x^2y''-xy'+y=8x^3$	4.4
$\left[y=C_1x^3+C_2x^{-2}+x^3\ln\lvert x\rvert-2x^2\right]$	$x^2y''-6y=5x^3+8x^2$	4.5
$\left[y=x^2\left(C_1\cos\ln\lvert x\rvert+C_2\sin\ln\lvert x\rvert+3\right)\right]$	$x^2y''-3xy'+5y=3x^2$	4.6
$\left[y=C_1x^2+C_2x^{-1}+0.1\cos\ln x-0.3\sin\ln x\right]$	$x^2y''-2y=\sin\ln x$	4.7
$\left[y=(x-2)^2\left(C_1+C_2\ln\lvert x-2\rvert\right)+x-1.5\right]$	$(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=x$	4.8
$\left[y=C_1\left(x+\frac{3}{2}\right)+C_2\left\lvert x+\frac{3}{2}\right\rvert^{\frac{3}{2}}+C_3\left\lvert x+\frac{3}{2}\right\rvert^{\frac{1}{2}}\right]$	$(2x+3)^3y'''+3(2x+3)y'-6y=0$	4.9

שימושים של משוואות לינאריות בתורת התנודות

מחוק שני של ניוטון מקבלים את משוואת התנודות

$$\frac{dy^2}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+q\frac{dy}{dt}=f(t)$$

$p\geq 0 \quad , \quad q>0$

תנודות חופשיות

$$y''+py'+qy=0$$

משוואה אופיינית

$$k^2+pk+q=0$$

$$k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \qquad k_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

P- מקדם החיכוך

אם $\frac{p^2}{4}>q$ k_1 , k_2 - שליליים וממשיים.

<u>פתרון :</u>

$$y=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}$$

אין תנודות כי $t\to\infty$ ל- $y\to 0$

אם $\frac{p_2}{4}=q$ $-\frac{p}{2}=k_1=k_2$ גם אין תנודות.

<u>פתרון:</u>

$$y=(C_1+C_2t)e^{-\frac{pt}{2}}$$

אם $p=0$ $y''+qy=0$

מקדמים $k_1=\sqrt{q}i$ $k_2=-\sqrt{q}i$

<u>פתרון כללי:</u>

$$y=C_1\sin\sqrt{q}t+C_2\cos\sqrt{q}t$$

$\sqrt{q}$ - תדירות זוויתית.

T - זמן מחזור $\sqrt{q}=\frac{2\pi}{T}$

אם $\frac{p^2}{4} < q$ $\qquad k_1 = \alpha + i\beta \qquad k_2 = \alpha - i\beta$

<u>פתרון כללי:</u>

$$y = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t\right)$$

$$\alpha = -\frac{p}{2} \quad , \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

מקבלים תנודות דעיכות

תנודות מאולצות

$$f(t) = a\sin\omega t$$

$$y'' + py' + qy = a\sin\omega t$$

במקרא $\frac{p^2}{4} < q$

$$y = y_0 + y^*$$

$$y_0'' + py_0' + qy_0 = 0$$

ופתרון

$$y_0 = \left(A\cos\beta t + B\sin\beta t\right)e^{\alpha t}$$

או זה אותו דבר ש-

$$y_0 = Ae^{\alpha t}\cos\left(\beta t + \varphi_0\right)$$

φ_0 - זה מופיע

$$y' = M\cos\omega t + N\sin\omega t$$

אחרי הצבה

$$M = \frac{-p\omega a}{\left(q-\omega^2\right)^2 + p^2\omega^2} \qquad N = \frac{\left(q-\omega^2\right)a}{\left(q-\omega^2\right)^2 + p^2\omega^2}$$

אפשר לרשום בצורה הבאה

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{\left(q-\omega^2\right)^2 + p^2\omega^2}}\sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$tq\,\varphi = \frac{M}{N}$$

<u>פתרון כללי:</u>

$$y = Ae^{\alpha t}\sin\left(\beta t + \varphi_0\right) + \frac{a}{\sqrt{\left(q-\omega^2\right)^2 + p^2\omega^2}}\sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

מערכות של משוואות לינאריות

דוגמה א

$$y_t' = \frac{\alpha y}{\alpha t} \qquad x_t' = \frac{\alpha x}{\alpha t}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = x$$

מקבלים

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0 \Rightarrow x = C_1e^t + C_2e^{-t}$$

מציבים

$$y = C_1e^t - C_2e^{-t} + C_3$$

C_3 - צריך להתאפס

<u>פתרון כללי:</u>

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$$
$$y(t) = C_1e^t - C_2e^{-t}$$

דוגמה ב

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

גוזרים את משוואה 2

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$$

ממשוואה 1

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt} + y\right)$$

אחרי הצבה

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0 \Rightarrow y = e^t\left(C_1 + C_2t\right)$$

<u>פתרון כללי:</u>

$$x = \frac{1}{2}e^t\left(2C_1 + C_2 + 2C_2t\right)$$
$$y = e^t\left(C_1 + C_2t\right)$$

פתור את המערכות של המשוואות הבאות

6.1
$$\begin{cases} y' = y + z + t \\ z' = -4y - 3z + 2t \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} y = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + 5t - 9 \\ z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 t)e^{-t} - 6t + 14 \end{bmatrix}$$

6.2
$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \\ z = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t} \\ y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

6.3
$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dx^2} = z \\ \dfrac{d^2 z}{dx^2} = y \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} z = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x \\ y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} C_3 \cos x + C_4 \sin x \end{bmatrix}$$

6.4
$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

6.5
$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} x = e^{t}(C_1 \cos 3t - C_2 \sin 3t) \\ y = e^{t}(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t) \end{bmatrix}$$

<u>שיטת התמרות לפלס</u>

הגדרת העתקת לפלס

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

משוואות ליניאריות עם מקדמים קבועים

$$y^{(n)}(t)+a_1y^{n-1}(t)+\ldots+a_{n-1}y'(t)+a_ny(t)=f(t)$$

$$y'(0)=C_1 \quad , \quad y''(0)=C_2 \quad , \quad y''(0)=C_2,\ldots,y^{n-1}(0)=C_{n-1}$$

$$f(t)\to F(s) \quad , \quad y(t)\to Y(s)$$

$$y'(t)\to sY(s)-C_0$$

$$y''(t)\to s^2Y(s)-sC_0-C_1$$

$$y^{(n)}(t)\to s^nY(s)-s^{n-1}C_0-\ldots-C_{n-1}$$

פתרון בעזרת העתקה לפלס

$$Y(s)=\frac{F(s)+P(s)}{Q(s)}$$

$Q(s)$, $P(s)$ - זה פולינומים שתלויים מפרמטר S

דוגמה א

$$y''(t)-3y'(t)+2y(t)=te^t$$

$$y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=-2$$

$$te^t\to\frac{1}{(s-1)^2} \quad , \quad y(t)\to Y(s)$$

$y'(t) \to sY(s)-1 \qquad , \qquad y''(t) \to s^2Y(s)-s+2$

אחרי הצבה

$$\left(s^2-3s+2\right)Y(s)-s+5=\frac{1}{(s-1)^2}$$

<u>פתרון:</u>

$$Y(s)=\frac{s-5}{s^2-3s+2}+\frac{1}{(s-1)^2\left(s^2-3s+2\right)}=\frac{s^3-7s^2+11s-4}{(s-1)^3(s-2)}$$

$$Y(s)=-\frac{1}{(s-1)^3}-\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{3}{s-1}-\frac{2}{s-2}$$

$$y(t)=-\frac{t^2}{2}e^t-te^t+3e^t-2e^{2t}$$

דוגמה ב

$$y''+4y=2\sin 2t$$

$y(0)=-1 \qquad , \qquad y'(0)=0$

$2\sin 2t \to \frac{4}{s^2+4} \qquad , \qquad y(t)\to Y(s) \qquad , \qquad y''\to s^2Y(s)+s$

אחרי הצבה

$$\left(s^2+4\right)Y(s)+S=\frac{4}{s^2+4}$$

<u>פתרון:</u>

$$Y(s)=-\frac{s}{s^2+4}+\frac{4}{\left(s^2+4\right)^2}$$

$$y(t)=\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{t+2}{2}\cos 2t$$