

זהויות טריגונומטריות

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \\ \sin(\pi/2 - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(\pi/2 - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(\pi/2 - \alpha) &= \cot \alpha \\ \cot(\pi/2 - \alpha) &= \tan \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha \\ \tan \alpha &= \sin \alpha / \cos \alpha \\ \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ 1 + \tan^2 \alpha &= 1 / \cos^2 \alpha \\ 1 + \cot^2 \alpha &= 1 / \sin^2 \alpha \\ \sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos(2\alpha) &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos(2\alpha) &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \tan(2\alpha) &= 2 \tan \alpha / (1 - \tan^2 \alpha) \\ \sin(3\alpha) &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos(3\alpha) &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin(a/2 + \beta/2) \cos(a/2 - \beta/2) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin(a/2 - \beta/2) \cos(a/2 + \beta/2) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos(a/2 + \beta/2) \cos(a/2 - \beta/2) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin(a/2 + \beta/2) \sin(a/2 - \beta/2) \\ \sin \alpha \cos \beta &= 1/2 (\sin(a + \beta) + \sin(a - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta &= 1/2 (\cos(a - \beta) - \cos(a + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta &= 1/2 (\cos(a + \beta) + \cos(a - \beta)) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= (\tan \alpha + \tan \beta) / (1 - \tan \alpha \tan \beta) \\ \tan(\alpha - \beta) &= (\tan \alpha - \tan \beta) / (1 + \tan \alpha \tan \beta) \\ \tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha - \tan \beta &= \tan(\alpha + \beta) \tan \alpha \tan \beta \\ \arcsin \alpha + \arccos \alpha &= \pi / 2\end{aligned}$$

לוגריתמים

תחום הגדרה - $\log_a x$:
 $0 < a \neq 1, x > 0$

$\log_a x > \log_a y$ אם ורק אם:
 אם $a > 1$ - $x > y$
 אם $0 < a < 1$ - $x < y$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$\log_a x^k = k \log_a x$$

בחקירה - להזהר לא לאבד פיתרון.

$$a^{\log_a x} = x \quad \log_a a^x = x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad 0 < b \neq 1$$

פונקציות

פונקציה זוגית - $f(-x) = f(x)$
 פונקציה אי-זוגית - $f(-x) = -f(x)$

פונקציה יכולה להיות לא זוגית ולא אי-זוגית.
 אם פונקציה היא אי-זוגית אז כך גם ההופכית.
 הרכבה של פונקציה זוגית עם זוגית = זוגית.
 הרכבה של פונקציה זוגית עם אי-זוגית = אי-זוגית.
 הרכבה של פונקציה אי-זוגית עם אי-זוגית = זוגית.

פונקציה מחזורית - $f(x+T) = f(x)$
 T - המחזור הראשי הקטן ביותר.
 ואז לכל k שלם: $f(x+kT) = f(x)$
 בפונקציה קבועה - אין מחזור ראשי.
 פונקציה חח"ע - אם:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

רציפות

יש לזכור לבדוק את הגבול משני הצדדים.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

פונקציה גזירה היא בהכרח רציפה אך לא ההפך!

גאומטריה אנליטית

דו-מימד

1. מרחק הנקודה x_0, y_0 מהישר $Ax + By + C = 0$ הוא:

$$d = |Ax_0 + By_0 + C| / \sqrt{A^2 + B^2}$$

2. משוואת משיק: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

3. משוואת נורמל: $x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0$

תלת-מימד - מישור משיק למשטח

1. יהי **משטח** - $z = F(x, y)$
 משוואת מישור משיק למשטח בנקודה:

$$\alpha: z - z_0 = F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

2. משוואת הנורמל (אנך למשיק בנק' השקה):

$$\vec{N} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$$

שונוות

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\ (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ (a-b)^5 &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5\end{aligned}$$

טור טיילור

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{[c,x]} |f^{(n+1)}| \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}, \quad c \leq z \leq x$$

הבינום של בינום

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

חישובי נגזרות

כללי

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

שליבים בבדיקת גזירות

- בדיקת רציפות בנק' החשודה (נק' תפר בין המקרים) ע"י גבול של הפונקציה המקורית.
- בדיקת גזירות ע"י הגדרת הנגזרת בנק' החשודה.
- גזירת הפונקציה (לא לפי הגדרה אלא באופן רגיל) - כל מקרה לחוד.
- חזרה על שלבים א', ב'.

גזירה לוגריתמית

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = y \cdot (\ln y)'$$

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow (\ln y)' = \ln x + 1 \Rightarrow y' = x^x (\ln x + 1)$$

פונקציה לא אלמנטרית (לפי מקרים, למשל ערך מוחלט)

- בודקים רציפות בנקודה בעייתית (גבולות).
- גוזרים ע"פ הגדרה בנקודה זו.

פונקציה סתומה

פונקציה שבה לא ניתן לבודד את y - גוזרים שני צדדים ומציבים.

פונקציה פרמטרית ולפי מקרים

פונקציה שבה יודעים את x ואת y כפונקציה של t ולא ניתן לחלץ.

$$f(t) = g(x(t), y(t)) \Rightarrow f'(t) = g_x x'(t) + g_y y'(t)$$

$$f(x, y) = g(t(x, y)) \Rightarrow f_x = g'(t(x, y)) \cdot t_x, f_y = g'(t(x, y)) \cdot t_y$$

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow y = h(x) + c \Rightarrow y'(t) = y_x x_t$$

נגזרת של פונקציה הפוכה

היא פונקציה הפוכה של f .

$$y' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

נגזרות מיידיות

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan' (x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arccot}' (x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\sin' x = \cos x$$

$$\cos' x = -\sin x$$

$$\sinh' x = \cosh x$$

$$\cosh' x = \sinh x$$

$$\tan' (x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cot' (x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

פונקציה של 2 משתנים

הגדרת נגזרת חלקית ל- X :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

קירוב לינארי של 2 משתנים

$$f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx$$

$$\approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y$$

$$\Delta y = y - y_0, \Delta x = x - x_0$$

חקירת פונקציות

- תחום הגדרה.
- אסימפטוטות: גבולות בנק' בעייתיות (נק' חפיפה בין מקרים, נק' אי הגדרה). חשוב לבדוק את הגבול מימין ומשמאל!
- אסימפטוטות משופעות:

$$y = kx + m$$

$$k_R = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, k_L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$m_R = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - k_R x, m_L = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - k_L x$$

אם m או k לא קיימים - אין אסימפטוטה משופעת.

נק' קיצון (נגזרת ראשונה = 0) + תחום הגדרה של הנגזרת.

יש לבדוק גם את ערך הפונקציה המקורית, בנק' קצה של תחום ההגדרה.

טבלת נק' קיצון ותחומי הגדרה.

קמירות/קעירות/פיתול (נגזרת שניה = 0) + תחום הגדרה.

$$f''(x) > 0 \cup$$

$$f''(x) < 0 \cap$$

טבלת נק' נגזרת שניה ותחומי הגדרה כולל הנגזרת השניה.

גרף.

תחומי חיתוך עם הצירים.

קירוב לינארי

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df = f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

נגזרת מסדר גבוה

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מקסימום ומינימום של $z=f(x,y)$

1. מציאת נקודות קיצון (מינימום ומקסימום מקומיים):

- מוצאים נקודות קריטיות a, b .
- קיימות נגזרות שניות בנק' a, b והן רציפות שם.

$$f_x = f_y = 0$$

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

מקסימום מקומי

$$f_{xx}(a, b) < 0, D > 0$$

מינימום מקומי

$$f_{xx}(a, b) > 0, D > 0$$

אוכף

$$D < 0$$

לא ניתן לדעת - $D=0$

2. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים:

- מציאת נקודות קריטיות בתחום.
- מציאת ערך מקסימלי ומינימלי בשפה.
- השוואה בין הערכים בסעיפים הנ"ל.

3. מציאת מינימום ומקסימום עם תנאי אילוץ:

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

א. נפתור את המערכת:

$$\begin{cases} \nabla(f - \lambda g) = 0, \lambda \neq 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

ב. הנ"ל שיתנו את הערך המקסימלי והמינימלי יהיו נקודות קיצון.

אינטגרלים מידיים

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \ln x dx = x \ln|x| - x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \cdot \frac{1}{1-n} (x-a)^{1-n} + C$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \left(p^2 - 4q < 0 \right) \\ = \frac{1}{2} A \ln(x^2 + px + q) + \frac{B - \frac{1}{2}Ap}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}} \arctan\left(\frac{x + \frac{1}{2}p}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}}\right)$$

תנאי הכרחי:

אינטגרל קווי מסוג ראשון

אם C קו חלק אז השטח מתחת לעקומה יהיה:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

אינטגרל קווי לפי x יהיה: (היטל בלבד)

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

פרמטריזציה של קו ישר:

$$C: \vec{R}(t) = (1-t)\vec{R}_0 + t\vec{R}_1 = (x(t), y(t))$$

$$0 \leq t \leq 1$$

חישובי אינטגרלים

$$\int v' u dx = v \cdot u - \int v u' dx$$

החלפת משתנים

$$\int \cos(x^3) 3x^2 dx = \left| \begin{matrix} t = x^3 \\ dt = 3x^2 \end{matrix} \right| = \int \cos(t) dt = \sin(x^3) + c$$

החלפה הפוכה - משתנה ישן הוא פונק' של משתנה חדש

$$\int x^2 \sqrt[3]{1+x} dx = \left| \begin{matrix} y = \sqrt[3]{1+x} & x^2 = (y^3-1)^2 \\ x = y^3-1 & dx = 3y^2 dy \end{matrix} \right| =$$

$$= \int (y^3-1)^2 y \cdot 3y^2 dy \dots$$

הצבה טריגונומטרית - בד"כ כאשר יש שילוב של סינוס וקוסינוס במכנה.

$$u = \tan \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

סינוס כפול קוסינוס

$$\int \sin^a x \cos x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int t^a dt$$

חזקה בודדת:

$$\int \sin^a x \cos^3 x dx = \int \sin^a x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

אזוגי+לא משנה: שימוש בנוסחאות זווית כפולה פעמיים כדי להוריד חזקות:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (1) \quad \text{חזקה זוגית של סינוס}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad (2) \quad \text{חזקה זוגית של קוסינוס}$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad (3) \quad \text{ניתן לקצר ולהשתמש ב-}$$

אופציה נוספת לזוגי+זוגי:

$$I_n = \int \cos^n x = \frac{1}{n} (\sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2})$$

פונקציה רציונלית (פולינום/פולינום)

דטרמיננטה חיובית:

א. מעלה במכנה גדולה יותר (פרוק לגורמים):

$$\frac{1}{x^2(3+x)(2x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{3+x} + \frac{D}{2x+4}$$

ב. מעלה במונה גדולה יותר:

$$\frac{4x^5}{x^2(3+x)(2x+4)} = 2x + E + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{3+x} + \frac{D}{2x+4}$$

ג. אם יש ריבוע במכנה מחלקים ל-2 חלקים פעם בחזקה ראשונה ופעם בחזקה השנייה.

דטרמיננטה שלילית

א. השלמת מכנה לריבוע:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \int \frac{dx}{(x-1/2)^2 + 7/4} =$$

ב. או ביצוע חילוק פולינומים.

ג. או הצבה בנוסחאות המתאימות (ראה אינטגרלים מיידיים).

ד. פישוט לגורמים, לדוגמא:

$$\int \frac{dx}{x^3 + 9x} = \int \frac{dx}{x(x^2 + 9)} = \int \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9} = \dots$$

ההמשך לפי נוסחא...

אינטגרל קווי מעל שדה

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}$$

שדה משמר אם:

$$\nabla \vec{f} = \vec{F} = Pdx + Qdy$$

אז:

$$P = f_x, Q = f_y, P_y = Q_x = f_{xy}$$

$$\int_c \vec{F} d\vec{R} = \int_c \vec{F}(\vec{R}(t)) \cdot \vec{R}'(t) dt =$$

$$= \int_a^b \vec{F}(X(t), Y(t)) \cdot (X'(t), Y'(t)) dt$$

$$\int_c \vec{F} d\vec{R} = \int_c P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

אם שדה משמר האינטגרל הקווי אינו תלוי במסלול אלא רק בנקודות התחום של התחום:

$$\int_c \vec{F} d\vec{R} = \int_c \nabla f d\vec{R} = f(\vec{R}(b)) - f(\vec{R}(a)) =$$

$$= f(x_b, y_b) - f(x_a, y_a)$$

אינטגרל על עקומה סגורה = 0, אם ורק אם:

$$P_y = Q_x, P_z = K_x, K_y = Q_z$$

וגם מתקיים - תחום פשוט קשר ורציף:

א. תחום כשיר - קו בין 2 נקודות מהתחום יעבור כולו בתוך התחום.

ב. על עקומה סגורה בתחום מכילה רק נקודות של התחום.

ג. התחום ללא חורים, לא מורכב מ-2 חלקים או יותר, והוא בעל שפה סגורה.

מצאת פונקציה הפוטנציאל f, מתוך שדה נתון:

א. מבצעים אינטגרל על P כפונקציה של x ומקבלים ביטוי הכולל את g'(y).

ב. גוזרים את P כפונקציה של y.

ג. משווים ל-Q ומחלצים את g(y).

חישובי גבולות

1. החלפת משתנים

$$y = \sqrt[n]{1+x} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{y^n-1} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} =$$

2. $\sin x / \tan x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

3. פונקציה חסומה כפול 0

(לא משנה מה יש בתוך ה-cos)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

4. במצב של 0^0 או ∞^0 בלבד

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x \Rightarrow y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0 \Rightarrow \ln(\lim y) = \ln 1 \Rightarrow \lim y = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

או:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$$

5. e

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

6. לופיטל - במצב של $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot \pm\infty$

אם ע"י לופיטל לא מקבלים גבול הדבר אינו אומר שבאמת אין גבול, אלא צריך לנסות אחרת.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

7. 1^∞

a, b - כפונקציה של X.

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^b = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (a-1) \cdot b}$$

8. סנדוויץ

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = C \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = C$$

9. הרכבה של פונקציות

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \text{ אם } f \text{ רציפה ב-} a \Rightarrow f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) =$$

10. כלל לופיטל

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

11. אסור

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x - x \neq 0$$

12. הערה

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(c \cdot x) g(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

בתנאי שהגבולות קיימים ושונים מ-0 ומ- ∞ .

שימושים של אינטגרלים

$$1. \text{ שטח: } S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

הערה: יש לפרק לקטעים בהם $f(x) > g(x)$

$$1. \text{ אורך עקומה: } L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

2. נפח:

$$a. \text{ סביב ציר x: } V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$b. \text{ סביב ציר y: } V = \pi \int_c^d f^2(y) dy$$

חיסור נפחים סביב ציר x (בין 2 עקומות):

$$g(x) \geq f(x) \geq h(x) \text{ אם}$$

$$V = \pi \int_a^b [(k - g(x))^2 - (k - f(x))^2] dx$$

$$d. \text{ אם } f(x) \geq g(x) \geq h$$

$$V = \pi \int_a^b [(f(x) - h)^2 - (g(x) - h)^2] dx$$

ה. חיסור נפחים סביב ציר y (בין שני קווים):

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

תכונות אינטגרל מסוים

1.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow m \leq f(x) \leq M$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

3.

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

4. כאשר הפונקציה F היא זוגית:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

כאשר הפונקציה F היא אי-זוגית:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

5.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

אינטגרל לא אמיתי

1. סוג ראשון:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

2. סוג שני:

a, b נקודות שבסביבתן הפונק' לא חסומה.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

אינטגרל כפול - נפח מעל למשטח

$$V = \iint_{D_{II}} f(x, y)ds, \quad S = \iint_{D_{II}} 1ds$$

מציאת אינטגרל כפול:

א. תחום מסוג I

$$D_I = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

$$\iint_{D_I} f(x, y)ds = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)dy$$

ב. תחום מסוג II

$$D_{II} = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

$$\iint_{D_{II}} f(x, y)ds = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)dx$$

תכונות אינטגרל כפול:

אם $m \leq f(x, y) \leq M$ בתחום D אזי:

$$m \cdot S(D) = m \iint_D ds \leq \iint_D f(x, y)ds \leq M \iint_D ds = M \cdot S(D)$$

מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\iint_R f(x, y)ds = \iint_R f(r, \theta) \cdot r \cdot drd\theta$$

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

אם רוצים להציב X כסינוס, צריך גם לשנות את תחום הזוויות בהתאם.

אינטגרל משולש - מעבר לנפח

$$I = \iiint_B f(x, y, z)dv, \quad V = \iiint_B 1dv$$

מציאת אינטגרל משולש:

א. גוף מסוג I - גוף תחום בין שני משטחים בציר Z:

$$E_I = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$$

$$\iiint_{E_I} f(x, y, z)dv = \iint_D \left[\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)dz \right] dv$$

ב. גוף מסוג II - גוף תחום בין שני משטחים בציר Y:

$$E_{II} = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, \varphi_1(x, z) \leq y \leq \varphi_2(x, z)\}$$

$$\iiint_{E_{II}} f(x, y, z)dv = \iint_D \left[\int_{\varphi_1(x, z)}^{\varphi_2(x, z)} f(x, y, z)dy \right] dv$$