

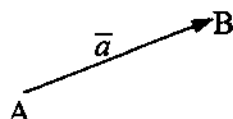
תוכן עניינים

1	וקטורים	1
9	ישרים ומישורים	2
14	עקומים ומשטחים	3
21	גבולות ורציפות	4
29	נגזרות חלקיות ודיפרנציאביליות	5
36	כלל השרשרת	6
43	פירושים גיאומטריים	7
54	פונקציות סתומות	8
62	נוסחת סילור, נקודות מקסימום ומינימום מקומי	9
69	מקסימום ומינימום עם אילוצים	10
76	מקסימום ומינימום מוחלטים	11
80	אינטגרלים כפולים	12
90	חישוב שטחים ונפחים באמצעות אינטגרל כפול	13
94	אינטגרל משולש	14
98	אינטגרל קו מסוג ראשון ומסוג שני	15
106	משפט גרין במישור	16
109	אינטגרל משטחי מסוג ראשון ומסוג שני	17
115	אינטגרל קו במרחב ואנליזה וקטורית במרחב	18
120	משפט גאוס ומשפט סטוקס	19

פרק 1

וקטורים

וקטור גיאומטרי זהו קטע מכוון שיש בו מוצא וסוף. את הוקטור שמוצאו ב-A וסופו ב-B נסמן ב- $\overrightarrow{AB}$ או בסימן $\vec{a}$. אורך הוקטור $\vec{a}$ נסמן ב- $|\vec{a}|$.



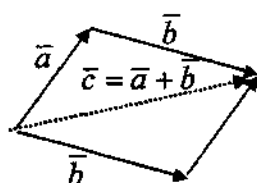
וקטור האפס זהו וקטור שאורכו אפס.

שוויון בין וקטורים

שני וקטורים $\vec{a}, \vec{b}$ שווים זה לזה, $\vec{a} = \vec{b}$ אם ורק אם יש להם אותו אורך ואותו כיוון. לוקטור $\overrightarrow{BA}$ יש אותו אורך כמו ל- $\overrightarrow{AB}$ אך כיוונו הפוך ולכן נקרא לו וקטור נגדי ל- $\overrightarrow{AB}$. אם $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ אז $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$. וקטור יחידה זהו וקטור שאורכו יחידה אחת, ד"א $|\vec{a}| = 1$.

חיבור וקטורים

נתונים שני וקטורים $\vec{a}, \vec{b}$. בעתיק את $\vec{b}$ כך שמוצאו יתלכד עם סופו של $\vec{a}$. לוקטור $\vec{c}$ שמוצאו מתלכד עם מוצאו של $\vec{a}$ וסופו מתלכד עם סופו של $\vec{b}$ נקרא וקטור הסכום ונסמן $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. באופן שקול, אם ל- $\vec{a}, \vec{b}$ מוצא משותף אזי וקטור האלכסון של המקבילית (ראה ציור) הוא $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



לכל $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ מתקיים:

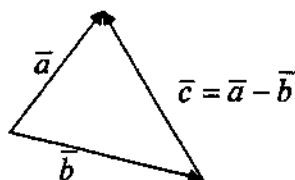
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad \text{אי-שוויון המשולש}$$

חיסור וקטורים

נתונים שני וקטורים $\vec{a}, \vec{b}$. וקטור $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ מוגדר כוקטור החיסור: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. אם נתבונן בשני וקטורים $\vec{a}, \vec{b}$ בעלי מוצא משותף, הרי $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ זהו וקטור שמוצאו בסופו של $\vec{b}$ וסופו ב- $\vec{a}$ (כי $\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}$)



באופן דומה, לוקטור $\vec{b} - \vec{a}$ מוצאו בסוף של $\vec{a}$ וסופו בסוף של $\vec{b}$.

כפל וקטור בסקלר (במספר)

נתון וקטור $\vec{a}$ וסקלר (מספר m).

אם $m = 0$ אזי $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, אם $m > 0$ אזי $m \cdot \vec{a}$ זהו וקטור בכיוון $\vec{a}$ ואורכו שווה ל- $m \cdot |\vec{a}|$

אם $m < 0$ אז הוקטור $m \cdot \vec{a}$ פועל בכיוון ההפוך ל- $\vec{a}$ ואורכו שווה ל- $-m \cdot |\vec{a}|$

לכל שני וקטורים $\vec{a}, \vec{b}$ ולכל שני סקלרים k, m מתקיים:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, (k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}, k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}, k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$$

תרגיל 1

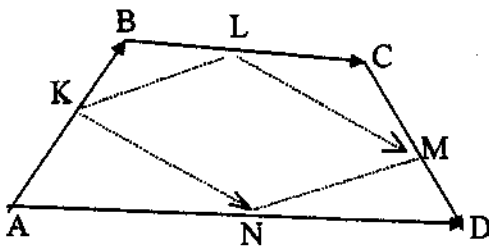
במישור נתון מרובע כלשהו ABCD. נסמן ב- N, M, L, K את אמצעי הצלעות DA, CD, BC, AB

בהתאמה (ראה ציור). הוכח כי KLMN מקבילית.

פתרון:

$$\vec{AB} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{b}, \vec{CD} = \vec{c}$$

$$\vec{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad \text{אזי}$$



$$\vec{KN} = \vec{AN} - \vec{AK} = 0.5(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - 0.5\vec{a} = 0.5(\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{KN} = \vec{LM} \quad \text{ולכן} \quad \vec{LM} = \vec{LC} + \vec{CM} = 0.5(\vec{b} + \vec{c})$$

שוויון בין שני וקטורים גורר שאורך הקטע KN שווה לאורך הקטע LM ובנוסף הם מקבילים,

כלומר המרובע KLMN מקבילית.

תרגיל 2

נתונים שני וקטורים לא מקבילים $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}$.

א' הוכח שאם נקודה M נמצאת על הקטע המחבר B עם C אזי

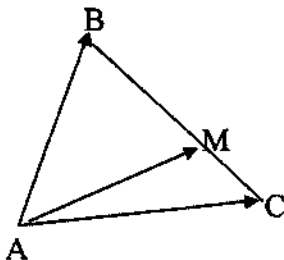
$$\vec{AM} = p\vec{a} + s\vec{b} \quad \text{כך ש- } p, s \text{ קיימים שני סקלרים}$$

$$\text{כאשר } p \geq 0, s \geq 0, p + s = 1$$

ב' הוכח שההצגה הנ"ל יחידה, ו"א אם

$$\vec{AM} = t\vec{a} + r\vec{b}$$

$$\text{אזי בהכרח } p = t, s = r$$



פתרון:

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{a} + x(\overline{b} - \overline{a}), \quad \overline{BM} = x\overline{BC} = x(\overline{b} - \overline{a}) \quad \text{ולכן} \quad \overline{BC} = \overline{b} - \overline{a}$$

$$\text{לכן} \quad \overline{AM} = (1-x)\overline{a} + x\overline{b} \quad \text{אם נסמן} \quad p=1-x, s=x, \quad \text{אזי ברור ש-}$$

$$p \geq 0, s \geq 0, p+s=1$$

$$\text{ב' אם} \quad \overline{AM} = p\overline{a} + s\overline{b} \quad \text{וגם} \quad \overline{AM} = t\overline{a} + r\overline{b} \quad \text{אז} \quad (p-t)\overline{a} = (r-s)\overline{b}$$

$$\text{משווים זה נובע שהוקטור } (p-t)\overline{a} \text{ מקביל לוקטור } (r-s)\overline{b}.$$

$$\text{אך הוקטורים } \overline{a}, \overline{b} \text{ אינם מקבילים ולכן} \quad p-t=0, r-s=0$$

הצגת וקטורים בעזרת רכיבים (קואורדינטות) במערכת צירים קרטזית

נסמן ב- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ וקטורי יחידה על הצירים x, y, z , בהתאמה. אזי כל וקטור $\vec{a}$ ניתן להציג בצורה אחת

$$\text{ויחידה כצירוף} \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

שני וקטורים $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ו- $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ שווים זה לזה אם ורק אם

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$

אם $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ הן שתי נקודות אזי $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{ואורכו שווה ל-}$$

תרגיל 3

נתון משולש ABC, כאשר $A(1,3,7), B(4,2,-1), C(-2,4,0)$. מצא את השיעורים של מרכז הכובד של המשולש (נקודת המפגש של התיכונים)

פתרון:

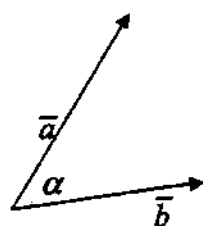
נסמן ב- K אמצע הצלע BC (צייר את המשולש וסמן את הנקודות !). אזי:

$$\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{BK} = \overline{AB} + 0.5\overline{BC} = (4-1, 2-3, -1-7) + 0.5(-2-4, 4-2, 0+1) = (0, 0, -7.5)$$

נסמן ב- $O(x_0, y_0, z_0)$ מרכז הכובד של המשולש. אזי $\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AK}$ כי התיכונים נחתכים ביחס 2:1

$$\text{לכן} \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 2) \quad \text{ומכאן} \quad (x_0 - 1, y_0 - 3, z_0 - 7) = \frac{2}{3} \cdot (0, 0, -7.5)$$

מכפלה סקלרית



נתונים שני וקטורים $\vec{a}, \vec{b}$ השונים מוקטור האפס.

המכפלה הסקלרית מוגדרת באופן הבא:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

כאשר α היא הזווית בין הוקטורים $\vec{a}, \vec{b}$.

המכפלה הסקלרית שווה לאפס אם ורק אם הוקטורים $\vec{a}, \vec{b}$ ניצבים זה לזה.

במקרה שאחד מהוקטורים שווה לאפס מגדירים מכפלה הסקלרית כשווה לאפס: $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{b} = 0$

מהגדרה זו נובע ש- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, $m \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m\vec{a}) \cdot \vec{b}$

אם $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ אזי $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

תרגיל 4

וקטורים $\vec{a}, \vec{b}$ יוצרים את הזווית $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ו- $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$.

מצא את הזווית בין הוקטורים $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$

פתרון:

$$\cos \beta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}} \cdot \sqrt{\vec{q} \cdot \vec{q}}} = \frac{3 - 1}{\sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right) \quad \text{ולכן}$$

תרגיל 5

א' וקטור יחידה $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ יוצר זוויות α, β, γ עם הצירים x, y, z בהתאמה.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad \text{הוכח כי}$$

ב' וקטור $\vec{b}$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם ציר ה- x וזווית $\frac{\pi}{4}$ עם ציר ה- z . חשב את הזווית החדה β עם ציר ה- y .

פתרון:

א' $\vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cdot |\vec{i}| \cos \alpha = \cos \alpha$, מצד שני $\vec{a} \cdot \vec{i} = x$ ולכן $\cos \alpha = x$

באופן דומה $\cos \beta = y$, $\cos \gamma = z$. לכן:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (\text{כי } \vec{a} \text{ וקטור יחידה})$$

ב' בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח כי $\vec{b}$ וקטור יחידה.

$$\cos \beta = \frac{1}{2} \quad \text{ולכן} \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \beta + \cos^2 \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\beta = \frac{\pi}{3} \quad \text{ד"א}$$

מכפלה וקטורית

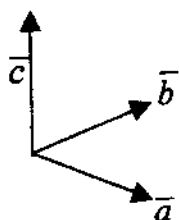
נתונים שני וקטורים $\vec{a}, \vec{b}$ השונים מווקטור האפס. לוווקטור $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ נקרא מכפלה וקטורית אם הוקטור $\vec{c}$ מקיים שלושה תנאים:

$$1. \quad |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha \quad \text{כאשר } \alpha \text{ היא הזווית בין הוקטורים } \vec{a}, \vec{b}.$$

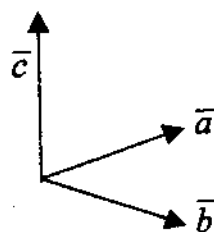
$$2. \quad \text{וקטור } \vec{c} \text{ מאונך ל- } \vec{a} \text{ וגם ל- } \vec{b}.$$

$$3. \quad \text{שלושת הוקטורים } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ יוצרים שלושה ימנית.}$$

הערה: בציור מתוארות שלושה ימנית ושלושה שמאלית:



שלושה ימנית



שלושה שמאלית

תכונות של מכפלה וקטורית

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \text{אם ורק אם } \vec{a}, \vec{b} \text{ מקבילים זה לזה}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

אם נבנה על הוקטורים $\vec{a}, \vec{b}$ מקבילית אזי שטחה שווה ל- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad \text{אזי} \quad \vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

תרגיל 6

$$|\vec{a}|=4, \quad |\vec{b}|=3, \quad \vec{a} \cdot \vec{b}=6 \quad \text{נתון:}$$

$$\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}, \quad \vec{q}=\vec{a}-\vec{b} \quad \text{חשב שטח המקבילית הנוצרת על הוקטורים}$$

פתרון:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{ואם} \quad \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{ולכן} \quad |\vec{a}|=4, \quad |\vec{b}|=3, \quad \vec{a} \cdot \vec{b}=6 \quad \text{נתון:}$$

$$\vec{p} \times \vec{q} = (2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = -2\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} = -3\vec{a} \times \vec{b}$$

$$S = |\vec{p} \times \vec{q}| = 3|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 18 \cdot \sqrt{3}$$

תרגיל 7

במשולש ABC הקודקודים הם: $A(1,2,3), B(4,0,2), C(0,4,5)$

א' מצא שטח המשולש

ב' מצא וקטור יחידה המאונך למישור בו נמצא המשולש ABC.

פתרון:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k} \quad , \quad \vec{AB} = (3, -2, -1), \vec{AC} = (-1, 2, 2) \quad \text{א'}$$

$$S = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2} \quad \text{לכן} \quad , \quad |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{4 + 25 + 16} = 3 \cdot \sqrt{5}$$

ב' לפי ההגדרה $-2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$ מאונך למישור בו נמצא המשולש ABC. כדי לקבל וקטור יחידה

$$\text{נוכל לנרמל את הוקטור:} \quad \frac{-2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}}{3 \cdot \sqrt{5}} \quad \text{ונקבל וקטור יחידה המאונך למישור בו נמצא}$$

המשולש ABC.

תרגיל 9

הוכח שאם $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ מקיימים את הקשר: $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ אזי הוקטורים

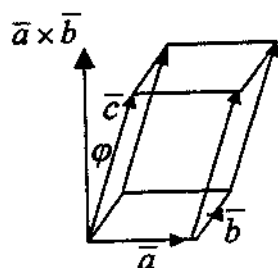
$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{d}, \quad \vec{v} = \vec{b} - \vec{c} \quad \text{מקבילים זה לזה.}$$

פתרון:

מספיק להראות כי $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (\vec{a} - \vec{d}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{d} \times \vec{b} = \\ &= \vec{a} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{d} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d} = \vec{0} \end{aligned}$$

מכפלה מעורבת



נתבונן בשלושה וקטורים $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ בעלי מוצא משותף.
אם שלושת הוקטורים נמצאים במישור אחד אזי המכפלה
המעורבת $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ שווה לאפס כי $\vec{a} \times \vec{b}$ ו- $\vec{c}$
ניצבים זה לזה. אם שלושתם לא נמצאים במישור אחד אזי
 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \varphi$ כאשר φ היא הזווית
בין הוקטורים $\vec{c}$ ו- $\vec{a} \times \vec{b}$.

המספר $|\vec{a} \times \vec{b}|$ שווה לשטח המקבילית הבנויה על $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$, והמספר $|\vec{c}| \cdot \cos \varphi$ שווה לאורך האמ
מסופו של הוקטור $\vec{c}$ למישור בו נמצאים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$. לכן הערך המוחלט מהביטוי $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ נותן
נפח של מקבילון הבנוי על שלושת הוקטורים הנ"ל. (נפח מקבילון שווה לשטח הבסיס כפול גובה)
לעומת זאת, נפח של פירמידה משולשת שווה לשליש שטח הבסיס המוכלל בגובה הפירמידה.
שטח הבסיס שווה ל- $\frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$ וגובה הפירמידה שווה ל- $|\vec{c}| \cdot \cos \varphi$ מכאן גובה שניפח

פירמידה משולשת הבנויה על שלושת הוקטורים $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ שווה ל- $V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

ניתן להראות כי: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

אם $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ אזי ניתן לחשב את

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \text{המכפלה המעורבת כך:}$$

למכפלה מעורבת יש תכונה של ציקליות (מעגליות): $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$

אם לוקטורים $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ מוצא משותף אזי $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ אם ורק אם שלושת הוקטורים נמצאים
במישור אחד (כלומר אינם יוצרים פירמידה ולכן הנפח שווה לאפס)

כמו כן, בעזרת מכפלה מעורבת ניתן לקבוע האם השלשה $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ימנית או שמאלית:

אם $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$ - זוהי שלשה ימנית, ואם $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$ - זוהי שלשה שמאלית.

תרגיל 10

א' קבע האם השלשה $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$ ימנית או שמאלית ?

ב' קבע עבור איזה ערך של m הנקודות $A(-1,2,1), B(0,1,-5), C(1,2,-1), D(-2,1,m)$

נמצאות במישור אחד ?

פתרון:

א' $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$ ולכן זוחי שלשה ימנית.

ב' גבנה שלושה וקטורים בעלי מוצא משותף:

$$\overline{AB} = (1, -1, -6), \overline{AC} = (2, 0, -2), \overline{AD} = (-1, -1, m-1)$$

נדרוש שהמכפלה המעורבת תהיה שווה לאפס: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & m-1 \end{vmatrix} = 0$

ונקבל: $m = -3$.

פרק 2

ישרים ומישורים

הצגה פרמטרית של ישר

יהי l ישר העובר דרך נקודה קבועה $A(x_0, y_0, z_0)$ ויהי $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j} + \gamma \cdot \vec{k}$ וקטור

$$\text{המקביל לישר } l. \text{ אזי ההצגה הפרמטרית של הישר היא: } \begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t \\ y = y_0 + \beta \cdot t \\ z = z_0 + \gamma \cdot t \end{cases} \quad \text{כאשר } -\infty < t < \infty$$

לוקטור $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j} + \gamma \cdot \vec{k}$ נקרא בשם וקטור הכיוון של הישר l .

הצגה קנונית של ישר

אם כל המקדמים α, β, γ שונים מאפס ניתן לחלץ את הפרמטר t מתוך ההצגה הפרמטרית:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

להצגה זו נקרא בשם: הצגה קנונית של ישר.

דוגמה 1

מצא את ההצגה הפרמטרית ואת ההצגה הקנונית של ישר העובר דרך הנקודות $A(5,1,4), B(1,3,1)$

פתרון:

נמצא וקטור הכיוון של הישר: $\vec{BA} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ונבחר $(x_0, y_0, z_0) = (5, 1, 4)$

$$\text{נקבל הצגה פרמטרית: } \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \quad \text{והצגה קנונית: } \frac{x-5}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{3}$$

דוגמה 2

במשולש ABC חקודקודים הם $A(4,0,0), B(2,3,-6), C(-4,6,0)$

מצא את ההצגה הפרמטרית של ישר החוצה את הזווית בקודקוד A.

פתרון:

נמצא $\vec{AB} = (-2, 3, -6), \vec{AC} = (-8, 6, 0)$. וקטור $\vec{AB} + \vec{AC}$ המהווה אלכסון במקבילית אינו

$$\vec{a} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = -\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k} \quad \text{ננרמל את שני הוקטורים: } |\vec{AB}| \neq |\vec{AC}| \quad \text{חוצה את הזווית כי}$$

$$\bar{a} + \bar{b} \quad \bar{b} = \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} = -\frac{8}{10}\bar{i} + \frac{6}{10}\bar{j} \quad \text{הוקטורים } \bar{a} \text{ ו- } \bar{b} \text{ יוצרים מעויין ולכן}$$

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = -\frac{38}{35}\bar{i} + \frac{36}{35}\bar{j} - \frac{6}{7}\bar{k} \quad \text{חוצה זווית.}$$

$$\text{לסיכום: } x = 4 - \frac{38}{35}t, y = 0 + \frac{36}{35}t, z = 0 - \frac{6}{7}t$$

תרגיל 3

$$l: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1} \quad m: \frac{x+1}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{a} \quad \text{נתונים שני ישרים}$$

עבור איזה a הישרים נחתכים?

פתרון:

$$\text{נציב } x=1+3t, y=2+2t, z=-t \quad \text{ונקבל את ההצגה הפרמטרית} \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1} = t$$

$$\text{נקודת החיתוך נמצאת על שני הישרים ולכן נדרוש:} \quad \frac{(1+3t)+1}{5} = \frac{(2+2t)}{4} = \frac{(-t)+3}{a}$$

$$\text{מ-} \quad \frac{(1+3t)+1}{5} = \frac{(2+2t)}{4} \quad \text{נקבל } t=1 \quad \text{נציב ערך זה למשוואה} \quad \frac{(2+2t)}{4} = \frac{(-t)+3}{a} \quad \text{ונקבל } a=2$$

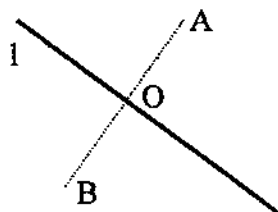
תרגיל 4

$$\text{נתון ישר } l: \frac{x-8}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3} \quad \text{ונקודה } A(-2, -1, 1) \text{ מחוץ לישר.}$$

א' מצא את ההיטל של A על הישר.

ב' מצא את המרחק מ- A לישר.

ג' מצא נקודה B הסימטרית ל- A ביחס לישר הנתון.



פתרון

א' נרשום את הישר בצורה פרמטרית $x=8-2t, y=-2+2t, z=-3+3t$

ונניח שהנקודה $O(x_0, y_0, z_0)$ היא ההיטל של A על הישר.

נסמן: $x_0 = 8 - 2t_0, y_0 = -2 + 2t_0, z_0 = -3 + 3t_0$. וקטור הכיוון של הישר הנתון הוא:

$$\overrightarrow{AO} \cdot \bar{a} = 0 \quad \text{נציב לוקטור הכיוון של הישר. נדרוש:} \quad \bar{a} = -2\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \vec{a} = (8 - 2t_0 + 2, -2 + 2t_0 + 1, -3 + 3t_0 - 1) \cdot (-2, 2, 3) = 0$$

ונקודת החיטל היא $O(x_0, y_0, z_0) = (4, 2, 3)$.

$$|\overrightarrow{AO}| = |(6, 3, 2)| = \sqrt{49} = 7 \text{ ל- } A \text{ לישר שווה}$$

ג' הנקודה O מהווה אמצע הקטע AB ולכן השיעורים של O הם הממוצע החשבוני של שיעורי A

$$B \text{ ו- } B(x_1, y_1, z_1) \text{ נסמן אזי } \frac{x_1 + (-2)}{2} = 4, \frac{y_1 + (-1)}{2} = 2, \frac{z_1 + 1}{2} = 3$$

$$B(x_1, y_1, z_1) = (10, 5, 5) \text{ לכן:}$$

משוואה של מישור

יהי $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ וקטור הניצב למישור הנתון ותהי $O(x_0, y_0, z_0)$ נקודה קבועה על המישור.

משוואה $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ מתארת מישור העובר דרך הנקודה O . ווקטור

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \text{ נקרא וקטור הנורמל של המישור.}$$

משוואה כללית של מישור היא: $Ax + By + Cz + D = 0$ כאשר $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

מרחק מנקודה למישור

תהי $O(x_0, y_0, z_0)$ נקודה כלשהי מחוץ למישור $Ax + By + Cz + D = 0$ אזי מרחקה ממישור

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ שווה ל-}$$

תרגיל 5

מצא משוואה של מישור העובר דרך שלוש הנקודות $K(1, 1, 1), L(-1, 2, 2), M(4, -2, 0)$

פתרון:

הוקטורים $\overrightarrow{KL} = (-2, 1, 1), \overrightarrow{KM} = (3, -3, -1)$ נמצאים במישור המבוקש ולכן $\vec{n} = \overrightarrow{KL} \times \overrightarrow{KM}$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (2, 1, 3) \text{ נבחר למשל } (x_0, y_0, z_0) = (4, -2, 0) \text{ ונקבל משוואת המישור:}$$

$$2x + y + 3z = 6 \text{ או } 2 \cdot (x - 4) + 1 \cdot (y + 2) + 3 \cdot (z - 0) = 0$$

תרגיל 6

נתון המישור $-2x + y + 3z = 0$ ונקודה $K(-4, 3, 1)$ מחוץ למישור.

א' מצא את ההיטל של K על המישור.

ב' מצא נקודה L הסימטרית ל- K ביחס למישור הנתון.

פתרון:

א' נעביר דרך הנקודה K ישר הניצב למישור. וקטור הכיוון של הישר הוא הנורמל של המישור $(-2,1,3)$

ולכן ההצגה הפרמטרית של הישר היא $x = -4 - 2t, y = 3 + t, z = 1 + 3t$

כדי למצוא נקודת המפגש בין הישר למישור (את נקודת ההיטל) נציב את ההצגה למשוואת המישור

ונקבל $-2(-4 - 2t) + (3 + t) + 3(1 + 3t) = 0$, נקבל $t = -1$. נקודת ההיטל היא $O(-2, 2, -2)$.

ב' נסמן: $L(x_1, y_1, z_1)$. הנקודה O היא אמצע הקטע של KL. בעזרת הנוסחה לאמצע הקטע נקבל

$$L(x_1, y_1, z_1) = (0, 1, -5) \quad \text{מכאן} \quad \frac{x_1 + (-4)}{2} = -2, \quad \frac{y_1 + 3}{2} = 2, \quad \frac{z_1 + 1}{2} = -2$$

תרגיל 7

מצא משוואה של מישור המכיל את הישר $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{2}$ ומאונך למישור $x - 2y - 3z = 0$

פתרון:

וקטור הנורמל של המישור המבוקש $\vec{n} = (A, B, C)$ מאונך לוקטור הכיוון של הישר (הישר נמצא כולו

במישור). כמו כן, וקטור $\vec{n} = (A, B, C)$ מאונך לוקטור הנורמל של המישור $x - 2y - 3z = 0$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 13\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k} \quad \text{נמצא את } \vec{n} \text{ בעזרת המכפלה הוקטורית}$$

לכן משוואת המישור היא $13x + 8y - z + D = 0$. נבחר נקודה כלשהי הנמצאת על הישר

למשל $(1, 1, 0)$ ונציב אותה למשוואת המישור הכלל. נקבל $D = -21$

לסיכום: $13x + 8y - z = 21$

תרגיל 8

מצא את המרחק בין שני ישרים מצטלבים: $l: \frac{x+6}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z+4}{3}$, $m: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-21}{6}$

פתרון:

נמצא תחילה מישור המכיל את הישר l ומקביל לישר m. (נסה לדמיין שישיר l משמש ציר הסיבוב ואנו

מסובבים עליו את המישור עד למצב בו יהיה מקביל לישר השני m.) וקטור הנורמל של המישור המבוקש

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 36\vec{i} + 9\vec{j} + 12\vec{k} \quad \text{ולכן } (-2, 4, 3), (-1, -4, 6)$$

לכן משוואת המישור היא $36x + 9y + 12z + D = 0$

כדי לחשב את הערך של D נציב נקודה כלשהי הנמצאת על הישר l (אשר נמצא במישור) , למשל $(-6, 0, -4)$ לתוך המשוואה ונקבל $D = 264$. לכן משוואת המישור היא $12x + 3y + 4z + 88 = 0$ כעת כדי למצוא את המרחק בין שני הישרים מספיק לבחור נקודה כלשהי על הישר השני m ולחשב את המרחק מנקודה זו למישור שמצאנו. נבחר למשל את הנקודה $(1, -5, 21)$

$$d = \frac{|12 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 21 + 88|}{\sqrt{144 + 9 + 16}} = 13 \quad \text{לסיכום:}$$

פרק 3

עקומים ומשטחים

תהי $\bar{A}(t)$ פונקציה וקטורית. אם קיים וקטור קבוע $\bar{A}_0$ כך ש- $\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{A}(t) - \bar{A}_0| = 0$ אזי נאמר

ש- $\bar{A}(t)$ שואף לוקטור גבולי $\bar{A}_0$ כאשר $t \rightarrow t_0$.

לגבול $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{A}(t + \Delta t) - \bar{A}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{A}}{dt}$ נקרא הנגזרת של פונקציה וקטורית $\bar{A}(t)$.

אם $\bar{A}(t), \bar{B}(t)$ שתי פונקציות וקטוריות גזירות ו- $\varphi(t)$ פונקצי סקלרית גזירה אזי

$$\frac{d}{dt}(\bar{B} \cdot \bar{A}) = \frac{d\bar{B}}{dt} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \frac{d\bar{A}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\varphi \bar{A}) = \frac{d\varphi}{dt} \bar{A} + \varphi \frac{d\bar{A}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\bar{A} \pm \bar{B}) = \frac{d\bar{A}}{dt} \pm \frac{d\bar{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{A} \times \bar{B}) = \frac{d\bar{A}}{dt} \times \bar{B} + \bar{A} \times \frac{d\bar{B}}{dt}$$

עקום מרחבי רציף מוגדר על-ידי ההצגה הפרמטרית $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ כאשר

הפונקציות $x(t), y(t), z(t)$ רציפות בקטע $\alpha < t < \beta$.

עקום חלק מוגדר על-ידי ההצגה הפרמטרית $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ כאשר הפונקציות

$x(t), y(t), z(t)$ בעלות נגזרות רציפות בקטע $\alpha < t < \beta$ ובנוסף לכל ערך של t

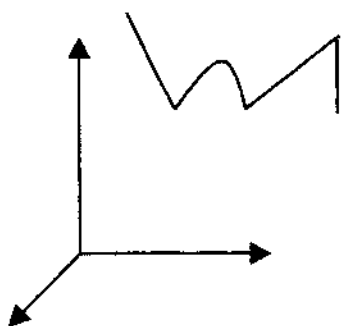
$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0$. (רא' על העקום אין נקודות חוד ובכל נקודה אפשר להעביר

וקטור משיק לעקום.)

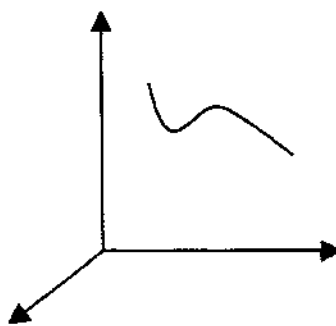
לעקום רציף המורכב ממספר סופי של עקומים חלקים, נקרא עקום חלק למקוטעין.

(בציור למטה מתואר מצד ימין עקום חלק ומצד שמאל מתואר עקום שאינו חלק. עקום זה חלק

למקוטעין)



עקום שאינו חלק



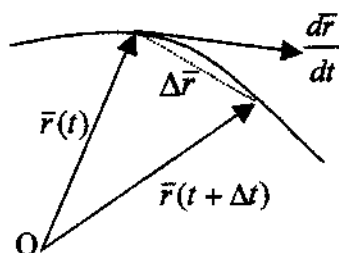
עקום חלק

וקטור משיק לעקום

לוקטור $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ נקרא וקטור המצב של העקום.

(כאשר t משתנה בצורה רציפה הסוף של הוקטור מצייר את העקום)

אם העקום חלק, נוכל להגדיר וקטור המשיק לעקום: $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$



משוואת ישר המשיק לעקום

המשוואה $\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$ מתארת ישר המשיק לעקום בנקודה (x_0, y_0, z_0)

המתאימה לערך הפרמטר $t = t_0$

תרגיל 1

נתון עקום מרחבי L : $x(t) = t^3$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^4$

א' האם העקום חלק לכל t ?

ב' מצא הצגה קנונית לישר המשיק בנקודת השקה $(-1, 1, 1)$

פתרון:

א' $x'(t) = 3t^2$, $y'(t) = 2t$, $z'(t) = 4t^3$ ולכן הנגזרות רציפות לכל t .

ב' לנקודה $(-1, 1, 1)$ מתאים ערך $t_0 = 0$. ההצגה הקנונית של המשיק היא:

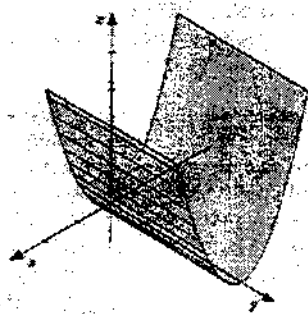
$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-4}$$

משטחים מסדר שני

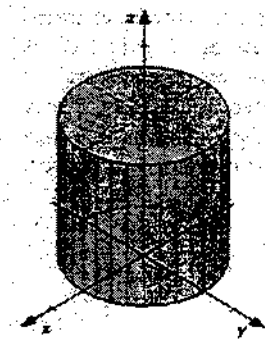
המשוואה $ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + h = 0$, כאשר $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

מתארת משטחים מסדר שני.

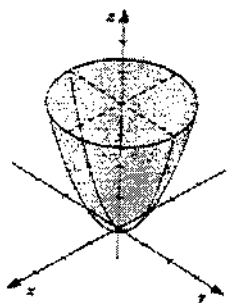
להלן סוגים עיקריים של משטחים מסדר שני:



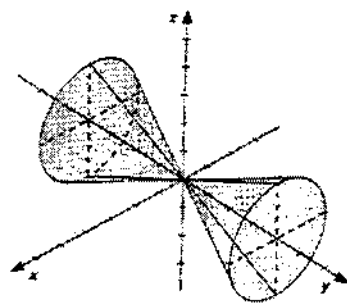
גליל פרבולי $z = x^2$



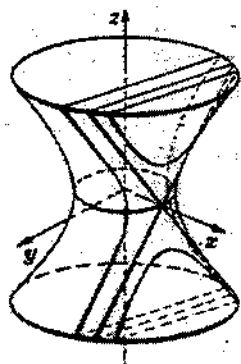
גליל סיבובי $x^2 + y^2 = R^2$



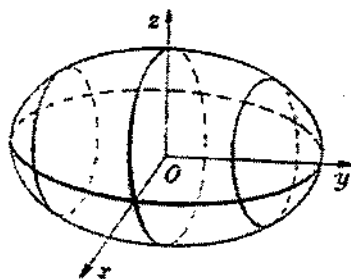
פרבולואיד סיבובי $z = x^2 + y^2$



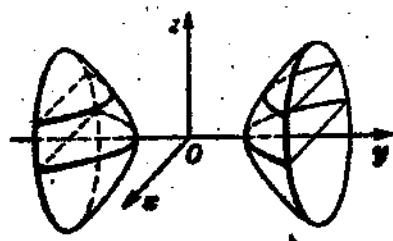
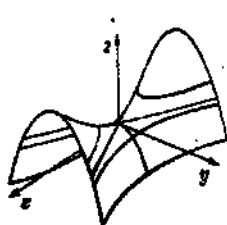
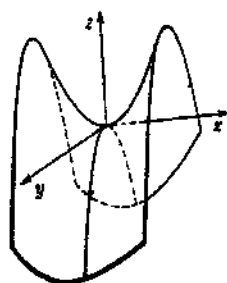
חרוט $y^2 = x^2 + z^2$



היפרבולואיד חד-יריעתי $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



אליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



היפרבולואיד דו-יריעתי

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{פרבולואיד היפרבולי}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

קווי גובה (קווי רמה) ומשטחי רמה של פונקציה

תהי $z = f(x, y)$ פונקציה בשני משתנים. לאוסף כל הנקודות (x, y) במישור אשר מקיימות את השוויון $C = f(x, y)$, כאשר C הוא מספר קבוע נקרא קו גובה של $z = f(x, y)$. באופן דומה, לאוסף כל הנקודות (x, y, z) במרחב אשר מקיימות את השוויון $f(x, y, z) = C$ נקרא משטח רמה של $u = f(x, y, z)$

תרגיל 2

תהי $z = \frac{y^2 + x^2 - 1}{x^2 + 4}$ פונקציה בשני משתנים.

א' מצא תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב' חקור קווי גובה של הפונקציה.

פתרון:

א' תחום ההגדרה הוא כל המישור.

ב' נחקור את המשוואה: $C = \frac{y^2 + x^2 - 1}{x^2 + 4}$, כאשר C הוא פרמטר.

עבור $C = 0$ נקבל את המעגל $x^2 + y^2 = 1$.

עבור $C \neq 0$ נקבל $(1-C)x^2 + y^2 = 4C+1$. אם $C = 1$ נקבל שני ישרים

$y = \pm\sqrt{5}$ המקבילים לציר ה- x . אם $C = -\frac{1}{4}$ נקבל את המשוואה $\frac{5x^2}{4} + y^2 = 0$

ונקבל רק נקודה אחת שמקיימת אותה - $(0, 0)$.

עבור $C \neq 1, -\frac{1}{4}$ נוכל לרשום את המשוואה $(1-C)x^2 + y^2 = 4C+1$ בצורה

$$(*) \quad \frac{(1-C)x^2}{4C+1} + \frac{y^2}{4C+1} = 1$$

אם $C > 1$ אזי המקדם של x^2 יהיה שלילי והמקדם של y^2 יהיה חיובי. לכן במקרה הזה המשוואה (*) מתארת חיפרבולה. למשל עבור $C = 2$ נקבל $y^2 - x^2 = 9$.

אם $-\frac{1}{4} < C < 1$ ($C \neq 0$) אזי שני המקדמים של המשוואה (*) חיוביים ולכן המשוואה

מתארת במקרה הזה אליפסה. למשל עבור $C = \frac{1}{2}$ נקבל $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

אם $C < -\frac{1}{4}$ למשוואה (*) אין פתרונות כי אגף שמאל שלה חיובי ואגף ימין שלילי.

תרגיל 3

א' תן דוגמה למשטח גלילי מסדר שני אשר נחתך עם כל הכדורים שמרכזם על ציר ה- z .

ב' רשום הצגה פרמטרית של ישר שנמצא כולו על המשטח $z^2 + \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

ג' חקור משטחי רמה של הפונקציה $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$

פתרון:

א' משטח גלילי חייב לכלול את ציר ה- z . נבחר למשל $(x-1)^2 + y^2 = 1$

ב' אם נציב $z = 1$ במשוואה $z^2 + \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ נקבל $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{4}$.

נבחר בישר $z = 1$, $y = 4t$, $x = 3t$. קל לראות כי ישר זה נמצא כולו על המשטח.

ג' עבור $C = 0$ נקבל $x^2 + y^2 = 0$. זהו ישר $(0, 0, z)$. עבור $C \neq 0$ נקבל את המשוואה

$(1-C)x^2 + y^2 = Cz^2$. אם $C = 1$ נקבל שני מישורים $y = \pm z$ המאונכים למישור xy .

אם $0 < C < 1$ נקבל $z^2 = \frac{x^2}{\left(\frac{C}{1-C}\right)} + \frac{y^2}{C}$ - זהו חרוט אליפטי.

אם $C > 1$ נקבל $y^2 = Cz^2 + (C-1)x^2$ - זהו חרוט אליפטי.

אם $C < 0$ נקבל קבוצה ריקה.

סביבות, קבוצות פתוחות, סגורות, קשירות, וחסומות

לאוסף הנקודות במישור xy המקיים $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ נקרא סביבה מלבנית

של הנקודה (x_0, y_0) . לאוסף הנקודות $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ נקרא סביבה

מעגלית של (x_0, y_0) .

תהי D קבוצת נקודות במישור. נקודה P השייכת ל- D נקראת פנימית ל- D אם P שייכת ל- D וניתן למצוא סביבה של P כך שכל נקודותיה שייכות ל- D .

נקודה P נקראת חיצונית ל- D אם P אינה שייכת ל- D וניתן למצוא סביבה של P כך שכל נקודותיה אינן שייכות ל- D .

נקודה P נקראת נקודת שפה של D אם P אינה נקודה פנימית או חיצונית ל- D .
 נקודה P היא נקודת הצטברות של D אם בכל סביבה של P ניתן למצוא נקודות של D השונות מ- P .
 קבוצה פתוחה זוהי קבוצה שכל נקודותיה הן נקודות פנימיות.
 קבוצה סגורה זוהי קבוצה שמכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.
 קבוצה פתוחה D נקראת קשירה אם כל שתי נקודות השייכות ל- D ניתן לחבר בקו המורכב מקטעים-קטעים והקו נמצא כולו ב- D .



קבוצה קשירה



קבוצה לא קשירה

תחום (או תחום פתוח) זוהי קבוצה פתוחה וקשירה. תחום סגור זהו תחום שצורפו אליו את כל נקודות השפה.

קבוצה D במישור נקראת חסומה אם קיים עגול $x^2 + y^2 < R^2$ המכיל את כל הקבוצה D .
הערה: את כל המושגים הנ"ל ניתן להגדיר באופן דומה במרחב תלת-ממדי ובמרחב n ממדי.

תרגיל 4

א' תהי $D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 25\}$ (עיגול מנוקב בלי ראשית)

רשום דוגמה לנקודות פנימיות, נקודות חיצוניות ונקודות השפה של D .

ב' תן דוגמה לקבוצה פתוחה שאינה קשירה.

ג' תן דוגמה לקבוצה לא חסומה.

ד' האם קיימת קבוצה שהיא גם פתוחה וגם סגורה?

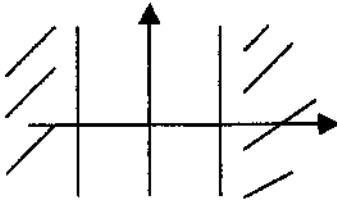
פתרון:

א' הנקודה $(1, 2)$ היא פנימית. (כל הנקודות אשר מקיימות $x^2 + y^2 < 25$ הן פנימיות).

למשל $(10, 2)$. (כל הנקודות אשר מקיימות $x^2 + y^2 > 25$ הן חיצוניות)

כל הנקודות אשר מקיימות $x^2 + y^2 = 25$ הן נקודות שפה. בנוסף גם הנקודה $(0, 0)$ היא נקודת שפה.

ב' הקבוצה $E = \{(x, y) \mid |x| > 3\}$ פתוחה אך לא קשירה. (ראה בציור את התחום המקווקו)



למשל לא ניתן לחבר בקו שבור את הנקודות
 $(-4,1)$, $(5,4)$ כך שהקו כולו שייך ל- E .

ג' קבוצה E אינה חסומה.

ד' כן. אם D הוא כל המישור מישור מהווה בעת ובעונה אחת קבוצה פתוחה וסגורה (כל הנקודות הן פנימיות וכל נקודות ההצטברות שייכות ל- D)

פרק 4

גבולות ורציפות

תהי $f(x, y)$ מוגדרת בסביבת (x_0, y_0) (פרט אולי לנקודת (x_0, y_0) עצמה).
 אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שהתנאי $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$, $(x, y) \neq (0, 0)$,
 גורר את התנאי $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ אז נאמר ש- $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L$ (הוא הגבול הכפול)
 באופן דומה ניתן להגדיר מושג הגבול לפונקציה ב-3 משתנים או ב- n משתנים.
הסבר אינטואיטיבי: אם נקיף את הנקודה (x_0, y_0) בסביבה קטנה מאד ונחשב את ערכי הפונקציה
 עבור נקודות (x, y) מסביבה זו, אזי ההפרש בין $f(x, y)$ ל- L יהיה קטן כרצוננו.

תרגיל 1

א' הוכח כי לא קיים הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

ב' הוכח כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$

פתרון:

א' כדי להוכיח שהגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L$ לא קיים מספיק למצוא שני מסלולים γ_1, γ_2

שמובילים ל- (x_0, y_0) ו- $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L_1$ כאשר $(x, y) \in \gamma_1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L_2$, $(x, y) \in \gamma_2$

כאשר $(x, y) \in \gamma_2$ ו- $L_1 \neq L_2$.

נבחר מסלול $\gamma_1 : x = y \rightarrow 0$. (ר"א הנקודה (x, y) מתקרבת ל- $(0, 0)$ לאורך הישר $y = x$)

ונחשב: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. כעת נבחר $\gamma_2 : x \rightarrow 0, y = 0$. לאורך מסלול זה

נקבל $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$. $L_1 \neq L_2$ ולכן הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ לא קיים.

ב' כדי להוכיח שהגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L$ קיים צריך להוכיח שאם נתקרב לנקודה (x_0, y_0)

לאורך כל המסלולים האפשריים, תמיד נקבל את המספר L . לכן ההוכחה צריכה להיות כללית ולא תלויה בבחירת מסלול מסוים.

נבחין בשני מקרים: כאשר $y \neq 0$ נקבל $\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{xy^2}{y^2} \right| = |x|$ ובעזרת משפט

"הסנדוויץ" קל לראות שאם $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ אזי $\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| \rightarrow 0$.

כאשר $y = 0$ נקבל $\left| \frac{x \cdot 0^2}{x^2 + 0^2} \right| = 0$ לסיכום, הוכחנו כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$

לעיתים נוח להוכיח כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = L$ בעזרת מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

בשיטה זו מספיק להוכיח שקיימת פונקציה $g(r)$ כך ש- $|f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - L| \leq g(r)$

ו- $g(r) \rightarrow 0$ כאשר $r \rightarrow 0$. (שים לב שהפונקציה $g(r)$ חייבת להיות לא תלויה ב- φ .)

תרגיל 2

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} \quad \text{ב'} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3xy^2 - 5y^4}{x^2 + 2y^2} \quad \text{חשב: א'}$$

פתרון:

א' סדר גודל של המונה נראה קטן יותר מסדר גודל של המכנה כאשר מתקרבים לראשית הצירים ולכן ננסה להוכיח כי הגבול שווה לאפס. אחרי מעבר לקואורדינטות קוטביות נקבל

$$\left| \frac{3xy^2 - 5y^4}{x^2 + 2y^2} - 0 \right| = \left| \frac{3r \cos \varphi \sin^2 \varphi - 5r^2 \sin^4 \varphi}{\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi} \right| \leq \frac{3r + 5r^2}{1 + \sin^2 \varphi} \leq \frac{3r + r^2}{1}$$

(השתמשנו כאן באי-שוויון המשולש וגם בעובדה ש- $|\sin \varphi| \leq 1$, $|\cos \varphi| \leq 1$)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3xy^2 - 5y^4}{x^2 + 2y^2} = 0 \quad \text{ולכן} \quad r \rightarrow 0 \quad \text{כאשר} \quad g(r) \rightarrow 0. \quad g(r) = 3r + r^2$$

ב' נשתמש בנוסחה: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1$ (בדוק בעזרת שימוש בכלל לופיטל!)

מנוסחה זו נובע ש- $e^{xy} - 1$ שווה בקירוב ל- xy עבור (x, y) קרובה ל- $(0, 0)$.

לכן $\frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} \approx \frac{xy}{x^2 + y^2}$. נוכיח אם כן שהגבול אינו קיים. לשם כך נבחר שני מסלולים

$$\frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} = \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} \rightarrow 2 \quad \text{נקבל} \quad x = y \rightarrow 0$$

עבור המסלול $y = 2x \rightarrow 0$ נקבל $\frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} = \frac{e^{2x^2} - 1}{5x^2} \rightarrow \frac{2}{5}$ ולכן הגבול לא קיים.

תרגיל 3

חשב את הגבולות: א' $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{2x+3y}{x^2-xy+y^2}$ ב' $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

פתרון:

א' נשתמש באי-שוויון $x^2 - xy + y^2 \geq xy$ לכל x, y , (אי-שוויון זה שקול ל- $(x-y)^2 \geq 0$)

$$\text{לכן } 0 \leq \left| \frac{2x+3y}{x^2-xy+y^2} \right| \leq \frac{|2x+3y|}{|xy|} = \frac{2}{|x|} + \frac{3}{|y|}$$

ממשפט "הסנדוויץ" נובע שהגבול שווה לאפס.

ב' נבדוק שאיפה ל- $(0,0)$ לאורך הישרים $y = ax$, $\frac{xy^3}{x^2+y^6} = \frac{x^4 a^3}{x^2 + a^6 x^6} = \frac{x^2 a^3}{1 + a^6 x^4} \rightarrow 0$

כאשר $x \rightarrow 0$. ד"א לאורך כל הקרניים האפשריים עם שיפוע כלשהו a הביטוי $\frac{xy^3}{x^2+y^6}$ שואף

לאפס. למרות זאת, תוצאה זו לא גוררת בהכרח את המסקנה שהגבול קיים ושווה לאפס כי ניתן להתקרב

ל- $(0,0)$ לאורך מסלולים שאינם קווים ישרים. נבדוק את השאיפה לאורך המסלול $y^3 = x \rightarrow 0$

ונקבל $\frac{xy^3}{x^2+y^6} = \frac{x^2}{2x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$. מסקנה: הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$ אינו קיים.

תרגיל 4

חשב את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3y^4 + x^2 y^2 + 3x^2}{x^2 + y^4}$

פתרון: $\frac{3y^4 + x^2 y^2 + 3x^2}{x^2 + y^4} = \frac{3(y^4 + x^2)}{x^2 + y^4} + \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} = 3 + \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$ ונשאר להוכיח כי

הביטוי $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$ שואף לאפס. לשם כך נשתמש באי-שוויון זהותי: $\left| \frac{ab}{a^2 + b^2} \right| \leq \frac{1}{2}$

שואף לאפס $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$. ממשפט "סנדוויץ" נובע שהביטוי $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$ שואף לאפס $0 \leq \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} \right| = \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \right| \cdot |x| \leq \frac{1}{2} |x|$

כאשר $(x,y) \rightarrow (0,0)$. לסיכום $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3y^4 + x^2 y^2 + 3x^2}{x^2 + y^4} = 3$

גבולות חוזרים

תהי $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה מלבנית של (x_0, y_0) : $a < x < b, c < y < d$.

אם קיים הגבול $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = g(x)$ וקיים הגבול $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ אז נאמר שקיים

גבול חוזר $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = L_1$. באופן דומה ניתן להגדיר את $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = L_2$

משפט

תהי $f(x, y)$ מוגדרת בסביבה מלבנית של (x_0, y_0) : $a < x - x_0 < b$, $c < y - y_0 < d$

אם קיים הגבול הכפול $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L$ ואם לכל $c < y - y_0 < d$ קיים הגבול הפשוט

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ אז קיים הגבול החדר $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ והוא שווה לגבול הכפול.

תרגיל 5

אמת או שקר : " אם $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ אזי גם $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$?

פתרון:

הטענה היא שקרית !

הגבול הכפול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$ כי $0 \leq (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x} \leq (x^2 + y^2) \rightarrow 0$ כאשר

(x, y) שואפת ל- $(0, 0)$. מצד שני הגבול הפשוט $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x}$ לא קיים ולכן לא קיים גם

הגבול החדר $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$.

תרגיל 6

הוכח כי: $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \cos^{2k}(\pi \cdot n! \cdot x)$ שווה ל- 1 עבור x רציונלי ושווה ל- 0 עבור x אי-רציונלי.

פתרון:

נסמן $x = \frac{p}{q}$ מספר רציונלי. בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח כי $n \geq q$ (כי $n \rightarrow \infty$)

ולכן $n! \cdot \frac{p}{q}$ הוא מספר שלם. מכאן נובע ש- $\cos^{2k}(\pi \cdot n! \cdot x) = 1$. עבור x אי-רציונלי המספר

$n! \cdot x$ אינו שלם ולכן $-1 < \cos(\pi \cdot n! \cdot x) < 1$. ד"א $\lim_{k \rightarrow \infty} \cos^{2k}(\pi \cdot n! \cdot x) = 0$ ולכן הטענה

נכונה. (שים לב: הגבול החדר $\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2k}(\pi \cdot n! \cdot x)$ אינו קיים !)

תרגיל 7

תהי $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (2x - y)^2}$

א' חשב את הגבולות החדרים $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$

ב' חשב את הגבול הכפול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$

פתרון:

א' לא קשה לראות כי $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ וגם $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ ולכן הגבולות החוזרים שווים לאפס וגם שווים זה לזה.

ב' נבחר במסלול $y = 2x \rightarrow 0$. נקבל $\frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (2x - y)^2} = \frac{4x^4}{4x^4} \rightarrow 1$

נעת נבחר במסלול $y = -2x$. נקבל $\frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (2x - y)^2} = \frac{4x^4}{4x^4 + 16x^2} = \frac{x^2}{x^2 + 4} \rightarrow 0$

לסיכום: הגבולות החוזרים שווים זה לזה אך הגבול הכפול אינו קיים.

רציפות

תהי $f(x, y)$ מוגדרת בסביבה של (x_0, y_0) . אנו אומרים שהפונקציה רציפה בנקודה (x_0, y_0) אם

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל נקודה השייכת לסביבה $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$

מתקיים $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ עובדה זו נרשום כך $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$

ההגדרה אומרת שהגבול קיים ושווה לערכה של הפונקציה בנקודה (x_0, y_0) .

הערה: באופן דומה ניתן להגדיר רציפות לפונקציה ב- n משתנים.

רציפות בתחום

$f(x, y)$ רציפה בתחום D (קבוצה פתוחה וקשירה) אם f רציפה בכל נקודה השייכת ל- D .

רציפות במשתנה אחד

תהי $f(x, y)$ מוגדרת בתחום D . אנו אומרים ש- $f(x, y)$ רציפה במשתנה x אם לכל (x_0, y_0)

השייכת ל- D הפונקציה $f(x, y_0)$ כפונקציה במשתנה יחיד x רציפה ב- x_0 .

באופן דומה ניתן לדון ברציפות ביחס למשתנה יחיד y .

לא קשה לראות שאם $f(x, y)$ פונקציה רציפה אזי היא רציפה לפי כל אחד מהמשתנים.

ההפך אינו נכון. למשל בתרגיל 7 הפונקציה רציפה לפי כל אחד מהמשתנים, אך לא רציפה כפונקציה בשני משתנים.

הערה: כאשר בודקים רציפות לפי משתנה אחד, "מקפויאים" את המשתנה השני, לעומת זאת, כאשר

בודקים רציפות בשני משתנים, "מריצים" את שניהם ביחד ל- (x_0, y_0) .

משפט ערך הביניים של קושי

תהי $f(x, y)$ רציפה בתחום D . תהינה (x_1, y_1) , (x_2, y_2) שתי נקודות השייכות לתחום.

נסמן $z_1 = f(x_1, y_1)$, $z_2 = f(x_2, y_2)$ ונניח ש- $z_1 < z_2$, אזי לכל $z_1 < z_0 < z_2$

קיימת נקודה (x_0, y_0) השייכת ל- D כך ש- $f(x_0, y_0) = z_0$

משפט ויירשטרס

פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה E מקבלת ב- E את המקסימום ואת המינימום המוחלטים

שלה, ד"א קיימות ב- E שתי נקודות P_1, P_2 כך שלכל נקודה P השייכת ל- E מתקיים:

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2)$$

תרגיל 8

תהי $f(x, y) = \frac{x^m \cdot \sin y}{x^2 + 4y^2}$ עבור כל $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

עבור איזה m הפונקציה רציפה בראשית הצירים?

פתרון:

עבור ערכי y קרובים לאפס $\sin y \approx y$. לכן מספיק לחקור את הביטוי $\frac{x^m \cdot y}{x^2 + 4y^2}$

$$0 \leq \left| \frac{r^{m+1} \cdot \cos^m \varphi \sin \varphi}{r^2 (\cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi)} \right| = \left| \frac{r^{m-1} \cdot \cos^m \varphi \sin \varphi}{1 + 3 \sin^2 \varphi} \right| \leq r^{m-1}$$

לכן הפונקציה רציפה ב- $(0, 0)$ עבור $m > 1$.

תרגיל 9

תהי $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y - \sin y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$. בדוק האם הפונקציה רציפה בראשית?

פתרון:

נשתמש בגבול $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha^3} = \frac{1}{6}$ (בדוק בעזרת חוק לופיטל 1). לכן עבור ערכי α

"קרובים מספיק" לאפס יתקיים $\alpha - \sin \alpha < \alpha^3$. לכן עבור $y \neq 0$ נקבל את אי-השוויון:

$$f(x, y) = 0 \text{ נקבל } x \neq 0, y = 0 \text{ ועבור } 0 \leq \left| \frac{y - \sin y}{x^2 + y^2} \right| < \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{y^3}{y^2} \right| = |y|$$

לכן $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y - \sin y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$ והפונקציה רציפה בראשית.

תרגיל 10

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & , x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = z = 0 \end{cases} \quad \text{תהי}$$

בדוק האם f רציפה בראשית הצירים ?

פתרון:

בהוכחת הרציפות נשתמש באי-שוויון ממוצעים: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ לכל $a, b, c \geq 0$

מכאן נובע ש- $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \sqrt[3]{(xyz)^2}$ ולכן $\left| \frac{(xyz)^{2/3}}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq \frac{1}{3}$ אם נכפיל שני האגפים

בביטוי $|xyz|^{2/3}$ נקבל: $0 \leq \left| \frac{(xyz)}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq \frac{1}{3} |xyz|^{1/3}$ מאי-שוויון זה נובע שכאשר x, y, z

שואפים לאפס אזי הביטוי $\left| \frac{(xyz)}{x^2 + y^2 + z^2} \right|$ שואף לאפס ולכן הפונקציה רציפה בראשית הצירים.

תרגיל 11

אמת או שקר ?

א' תהי $f: R \rightarrow R$ רציפה ולא קבועה. נגדיר פונקציה חדשה $g: R^2 \rightarrow R$ באופו הבא:

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}\right) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$$

הערה: בסעיפים הבאים אין קשר לסעיף א'.

ב' תהי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור. נגדיר פונקציה חדשה $g(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 1}}$

נתון: $g(1, 1) > 0$, $g(1, 10) < 0$. אזי בתחום ההגדרה הסביבה של $g(x, y)$ קיימת

נקודה (x_0, y_0) כך ש- $g(x_0, y_0) = 0$

ג' נתון: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y)$ לכל y , $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0)$ לכל x .

אזי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (f(x, y) - f(0, 0)) = 0$

ד' אם לכל (x, y) מתקיים: $|f(x, y)| \leq \sin^2(x^2 + y^2)$ אזי רציפה בנקודה $(0, 0)$.

ה' אם לכל y $|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq |x_2 - x_1|$ ולכל x $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|$ אזי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

ו' אם לכל φ $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 0$ אזי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$

פתרון:

א' שקר. אם נבחר מסלול $x = y \rightarrow 0$ נקבל $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} g(x, y) = f(-1)$. לעומת זאת לאורך

המסלול $x \rightarrow 0, y = 0$ נקבל $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} g(x, y) = f(1)$. הפונקציה f אינה קבועה ולכן

באופן כללי $f(1) \neq f(-1)$. ד"א לא קיים הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} g(x, y)$.

ב' שקר. $g(x, y)$ מוגדרת עבור $x - y > 1$ או $x - y < -1$. זוהי קבוצה לא קשירה ולכן לא נוכל להשתמש במשפט ערך הביניים של קושי. אם נבחר למשל $f(x, y) = x - y$ אזי

$$g(x, y) = \frac{x - y}{\sqrt{(x - y)^2 - 1}}$$

מאפס בתחום ההגדרה הטבעי.

ג' שקר. פונקציה רציפה לפי כל אחד מהמשפטים לא חייבת להיות רציפה כפונקציה בשני משתנים.

ד' אמת. ראשית כל $|f(0, 0)| \leq \sin^2(0^2 + 0^2)$ ולכן $f(0, 0) = 0$. נוכיח כי הפונקציה

שואפת לאפס כאשר $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$: $0 \leq |f(x, y)| \leq \sin^2(x^2 + y^2)$ ולכן ממשפט

"הסנדוויץ" נובע שהגבול שווה ל-0.

ה' אמת. נבחר $\varepsilon > 0$ כלשהו. אזי:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &= |f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leq \\ &\leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < |y - y_0| + |x - x_0| \end{aligned}$$

נדרוש ש- $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. אם $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ אז $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$

ו' שקר. למשל $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$ אינו קיים (ראה תרגיל 3) אך $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi \cdot r^3 \sin^3 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^6 \sin^6 \varphi} = 0$

פרק 5

נגזרות חלקיות ודיפרנציאליות

נגזרות חלקיות

תהי $z = f(x, y)$ מוגדרת בסביבת (x_0, y_0) . אם קיים הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ נאמר ש- f גזירה לפי x בנקודה (x_0, y_0) ולגבול נקרא הנגזרת החלקית לפי x ב- (x_0, y_0) . באופן דומה לגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$ נקרא הנגזרת החלקית לפי y ב- (x_0, y_0) . נגזרות החלקיות נסמן ב- $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ או $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$. הערה: כאשר גוזרים לפי x "מקפואים" את ה- y , וכאשר גוזרים לפי y "מקפואים" את ה- x .

תרגיל 1

חשב את הנגזרות החלקיות של $z = f(x, y) = x^y$, $(x > 0)$

פתרון:

$$f'_y(x, y) = x^y \ln x, \quad f'_x(x, y) = yx^{y-1}$$

המשמעות הגיאומטרית של נגזרות חלקיות

הפונקציה $z = f(x, y)$ מתארת משטח S . כאשר גוזרים את הפונקציה לפי x בנקודה (x_0, y_0) , הערך של y נשאר קבוע $y = y_0$. המשוואה $y = y_0$ מתארת מישור אנכי למישור xy המקביל למישור xz . מישור זה חותך את המשטח $z = f(x, y)$. כתוצאה מכך בחוץ בין המישור למשטח מתקבל עקום שנמצא במישור $y = y_0$. הנגזרת לפי x מסמנת שיפוע המשיק לעקום זה בנקודה $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. ד"א טנגנס הזווית α שיוצר המשיק לעקום עם כיוון החיובי של ציר ה- x . באופן דומה ניתן לפרש את הנגזרת החלקית לפי y בנקודה (x_0, y_0) . (המישור יהיה הפעם מקביל למישור yz)

תרגיל 2

$$f(0,0) = (0,0) \quad \text{ו-} \quad f(x, y) = \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0,0)$$

א' חשב את הנגזרות החלקיות בראשית הצירים.

ב' חשב את הנגזרות החלקיות מחוץ לראשית הצירים.

ג' האם $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ רציפות ב- $(0,0)$?

פתרון:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} = 1 \quad \text{א'}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4}{h^3} = 0$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} \quad , \quad f'_x(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{ב'}$$

$$\text{ג' נבדוק האם} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_x(x,y) = f'_x(0,0) \quad , \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_y(x,y) = f'_y(0,0) \quad ?$$

$$\text{לא קשה לראות כי הביטוי} \quad f'_x(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{לא מתכנס ל-1,}$$

(אפשר להציב למשל את המסלול $x = y \rightarrow 0$). למעשה הגבול הכפול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_x(x,y)$

לא קיים אך לנו מספיק להראות כי הביטוי לא שואף ל-1. באופן דומה ניתן להראות כי גם

$$\text{הביטוי} \quad f'_y(x,y) = \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{לא מתכנס ל-0. (אין גבול)}$$

מסקנה: הנגזרות החלקיות אינן רציפות ב- $(0,0)$.

הערה: אם לפונקציה יש נגזרות חלקיות רציפות בתחום D אז נאמר שהיא שייכת ל- C^1 .

תרגיל 3

הוכח שקיום נגזרות חלקיות בנקודה (x_0, y_0) לא גורר בהכרח ש- $f(x, y)$ רציפה.

פתרון

$$\text{למשל לפונקציה:} \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad , \quad f(0,0) = 0 \quad \text{אין גבול כפול ב-} (0,0)$$

ולכן היא לא רציפה ב- $(0,0)$. מצד שני, לא קשה לבדוק שהנגזרות החלקיות קיימות ב- $(0,0)$ ושוות לאפס. (בדוק בעזרת ההגדרה !)

דפרנציאביליות

תהי $z = f(x, y)$ מוגדרת בסביבת (x_0, y_0) . לביטוי $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

נקרא השתנות של $f(x, y)$ בסיבת (x_0, y_0) . אנו מניחים ש- $\Delta x, \Delta y$ מספיק קטנים כדי להישאר

בסיבת (x_0, y_0) . הפונקציה תהיה דפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) אם אפשר להציג את ההשתנות

של הפונקציה כך: $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$, כאשר A, B קבועים ו- $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$

$\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ הן פונקציות השואפות לאפס עבור $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

הגדרה שקולה לדיפרנציאביליות

פונקציה $z = f(x, y)$ תהיה דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) אם אפשר להציג את ההשתנות של

הפונקציה כך: $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, כאשר A, B קבועים

ו- $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ היא פונקציה השואפת לאפס עבור $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

הגדרה לדיפרנציאביליות לפונקציה בשלושה משתנים

תהיה $w = f(x, y, z)$ מוגדרת בסביבת (x_0, y_0, z_0) . לביטוי

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

נקרא השתנות של $f(x, y, z)$ בסביבת (x_0, y_0, z_0) . אנו מניחים ש- $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ מספיק קטנים כדי להישאר בסביבת (x_0, y_0, z_0) . הפונקציה תהיה דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0, z_0) אם אפשר להציג את

ההשתנות של הפונקציה כך: $\Delta w = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z$

כאשר A, B, C קבועים ו- $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\gamma = \gamma(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ הן

פונקציות השואפות לאפס עבור $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$.

הערה: באופן דומה מגדירים מושג הדיפרנציאביליות של פונקציה ב- n משתנים.

תנאי הכרחי לדיפרנציאביליות

אם $z = f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) אזי ל- $z = f(x, y)$ יש גזרות חלקיות

$$\text{ב- } (x_0, y_0) \text{ ומתקיים: } f'_x(x_0, y_0) = A, f'_y(x_0, y_0) = B$$

תנאי מספיק לדיפרנציאביליות

אם ל- $z = f(x, y)$ יש גזרות חלקיות בסביבת (x_0, y_0) והן פונקציות רציפות בנקודה (x_0, y_0)

(ד"א $f \in C^1$) אזי $z = f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה זו.

הערה חשובה: זהו תנאי מספיק ולכן יתכן שהגזרות החלקיות אינן רציפות ב- (x_0, y_0) ולמרות זאת

הפונקציה דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) .

הקשר בין רציפות לדיפרנציאביליות

דיפרנציאביליות של $z = f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0) גוררת רציפות של $z = f(x, y)$

בנקודה (x_0, y_0) .

שים לב שבכיוון ההפוך הטענה אינה נכונה !

דיפרנציאל השלם של $z = f(x, y)$

הביטוי $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ קרוי הדיפרנציאל השלם של $z = f(x, y)$, שים לב כי $\Delta z \approx dz$.

כאשר $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ הם "קטנים מאוד" אזי dz מהווה קירוב טוב ל- Δz .

תרגיל 4

$$f(0,0) = (0,0) \quad \text{ו-} \quad f(x,y) = \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

בדוק באילו נקודות הפונקציה דיפרנציאבילית.

פתרון:

$$f'_y(x,y) = \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f'_x(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{בתרגיל 2 ראינו ש-}$$

ולכן נגזרות אלו רציפות פרט לנקודה $(0,0)$. מסקנה: מתנאי מספיק לדיפרנציאביליות נובע ש-

$$z = f(x,y) \quad \text{דיפרנציאבילית פרט אולי לנקודה } (0,0).$$

בתרגיל 2 גילינו כי הנגזרות החלקיות $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ אינן רציפות ב- $(0,0)$ ולכן אנו חייבים לבדוק בעזרת ההגדרה האם הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית. הפונקציה תהיה דיפרנציאבילית אם

$$\text{ניתן לרשום} \quad f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0,0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \text{כאשר}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \quad \text{היא פונקציה השואפת לאפס עבור} \quad \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$$

$$\text{נזכור} \quad A = f'_x(0,0), \quad B = f'_y(0,0). \quad \text{בתרגיל 2 קיבלנו:} \quad f'_x(0,0) = 1, \quad f'_y(0,0) = 0$$

$$\text{לכן} \quad f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \frac{\Delta x^3 + \Delta y^4}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - 0 = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\text{נבודד מתוך השוויון את } \varepsilon: \quad \varepsilon = \frac{\Delta y^4 - \Delta x \Delta y^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{נוכיח שביטוי זה אינו שואף לאפס.}$$

$$\text{לשם כך נבחר} \quad \Delta x = \Delta y \rightarrow 0 \quad \text{וקל לראות כי הביטוי} \quad \varepsilon = \frac{\Delta y^4 - \Delta x \Delta y^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\Delta x^4 - \Delta x^3}{(2\Delta x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

לא שואף לאפס. מסקנה: הפונקציה לא דיפרנציאבילית בראשית הצירים.

תרגיל 5

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases} \quad \text{תהי}$$

א' בדוק האם הפונקציה רציפה ב- $(0,0)$?

ב' בדוק האם לפונקציה יש נגזרות חלקיות ב- $(0,0)$?

ג' האם הנגזרות החלקיות $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ רציפות ב- $(0, 0)$?

ד' האם הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$?

פתרון:

א' תביטו $x^2 + y^2$ שואף לאפס כאשר $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ ופונקציה סינוס חסומה.

נקבל: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ והפונקציה רציפה ב- $(0, 0)$.

ב' נחשב את הנגזרות החלקיות לפי ההגדרה:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2} - 0}{h} = 0$$

(שים לב כי סינוס חסומה !)

מסימטריה נוכל להסיק כי $f'_y(0, 0) = 0$.

$$f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \text{ג'}$$

כל $(x, y) \neq (0, 0)$

כאשר $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ המחובר הראשון $2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ שואף לאפס. לעומת זאת המחובר

השני אינו מתכנס כי הביטוי $\frac{2x}{x^2 + y^2}$ לא מתכנס לאפס (אין בכלל גבול) ולכן $f'_x(x, y)$ לא

רציפה ב- $(0, 0)$. מסעמי סימטריה נסיק שגם $f'_y(x, y)$ לא רציפה ב- $(0, 0)$.

ד' תנאי מספיק לדיפרנציאביליות אינו מתקיים בראשית הצירים ולכן לא נוכל בשלב זה לקבוע האם

הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$. נבדוק לפי ההגדרה:

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = (\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - 0 = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

מכאן $\varepsilon = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ כאשר $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ ולכן הפונקציה

דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$.

תרגיל 6

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \cdot \sin y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases} \quad \text{תהי}$$

כאשר m פרמטר ממשי.

א' עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה ב- $(0, 0)$?

ב' עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$?

פתרון:

א' עבור y קרוב לאפס $y \approx \sin y$ ולכן מספיק לדון ב- $\frac{x^m y}{x^2 + y^2}$. נעבור לקואורדינטות קוטביות

$$m > 1, \text{ הביטוי שואף לאפס אם ורק אם } \left| \frac{r^m \cos^m \varphi \cdot r \sin \varphi}{r^2} \right| = r^{m-1} \cdot |\cos^m \varphi \sin \varphi|$$

לכן הפונקציה רציפה ב- $(0,0)$ עבור $m > 1$.

ב' אם $m \leq 1$ הפונקציה לא תהיה רציפה ולכן לא דיפרנציאבילית. לכן בבדיקת הדיפרנציאביליות נוכל להניח ש- $m > 1$. לא קשה לראות שהנגזרות החלקיות ב- $(0,0)$ שוות לאפס (בדוק לפי ההגדרה)

$$\varepsilon = \frac{\Delta x^m \sin \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{על-ידי כך} \quad \frac{\Delta x^m \sin \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - 0 = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta x^m \sin \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{\Delta x^m \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r^{m+1} \cos^m \varphi \sin \varphi}{r^3}$$

עבור ערכי Δy מספיק קטנים

ולכן הפונקציה תהיה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$ אם ורק אם $m > 2$.

נגזרות חלקיות מסדר כלשהו

תהי $f(x, y)$ בעלת נגזרות חלקיות בסביבת (x_0, y_0) . הנגזרות $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ הן

פונקציות המוגדרות בסביבת (x_0, y_0) ויתכן שגם להן יש נגזרות חלקיות. נסמן:

$$\left(f'_x\right)'_x = f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \left(f'_y\right)'_x = f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \left(f'_x\right)'_y = f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\left(f'_y\right)'_y = f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad \text{לנגזרת } f''_{xy} = f''_{yx} \text{ קוראים "נגזרות מעורבות"}$$

תנאי מספיק לשוויון נגזרות מעורבות

תהי $f(x, y)$ מוגדרת בסביבת (x_0, y_0) . אם בסיבה זו קיימות נגזרות חלקיות $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$

וקיימת נגזרת מעורבת $f''_{xy}(x, y)$ והיא רציפה ב- (x_0, y_0) אזי קיימת גם $f''_{yx}(x_0, y_0)$ ומתקיים

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

הכללה

תהי $f(x, y)$ בעלת כל הנגזרות החלקיות עד סדר $k-1$ בתחום D . נניח שקיימות הנגזרות המעורבות

מסדר k ו- $f \in C^k$ (דא כל הנגזרות החלקיות שלה עד סדר k רציפות). אזי הערך של הנגזרת

המעורבת אינו תלוי באיזה סדר נעשתה הנגזרת.

תרגיל 7

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases} \quad \text{תהי}$$

א' מצא את הפונקציות $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$

ב' בדוק האם $f''_{xy}(0,0)$ שווה ל- $f''_{yx}(0,0)$?

ג' האם $\frac{\partial^7 f(1,3)}{\partial x^3 \partial y^4} = \frac{\partial^7 f(1,3)}{\partial y^4 \partial x^3}$? נמק תשובתך !

פתרון:

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3 y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases} \quad \text{א'}$$

(בראשית גורנו לפי ההגדרה)

הפונקציה היא אנטי-סימטרית, ד"א לכל $f(a, b) = -f(b, a)$ ולכן כדי לקבל את $f'_y(x, y)$ יש

פשוט להחליף את התפקידים בין x ו- y ב- $f'_x(x, y)$ ולרשום לפני השבר סימן מינוס זאת אומרת,

$$f'_y(x, y) = -f'_x(y, x)$$

ב' נחשב את $f''_{xy}(0,0)$ לפי ההגדרה:

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, h) - f'_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^5 - 0}{h^5} = -1$$

הנגזרת המעורבת $f''_{yx}(0,0)$ כי מאנטי-סימטריות של $f(x, y)$ נובע כי $f''_{yx}(0,0) = +1$

מסקנה: הנגזרות המעורבות אומנם קיימות בראשית הצירים אך אינן רציפות

ג' כל הנגזרות עד סדר 7 רציפות מחוץ לראשית הצירים כי אחרי כל גזירה מתקבלת מנה של שני פולינומים והמכנה יהיה שונה מאפס. לכן הנגזרות המעורבות שוות.

פרק 6

כלל השרשרת

כלל השרשרת

תהי $z = f(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בתחום D ונניח ש- $x = x(t)$, $y = y(t)$ הן פונקציות גזירות לפי t בקטע מסוים S (פתוח או סגור) כך שהנקודות $(x(t), y(t))$ שייכות ל- D עבור כל t השייך לקטע S . גזיר פונקציה מורכבת $z = z(t) = f(x(t), y(t))$, אזי $z(t)$ גזירה ומתקיים

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{הכלל:}$$

הכללה של כלל השרשרת

תהי $z = f(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בתחום D במישור xy ותהינה $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$ פונקציות גזירות בתחום E הנמצא במישור ts כך שלכל (t, s) השייכות ל- E מתאימה נקודה $(x(t, s), y(t, s))$ השייכות לתחום D . גזיר פונקציה מורכבת $z = z(t, s) = f(x(t, s), y(t, s))$ אזי

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{ו-} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

הערה: ניתן להכליל באופן דומה את כלל השרשרת לפונקציות ב- n משתנים.

משפט ערך הממוצע

תהי $z = f(x, y)$ פונקציה בעלת גזירות חלקיות רציפות בתחום D ותהינה שתי נקודות (x_0, y_0) ו- $(x_0 + h, y_0 + k)$ של D כך שניתן לחבר אותן על-ידי קטע של ישר השייך כולו לתחום D . אזי קיים $0 < \theta < 1$ כך ש-

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0 + \theta \cdot h, y_0 + \theta \cdot k) \cdot h + f'_y(x_0 + \theta \cdot h, y_0 + \theta \cdot k) \cdot k$$

הערה: הנקודה $(x_0 + \theta \cdot h, y_0 + \theta \cdot k)$ נמצאת על הקטע המחבר את שתי הנקודות.

תרגיל 1

תהי $z = f(u)$ גזירה, $f \neq \text{Const.}$ ונתון $u = x^2 + y^2$. גזיר פונקציה מורכבת:

$$(*) \quad y \frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{\partial z}{\partial y} : (x, y) \quad \text{אם לכל } a \text{ מצא את הערך של } z(x, y) = f(x^2 + y^2)$$

פתרון:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot 2x$$

$$2xy \frac{dz}{du} = 2xya \frac{dz}{du} \quad \text{ולכן } a=1$$

תרגיל 2

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{כאשר } f(u) \text{ גזירה אזי } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

פתרון:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{-y}{x^2}$$

אחרי ההצבה נקבל:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \left(-\frac{y}{x} + \frac{y}{x} \right) = 0$$

תרגיל 3

$$z = f(u, v) \quad \text{דיפרנציאבילית, נגזיר } u = 2x + 3y, v = x - y$$

$$\text{נתון: } \frac{\partial z}{\partial u}(7,1) = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial v}(7,1) = 3 \quad \text{תחי } z = f(2x + 3y, x - y)$$

$$\text{חשב: } \frac{\partial z}{\partial x}(2,1) + \frac{\partial z}{\partial y}(2,1) =$$

פתרון:

$$\text{לנקודה } x=2, y=1 \text{ מתאימה נקודה } u=7, v=1. \text{ נשתמש בכלל השרשרות:}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = \frac{\partial z}{\partial u}(7,1) \cdot 2 + \frac{\partial z}{\partial v}(7,1) \cdot 1 = 7 \quad \text{לכן, } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,1) = \frac{\partial z}{\partial u}(7,1) \cdot 3 + \frac{\partial z}{\partial v}(7,1) \cdot (-1) = 3 \quad \text{לכן, } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 3 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot (-1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) + \frac{\partial z}{\partial y}(2,1) = 10 \quad \text{לסיכום}$$

תרגיל 4

$$\text{תחי } f(x, y) \text{ שייכת ל- } C^1 \text{ (בעלת נגזרות חלקיות רציפות) בכל המישור.}$$

$$\text{נתון: } \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1, \quad f(0,1) = 1. \quad \text{נגזיר פונקציה חדשה:}$$

$$\frac{dz}{dx}(0) = \text{חשב} \cdot z(x) = f(x, f(x^2, 1-x))$$

פתרון:

נסמן: $u = x, v = f(x^2, 1-x)$. עבור $x = 0$ נקבל $u = 0, v = f(0, 1) = 1$

$$(*) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

כדי לחשב את $\frac{dv}{dx}$ נשתמש שוב בכלל השרשרת:

נסמן: $t = x^2, s = 1 - x$. עבור $x = 0$ נקבל $t = 0, s = 1$.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot (-1)$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad \text{קל לראות ש-} \quad \frac{dv}{dx}(0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, 1) \cdot 2 \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial s}(0, 1) \cdot (-1) = -2$$

$$\frac{dz}{dx}(0) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 1) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(0, 1) \cdot (-2) = 2 - 4 = -2 \quad : (*) \quad \text{נציב תוצאות אלו ב-} (*)$$

תרגיל 5

תהי $z(x, y)$ שייכת ל- C^1 בכל המישור ונתונות נוסחאות מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$y = r \sin \varphi, \quad x = r \cos \varphi \quad \text{רשום את המשוואה} \quad x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{בקואורדינטות קוטביות.}$$

פתרון:

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{מכאן} \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{מכאן} \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{נכפול את הביטויים} \quad \frac{\partial z}{\partial r} \quad \text{ב-} r$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \cos \varphi \frac{\partial z}{\partial r} - \sin \varphi \frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial z}{\partial r} - \sin \varphi \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{נציב תוצאות אלו למשוואה} \quad x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{ונקבל משוואה פשוטה יותר} \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

תרגיל 6

פונקציה $u(x, y)$ נקראת הרמונית בכל המישור אם יש לה נגזרות חלקיות מסדר ראשון ושני רציפות

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x, y) \text{ מתקיימת המשוואה:}$$

הוכח: אם $u(x, y)$ הרמונית ו- $f(u)$ שייכת ל- C^2 , $(u \neq \text{Const.})$, ופונקציה

$$z(x, y) = f(u(x, y)) \quad \text{הרמונית אזי} \quad f(u) = Au + B.$$

פתרון:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dz}{du} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial x}$$

כדי לחשב את הנגזרת $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dz}{du} \right)$ נשים לב שהפונקציה $\frac{dz}{du}$ תלויה במשתנה חיצוני u ומשתנה זה

$$\text{תלוי בעצמו ב- } x, y, \text{ לכן יש לגזור את } \frac{dz}{du} \text{ כפונקציה מורכבת: } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dz}{du} \right) = \frac{d^2 z}{du^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\text{לסיכום קיבלנו} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{d^2 z}{du^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\text{באופן סימטרי נקבל} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{d^2 z}{du^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

נתון ש- $z(x, y) = f(u(x, y))$ הרמונית ולכן אחרי שנחבר שתי תוצאות אלו ונשווה לאפס נקבל

$$\text{את המשוואה:} \quad \frac{d^2 z}{du^2} \cdot \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{dz}{du} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\text{נשתמש בעובדה ש- } u(x, y) \text{ הרמונית ונקבל} \quad \frac{d^2 z}{du^2} \cdot \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) = 0$$

$$\text{אם} \quad \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) = 0 \quad \text{אז} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{וזה גורר} \quad u = \text{Const.} \quad \text{בניגוד להנחה.}$$

$$\text{לכן} \quad \frac{d^2 z}{du^2} = 0 \quad \text{או} \quad \frac{d}{du} \left(\frac{dz}{du} \right) = 0 \quad \text{ומכאן} \quad \frac{dz}{du} = A \quad \text{כאשר } A \text{ מספר קבוע כלשהו.}$$

$$\text{מכאן} \quad z(u) = Au + B$$

תרגיל 7

תהי $z(x, y)$ שייכת ל- C^2 בכל המישור. $z(x, y)$ מקיימת את המשוואה $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

כאשר a מספר קבוע. נתונות נוסחאות מעבר ממשתנים y, x למשתנים חדשים s, t :

$$t = x + ay \quad s = x - ay \quad \text{רשום את המשוואה במשתנים החדשים.}$$

פתרון:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial s} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial s}$$

לב שיש לגזור אותן כפונקציות מורכבות, ר"א המשתנים החיצוניים הם t ו- s והפנימיים

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\text{נקבל} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \quad \text{באופן דומה ניתן לגזור את} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \text{אחרי החישובים}$$

$$\text{נקבל (בדוק!)} : \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right) \quad \text{אחרי שנציב שתי תוצאות אלו לתוך}$$

$$\text{המשוואה} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{נקבל את המשוואה} \quad 4 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s} = 0$$

$$\text{לסיכום קיבלנו את המשוואה} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s} = 0$$

תרגיל 8

א' תהי $f(x, y)$ מוגדרת בתחום D במישור. הוכח: אם לכל (x, y) השייכת ל- D מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{אזי} \quad f(x, y) \quad \text{קבועה בתחום} \quad D.$$

ב' תהינה $f(x, y), g(x, y)$ פונקציות המוגדרות בתחום D , ובעלות גזרות חלקיות בתחום. הוכח

שאם לכל $(x, y) \in D$ מתקיים: $f'_x(x, y) = g'_x(x, y)$ וגם $f'_y(x, y) = g'_y(x, y)$ אזי לכל

$$(x, y) \in D \quad f(x, y) = g(x, y) + C \quad \text{כאשר} \quad C \quad \text{מספר קבוע.}$$

הוכחה:

א' נבחר נקודה $P(x_1, y_1)$ השייכת ל- D ונחבר אותה בקו שבור עם נקודה כלשהי $Q(x, y)$ השייכת ל- D ונזיח ש- $f(x, y) = f(x_1, y_1)$. (מיתן לבנות קו כזה כי הקבוצה קשירה) נתבונן בשני קדקודים הראשונים של הקו (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) . הנגזרות החלקיות שוות באופן זהותי לאפס ולכן הן רציפות ו- $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ורציפה. נשתמש במשפט ערך הממוצע עבור נקודות אלו

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = f'_x(x_1 + \theta \cdot h, y_1 + \theta \cdot k) \cdot h + f'_y(x_1 + \theta \cdot h, y_1 + \theta \cdot k) \cdot k$$

כאשר $h = x_2 - x_1$ ו- $k = y_2 - y_1$, $0 < \theta < 1$. הנגזרות החלקיות שוות באופן זהותי לאפס ולכן $f(x_2, y_2) = f(x_1, y_1)$. באופן דומה נזיח כי $f(x_2, y_2) = f(x_3, y_3)$ וכן הלאה. לסיכום נקבל $f(x, y) = f(x_1, y_1)$. במילים אחרות $f(x, y)$ קבועה בתחום D .

ב' נגדיר פונקצית עזר $s(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$, אזי $s'_x(x, y) = f'_x(x, y) - g'_x(x, y) = 0$ ובאופן דומה $s'_y(x, y) = 0$ ולפיכך $s(x, y) = C$ או $f(x, y) = g(x, y) + C$.

נוסחת לייבניץ לגזירת אינטגרל פרמטרי

תהינה $f(x, y)$ ו- $f'_y(x, y)$ רציפות במלבן $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$. תהינה $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ שתי פונקציות גזירות בקטע $c \leq y \leq d$, אזי הפונקציה (אינטגרל פרמטרי)

$$g(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

גזירה בקטע $c \leq y \leq d$ ומתקיימת נוסחת לייבניץ:

$$g'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y)$$

הערה: אם $\alpha(y) = c$, $\beta(y) = d$ (קבועים) אזי נקבל מקרה פרטי של הנוסחה:

$$g'(y) = \int_c^d f'_y(x, y) dx$$

תרגיל 9

א' נגדיר $g(t) = \int_{\frac{1}{2}}^{1+t^2} \frac{\sin(\pi x) dx}{x}$. חשב $g'(1)$

ב' חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{1 - e^{-xy}}{y} dy}{x^2}$

פתרון:

א' $g'(t) = \int_{\frac{1}{2}}^{1+t^2} \frac{\pi x \cdot \cos(\pi t x) dx}{x} + \frac{\sin(\pi t \cdot (1+t^2))}{1+t^2} 2t$, נציב $t=1$ ונקבל

$$g'(1) = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 \cos \pi x dx + \frac{\sin 2\pi}{2} \cdot 2 = -1$$

ב' נשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{1-e^{-xy}}{y} dy}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{-xy} dy + \frac{1-e^{-x^2}}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1-e^{-x^2}}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} = 1$$

תרגיל 10תהי $f(t)$ רציפה לכל t . פונקציה $y(x)$ מוגדרת בעזרת קשר הבא:

$$y(x) = \int_0^x (t-x)y(t)dt + \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

הוכח כי $y''(x) + y(x) = f(x)$ פתרון:

$$y'(x) = -\int_0^x y(t)dt + (x-x) \cdot y(x) \cdot 1 - 0 + \int_0^x f(t)dt + (x-x) \cdot f(x) \cdot 1 - 0$$

$$y''(x) = -y(x) + f(x) \quad \text{לכן } y'(x) = -\int_0^x y(t)dt + \int_0^x f(t)dt$$

לסיכום: $y''(x) + y(x) = f(x)$

פרק 7

פירושים גיאומטריים

גרדיאנט בנקודה

תהי $f(x, y, z)$ פונקציה מוגדרת בסביבת (x_0, y_0, z_0) וגזירה לפי כל אחד מהמשתנים. גרדיאנט בנקודה (x_0, y_0, z_0) מסומן ב- $grad(f)$ או ∇f ומוגדר על-ידי:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \cdot \bar{k}$$

במקרה של פונקציה בשני משתנים $f(x, y)$ נגדיר גרדיאנט כך: $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \bar{j}$

פונקציה הגרדיאנט

תהי $f(x, y, z)$ מוגדרת בתחום הגדרה D ותהי E קבוצה חלקית פתוחה של D . פונקציה וקטורית $grad(f): E \rightarrow \mathbb{R}^3$, $grad(f(x, y, z))$ מוגדרת על-ידי:

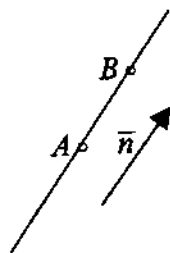
$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \cdot \bar{k}$$

ונקראת בשם הגרדיאנט של f בקבוצה E .

תערה: כידוע, מהירות הגידול של פונקציה במשתנה אחד $f(x)$ בנקודה x_0 אפשר לחקור באמצעות הנגזרת $f'(x_0)$. לכן ניתן לצפות שבאמצעות וקטור הגרדיאנט המורכב מכל הנגזרות החלקיות נוכל לחקור מהירות ההשתנות של פונקציה במספר משתנים.

נגזרת מכוונת

תהי $f(x, y, z)$ מוגדרת בסביבת $A(x_0, y_0, z_0)$. נעביר דרך נקודה זו חצי ישר (קוץ) המקביל לווקטור היחידה $\bar{n} = \alpha \cdot \bar{i} + \beta \cdot \bar{j} + \gamma \cdot \bar{k}$ (כאשר $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$). נקודות הישר ניתן לתאר בעזרת הצגה פרמטרית $B(x, y, z) = B(x_0 + \alpha \cdot h, y_0 + \beta \cdot h, z_0 + \gamma \cdot h)$, כאשר $h > 0$.



לגבול $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \alpha \cdot h, y_0 + \beta \cdot h, z_0 + \gamma \cdot h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$ (במידה והוא קיים)

נקרא "הנגזרת המכוונת" של f בנקודה $A(x_0, y_0, z_0)$ בכיוון וקטור היחידה $\vec{n}$ ונסמן

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{n}} . \text{ באופן דומה, עבור פונקציה התלויה בשני משתנים } f(x, y) \text{ הנגזרת}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \alpha \cdot h, y_0 + \beta \cdot h) - f(x_0, y_0)}{h} : \text{ המכוונת היא הגבול :}$$

$$\text{כאשר } (\alpha^2 + \beta^2 = 1), \vec{n} = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j}$$

ניתן גם לסמן $\vec{n} = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}$ כאשר φ היא הזווית בין $\vec{n}$ לכיוון החיובי של ציר ה- x .

הסבר: אם למשל $f(x, y, z)$ מתוארת טמפרטורה בנקודות (x, y, z) אזי הביטוי

$$\frac{f(x_0 + \alpha \cdot h, y_0 + \beta \cdot h, z_0 + \gamma \cdot h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} \text{ מסמן קצב ההשתנות של הטמפרטורה}$$

כאשר אנו מתרחקים מנקודה (x_0, y_0, z_0) לעבר הנקודה $(x_0 + \alpha \cdot h, y_0 + \beta \cdot h, z_0 + \gamma \cdot h)$

בכיוון הוקטור $\vec{n} = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j} + \gamma \cdot \vec{k}$. (אנו מניחים ש- h קרוב לאפס). ניתן לחשב את הנגזרת

המכוונת בנקודה (x_0, y_0, z_0) בכיוונים שונים. בדרך כלל בכל כיוון נקבל תוצאות שונות. אם בכוון מסוים הערך של הנגזרת המכוונת יהיה מקסימלי, פירוש הדבר שבכיוון הזה הפונקציה משתנה בצורה המהירה ביותר.

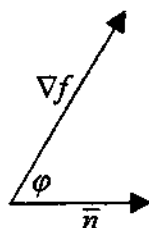
משפט

תהי $f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0, z_0) . אזי $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{n}} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{n}$

פירוש המשפט: כזכור מכפלה סקלרית של שני וקטורים מוגדרת כך: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{n}} = |\nabla f(x_0, y_0, z_0)| \cdot \cos \varphi \text{ לכן } \varphi \text{ היא הזווית בין שני הוקטורים.}$$

(שים לב ש- $|\vec{n}| = 1$.)



לכן הנגזרת המכוונת שווה להיסלול של הגרדיאנט על ציר העובר דרך הוקטור $\vec{n}$. מכאן נובע שנגזרת

מכוונת בנקודה (x_0, y_0, z_0) תהיה מקסימלית אם נחשב אותה בכיוון הגרדיאנט (כי $\cos 0 = 1$)

מסקנה חשובה:

כיוונו של וקטור הגרדיאנט מראה כיוון ההשתנות המהיר ביותר של הפונקציה.

הערה: שים לב שמירוש הזה אינו תקף אם הפונקציה לא דיפרנציאבילית.

תרגיל 1

תהי $f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית בתחום ההגדרתה. נסמן ב- $f(x, y, z) = C$ משטח רמה כלשהו של הפונקציה. הוכח שבכל נקודה (x_0, y_0, z_0) הנמצאת על המשטח, וקטור הגרדיאנט מאונך למשטח.

פתרון:

צריך למעשה להוכיח שאם נעביר דרך הנקודה (x_0, y_0, z_0) עקום חלק כלשהו שנמצא כולו על המשטח

אזי וקטור המשיק לעקום והגרדיאנט של f יהיו תמיד ניצבים זה לזה בנקודה (x_0, y_0, z_0) .

נרשום הצגה פרמטרית של עקום חלק כלשהו הנמצא כולו על המשטח $f(x, y, z) = C$ ועובר דרך

הנקודה (x_0, y_0, z_0) : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

נמצא וקטור משיק לעקום ב- (x_0, y_0, z_0) : $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0) \cdot \vec{i} + y'(t_0) \cdot \vec{j} + z'(t_0) \cdot \vec{k}$,

כאשר $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$.

נקודות של העקום נמצאות על המשטח ולכן מקיימות את המשוואה $f(x, y, z) = C$. נרשום

$f(x(t), y(t), z(t)) = C$, ונשתמש בכלל השרשרת (שים לב שהפונקציה דיפרנציאבילית):

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad \text{משוואה זו ניתן לרשום בצורה שונה:}$$

$$\nabla f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \quad \text{או} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \right) = 0$$

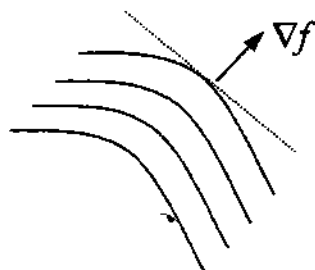
וקטור $\frac{d\vec{r}}{dt}$ משיק לעקום בנקודה (x_0, y_0, z_0) ולכן וקטור הגרדיאנט ∇f בנקודה (x_0, y_0, z_0)

מאונך לווקטור המשיק.

לסיכום: הגרדיאנט מאונך למשטח רמה $f(x, y, z) = C$ בכל נקודה (x, y, z) הנמצאת על המשטח.

הערה: באופן דומה, אם נתונה פונקציה דיפרנציאבילית $f(x, y)$ בתחום הגדרתה, אזי ∇f מאונך

לקווי הרמה $f(x, y) = C$ בכל נקודה (x, y) הנמצאת על הקו.



מסקנה:

המשוואה $z = f(x, y)$ מתארת משטח במרחב ואנו נמצאים, על המשטח בנקודה $A(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. כדי לעלות על גבי המשטח הזה באופן מהיר ביותר, יש ללכת במישור xy מהנקודה $A'(x_0, y_0)$ "מרחק קצר מאוד" בכיוון המאונך לקו רמה $f(x, y) = C$.
 (בכיוון הגרדיאנט $(\nabla f(x_0, y_0))$, אחרי ההליכה נגיע לנקודה חדשה $B'(x_1, y_1)$. אם נציב את (x_1, y_1) לתוך הפונקציה $z = f(x, y)$, נקבל נקודה חדשה על המשטח: $B(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$.
 נסמן את המרחק מ- A' ל- B' ב- d ואת ההפרש $|f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)|$ ב- Δ . אזי קצב השינוי של הפונקציה שווה בערך לביטוי $\frac{\Delta}{d}$. זהו קצב גידול מקסימלי של $z = f(x, y)$ בנקודה $A'(x_0, y_0)$.
 ערכה המדויק שווה ל- $|\nabla f(x_0, y_0)|$.

תרגיל 2

תהי $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ המתארת סמפרטורה בנקודות (x, y, z) .
 א' מהי הטמפרטורה בנקודה $(2, 3, 1)$?
 ב' באילו נקודות (x, y, z) הטמפרטורה שווה ל- 36 יחידות?
 ג' זכוב שנמצא בנקודה $(2, 3, 1)$ רוצה להגיע לסמפרטורה גבוהה יותר. באיה כיוון עליו לעוף כדי שקצב השינוי של הטמפרטורה יהיה מקסימלי?
 ד' זכוב נמצא על השולחן (מישור $z = 1$) בנקודה $(2, 3, 1)$. הזכוב רוצה להגיע לסמפרטורה גבוהה יותר, אך הפעם הזכוב חייב לנוע על השולחן. באיה כיוון עליו לנוע על השולחן כדי שקצב השינוי של הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

פתרון:

$$\text{א' } f(2, 3, 1) = 36$$

$$\text{ב' } \text{על האליפסואיד } 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 36$$

$$\text{ג' } \text{בכיוון הגרדיאנט } \nabla f(2, 3, 1) = 4x \cdot \vec{i} + 6y \cdot \vec{j} + 2z \cdot \vec{k} = 8\vec{i} + 18\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\text{ד' } f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 1 \text{ . לכן } \nabla f(2, 3) = 4x \cdot \vec{i} + 6y \cdot \vec{j} = 8\vec{i} + 18\vec{j}$$

כלומר, הזכוב חייב לנוע במישור השולחן (בגובה $z = 1$) מהנקודה $(2, 3)$ בכיוון הוקטור

$$8\vec{i} + 18\vec{j}$$

תרגיל 3

כדור קסן מוחזק בנקודה $(2, 1, 10)$ הנמצאת על המשטח $z = 16 - x^2 - 2y^2$. משחררים את הכדור והוא מתחיל לנוע על פני המשטח למטה בהשפעת הגרוויטציה. נסמן ב- $\vec{u} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$ וקטור המראה כיוון הנפילה המיידית של הכדור מהנקודה $(2, 1, 10)$.
א' מצא את הרכיבים האופקיים a ו- b.

ב' מצא את הוקטור $\vec{u} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$. (חשב את הערך של c)

פתרון:

א' נסמן $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$. הכדור נופל בכיוון הירידה המקסימלית. כזכור הגרדיאנט של $f(x, y)$ מראה את הכיוון בו הפונקציה גדלה בצורה מקסימלית, לכן כדי לחשב את הרכיבים האופקיים של הוקטור $\vec{u} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$ נחשב את $-\nabla f(x, y)$. (כיוון הירידה המקסימלי)
 $-\nabla f(x, y) = 2x \cdot \vec{i} + 4y \cdot \vec{j}$, $-\nabla f(2, 1) = 4 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$, ולכן $a = 4, b = 4$.
ב' נחשב וקטור הגרדיאנט לפונקציה $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z - 16$. כזכור וקטור זה מאונק למשטח $z = 16 - x^2 - 2y^2$. מצד שני וקטור $\vec{u} = 4 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$ משיק למשטח ולכן המכפלה הסקלרית שלהם שווה לאפס. $\nabla g(2, 1, 10) = 4 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} + \vec{k}$, ונקבל את המשוואה:
 $(4 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}) \cdot (4 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} + \vec{k}) = 0$, מכאן $c = -32$.
הערה: שים לב שהמשטח הוא פרבולואיד הפוך שקודקודו בנקודה $(0, 0, 16)$. הכדור גולש על המשטח כלפי מטה ומתרחק מציר ה- z. לכן התוצאה $\vec{u} = 4 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} - 32 \cdot \vec{k}$ תואמת לתיאור זה.

תרגיל 4

תהי $f: R^3 \rightarrow R$ דיפרנציאבילית ב- R^3 ומקיימת את המשוואה $f(x, y, x^2 + y^2) = 2x + y$. לכל x, y , ידוע שהנגזרת המכוונת בנקודה $(0, 2, 4)$ בכיוון הוקטור $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ שווה ל- $-\frac{5}{3}$.
חשב $\nabla f(0, 2, 4)$.

פתרון:

נסמן $z = x^2 + y^2$. הנקודה $(0, 2, 4)$ מקיימת משוואה זו ולכן נוכל לחשב את הנגזרות החלקיות $f_x(x, y, x^2 + y^2) = 2x + y$ מתוך המשוואה $f'_x(0, 2, 4), f'_y(0, 2, 4), f'_z(0, 2, 4)$.
נגזור את המשוואה תוך שימוש בכלל השרשרת ונקבל שתי המשוואות $f'_x \cdot 1 + f'_z \cdot 2x = 2$ ו- $f'_y \cdot 1 + f'_z \cdot 2y = 1$.
אחרי שנציב את הנקודה $(0, 2, 4)$ נקבל שתי משוואות:
 $f'_x(0, 2, 4) + f'_z(0, 2, 4) \cdot 4 = 1$ ו- $f'_y(0, 2, 4) + f'_z(0, 2, 4) \cdot 2 \cdot 0 = 2$.

כעת נמצא וקטור יחידה בכיוון חוקטור $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$: $\vec{n} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{i} + \frac{1}{3} \cdot \vec{j} + \frac{2}{3} \cdot \vec{k}$

נתון ש- $\frac{\partial f}{\partial n}(0,2,4) = -\frac{5}{3}$, מכאן $-\frac{2}{3} f'_x(0,2,4) + \frac{1}{3} f'_y(0,2,4) + \frac{2}{3} f'_z(0,2,4) = -\frac{5}{3}$

אחרי שנפתור 3 משוואות הנ"ל עם 3 הנעלמים נקבל $\nabla f(0,2,4) = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + \vec{k}$

תרגיל 5

תהי $f(x, y) = \sqrt[3]{xy^2}$

א' חשב את הנגזרת המכוונת בנקודה (8,1) בכיוון חוקטור $3\vec{i} + 4\vec{j}$

ב' בדוק האם הפונקציה דיפרנציאבילית ב- (0,0) ?

ג' חשב $\frac{\partial f}{\partial n}(0,0)$ בכיוון חוקטור היוצר זווית φ עם כיוון החיובי של ציר ה- x.

ד' באיזה כיוון φ הנגזרת במכוונת $\frac{\partial f}{\partial n}(0,0)$ תהיה מקסימלית ?

פתרון:

א' $f'_x(x, y) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$, $x \neq 0$ ו- $f'_y(x, y) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$, $y \neq 0$

לפונקציה $f(x, y)$ יש נגזרות חלקיות רציפות בסביבת (8,1) ולכן היא דיפרנציאבילית בנקודה זו.

נוכל להשתמש בנוסחה $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \vec{n}$. נחשב את $\vec{n} = \frac{3}{5} \vec{i} + \frac{4}{5} \vec{j}$. $\nabla f(8,1) = \frac{1}{12} \vec{i} + \frac{1}{3} \vec{j}$

לסיכום: $\frac{\partial f}{\partial n}(8,1) = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{19}{60}$

ב' נחשב את הנגזרות החלקיות ב- (0,0) לפי ההגדרה $f'_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$

באופן דומה $f'_y(0,0) = 0$. נבדוק את הדיפרנציאביליות של f פי ההגדרה :

$\varepsilon = \frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, ע"כ $\sqrt[3]{\Delta x \Delta y^2} - 0 = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

נציב $\Delta x = \Delta y \rightarrow 0$ וקל לראות ש- ε אינו שואף לאפס. הפונקציה לא דיפרנציאבילית ב- (0,0).

ג' הפונקציה לא דיפרנציאבילית ב- (0,0) ולכן לא נוכל להשתמש בנוסחה $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \vec{n}$

נחשב את $\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}(0,0)$ לפי ההגדרה :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + h \cdot \cos \varphi, 0 + h \cdot \sin \varphi) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}}{h} = \sqrt[3]{\cos \varphi \sin^2 \varphi}$$

שים לב: $\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \bar{n} = 0$

$$\sqrt[3]{\cos \varphi \sin^2 \varphi} = \sqrt[3]{\cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi)} = \sqrt[3]{\cos \varphi - \cos^3 \varphi} \quad \text{ד'}$$

נוכל לחקור את הפונקציה במשתנה אחד $g(\varphi) = \cos \varphi - \cos^3 \varphi$. לא קשה לבדוק שהערך

$$\text{המקסימלי שווה ל- } \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} \quad \text{עבור } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

תרגיל 6

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 3x + 4y, & x \neq 0 \\ 4y, & x = 0 \end{cases} \quad \text{תהי}$$

א' עבור אילו ערכים של m אי-השוויון $\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}(0,0) < m$ מתקיים לכל וקטור יחידה $\bar{n}$?

ב' מצא וקטור יחידה $\bar{n}$ כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}(0,0) = 0$.

פתרון:

א' נחשב את הגזרות החלקיות ב- $(0,0)$ לפי ההגדרה: $f'_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2} + 3h - 0}{h} = 3$

$f'_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h - 0}{h} = 4$. נבדוק לפי ההגדרה האם הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$?

$$\Delta x^2 \cdot \sin \frac{1}{\Delta x^2} + 3\Delta x + 4\Delta y - 0 = 3\Delta x + 4\Delta y + \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

מכאן נקבל

$$|\varepsilon| = \left| \frac{\Delta x^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \sin \frac{1}{\Delta x^2} \right| \leq |\Delta x| \cdot \left| \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leq |\Delta x|$$

לכן הפונקציה דיפרנציאבילית

בנקודה $(0,0)$. נוכל להשתמש בנוסחה $\frac{\partial f}{\partial \bar{n}} = \nabla f \cdot \bar{n}$. הגזרת המכוונת תהיה מקסימלית כאשר

הוקטור $\bar{n}$ פועל בכיוון הגרדיאנט $3\bar{i} + 4\bar{j}$. הערך המקסימלי של הנגזרת המכוונת שווה ל- $|\nabla f| = 5$.

מכאן נובע שאם $m > 5$ אזי האי-שוויון $\frac{\partial f}{\partial n}(0,0) < m$ יהיה נכון לכל וקטור יחידה $\bar{n}$.

ב' קל לראות שהוקטור $-4\bar{i} + 3\bar{j}$ מאונך ל- $3\bar{i} + 4\bar{j}$. לכן נחשב את הנגזרת המכוונת ב- $(0,0)$

בכיוון הוקטור $\bar{n} = \frac{-4}{5}\bar{i} + \frac{3}{5}\bar{j}$, נקבל $\frac{\partial f}{\partial n}(0,0) = 0$.

מישור המשיק

נגיח שהמשוואה $f(x, y, z) = C$ מתארת משטח רמה של פונקציה $f(x, y, z)$.

נגיח שהנקודה (x_0, y_0, z_0) נמצאת על המשטח. למישור העובר דרך הנקודה (x_0, y_0, z_0) ומכיל את

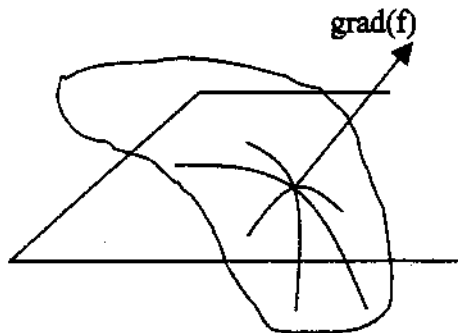
כל ישרי המשיקים לעקומים אשר נמצאים על המשטח ועוברים דרך הנקודה (x_0, y_0, z_0) נקרא מישור

המשיק בנקודה (x_0, y_0, z_0) .

הערה א': (יתכן שבנקודות מסוימות אין מישור משיק)

הערה ב': אם $f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0, z_0) אזי וקטור הגרדיאנט בנקודה זו יהיה

מאונך לכל העקומים החלקים שנמצאים על המשטח ועוברים דרך הנקודה ולכן וקטור הגרדיאנט יהיה מאונך למישור המשיק.



משוואת מישור המשיק למשטח $f(x, y, z) = C$ בנקודת השקה $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$f'_x(P_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(P_0) \cdot (y - y_0) + f'_z(P_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

תרגיל 7

מצא משוואה של מישור המשיק למשטח $xyz = 8$ בנקודה $(-2, 2, -2)$.

פתרון:

וקטור הגרדיאנט מאונך למישור המשיק. $\nabla f = yz \cdot \vec{i} + xz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k} \Big|_{(-2, 2, -2)} = -4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$.

משוואת מישור המשיק היא: $-4 \cdot (x+2) + 4 \cdot (y-2) - 4 \cdot (z+2) = 0$ או $-x + y - z = 6$

תרגיל 8

מצא מישור המשיק למשטח $x^2 + 8y^2 + 27z^2 = 21$ המקביל למישור $x + 8y + 18z = 0$.

פתרון:

משוואת מישור המשיק היא $x + 8y + 18z = C$. כדי לחשב את C יש למצוא נקודת ההשקה.

נניח ש- (x_0, y_0, z_0) היא נקודת ההשקה. נמצא וקטור הגרדיאנט בנקודה זו.

$\nabla f = 2x_0 \cdot \vec{i} + 16y_0 \cdot \vec{j} + 54z_0 \cdot \vec{k}$. וקטור זה מקביל לוקטור הנורמל של המישור המשיק ולכן

$$2x_0 \cdot \vec{i} + 16y_0 \cdot \vec{j} + 54z_0 \cdot \vec{k} = m \cdot (\vec{i} + 8\vec{j} + 18\vec{k})$$

$$\text{נקבל: } x_0 = \frac{m}{2}, y_0 = \frac{m}{2}, z_0 = \frac{m}{3}$$

הנקודה (x_0, y_0, z_0) נמצאת על המשטח $x^2 + 8y^2 + 27z^2 = 21$ ולכן אחרי ההצבה נקבל

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 27 \cdot \left(\frac{m}{3}\right)^2 = 21 \quad \text{מכאן } m = \pm 2$$

$$\left(1, 1, \frac{2}{3}\right) \text{ ו- } \left(-1, -1, -\frac{2}{3}\right)$$

נקבל שני מישורים בהתאמה: $x + 8y + 18z = \pm 21$.

תרגיל 9

למשטח $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי. מישור זה חותך את

הצירים x, y, z בנקודות A, B, C בהתאמה. נסמן ב- O מרכז הצירים. הוכח שסכום הקטעים

$OA + OB + OC$ הוא גודל קבוע (אינו תלוי בשיעורי נקודת ההשקה) ומצא גודל זה.

פתרון:

נסמן ב- (x_0, y_0, z_0) נקודת ההשקה. אזי $\nabla f = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \vec{i} + \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \cdot \vec{j} + \frac{1}{2\sqrt{z_0}} \cdot \vec{k}$

לכן משוואת מישור המשיק: $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0$

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{a} \quad \text{או} \quad \frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} \quad \text{או}$$

מכאן $OC = \sqrt{a} \cdot \sqrt{z_0}$, $OB = \sqrt{a} \cdot \sqrt{y_0}$, $OA = \sqrt{a} \cdot \sqrt{x_0}$ ולכן סכום הקטעים
שווה $OA + OB + OC = \sqrt{a} \cdot (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a$.

משטחים המוגדרים בצורה פרמטרית

יהי S משטח חלק המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ כאשר הפונקציות $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ שייכות ל- C^1 בתחום D שנמצא במישור u, v . לכל נקודה $(u, v) \in D$ מתאימה נקודה אחת ויחידה על המשטח S . וקטור המצב

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \vec{i} + y(u, v) \cdot \vec{j} + z(u, v) \cdot \vec{k}$$

באופן אינטואיטיבי אפשר לומר שכאשר נשנה באופן רציף את המשתנים u ו- v אזי הקצה של וקטור המצב יצייר במרחב את הנקודות שעל המשטח S . נניח שנקודה P_0 נמצאת על המשטח

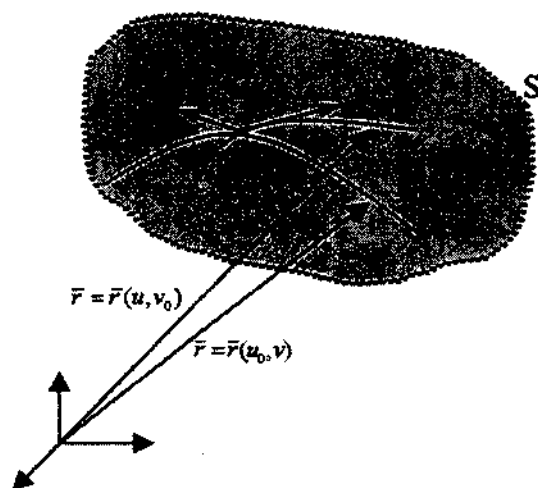
ומתאימה לערכי הפרמטרים (u_0, v_0) . הוקטור $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial u}$ יהיה משיק לעקום $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$

שנמצא כולו על המשטח S ועובר דרך P_0 . באופן דומה הוקטור $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial v}$ יהיה משיק לעקום

$\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ שגם הוא נמצא כולו על S ועובר דרך P_0 . (ראה ציור)

בהנחה שוקטורים אלה אינם מקבילים זה לזה, הוקטור $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial v}$ יהיה מאונך

למשטח בנקודה P_0 .



תרגיל 10

משטח S נתון בצורה פרמטרית: $x = u^2 + v$, $y = uv$, $z = 2u - 5v$. מצא מישור המשיק למשטח בנקודה המתאימה לערכי הפרמטרים $u = 1$, $v = 2$.

פתרון:

ל- $u = 1$, $v = 2$ מתאימה נקודת ההשקה על המשטח $(3, 2, -8)$. נרשום וקטור המצב של המשטח

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (2u, v, 2) \Big|_{u=1, v=2} = (2, 2, 2), \quad \vec{r}(u, v) = (u^2 + v) \cdot \vec{i} + (uv) \cdot \vec{j} + (2u - 5v) \cdot \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (1, u, -5) \Big|_{u=1, v=2} = (1, 1, -5), \quad (2, 2, 2) \times (1, 1, -5) = (-12, 12, 0)$$

למישור המשיק יהיה $(-1, 1, 0)$. (חילוק ב-12 לא שינה כיוונו של הוקטור). משוואת מישור

$$\text{המשיק היא: } -(x-3) + (y-2) = 0 \quad \text{או} \quad -x + y + 1 = 0$$

תרגיל 11

נתונים שלושה עקומים: $l_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$

$$l_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1 \quad , \quad l_3: x = u + 2, y = u, z = u^2 - 1$$

נתון שעקומים אלה נמצאים במשטח אחד S ושלושתם חותכים את המישור x, y בנקודה משותפת. א' מצא את הנקודה.

ב' האם בנקודה זו ניתן להעביר מישור המשיק למשטח S ?

פתרון:

א' נדרוש $z = 0$. מהצגה הפרמטרית של העקום l_2 נקבל $s = 1$ ולכן הנקודה היא $(1, -1, 0)$.

נשאר לבדוק האם נקודה זו נמצאת על l_1 ועל l_3 . התנאי $z = 0$ גורר $t = 0, -1$ ו- $u = \pm 1$.

לא קשה לראות כי עבור $t = 0$ ו- $u = -1$ נקבל אותה הנקודה.

ב' נחשב וקטורי המשיקים לשלושת העקומים בנקודה $(1, -1, 0)$.

$$\vec{r}_2 = 2s \cdot \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \Big|_{s=1} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{r}_1 = 2\vec{i} + 2t \cdot \vec{j} + (2t+1) \cdot \vec{k} \Big|_{t=0} = 2\vec{i} + \vec{k}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{i} + \vec{j} + 2u \cdot \vec{k} \Big|_{u=-1} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

להעביר מישור המשיק בנקודה $(1, -1, 0)$, היה הוקטור $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{i} - \vec{k}$. אילו היה ניתן

אך המכפלה הסקלרית $\vec{r}_3 \cdot (\vec{i} - \vec{k})$ שונה מאפס.

מסקנה: בנקודה $(1, -1, 0)$ לא ניתן להעביר מישור המשיק למשטח S .

פרק 8

פונקציות סתומות

הגדרה: תהי $F(x, y)$ מוגדרת בתחום D , ויהי מלבן Δ , $\Delta = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, כך ש- $\Delta \subset D$. נאמר שבמלבן Δ המשוואה $F(x, y) = 0$ מגדירה את y כפונקציה של x בצורה סתומה, אם לכל x השייך לקטע $a \leq x \leq b$ קיים y אחד ויחיד השייך לקטע $c \leq y \leq d$ כך שהנקודה (x, y) מקיימת את המשוואה $F(x, y) = 0$.

תרגיל 1

נתונה המשוואה $y + \frac{1}{2} \sin y - x = 0$. האם משוואה זו מגדירה את y כפונקציה של x לכל ערכי x ?

פתרון:

נרשום $x = y + \frac{1}{2} \sin y$. במשוואה זו x הוא פונקציה של y ומתקיים $x'(y) = 1 + \frac{1}{2} \cos y > 0$, במילים אחרות, $x(y)$ היא פונקציה מונוטונית עולה וגזירה לכל y ולכן יש לה פונקציה הפוכה (יחידה) $y = y(x)$ שגם היא מוגדרת וגזירה לכל x . (שים לב: $x \rightarrow \pm\infty$ אם ורק אם $y \rightarrow \pm\infty$)

משפט פונקציה סתומה

נתונה המשוואה $F(x, y) = 0$, כאשר $F(x, y)$ מוגדרת בסביבה D של הנקודה (x_0, y_0) . אם:

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{ובנוסף} \quad F(x, y), F'_x(x, y), F'_y(x, y)$$

אזי קיים מלבן Δ , $\Delta = \{(x, y): |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \varepsilon\}$, $\Delta \subset D$, כך שהמשוואה

$F(x, y) = 0$ מגדירה ב- Δ את y כפונקציה של x , $y = f(x)$, בנוסף $y_0 = f(x_0)$ ולכל x

השייך ל- $|x - x_0| < \delta$, $F'_y(x, f(x)) \neq 0$, הפונקציה $y = f(x)$ רציפה ובעלת גזרת רציפה

$$\text{ב- } |x - x_0| < \delta. \text{ הגזרת נתונה על-ידי הנוסחה} \quad \frac{df(x)}{dx} = - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

הערה: שים לב שזהו תנאי מספיק ולא הכרחי לקיום פונקציה סתומה ולכן יתכן שגם בסביבת

הנקודה (x_0, y_0) בה $F'_y(x_0, y_0) = 0$ תהיה מוגדרת פונקציה סתומה. נתבונן למשל במשוואה

$y^3 - 8x^3 = 0$. ברור שמשוואה זו שקולה למשוואה $y = 2x$ ולכן המשוואה מגדירה y כפונקציה

של x לכל $-\infty < x < \infty$ מצד שני, $F'_y(0,0) = (y^3 - 8x^3)'_y = 3y^2|_{(0,0)} = 0$, ו'א התנאים של המשפט לא מתקיימים ולמרות זאת המשוואה מגדירה בסביבת $(0,0)$ פונקציה של x .

תרגיל 2

נתונה המשוואה $x^y - y^x - y = 0$. האם בסביבת הנקודה $(2,1)$ המשוואה מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x)$? במידה והתשובה חיובית, חשב $y'(2)$.

פתרון:

נסמן $F(x, y) = x^y - y^x - y$, נבדוק האם מתקיימים התנאים של משפט פונקציות סתומות: $F'_y(x, y) = x^y \ln x - xy^{x-1} - 1$, $F'_x(x, y) = yx^{y-1} - y^x \ln y$. ברור ש- $F(x, y) \in C^1$. בסביבת $(2,1)$, בנוסף $F'_y(2,1) = \ln(4) - 3 \neq 0$. לכן לפי המשפט קיימת סביבה של $(2,1)$ כך שבתוכה המשוואה $x^y - y^x - y = 0$ מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x)$ בעלת נגזרת רציפה.

$$\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=2} = -\frac{F'_x(2,1)}{F'_y(2,1)} = -\frac{1}{\ln(4) - 3}$$

נחשב את הנגזרת:

תרגיל 3

הוכח כי המשוואה $x^2 + y^4 - 5 = 0$ מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x)$ בסביבת $(2,1)$. חשב y', y'' .

פתרון:

נסמן: $F(x, y) = x^2 + y^4 - 5$. קל לבדוק שכל התנאים של משפט פונקציות סתומות מתקיימים בסביבת הנקודה $(2,1)$. כאשר נגזור את $\frac{dy}{dx}$ יש לשים לב ש- y

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{4y^3(x)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y^3(x)}$$

היא פונקציה של x : $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot y^3(x) - x \cdot 3y^2(x) \cdot y'(x)}{(y(x))^6}$ ובמקום y' יש להציב את

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot y^3 - x \cdot 3y^2 \cdot \left(-\frac{x}{2y^3}\right)}{(y(x))^6} : y' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y^3(x)}$$

התוצאה

תרגיל 4

נתונה המשוואה $x^2 + y^2 = 25$.

א' כמה פונקציות $y = y(x)$ המוגדרות בקטע $-5 \leq x \leq 5$ מקיימות את המשוואה?

ב' כמה מהן רציפות?

ג' כמה מהן רציפות ומקיימות בנוסף את התנאי $y(3) = 4$?

פתרון:

א' יש אין-סוף פונקציות. לדוגמה נוכל לחלק את הקטע $-5 \leq x \leq 5$ לשלושה קטעים

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{25-x^2} & , -5 \leq x < -3 \\ -\sqrt{25-x^2} & , -3 \leq x < 0 \\ \sqrt{25-x^2} & , 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

ולבנות את הפונקציה:

בדור שבאופן כזה נוכל לבנות כרצוננו אין-סוף פונקציות וכולן יקיימו את המשוואה.

ב' יש רק שתי פונקציות רציפות: $y_1(x) = \sqrt{25-x^2}$ ו- $y_2(x) = -\sqrt{25-x^2}$

ג' יש רק פונקציה אחת $y(x) = \sqrt{25-x^2}$

משפט פונקציה סתומה למשתנים אחדים.

נתונה המשוואה $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ כאשר F היא פונקציה של $n+1$ משתנים

המוגדרת בסביבה D של הנקודה $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y^0)$ ונניח שמתקיימים את התנאים:

$F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y^0) = 0$, F רציפה ב- D ובעלת גזרות חלקיות רציפות לפי כל המשתנים

שלה ובנוסף $F'_y(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y^0) \neq 0$. אזי קיימת תיבה Δ ממדיית δ : $|x_i - x_i^0| < \delta$

(כאשר $i = 1, 2, \dots, n$) המוכלת ב- D כך שהמשוואה $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ מגדירה

בתיבה זו את y כפונקציה סתומה של שאר המשתנים $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

בנוסף: $y^0 = y(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, $F'_y(x_1, x_2, \dots, x_n, y(x_1, x_2, \dots, x_n)) \neq 0$ בתוך Δ ,

הפונקציה $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ בעלת גזרות חלקיות רציפות לפי כל המשתנים וניתן לחשב אותן

$$\text{לפי הנוסחאות: } y'_i = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y} \text{ כאשר } i = 1, 2, \dots, n$$

תרגיל 5

נתונה המשוואה $y^3 + xz + y^2 + e^z - 3 = 0$.

א' יש להוכיח כי המשוואה מגדירה בסביבה של הנקודה $(1, 1, 0)$ פונקציה $z = z(x, y)$.

ב' חשב z'_x, z'_y

ג' חשב z''_{xy}

פתרון:

נסמן $F(x, y, z) = y^3 + xz + y^2 + e^z - 3$. לא קשה לראות כי F וגזרותיה רציפות ב- R^3 .

בנוסף $F(1, 1, 0) = 0$ ו- $F'_z(1, 1, 0) = x + e^z|_{(1, 1, 0)} = 2 \neq 0$. מתקיימים כל התנאים של

המשפט ולכן קיימת סביבה (מלבן) Δ סביב $(1, 1)$ כך שבתוכה מוגדרת הפונקציה $z = z(x, y)$.

ב' לפי המשפט הפונקציה גזירה ומקיימת את המשוואה $y^3 + xz + y^2 + e^z - 3 = 0$. נגזור את

$$\text{המשוואה } y^3 + x \cdot z(x, y) + y^2 + e^{z(x, y)} - 3 = 0 \text{ לפי } x \text{ ולפי } y :$$

$$3y^2 + x \cdot z'_y + 2y + e^{z(x, y)} \cdot z'_y = 0, \quad z(x, y) + x \cdot z'_x + e^{z(x, y)} \cdot z'_x = 0$$

$$z'_y = -\frac{3y^2 + 2y}{x + e^z}, \quad z'_x = \frac{-z}{x + e^z}$$

$$z''_{xy} = \left(-\frac{z(x, y)}{x + e^{z(x, y)}} \right)'_y = -\frac{z'_y \cdot (x + e^z) - z \cdot e^z \cdot z'_y}{(x + e^z)^2} \quad \text{ג'}$$

$$\text{במקום } z'_y \text{ את הביטוי } -\frac{3y^2 + 2y}{x + e^z}, \text{ לפשט ולחשב ...}$$

תרגיל 6

תהי $F(x, y, z) \in C^1$ ב- R^3 ונניח שבסביבה Δ של הנקודה (x_0, y_0, z_0) המשוואה

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{מגדירה שלוש פונקציות } x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$$

$$\text{חשב את הביטוי } \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} =$$

פתרון:

$$\text{נשתמש במשפט פונקציות סתומות: } \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F'_y}{F'_x} \right) \cdot \left(-\frac{F'_z}{F'_y} \right) \cdot \left(-\frac{F'_x}{F'_z} \right) = -1$$

שאלה: איזו תוצאה אנלוגית קיימת עבור הגזרת של פונקציה במשתנה אחד $y = f(x)$ לבין

הגזרת של הפונקציה ההפוכה $x = f^{-1}(y)$ (במידה ויש פונקציה הפוכה) ?

תרגיל 7

תהי $F(u, v) \in C^1$ ב- R^2 ונניח שהמשוואה $F(x - z, z - y) = 0$ מגדירה פונקציה

$$z = z(x, y) \text{ השייכת ל- } C^1 \text{ ב- } R^2. \text{ חשב את הביטוי } z'_x + z'_y =$$

פתרון:

נסמן $u = x - z, v = z - y$ ונגזור את המשוואה $F(x - z, z - y) = 0$ לפי x תוך שימוש

בכלל השרשרת. $F'_u \cdot u'_x + F'_v \cdot v'_x = 0$, מכאן $F'_u \cdot (1 - z'_x) + F'_v \cdot z'_x = 0$.

נקבל $z'_x = \frac{F'_u}{F'_u - F'_v}$. באופן דומה, נגזור את המשוואה $F(x - z, z - y) = 0$ לפי y

ונקבל $F'_u \cdot (-z'_y) + F'_v \cdot (z'_y - 1) = 0$, מכאן $z'_y = \frac{-F'_v}{F'_u - F'_v}$ ולכן $z'_x + z'_y = 1$.

מערכת פונקציות סתומות

נתבונן ב- m משוואות עם $n + m$ משתנים: $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$ (*)

כאשר $i = 1, 2, 3, \dots, m$. השאלה היא האם ניתן מתוך מערכת זו לקבוע m משתנים תלויים

$y_1, y_2, \dots, y_m$ באמצעות המשתנים בלתי תלויים $x_1, x_2, \dots, x_n$. נזכיר שבמשפט פונקציות

סתומות עבור פונקציה בשני משתנים $F(x, y)$ הדרישה המרכזית הייתה ש- $F'_y \neq 0$.

ברור באופן אינטואיטיבי שבחקירת מערכת משוואות התנאי האנלוגי צריך לכלול דרישה

דומה לגבי הנגזרות החלקיות של הפונקציות $F_1, F_2, \dots, F_m$. לשם כך נגדיר מושג חדש.

הגדרה:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \quad \text{לדטרמיננט}$$

נקרא בשם "יעקוביאן"

לעתים נסמן את היעקוביאן כך: $J = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}$

משפט

נתונה מערכת (*) כאשר כל הפונקציות $F_1, F_2, \dots, F_m$ קיימות ורציפות בסביבה D של

הנקודה $P(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$. אם לפונקציות אלו יש נגזרות חלקיות רציפות ב- D

ונקודה P מקיימת את המערכת (*) ובנוסף $J \neq 0$ בנקודה P , אז:

קיימת סביבה Δ של הנקודה $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ כך שמערכת (*) מגדירה בסביבה זו m פונקציות $y_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k=1, 2, \dots, m$, ופונקציות אלו רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות לפי כל המשתנים $x_1, x_2, \dots, x_n$.

תרגיל 8

נתונה המערכת
$$\begin{cases} xu + yv = 3 \\ 2x + u^2 + y + v^2 = 4 \end{cases}$$
 הוכח כי מערכת זו מגדירה בסביבה של

הנקודה $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (-1, 1, -1, 2)$ שתי פונקציות $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ בעלות נגזרות חלקיות רציפות חשב נגזרות אלו.

פתרון:

נסמן: $F(x, y, u, v) = xu + yv - 3$, $G(x, y, u, v) = 2x + u^2 + y + v^2 - 4$

אזי $F'_u = x$, $F'_v = y$, $G'_u = 2u$, $G'_v = 2v$. ברור שהפונקציות רציפות וגם הנגזרות

רציפות. $J = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = 2xv - 2yu|_{(-1,1,-1,2)} = -2 \neq 0$ ולכן כל התנאים של

המשפט מתקיימים. נרשום את המערכת כך:
$$\begin{cases} xu(x, y) + yv(x, y) = 3 \\ 2x + u^2(x, y) + y + v^2(x, y) = 4 \end{cases}$$
 ונגזור

שתי המשוואות לפי x :
$$\begin{cases} u + x \cdot u'_x + y \cdot v'_x = 0 \\ 2 + 2u \cdot u'_x + 2v \cdot v'_x = 0 \end{cases}$$
 נרשום שתי משוואות אלו בצורה אחרת:

זוהי מערכת לינארית לא הומוגנית. נפתור אותה בשיטת CRAMER
$$\begin{cases} x \cdot u'_x + y \cdot v'_x = -u \\ 2u \cdot u'_x + 2v \cdot v'_x = -2 \end{cases}$$

(בעזרת דטרמיננטים)
$$u'_x = \frac{\begin{vmatrix} -u & y \\ -2 & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ 2u & 2v \end{vmatrix}} = \frac{-2uv + 2y}{2xv - 2yu}$$
 . אנו רואים שבמכנה רשום היעקוביאן

ד"א כאשר דורשים במשפט שהיעקוביאן יהיה שונה מאפס, הדבר מאפשר לפתור את המערכת בשיטת

קרמר. באופן דומה נקבל
$$v'_x = \frac{-2x + 2u^2}{2xv - 2yu}$$
 . כדי לחשב את הנגזרות u'_y, v'_y נגזור את המערכת

לפי y . כתוצאה מכך נקבל שוב שתי משוואות לינאריות לא
$$\begin{cases} xu(x, y) + yv(x, y) = 3 \\ 2x + u^2(x, y) + y + v^2(x, y) = 4 \end{cases}$$

$$u_y' = \frac{\begin{vmatrix} -v & y \\ -1 & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ 2u & 2v \end{vmatrix}} = \frac{-2v^2 + y}{2xv - 2yu} \quad \text{אחרי שנפתור אותה נקבל} \quad \begin{cases} x \cdot u_y' + y \cdot v_y' = -v \\ 2u \cdot u_y' + 2v \cdot v_y' = -1 \end{cases} \quad \text{הומוגניות}$$

$$v_y' = \frac{-x + 2uv}{2xv - 2yu}$$

תרגיל 9

נתונה המערכת $x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$

א' מצא נקודה (x_0, y_0, z_0) המתאימה לערכי הפרמטרים $u_0 = 1, v_0 = 2$

$$\text{ב' חשב} \quad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}$$

פתרון:

א' לערכים $u_0 = 1, v_0 = 2$ מתאימה הנקודה $(x_0, y_0, z_0) = (3, 5, 9)$

$$\text{ב' נוכיח כי המערכת} \quad \begin{cases} u + v - x = 0 \\ u^2 + v^2 - y = 0 \end{cases} \quad \text{מגדירה בסביבת} \quad (x_0, y_0) = (3, 5) \quad \text{פונקציות}$$

$u = u(x, y)$ ו- $v = v(x, y)$. למעשה יש לבדוק האם היעקוביאן שונה מאפס כי קל לראות

שהתנאים האחרים מתקיימים. $J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = 2v - 2u \Big|_{\substack{u=1 \\ v=2}} = 2 \neq 0$. נרשום את המערכת כך:

$$\begin{cases} u_x' + v_x' = 1 \\ 2u \cdot u_x' + 2v \cdot v_x' = 0 \end{cases} \quad \text{ונגזור את המשוואות לפי } x: \quad \begin{cases} u(x, y) + v(x, y) - x = 0 \\ u^2(x, y) + v^2(x, y) - y = 0 \end{cases}$$

$$v_x'(3, 5) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix}} = \frac{-2u}{2v - 2u} \Big|_{\substack{u=1 \\ v=2}} = -1, \quad u_x'(3, 5) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix}} = \frac{2v}{2v - 2u} \Big|_{\substack{u=1 \\ v=2}} = 2$$

$$u_y'(3, 5) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix}} = \frac{-1}{2v - 2u} \Big|_{\substack{u=1 \\ v=2}} = -\frac{1}{2}, \quad \text{נגזור לפי } y: \quad \begin{cases} u_y' + v_y' = 0 \\ 2u \cdot u_y' + 2v \cdot v_y' = 1 \end{cases}$$

$$z(x, y) \text{ של } v_y'(3, 5) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 1 \\ 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix}} = \frac{1}{2v - 2u} \Big|_{\substack{u=1 \\ v=2}} = \frac{1}{2}$$

נרשום את $z = u^3 + v^3$ באופן הבא: $z = (u(x, y))^3 + (v(x, y))^3$ ונגזור

$$\frac{\partial z}{\partial x}(3, 5) = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 3u^2 \cdot u_x' + 3v^2 \cdot v_x' \Big|_{\substack{x=3 \\ y=5}} = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 12 \cdot (-1) = -30$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(3, 5) = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 3u^2 \cdot u_y' + 3v^2 \cdot v_y' \Big|_{\substack{x=3 \\ y=5}} = 16.5 \quad \text{באופן דומה}$$

פרק 9

נסחית טיילור, נקודות מקסימום ומינימום מקומי

דיפרנציאל מסדר n

תהי $f(x, y)$ בעלת גזרות חלקיות עד סדר n. דיפרנציאל מסדר ראשון מוגדר כביסוי :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y \quad \text{כאשר } \Delta x, \Delta y \text{ הן תוספות של הארגומנטים } x \text{ ו- } y.$$

דיפרנציאל מסדר n מוגדר בעזרת הנוסחה של בינום ניוטון. נזכיר כי $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

כאשר $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. את הדיפרנציאל מסדר n נגדיר כך:

$$(*) \quad d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y \right)^n \cdot f(x, y) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \Delta x^{n-k} \cdot \Delta y^k$$

תרגיל 1

חשב $d^3 f(x, y)$ כאשר $f(x, y) = x \cdot e^y$

פתרון:

נשתמש ב- (*): $d^3 f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y \right)^3 \cdot f(x, y)$, ר"א יש להשתמש

בנוסחה $(a+b)^3$ כאשר תפקידו של a משחקת הנגזרת לפי x המוכפלת ב- Δx ותפקידו

של b משחקת הנגזרת לפי y המוכפלת ב- Δy . למשל לאיבר הבינום $3a^2b$ מתאים האיבר

$3 \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y$. לכן לפיתוח $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ מתאימה הנוסחה:

$$d^3 f(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Delta x^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Delta y^3$$

אחרי שנחשב את הנגזרות החלקיות בנוסחה הנ"ל ונציב את התוצאות (בדוק!), נקבל

$$d^3 f(x, y) = 0 \cdot \Delta x^3 + 3 \cdot 0 \cdot \Delta x^2 \Delta y + 3e^y \Delta x \Delta y^2 + xe^y \Delta y^3$$

משפט (נוסחת טיילור לפונקציה בשני משתנים)

תהי $f(x, y) \in C^{n+1}$ בתחום D המכיל את הנקודות $A(x_0, y_0)$, $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ואת

כל הנקודות של קטע הישר המחבר A עם B . אזי :

על הקטע AB ניתן למצוא נקודת ביניים $C(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \theta \cdot \Delta y)$, כאשר $0 < \theta < 1$, כך ש-

$$f(B) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(A)}{n!} + R_n$$

היא השארית :

$$R_n = \frac{d^{n+1} f(C)}{(n+1)!} \quad (\Delta x = (x - x_0), \Delta y = (y - y_0) \text{ ניתן לסמן})$$

דוגל 2

נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$. יש לפתח את הפונקציה לטור טיילור מסביב

לנקודה $A(1, 1)$.

פתרון:

ברור שכל הנגזרות החלקיות מסדר $n > 3$ שוות לאפס ולכן עבור $n > 3$, $d^n f = 0$, נקבל

$$f(B) = f(x, y) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \frac{d^3 f(A)}{3!}$$

נחשב את כל הנגזרות החלקיות

$$\text{עד סדר } 3: f'_x = 3x^2 - 2y, f'_y = 3y^2 - 2x, f''_{xx} = 6x, f''_{yy} = 6y, f''_{xy} = -2$$

$$f'''_{xxx} = 6, f'''_{xyy} = 0, f'''_{xxy} = 0, f'''_{yyy} = 6$$

אחרי שנציב את הנקודה $A(1, 1)$ נקבל

$$df(A) = (x-1) + (y-1), f(A) = 0, d^2 f(A) = 6(x-1)^2 - 12(x-1)(y-1) + 6(y-1)^2$$

$$d^3 f(A) = 6(x-1)^3 + 6(y-1)^3$$

נציב תוצאות אלו בפיתוח טיילור ונקבל:

$$f(x, y) = (x-1) + (y-1) + 3(x-1)^2 - 6(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2 + (x-1)^3 + (y-1)^3$$

דוגל 3

תהי $f(x, y) = (1+y) \cdot \ln(1+x-y)$. פתח את הפונקציה לטור מקלורן (מסביב ל- $(0, 0)$)

עד לדיפרנציאל מסדר שני.

פתרון:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{df(0, 0)}{1!} + \frac{d^2 f(0, 0)}{2!} + R_2$$

יש למצוא את הפיתוח

למצוא את כל הנגזרות החלקיות של הפונקציה עד סדר 2, להציב בהן את הנקודה $(0, 0)$,

ולחשב את הדיפרנציאלים $df(0, 0)$ ו- $d^2 f(0, 0)$. נקבל את התוצאה:

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 + R_2$$

נקודות אקסטרים (קיצון) של פונקציה של כמה משתנים.

תהי $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ במרחב n ממדי. לפונקציה יש בנקודה P_0 מקסימום (מינימום) מקומי אם קיימת סביבה של P_0 כך שלכל נקודה $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ השייכת לסביבה זו מתקיים $f(M) \leq f(P_0)$ ($f(M) \geq f(P_0)$)

משפט (תנאי הכרחי לקיום קיצון)

תהי $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ מוגדרת בסביבת הנקודה $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ובעלת כל הנגזרות החלקיות מסדר ראשון בנקודה זו. אם לפונקציה יש בנקודה $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ מקסימום או מינימום מקומי אזי כל הנגזרות מתאפסות בנקודה P_0 .

נקודה סטציונרית

נקודה סטציונרית של $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ זוהי נקודה שבה כל הנגזרות החלקיות קיימות ושוות לאפס.

נקודות חשודות לקיצון (קריטיות) אלה הן נקודות סטציונריות או נקודות בהן לפחות אחת מהנגזרות החלקיות אינה קיימת.

תרגיל 4

תהי $f(x, y) = x^2 - 2x + \sqrt[3]{y^2}$. מצא נקודות קריטיות (חשודות לקיצון)

פתרון:

$f'_x = 2x - 2$, $f'_y = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$, $f'_x = 0$ גורר $x = 1$. שים לב: באף נקודה f'_y לא

שווה לאפס. מצד שני קל לראות (לפי ההגדרה) שהנגזרת f'_y לא קיימת בנקודה $(1, 0)$ ולכן זוהי

נקודה חשודה לקיצון. אם נרשום את הפונקציה בצורה אחרת $f(x, y) = (x-1)^2 - 1 + \sqrt[3]{y^2}$ קל

לראות ש- $f(1, 0) = -1$ ועבור כל $(x, y) \neq (1, 0)$ מתקיים $f(x, y) > -1$ ולכן בנקודה זו יש מינימום מקומי (למעשה גם מוחלט !)

מתאפסות ביחד ב-4 נקודות (פתור את המערכת): $K(1,1), L(-1,1), M(0,0), N(0,2)$. קיבלנו 4 נקודות קריטיות. יתכן שבחלקן יש מקסימום או מינימום ויתכן גם שאין קיצון. שאלה זו נחקר בשלב מאוחר יותר.

תרגיל 6

תהי $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y$. מצא את הנקודות החשודות של הפונקציה.

פתרון:

אחרי שבגזר ונשווה את הנגזרות החלקיות לאפס נקבל את המערכת:

$$2x - 2 = 0, 2y + 4 = 0, 2z = 0$$

ומכאן הנקודה החשודה היחידה היא $(1, -2, 0)$.

משפט (תנאי מספיק למקסימום/מינימום של פונקציה בשני משתנים)

תהי $f(x, y) \in C^2$ בסביבת הנקודה הסטציונרית (x_0, y_0) . נסמן $A = f_{xx}''(x_0, y_0)$,

$$\Delta = A \cdot C - B^2, C = f_{yy}''(x_0, y_0), B = f_{xy}''(x_0, y_0)$$

1. אם $\Delta > 0$ אזי בנקודה (x_0, y_0) יש קיצון: עבור $A > 0$ יש מינימום ועבור $A < 0$ יש מקסימום.

2. אם $\Delta < 0$ אזי לפונקציה אין קיצון ב- (x_0, y_0) . לנקודה זו נקרא אוכף.

הערה 1:

בסביבה קטנה של נקודת אוכף תמיד ניתן למצוא כיוון בו אנו עולים על גבי המשטח כאשר מתרחקים מנקודת האוכף, ומצד שני ניתן למצוא כיוון בו אנו יורדים על גבי המשטח כאשר מתרחקים מנקודת האוכף.

הערה 2:

אם $\Delta = 0$ אין אפשרות לקבוע מה מתרחש בנקודה (x_0, y_0) בעזרת דיפרנציאל מסדר שני. יתכן שיש או אין בה קיצון. כדי לקבוע מה בדיוק מתרחש בנקודה זו, יש לפתח את הפונקציה לסדר טיילור לדיפרנציאלים גדולים מ-2.

תרגיל 7

תהי $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$. מצא נקודות קריטיות של הפונקציה וחקור אותן.

פתרון:

בתרגיל 5 מצאנו כי $f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 6y$ ו- $f'_y = 6xy - 6x$. כמו כן, מצאנו 4 נקודות

סטציונריות $K(1,1), L(-1,1), M(0,0), N(0,2)$. כדי לחקור אותן נחשב את הנגזרות מסדר

$$\text{שני: } f''_{xx} = 6x, f''_{xy} = 6y - 6, f''_{yy} = 6x$$

בנקודה $(1,1)$ $A = 6, B = 0, C = 6, \Delta > 0$ ולכן זוהי נקודת מינימום.

בנקודה $(-1,1)$ $A = -6, B = 0, C = -6, \Delta > 0$, ולכן זוהי נקודת מקסימום.

בנקודה $(0,0)$ $A = 0, B = -6, C = 0, \Delta < 0$, קיבלנו נקודת אוכף, אין קיצון.

בנקודה $(0,2)$ $A = 0, B = 6, C = 0, \Delta < 0$, שוב קיבלנו אוכף.

תרגיל 8

חקור נקודות הקיצון של הפונקציה $z = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$.

פתרון:

נשווה את הנגזרות לאפס ונפתור את המערכת: $z'_x = 4x^3 - 2x + 2$, $z'_y = 4y^3 + 2x - 2y$

נחבר את המשוואות ונקבל $y^3 = -x^3$, מכאן $y = -x$. אחרי שנציב תוצאה $\begin{cases} 2x^3 - x + y = 0 \\ 2y^3 + x - y = 0 \end{cases}$,

זו לאחת משתי המשוואות נקבל שלוש נקודות סטציונריות: $K(0,0), L(1,-1), M(-1,1)$.

$$z''_{xx} = 12x^2 - 2 , z''_{xy} = 2 , z''_{yy} = 12y^2 - 2$$

בנקודות L ו-M נקבל $A = 10, B = 2, C = 10, \Delta > 0$, לכן בנקודות אלו יש מינימום מקומי.

בנקודה $K(0,0)$ נקבל $A = -2, B = 2, C = -2$, ולכן $\Delta = 0$. נוכיח שבנקודה זו אין קיצון.

נבחר במסלול: $y = x \rightarrow 0$, נקבל $z = 2x^4 > 0$. כעת נבחר מסלול אחר: $y = 0, x \rightarrow 0$,

נקבל $z = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$ וכאשר x קרוב לאפס $z < 0$. $z(0,0) = 0$. ולכן אם נקיף

את הנקודה $K(0,0)$ בסביבה קטנה, תמיד נמצא שם נקודות בהן הפונקציה תהיה גדולה מ-0

ומצד שני, ונמצא נקודות אחרות בהן הפונקציה תהיה קטנה מ-0 .

תנאי מספיק לקיצון עבור פונקציות של n משתנים.

המרה

לפונקציה $A(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j$, נקרא תבנית ריבועית ב-n

משתנים $h_1, h_2, \dots, h_n$, ל- a_{ij} נקרא המקדמים של התבנית.

תבנית ריבועית נקראת חיובית לחלוטין (שלילית לחלוטין) אם לכל $(h_1, h_2, \dots, h_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

מתקיים $A(h_1, h_2, \dots, h_n) > 0$ ($A(h_1, h_2, \dots, h_n) < 0$) .

למשל התבנית בשני משתנים $A(h_1, h_2) = h_1^2 - 2h_1 h_2 + 4h_2^2 = (h_1 - h_2)^2 + 3h_2^2 > 0$ פרט

לנקודה $(0,0)$ ולכן היא חיובית לחלוטין. לעומת זאת התבנית $B(h_1, h_2) = h_1^2 - 2h_1 h_2$ לפעמים חיובית ולפעמים שלילית ולכן אין לה סימן קבוע.

תנאי סילבסטר

תבנית ריבועית $A(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) תהיה חיובית לחלוטין אם ורק אם

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

תבנית ריבועית $A(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) תהיה שלילית לחלוטין אם ורק אם

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot (-1)^n > 0$$

ז"א הסימנים של הדטרמיננטים מתחלפים לסירוגין ממינוס לפלוס.

דוגמה 9

הוכח כי התבנית $2h_1^2 + 4h_1h_2 - 2h_1h_3 + 4h_2^2 + 5h_3^2$ חיובית לחלוטין.

פתרון:

$$\text{שיים לב שהמקדמים העומדים ליד } h_1h_2 \text{ או } h_1h_3 \text{ יש לחלק ב-2 כי התבנית היא סימטרית ולכן } a_{13} = a_{31}, a_{12} = a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{ולכן לפי תנאי סילבסטר התבנית חיובית.} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 16 > 0, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, 2 > 0$$

משפט (תנאי מספיק)

תהי $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ שייכת ל- C^2 בסיבת הנקודה הסטציונרית $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

נסמן $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_i \partial x_j}$, ונתון דיפרנציאל מסדר שני $d^2 f(P_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j$ המהווה

תבנית ריבועית ביחס למשתנים $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. אם הדיפרנציאל חיובי לחלוטין אזי בנקודה P_0 יש מינימום מקומי. אם הדיפרנציאל שלילי לחלוטין אזי בנקודה P_0 יש מקסימום מקומי.

תרגיל 10

חקור נקודות קיצון של הפונקציה $w = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z$.

פתרון:

$w'_x = 2x - 2, w'_y = 2y - 4, w'_z = 2z + 6$. לכן $(1, 2, -3)$ היא נקודה סטציונרית יחידה.

$w''_{xx} = 2, w''_{xy} = 0, w''_{xz} = 0, w''_{yy} = 2, w''_{yz} = 0, w''_{zz} = 2$. נבדוק תנאי סילבסטר

$$\text{ולכן זוהי נקודת מינימום.} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad 2 > 0$$

משפט (תנאי מספיק מורחב)

תהי $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ שייכת ל- C^n בסיבת הנקודה הסטציונרית $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

ונניח ש- $df(P_0) = 0, d^2f(P_0) = 0, \dots, d^{n-1}f(P_0) = 0, d^n f(P_0) \neq 0$

א' אם n הוא מספר אי-זוגי אזי בנקודה P_0 אין קיצון.

ב' אם n הוא זוגי ו- $d^n(f(P_0)) > 0$ ($d^n(f(P_0)) < 0$) אזי בנקודה P_0 יש מינימום (מקסימום)

תרגיל 11

תהי $f(x, y)$ שייכת ל- C^4 בסביבת הנקודה $P_0 = (2, 2)$ ונתון פיתוח לטור טיילור שלה סביב

הנקודה P_0 :

$$f(x, y) = 1 + 8(x-2)^2 + 12(x-2)(y-2) + 7(y-2)^2 + 4(x-2)(y-2)^2 + 14(y-2)^3 + R_3$$

חקור לקיצון את הנקודה $P_0 = (2, 2)$.

פתרון:

אנו רואים ש- $df(P_0) = 0, d^2f(P_0) \neq 0$. בדיפרנציאל מסדר שני $A = 8, B = 6, C = 7$

ולכן $\Delta = AC - B^2 = 56 - 36 > 0$. המקדם $A > 0$, ד"א הדיפרנציאל מסדר שני חיובי לחלוטין. מסקנה: זאת נקודת מינימום.

פרק 10

מקסימום ומינימום עם אילוצים

הסבר גיאומטרי לבעיית מקסימום/מינימום עם אילוץ במישור

תהי $f(x, y)$ רציפה בתחום D ונניח שעקום רציף C הנתון על-ידי המשוואה $g(x, y) = 0$ נמצא ב- D . השאלה היא כיצד למצוא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה $z = f(x, y)$ כאשר הנקודות (x, y) נמצאות על העקום C ? אם העקום C מהווה קבוצה סגורה וחסומה במישור אזי ממשפט ויירשטרס נובע שלפונקציה $f(x, y)$ יש מקסימום ומינימום מוחלטים על העקום C . במידה והעקום אינו סגור או חסום, יש לחקור באמצעים אלגבריים או גיאומטריים את קיומו של מקסימום או מינימום על C . עקרונית קיימות שתי גישות בפתרון בעיות מקסימום / מינימום עם אילוצים:

א' הצבת האילוץ $g(x, y) = 0$ לתוך הפונקציה $z = f(x, y)$.

ב' שימוש בכופלי לגרנז'.

הערה: בדרך כלל כאשר נפתור בעיות מקסימום/מינימום עם אילוצים נניח ש- $f(x, y)$

ו- $g(x, y)$ שייכות ל- C^1 .

תחילה נציג שתי בעיות בהן נשתמש בשיטת החילוף.

תרגיל 1

מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x, y) = x + y$ עם אילוץ $x^2 + y^2 = 4$.

פתרון:

מבחינה גיאומטרית האילוץ $x^2 + y^2 = 4$ מתאר נקודות של מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 2. אנו מחפשים את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של $z = x + y$ כאשר הנקודה (x, y) חייבת להיות על המעגל. המעגל מהווה קבוצה סגורה וחסומה ולכן פונקציה רציפה $f(x, y) = x + y$ מקבלת על המעגל את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר. נרשום את המעגל בצורה פרמטרית $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, נציב לפונקציה ונקבל $z = 2 \cos t + 2 \sin t$. נדרוש $z'(t) = 0$ ונקבל $\tan(t) = 1$. לכן $t = \frac{\pi}{4}$ או $t = \frac{5\pi}{4}$. עבור $t = \frac{\pi}{4}$ נקבל נקודה $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ ונקבל $z = 2\sqrt{2}$. עבור $t = \frac{5\pi}{4}$ נקבל $x = -\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ ונקבל $z = -2\sqrt{2}$. בקצות $t = 0$ ו- $t = 2\pi$

הפונקציה שווה ל- 2. לסיכום הערך הגדול ביותר מתקבל ב- $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$, $z_{\max} = 2\sqrt{2}$.
 הערך הקטן ביותר מתקבל ב- נקבל $x = -\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$, $z_{\min} = -2\sqrt{2}$.

תרגיל 2

על הפרבולה $y^2 = 2px$, $p > 0$ מצא נקודה M הקרובה ביותר לנקודה $(p, 4p)$.

פתרון:

השיעורים של הנקודה $M(x, y)$ יכולים להיות גדולים כרצוננו ולכן משיקולים גיאומטריים ברור שיש מרחק מינימלי אך אין מרחק מקסימלי. נבנה פונקציה המתארת את המרחק בריבוע בין שתי

הנקודות $M(x, y)$ ו- $(p, 4p)$: $f(x, y) = (x-p)^2 + (y-4p)^2$ (שים לב שהמרחק יהיה מינימלי אם ורק אם ריבוע המרחק יהיה מינימלי).

נציב את האילוץ לתוך הפונקציה: $x = \frac{y^2}{2p}$, $f = \left(\frac{y^2}{2p} - p\right)^2 + (y-4p)^2$.

כדי למצוא נקודות חשודות לקיצון נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת לאפס.

$$f' = 2 \cdot \left(\frac{y^2}{2p} - p\right) \cdot \frac{y}{p} + 2 \cdot (y-4p) = 0, \text{ מכאן נקבל } y^3 = 8p^3,$$

קיבלנו $y = 2p$ ולכן $x = \frac{y^2}{2p} = \frac{4p^2}{2p} = 2p$. זוהי נקודה היחידה בה יכול להתקבל מרחק

מינימלי ולכן המרחק המינימלי שווה ל- $\sqrt{f(2p, 2p)} = \sqrt{5p^2} = p \cdot \sqrt{5}$.

כופלי לגרנד

תהי $z = f(x, y)$ המוגדרת בתחום D ונניח שעקום C הנמצא ב-D מתואר על-ידי

המשוואה $g(x, y) = 0$. נניח ש- $f(x, y)$ ו- $g(x, y)$ שייכות ל- C^1 ב-D.

נבנה פונקצית עזר: $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$.

משפט

אם לפונקציה $z = f(x, y)$ יש נקודת מקסימום או מינימום עם אילוץ $g(x, y) = 0$ אז או

שהנקודה מקיימת את המערכת $\Phi'_x(x, y, \lambda) = 0$, $\Phi'_y(x, y, \lambda) = 0$, $\Phi'_\lambda(x, y, \lambda) = 0$,

או שהנקודה מקיימת את המשוואה $\text{grad}(g(x, y)) = 0$.

שים לב: הנקודה (או נקודות) שמתקבלת מפתרון תנאים ה"ל היא רק "חשודה לקיצון עם אילוץ".

כדי לדעת האם בנקודה זו יש מקסימום או מינימום יש לערוך דיון נוסף.

תרגיל 3

פתור את השאלה מתרגיל 2 בעזרת כופלי לגרנז'.

פתרון:

$\Phi(x, y, \lambda) = (x-p)^2 + (y-4p)^2 + \lambda(y^2 - 2px)$ נרשום את המערכת של לגרנז' :

$$\Phi'_y(x, y, \lambda) = 2(y-4p) + 2\lambda y = 0, \quad \Phi'_x(x, y, \lambda) = 2(x-p) - 2p\lambda = 0$$

$$\Phi'_\lambda(x, y, \lambda) = y^2 - 2px = 0 \quad \text{משתי משוואות הראשונות נקבל} \quad x = p(1+\lambda)$$

$$y = \frac{4p}{1+\lambda} \quad \text{נציב תוצאות אלו למשוואה האחרונה ונקבל} \quad (1+\lambda)^3 = 8, \quad \text{מכאן} \quad \lambda = 1$$

$$\text{אחרי שנציב עוד זה ל-} \quad x = p(1+\lambda) \quad \text{ו-} \quad y = \frac{4p}{1+\lambda} \quad \text{נקבל שוב} \quad x = 2p, y = 2p$$

נשאר לבדוק את התנאי $\text{grad}(y^2 - 2px) = 0$, ד"א $-2p \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} = 0$, אך $p > 0$

ולכן תנאי זה לא מתקיים, כלומר לא קיבלנו נקודה חשודה נוספת. לסיכום הנקודה הקרובה

ביותר היא $x = 2p, y = 2p$.

תרגיל 4

מצא את המרחק הקצר ביותר מראשית הצירים להיפרבולה $7x^2 + 8xy + y^2 = 45$

פתרון:

פונקציית המרחק בריבוע היא $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\Phi = x^2 + y^2 + \lambda(7x^2 + 8xy + y^2 - 45)$,

$$\Phi'_x = 2x + 14\lambda x + 8\lambda y, \quad \Phi'_y = 2y + 8\lambda x + 2\lambda y$$

שתי משוואות לינאריות הומוגניות $\begin{cases} (1+7\lambda)x + 4\lambda y = 0 \\ 4\lambda x + (1+\lambda)y = 0 \end{cases}$ למערכת יש פתרון לא טריוויאלי

$$\text{אם ורק אם} \quad \begin{vmatrix} 1+7\lambda & 4\lambda \\ 4\lambda & 1+\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{מכאן} \quad \lambda = 1 \quad \text{או} \quad \lambda = -\frac{1}{9}$$

עבור $\lambda = 1$ נקבל אחרי ההצבה לאחת מהמשוואות כי $y = -2x$. נציב תוצאה זו באילוף

(במשוואה $\Phi'_\lambda = 0$) ונקבל $-4x^2 = 45$. במקרה הזה אין פתרון.

נבדוק כעת $\lambda = -\frac{1}{9}$, נקבל $x = 2y$. נציב תוצאה זו באילוף: $45y^2 = 45$, לכן $y = \pm 1$

קיבלנו שתי נקודות קריטיות $(2, 1), (-2, -1)$. בשתייהן המרחק בריבוע שווה ל-5. נשאר לבדוק

את התנאי $\text{grad}(7x^2 + 8xy + y^2 - 45) = 0$. נקבל $(14x + 8y) \cdot \vec{i} + (8x + 2y) \cdot \vec{j} = 0$.

קל לראות שהפתרון הוא $x = y = 0$ אך נקודה זו לא מקיימת את האילוף ולכן לא קיבלנו נקודה

חשודה נוספת. לסיכום המרחק המינימלי שווה ל- $\sqrt{5}$.

הסבר גיאומטרי לבעיית מקסימום/מינימום עם אילוץ במרחב

תהי $f(x, y, z)$ רציפה בתחום מרחבי D ונניח שמשטח רציף S המתואר על-ידי $g(x, y, z) = 0$ נמצא בתחום זה. השאלה היא כיצד למצוא מקסימום / מינימום של הפונקציה $w = f(x, y, z)$ כאשר הנקודות (x, y, z) נמצאות על המשטח S . בפתרון בעיות אלו נשתמש כמו במישור באחת משתי הגישות: הצבת האילוץ לפונקציה או כופלי לגרנז'. בשיטה של כופלי לגרנז' פונקצית עזר תהיה $\Phi(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \cdot g(x, y, z)$, כאשר $f(x, y, z)$ ו- $g(x, y, z)$ שייכות ל- C^1 .

משפט

אם לפונקציה $w = f(x, y, z)$ יש מקסימום / מינימום עם אילוץ $g(x, y, z) = 0$ אז או שהנקודה מקיימת את המערכת של לגרנז': $\Phi'_x(x, y, z, \lambda) = 0$, $\Phi'_y(x, y, z, \lambda) = 0$, $\Phi'_z(x, y, z, \lambda) = 0$ ו- $\Phi'_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0$ או שהנקודה מקיימת את התנאי: $grad(g(x, y, z)) = 0$ (בדרך כלל תנאי זה לא מוסיף נקודות חשודות נוספות)

תרגיל 5

על המשטח $x^2 + y^2 + z^2 + xz = 1$ מצא נקודה (x_0, y_0, z_0) , $z_0 > 0$ כך שמרחקה ממישור $z = 0$ יהיה מקסימלי.

פתרון:

נבנה פונקצית עזר: $\Phi = z + \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + xz - 1)$. נגזור אותה לפי x, y, z ונשווה את הנגזרות לאפס: $2x\lambda + z\lambda = 0$, $2y\lambda = 0$, $1 + 2z\lambda + x\lambda = 0$, נפשט ונקבל

$$\begin{cases} \lambda \cdot (x + z) = 0 \\ y\lambda = 0 \\ \lambda \cdot (2z + x) = -1 \end{cases} \text{ ממשוואה האחרונה נובע ש- } \lambda \neq 0 \text{ ולכן } y = 0, z = -x.$$

נציב תוצאות אלו למשוואת האילוץ $x^2 + y^2 + z^2 + xz = 1$ ונקבל $x^2 = 1$, לכן $x = \pm 1$ עבור $x = 1$ נקבל $z = -1$. נדחה תשובה זו כי נתון ש- $z_0 > 0$. כעת נבדוק את התנאי: $grad(x^2 + y^2 + z^2 + xz - 1) = 0$, קל לראות שהפתרון יהיה $x = y = z = 0$. נקודה זו לא מקיימת את האילוץ ולכן לא קיבלנו נקודה חשודה נוספת. לסיכום הנקודה הרחוקה ביותר ממישור $z = 0$ היא $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 0, 1)$.

תרגיל 6

מכל התיבות בעלות נפח V מצא תיבה בעלת שטח פנים מינימלי.

פתרון א:

(בשיטה אלמנטרית)

נסמן אורך, רוחב וגובה של התיבה ב- a, b, c . אזי שטח הפנים שלה שווה ל- $S = 2(ab + ac + bc)$

בפתרון של הבעיה נשתמש באי-שוויון ממוצעים $\frac{A+B+C}{3} \geq \sqrt[3]{ABC}$ לכל $A, B, C \geq 0$

ואי-שוויון הופך לשוויון אם ורק אם $A = B = C$.

ואי-השוויון הופך לשוויון אם ורק אם $\frac{ab+ac+bc}{3} \geq \sqrt[3]{(ab)(ac)(bc)} = \sqrt[3]{(abc)^2} = \sqrt[3]{V^2}$

$ab = ac = bc$ זה גורר ש- $a = b = c$. הוכחנו אם כן שהביטוי $S = 2(ab + ac + bc)$ יהיה

מינימלי כאשר התיבה הופכת לקוביה בעלת צלעות $a = b = c = \sqrt[3]{V}$.

פתרון ב:

(בעזרת כופלי לגרנ')

נבנה פונקציית עזר $\Phi = xy + xz + yz + \lambda(xyz - V)$. אחרי שנגזור לפי x, y, z ונשווה

את הנגזרות לאפס, נקבל: $\begin{cases} y + z + \lambda yz = 0 \\ x + z + \lambda xz = 0 \\ x + y + \lambda xy = 0 \end{cases}$ אחרי שנכפיל את המשוואה הראשונה ב- x

השניה ב- y והשלישית ב- z נקבל מערכת שקולה $\begin{cases} yx + zx + \lambda V = 0 \\ xy + zy + \lambda V = 0 \\ xz + yz + \lambda V = 0 \end{cases}$ ומכאן לא קשה

לראות ש- $x = y = z$. נתון ש- $xyz = V$ לכן $x = y = z = \sqrt[3]{V}$. כעת נבדוק את התנאי

$grad(xyz - V) = 0$. תנאי זה גורר $x = y = z = 0$. נקודה זו לא מקיימת את האילוץ ולכן

לא קיבלנו נקודה חשודה נוספת. לסיכום: $x = y = z = \sqrt[3]{V}$

מקסימום / מינימום עם שני אילוצים

תהי $w = f(x, y, z)$ רציפה בתחום מרחבי D ונניח שעקום C מתקבל מחיתוך בין שני משטחים

רציפים $g_1(x, y, z) = 0$ ו- $g_2(x, y, z) = 0$ הנמצאים ב- D . השאלה היא כיצד למצוא מקסימום

ומינימום של $w = f(x, y, z)$ כאשר הנקודות (x, y, z) נמצאות על C .

כדי לפתור בעיה זו מניחים בדרך כלל ש- $f(x, y, z)$, $g_1(x, y, z)$ ו- $g_2(x, y, z)$ שייכות ל- C^1 .

נגדיר פונקציית עזר $\Phi = f(x, y, z) + \lambda \cdot g_1(x, y, z) + \mu \cdot g_2(x, y, z)$

משפט

אם לפונקציה $w = f(x, y, z)$ יש מקסימום / מינימום עם שני אילוצים $g_1(x, y, z) = 0$, $g_2(x, y, z) = 0$ בנקודה (x, y, z) , אז או שנקודה זו מקיימת את המערכת של משוואות:

$$\Phi'_x = 0, \Phi'_y = 0, \Phi'_z = 0, \Phi'_\lambda = 0, \Phi'_\mu = 0$$

או שהנקודה מקיימת את המשוואה:

$$\nabla g_1 \times \nabla g_2 = 0 \quad (\text{לעיתים קרובות תנאי זה לא מוסיף נקודות חשודות נוספות})$$
דוגמה 7

על העקום המתקבל מחיתוך של גליל $x^2 + y^2 = 1$ עם מישור $z = x + y$ מצא נקודה (או נקודות) הקרובה ביותר (הרחוקה ביותר) מראשית הצירים $(0, 0, 0)$.

פתרון:

פונקציית המרחק בריבוע היא $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. נבנה פונקציית עזר:

$$\Phi = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1) + \mu \cdot (x + y - z)$$

אחרי גזירה נקבל מערכת המורכבת

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ 2z - \mu = 0 \\ z = x + y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ממשוואות שלישית ורביעית נקבל} \\ \mu = 2x + 2y \end{array}$$

נציב תוצאה זו בשתי משוואות הראשונות ונקבל

$$\begin{cases} (2 + \lambda)x + y = 0 \\ x + (2 + \lambda)y = 0 \end{cases} \quad \text{למערכת זו יש פתרון}$$

לא טריוויאלי אם ורק אם $(2 + \lambda)^2 = 1$. לכן $\lambda = -1$ או $\lambda = -3$

עבור $\lambda = -1$ נקבל $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ או $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

עבור $\lambda = -3$ נקבל $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ או $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$

נשאר לבדוק אם התנאי $\nabla g_1 \times \nabla g_2 = 0$ מוסיף לדין נקודות חשודות נוספות?

נסמן $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ ו- $g_2(x, y, z) = x + y - z$. התנאי

$$\nabla g_1 \times \nabla g_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2y \cdot \vec{i} + 2x \cdot \vec{j} + (2x - 2y) \cdot \vec{k} = 0$$

קל לראות שהנקודה לא מקיימת את האילוץ $x^2 + y^2 = 1$ ולכן לא קיבלנו

נקודות חשודות נוספות.

לסיכום: המרחק המינימלי בריבוע שווה ל- 1 והמרחק המקסימלי בריבוע שווה ל- 3.

תרגיל 8

פתור את השאלה הקודמת בעזרת שיטת ההצבה.

פתרון:

נציג את העקום C בצורה פרמטרית $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos t + \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

נציב במונקצית המרחק בריבוע $w = x^2 + y^2 + z^2$ ונקבל $w = 1 + (\cos t + \sin t)^2$. אחרי

שנפשט את הביטוי נקבל $w = 2 + \sin 2t$. $-1 \leq \sin 2t \leq 1$ ולכן הערך הגדול ביותר

של הפונקציה הוא $w = 3$ והוא מתקבל כאשר $t = \frac{\pi}{4}$ או $t = \frac{5\pi}{4}$, עבור ערכים אלה

נקבל את הנקודות $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ או $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$.

הערך הקטן ביותר של הפונקציה הוא $w = 1$ והוא מתקבל עבור $t = \frac{3\pi}{4}$ או $t = \frac{7\pi}{4}$

עבור ערכים אלה נקבל את הנקודות $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ או $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

מסקנה: בדרך כלל כאשר האילוף (או האילוצים) אינו מסובך ממומלץ לפתור בעזרת מקסימום ומינימום עם אילוצים בשיטת ההצבה ולא בעזרת כופלי לגרנז'. אומנם קל מאוד לרשום את מערכת המשוואות של לגרנז' אך צריך גם לפתור אותה... וזה לא תמיד פשוט מבחינה אלגברית!

פרק 11

מקסימום ומינימום מוחלטים

מידוע, כדי למצוא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של פונקציה גזירה במשתנה אחד $f(x)$

בקטע סגור $[a, b]$ יש לחקור את הפונקציה בנקודות קריטיות הנמצאות בתוך הקטע (a, b)

ובנוסף לבדוק את ערכיה של הפונקציה בנקודות שפה של הקטע: $x = a$ ו- $x = b$.

נתאר כעת תהליך החיפוש של מקסימום ומינימום מוחלטים של פונקציה בשני משתנים.

תהי $z = f(x, y)$ רציפה בקבוצה E ונניח שתחום סגור וחסום D מוכל ב- E .

לפי משפט ויירשטרס פונקציה רציפה בתחום סגור וחסום מקבלת בו את הערך הגדול ביותר ואת

הערך הקטן ביותר. נניח בנוסף ש- $f(x, y) \in C^1$ ב- E . את החקירה נחלק לשלושה שלבים:

א' מציאת נקודות קריטיות של $z = f(x, y)$ בתוך D . (בנקודות הפנימיות)

ב' מציאת נקודות קריטיות על השפה (בדרך כלל השפה מורכבת ממספר עקומים חלקים המחוברים

זה עם זה)

ג' חישוב ערכיה של הפונקציה בנקודות "פינה", כלומר, בנקודות מפגש בין עקום אחד לעקום אחר

המהווים את השפה של D .

תרגיל 1

מצא את הערך המקסימלי והערך המינימלי של $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y$ במלבן הסגור:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5\}$$

פתרון:

בשלב א' נמצא את הנקודות החשודות בתוך המלבן:

$$f'_x(x, y) = 2x - 2, f'_y(x, y) = 2y - 4$$

$$\text{נקבל נקודה חשודה } (1, 2) \text{ הנמצאת בתוך } D.$$

$$f(1, 2) = -5$$

כעת נחפש נקודות חשודות על השפות: אם $x = 0$ ו- $f = y^2 - 4y$ ואחרי הגזירה נקבל נקודה חשודה

$$(0, 2) \text{ הנמצאת על הישר } x = 0, f(0, 2) = -4$$

$$\text{על השפה } y = 0, f = x^2 - 2x, \text{ ונקבל נקודה חשודה } (1, 0), f(1, 0) = -1$$

$$\text{על השפה } x = 4 \text{ נקבל נקודה חשודה } (4, 2), f(4, 2) = 4. \text{ על השפה } y = 5 \text{ נקבל}$$

$$\text{נקודה חשודה } (1, 5), f(1, 5) = 4$$

כעת נבדוק ערכיה של הפונקציה בפינות: $f(0, 0) = 0, f(0, 5) = 5, f(4, 0) = 4, f(4, 5) = 13$

לסיכום: הערך הקטן ביותר הוא $f_{\min}(1, 2) = -5$, והגדול ביותר $f_{\max}(4, 5) = 13$.

תרגיל 2

מצא את הערך הגדול וערך הקטן ביותר של הפונקציה $z = x + y$ בתחום הסגור D :

$$D = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, 4y \leq 3x, x^2 + y^2 \leq 25\} \quad (\text{ראה ציור})$$

פתרון:

$z'_x \neq 0$ ולכן אין נקודות חשודות בתוך D . על השפה $y = 0, z = x, z' = 1 \neq 0$

ולכן אין נקודות חשודות על השפה $y = 0$. על השפה $y = \frac{3x}{4}, z = x + \frac{3x}{4}, z'_x \neq 0$

ולכן אין נקודות חשודות על שפה זו. נבדוק את השפה $x^2 + y^2 = 25$. נעבור להצגה פרמטרית:

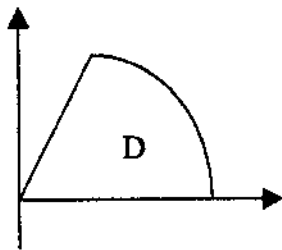
$$x = 5 \cos t, y = 5 \sin t, z = 5 \cos t + 5 \sin t, z' = -5 \sin t + 5 \cos t, z' = 0 \text{ נדרוש}$$

$$\tan t = 1 \text{ ולכן } t = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

נקודה זו אינה שייכת לתחום D .

$$z(0,0) = 0, z(5,0) = 5, z(3,4) = 7$$

$$\text{לסיכום: } z_{\max}(3,4) = 7, z_{\min}(0,0) = 0$$

תרגיל 3

מצא את המקסימום ואת המינימום המוחלטים של הפונקציה $z = \ln(4x^2 + 9y^2)$ בתחום

$$D = \{(x, y): 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 2\} \quad \text{הסגור}$$

פתרון:

$$z'_x = \frac{8x}{4x^2 + 9y^2}, z'_y = \frac{18y}{4x^2 + 9y^2} \text{ אחרי שנשווה את הנגזרות החלקיות לאפס נקבל}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ נקודה } (0,0) \text{ שנמצאת מחוץ לתחום } D. \text{ נבדוק על השפה הפנימית: } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$z = \ln(4x^2 + 9y^2) = \ln 36 \text{ נקבל } z = \ln 72 \text{ נקבל}$$

$$\text{באופן דומה, על השפה החיצונית נקבל } z = \ln 72$$

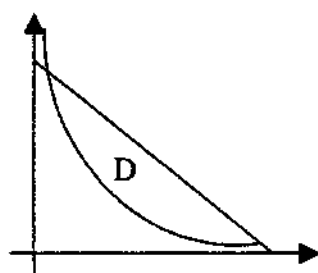
לסיכום: הערך הגדול ביותר של הפונקציה שווה ל- $\ln 72$ והוא מתקבל באין-סוף נקודות אשר

נמצאות על קו רמה של הפונקציה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2$. הערך המינימלי שווה ל- $\ln 36$ והוא מתקבל

$$\text{באין-סוף נקודות אשר מהות קו רמה } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

תרגיל 4

מצא את הערך הגדול ביותר וערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x, y) = x + y$ בתחום הסגור D



$$D = \{(x, y): xy \geq 4, x + 2y \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$$

פתרון:

התחום נמצא מעל להיפרבולה $xy = 4$ ומתחת לישר

$x + 2y = 9$. נקודות המפגש בין שתי שפות אלו הן

הנקודות $A(1, 4), B(8, 0.5)$ (ראה ציור)

קל לראות שלפונקציה $f(x, y) = x + y$ אין נקודות

חשודות בתוך התחום D. על השפה $xy = 4$ נחפש את הנקודות החשודות בעזרת כופלי לגרנז'

נגדיר $\Phi = x + y + \lambda(xy - 4)$. אחרי שנגזור לפי x, y ונשווה לאפס, נקבל את המערכת

$$1 + \lambda y = 0, 1 + \lambda x = 0, \text{ מכאן } x = y = -\frac{1}{\lambda}$$

ונקבל $\lambda = -\frac{1}{2}$ (שים לב: לא יתכן ש- $\lambda = \frac{1}{2}$). נקבל נקודה חשודה $C(2, 2)$.

$f(2, 2) = 4$. נבדוק על השפה $x + 2y = 9$. לשם כך נציב לתוך הפונקציה $x = 9 - 2y$

נקבל $f = 9 - y$ וברור שאין נקודות חשודות על הישר $x + 2y = 9$. נשאר לבדוק בפינות A, B.

נקבל $f(1, 4) = 5, f(8, 0.5) = 8.5$.

לסיכום הערך המקסימלי הוא 8.5 והוא מתקבל בנקודה B, הערך המינימלי הוא 4 והוא מתקבל ב-C.

כעת נראה כיצד למצוא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של פונקציה $w = f(x, y, z)$ בתחום

מרחבי D סגור וחסום. נדגים זאת בתרגיל הבא:

תרגיל 5

מצא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה $w = x + y + z$ בתחום הסגור D:

$$D = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$$

פתרון:

מבחינה גאומטרית D הוא אוסף של כל הנקודות אשר נמצאות מתחת למישור (או על המישור)

$$z = 4 \text{ ומעל הפרבולואיד } (\text{או על הפרבולואיד}) z = x^2 + y^2.$$

נבדוק תחילה בנקודות הפנימיות של D: $w'_x = 1 \neq 0$ ולכן אין נקודות חשודות בתוך D.

על השפה $z = x^2 + y^2$ נקבל $w = x + y + x^2 + y^2$. $w'_x = 1 + 2x$, $w'_y = 1 + 2y$.

אחרי שנסווה את הנגזרות לאפס, נקבל נקודה $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. $w(A) = -\frac{1}{2}$.

על המישור $z = 4$ נקבל $w = x + y + 4$ וקל לראות שאין נקודות חשודות על המישור הזה.

נשאר לבדוק מה קורה בנקודות המפגש בין שתי השפות. זהו מעגל $z = 4, x^2 + y^2 = 4$.

נציב את ההצגה הפרמטרית $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 4, 0 \leq t \leq 2\pi$.

$w = 2\cos t + 2\sin t + 4$. $w' = -2\sin t + 2\cos t$. אחרי שנשווה לאפס, נקבל $\tan t = 1$.

ולכן $t = \frac{\pi}{4}$ או $t = \frac{5\pi}{4}$. נקבל בהתאמה שתי נקודות $B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4), C(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4)$.

$$w(B) = 2\sqrt{2} + 4, \quad w(C) = -2\sqrt{2} + 4$$

$$\text{לסיכום: } w_{\max}(B) = 2\sqrt{2} + 4, \quad w_{\min}(A) = -\frac{1}{2}$$

פרק 12

אינטגרלים כפולים

משפט

אם $f(x, y)$ רציפה במלבן $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ אזי

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

תחום רגולרי

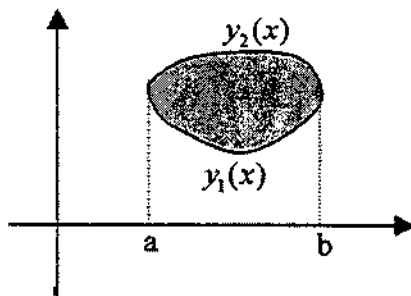
לתחום מישורי D נקרא רגולרי אם שפתו מורכבת ממספר סופי של עקומים שצורתם $y = y(x)$ או $x = x(y)$ (כלומר, עקומים אלה הן פונקציות במשתנה x או y).

משפט

אם $f(x, y)$ חסומה בתחום רגולרי D ורציפה ב- D פרט אולי למספר סופי של עקומים שצורתם $y = y(x)$ או $x = x(y)$ אזי $f(x, y)$ אינטגרבילית ב- D .

תחום נורמלי ביחס לציר ה- x

לתחום רגולרי D נקרא נורמלי ביחס לציר ה- x אם ניתן לתאר אותו כך :
 $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, כאשר $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$ רציפות ב- $a \leq x \leq b$.



משפט

אם $f(x, y)$ חסומה ורציפה בתחום נורמלי ביחס לציר ה- x אזי :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

תחום נורמלי ביחס לציר ה- y :

לתחום רגולרי D נקרא נורמלי ביחס לציר ה- y אם ניתן לתאר אותו כך:

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\} \quad \text{כאשר } x_1(y) \text{ ו- } x_2(y) \text{ רציפות ב- } c \leq y \leq d.$$

אם $f(x, y)$ חסומה ורציפה בתחום נורמלי ביחס לציר ה- y אזי:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

משפט

אם $f(x, y)$ רציפה וחסומה בתחום רגולרי D ולכל $(x, y) \in D$ מתקיים $m \leq f(x, y) \leq M$ אזי

$$m \cdot S \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S \quad \text{א'}$$

כאשר S מסמן שטחו של התחום D .

$$\text{ב' קיימת נקודה } (x_0, y_0) \in D \text{ כך ש- } \iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) \cdot S.$$

הערה: זהו משפט עודד הממוצע עבור אינטגרל כפול.

תרגיל 1

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x+y}} \quad \text{במלבן } D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$$

פתרון:

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x+y}} = \int_1^4 dx \int_0^4 \frac{dy}{\sqrt{x+y}} = \int_1^4 \left[2\sqrt{x+y} \right]_0^4 dx = 2 \int_1^4 (\sqrt{x+4} - \sqrt{x}) dx$$

$$I = \frac{4}{3} [5\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - 7] \quad \text{ואחרי חישובים נקבל}$$

תרגיל 2

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{100 + \sin^2(3x) + \cos^{10}(5y)} \quad \text{כאשר } D \text{ הוא הריבוע : } |x| + |y| \leq 10$$

$$1.96 \leq I \leq 2 \quad \text{הוכח בלי לחשב את האינטגרל כי}$$

פתרון:

שטח הריבוע שווה ל-200.

$$\frac{1}{102} = \frac{1}{100+1+1} \leq \frac{1}{100 + \sin^2(3x) + \cos^{10}(5y)} \leq \frac{1}{100+0+0} = \frac{1}{100}$$

ולכן אם נשתמש

$$1.96 \approx 200 \cdot \frac{1}{102} \leq I \leq 200 \cdot \frac{1}{200} \quad \text{במשפט } m \cdot S \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S \text{ נקבל,}$$

תרגיל 3

תהי $f(x, y)$ פונקציה רציפה במלבן $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

נבחר נקודה $(x, y) \in D$ ונגדיר $F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v) dv du$. הוכח כי $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$

פתרון:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_c^y f(x, v) dv \quad \text{ולכן} \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

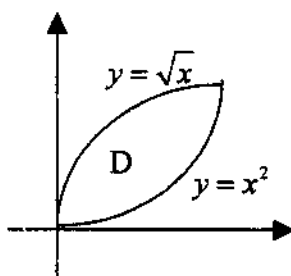
תרגיל 4

א' חשב $I = \iint_D y dx dy$ כאשר D חסום על-ידי העקומים $y = x^2$ ו- $x = y^2$.

ב' חשב $J = \iint_D y dx dy$ כאשר D חסום על-ידי $x = 0, y = 0, y = 2\pi, x = 2 + \sin y$.

פתרון:

א' זהו תחום נורמלי ביחס לציר ה- x . (ראה ציור)



$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy = 0.5 \int_0^1 y^2 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$I = 0.5 \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3}{20} \quad \text{נקבל}$$

ב' התחום D אינו נורמלי ביחס לציר ה- x . המשוואה $x = 2 + \sin y$ מתארת גרף של הפונקציה סינוס כאשר ציר ה- x הוחלף בציר ה- y ובנוסף נעשתה הזזה ימינה ב-2 (צייר את התחום)

לעומת זאת, התחום נורמלי ביחס לציר ה- y . לכן $J = \int_0^{2\pi} y dy \int_0^{2+\sin y} dx = \int_0^{2\pi} (2y + y \sin y) dy$

אחרי האינטגרציה (יש לעשות אינטגרציה בחלקים בביטוי $y \sin y$) נקבל $J = 2\pi^2 - 2\pi$.

תרגיל 5

החלף סדר האינטגרציה באינטגרלים הבאים (בהנחה ש- $f(x, y)$ רציפה):

$$I = \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \quad \text{א'}$$

$$J = \int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy + \int_1^5 dx \int_0^{\sqrt{5-x}} f(x, y) dy \quad \text{ב'}$$

$$K = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{16-x^2} f(x, y) dy \quad \text{ג'}$$

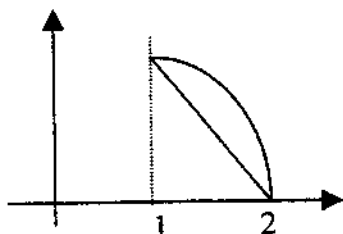
פתרון:

בדרך כלל כדי לשנות סדר האינטגרציה יש לצייר את התחום D ורק אז להחליף סדר האינטגרציה.

א' התחום $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 2-x \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}\}$ חסום בין ישר $y = 2-x$

למעגל $y = \sqrt{2x-x^2}$ (שים לב שאחרי העלאה בריבוע ניתן לקבל ממשוואה האחרונה

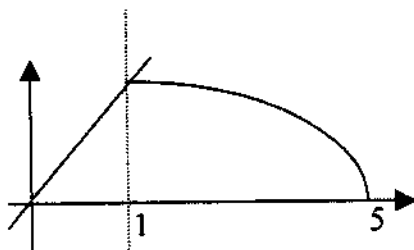
את המשוואה $(x-1)^2 + y^2 = 1$).



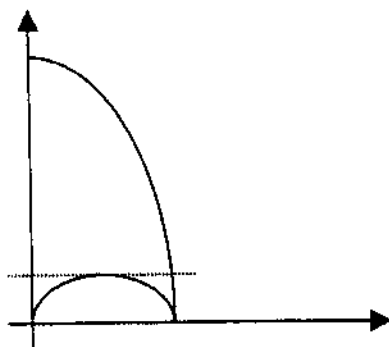
$$I = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad \text{לכן}$$

ב' שני האינטגרלים מתארים למעשה תחום אחד, כאשר שפתו התחתונה היא ציר ה- x ושפתו העליונה מורכבת משני קווים: בקטע $0 \leq x \leq 1$ זהו ישר $y = 2x$ ובקטע $1 \leq x \leq 5$ זהו הגרף

של פונקציה השורש $y = \sqrt{5-x}$.



$$J = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{5-y^2} f(x, y) dx \quad \text{לכן}$$



ג' במשוואה $y = \sqrt{4x-x^2}$ הערך של y לא שלילי.

נעלה את המשוואה בריבוע ונקבל משוואה חדשה

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \quad \text{או} \quad (x-2)^2 + y^2 = 4$$

לכן המשוואה $y = \sqrt{4x-x^2}$ מתארת חצי

המעגל העליון שמרכזו ב- $(2, 0)$ ורדיוסו 2.

המשוואה $y = 16-x^2$ מתארת פרבולה הפוכה החותכת ציר ה- x בנקודות $(-4, 0)$ ו- $(4, 0)$.

לכן התחום חסום בין חצי-המעגל לבין הפרבולה. כאשר מתבוננים בציור מכיוון של ציר ה- y רואים

שלושה תחומים. נחלק את x מתוך שתי המשוואות ונקבל $x = 2 \pm \sqrt{4-y^2}$, $x = \sqrt{16-y^2}$.

$$K = \int_0^2 dy \int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y) dx + \int_2^{16} dy \int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y) dx \quad \text{לכן:}$$

תרגיל 6

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 y^4 e^{xy^2} dy$$

חשב את האינטגרל

פתרון:

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y y^4 e^{xy^2} dx = \int_0^1 y^2 e^{xy^2} \Big|_0^y dy = \int_0^1 (y^2 e^{y^3} - y^2) dy$$

נחליף סדר האינטגרציה:

$$I = \frac{e^{y^3}}{3} - \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{e-2}{3}$$

מכאן

שינוי משתנים באינטגרל כפול

נניח ש- $f(x, y)$ רציפה בתחום D במישור xy ונניח שנתונה טרנספורמציה חד-חד ערכית המעתיקה תחום Δ שנמצא במישור uv לתחום D . (לא לכל נקודה בתחום Δ מתאימה נקודה יחידה בתחום D ולהפך - לכל נקודה השייכת ל- D מתאימה נקודה יחידה השייכת ל- Δ). טרנספורמציה זו נתונה על-ידי $x = x(u, v), y = y(u, v)$ כאשר $x(u, v)$ ו- $y(u, v)$ רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות. נוכל להגדיר טרנספורמציה הפוכה $u = u(x, y), v = v(x, y)$ המתאימה לכל נקודה $(x, y) \in D$ נקודה אחת ויחידה $(u, v) \in \Delta$.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} : x = x(u, v), y = y(u, v)$$

נגדיר יעקוביאן של הטרנספורמציה

$$J^* = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} : \text{ונגדיר גם את היעקוביאן של הטרנספורמציה ההפוכה}$$

ניתן להוכיח על-ידי שימוש בכלל השרשרת כי $J \cdot J^* = 1$, (מכאן נובע ש- J שונה מאפס) בתנאים אלה נוכל להחליף את המשתנים באינטגרל הכפול כך:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| du dv$$

הערה 1: טרנספורמציה חד-חד ערכית בדרך כלל לא שומרת על שטח, כלומר שטח של Δ שונה

בדרך כלל משטחו של D . כאשר $J \neq 0$ בנקודה (u_0, v_0) אזי הטרנספורמציה $x = x(u, v), y = y(u, v)$

מעתיקה באופן חד-חד ערכי סביבה קטנה של (u_0, v_0) לסביבה קטנה של (x_0, y_0) . הסימן $du dv$ מסמן

שטח אינפיניטסימלי של הסביבה (u_0, v_0) והסימן $dx dy$ מסמן שטח אינפיניטסימלי של הסביבה

(x_0, y_0) . הקשר בין שטחים אלה הוא $dxdy \approx |J| du dv$.

הערה 2 :

ניתן להחליש חלק מהדרישות הנ"ל, למשל המשפט יישאר נכון אם היעקוביאן יהיה שווה לאפס בקבוצה חלקית של D בעלת שטח אפס (על עקומים או במספר סופי של נקודות בודדות) .

מעבר לקואורדינטות קוטביות

הטרנספורמציה $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ מתאימה לנקודה (r, φ) נקודה (x, y) ונקראת "טרנספורמציה לקואורדינטות קוטביות". היעקוביאן שלה שווה ל- $J = r$ ושונה מאפס פרט לנקודה

$(0,0)$, $(x, y) = (0,0)$ (כי $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) . לכן אחרי מעבר לקואורדינטות קוטביות מתקיים:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi$$

ו- D הוא תחום במישור x, y .

הערה:

בדרך כלל מומלץ לעבור לקואורדינטות קוטביות כאשר לתחום D יש סימטריה מעגלית או/

הפונקציה $f(x, y)$ תלויה בביטוי $x^2 + y^2$.

הטרנספורמציה $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$ נקראת "הטרנספורמציה לקואורדינטות אליפטיות"

(שים לב ש- $r^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$) . היעקוביאן של הטרנספורמציה שווה ל- $J = abr$.

תרגיל 7

עבור לקואורדינטות קוטביות באינטגרל $\iint_D f(x, y) dx dy$ בהנחה ש- $f(x, y)$ רציפה ב- D .

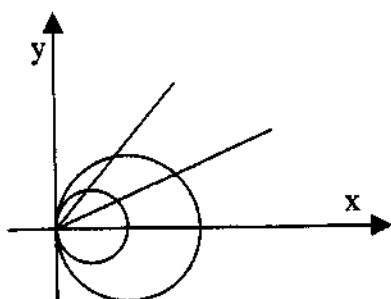
א' D חסום על-ידי $x = y = \sqrt{3} \cdot x$, $x^2 + y^2 = 6x$, $x^2 + y^2 = 4x$.

ב' D חסום על-ידי הישרים $y = x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y = 1$.

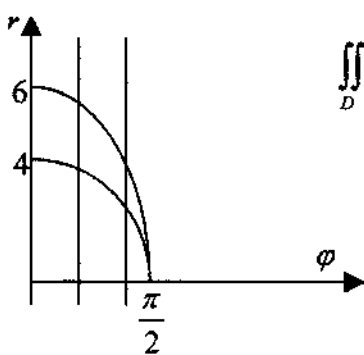
פתרון:

א' התחום חסום בין שני המעגלים $(x-3)^2 + y^2 = 3^2$, $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$ ושני ישרים בעלי

שיפוע 1 ו- $\sqrt{3}$ בהתאמה .



אחרי שנעבור לקוטביות, המעגל $x^2 + y^2 = 4x$ יעבור לעקום $r = 4 \cos \varphi$, המעגל $x^2 + y^2 = 6x$ יעבור לעקום $r = 6 \cos \varphi$, הישר $y = x$ יעבור לישר $\varphi = \frac{\pi}{4}$ והישר $y = \sqrt{3}x$ יעבור לישר $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
 לכן נקבל תחום Δ במישור r, φ החסום בין כל הקווים הנ"ל. (ראה ציור)



$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{4 \cos \varphi}^{6 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr$$

נקבל

ב' הישרים $y = x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ עוברים בהתאמה לישרים $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ו- $\varphi = \frac{\pi}{6}$ המקבילים לציר r .

הישר $y = 1$ עובר לעקום $r = \frac{1}{\sin \varphi}$. ולכן התחום Δ חסום בין שני הישרים האנכיים הנ"ל,

והגרף של $r = \frac{1}{\sin \varphi}$ וציר האופקי φ .

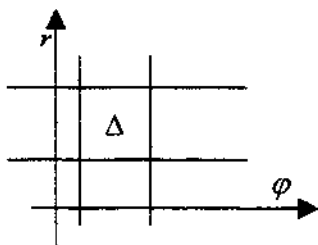
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr$$

נקבל :

תרגיל 8

חשב $I = \iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$ כאשר $D = \{(x,y) : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16, x \leq y \leq \sqrt{3} \cdot x\}$

פתרון:



התחום הוא חלק של טבעת מעגלית (ציור את D)
 אחרי המעבר לקואורדינטות קוטביות נקבל תחום

$$\Delta = \left\{ (\varphi, r) : \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 3 \leq r \leq 4 \right\}$$

מלבני

$$I = \iint_{\Delta} \varphi \cdot r d\varphi dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi \int_3^4 r dr = \frac{49\pi^2}{576} \quad \text{ולכן} \quad \arctan \frac{y}{x} = \varphi \quad \text{בקואורדינטות קוטביות}$$

תרגיל 9

חשב את האינטגרל $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ כאשר D חסום על ידי למניסקטה של ברנולי :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad a > 0, x \geq 0$$

פתרון:

אחרי שנעבור לקוטביות נקבל את המשוואה $r^4 = a^2(r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi)$. אחרי שנפשט

את המשוואה, נקבל $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. הביטוי מתחת לשורש חייב להיות לא שלילי ולכן יש

$$\Delta = \left\{ (\varphi, r) : -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\varphi} \right\} \quad \text{קיבלנו תחום} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$I = \iint_{\Delta} r^3 d\varphi dr = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 dr = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^4 \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{a^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{\pi a^4}{16}$$

תרגיל 10

נתון : $I(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2) dx dy$, כאשר f היא פונקציה רציפה במשתנה אחד.

חשב $I'(2)$ אם ידוע ש- $f(4) = \pi$.

פתרון:

$$I'(t) = 2\pi t f(t^2) \quad \text{לכן} \quad I(t) = \int_0^t d\varphi \int_0^t r f(r^2) dr = 2\pi \int_0^t r f(r^2) dr$$

$$\text{לסיכום} \quad I'(2) = 2\pi \cdot 2 \cdot f(4) = 4\pi^2$$

תרגיל 11

תחום D נמצא ברביע הראשון וחסום על-ידי הקווים $x = 4$, $x^2 - y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 1$

ו- $y = 0$. נתונה הטרינספורמציה ממישור x, y למישור u, v : $u = x^2, v = x^2 - y^2$.

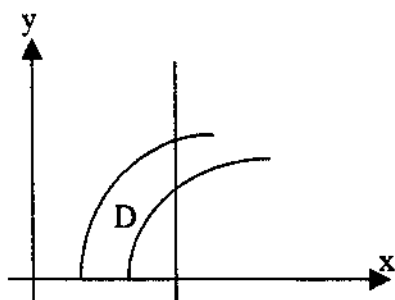
א' מהי התמונה של התחום D במישור u, v ?

$$\text{ב' חשב} \quad I = \iint_D x y e^{x^2 - y^2} dx dy$$

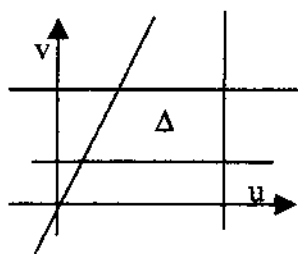
פתרון:

התחום D חסום בין שתי היפרבולות ושני ישרים.

הקווים $x^2 - y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 1$ עוברים



בהתאמה לשני ישרים $v=1$ ו- $v=9$. הישר $x=4$ עובר לישר $u=16$.



כעת נציב $y=0$ במשוואה $v=x^2-y^2$ ונקבל $v=x^2$.

לכן $v=u$, ז"א הישר $y=0$ עובר לישר $v=u$.

קיבלנו תחום Δ המהווה טרפז ישר זווית.

(ראה ציור)

ב' היעקוביאן של הטרנספורמציה ההפוכה שווה ל- $J^* = \begin{vmatrix} 2x & 2x \\ 0 & -2y \end{vmatrix} = -4xy$

לכן $|J| = \frac{1}{4xy}$. נקבל $\iint_D xye^{x^2-y^2} dx dy = \iint_{\Delta} xye^v \cdot \frac{1}{4xy} du dv = \frac{1}{4} \iint_{\Delta} e^v du dv$

באינטגרל האחרון נוז יותר להתחיל את האינטגרציה לפי v ואחרי זה לפי u .

$$I = \frac{1}{4} \int_1^9 dv \int_v^{16} e^v du = 2e^9 - 4e$$

תרגיל 12

חשב את האינטגרל $I = \iint_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} dx dy$

כאשר $D = \left\{ (x, y) : x^3 \leq y \leq 4x^3, \frac{1}{2} \leq x+y \leq 1 \right\}$

פתרון:

נציב $u=x+y$, $v=\frac{y}{x^3}$. שני הישרים $x+y=1$ ו- $x+y=\frac{1}{2}$ יעברו לשני ישרים

$u=1$ ו- $u=\frac{1}{2}$. שתי הפרבולות ממעלה שלישית $y=x^3$ ו- $y=4x^3$ יעברו לשני

ישרים $v=1$ ו- $v=4$. ולכן התחום D עובר למלבן $\Delta = \left\{ (u, v) : \frac{1}{2} \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 4 \right\}$

נחשב את היעקוביאן של הטרנספורמציה ההפוכה $J^* = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-3y}{x^4} \\ 1 & \frac{1}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{x+3y}{x^4}$ לכן $|J| = \frac{x^4}{x+3y}$

$$I = \iint_{\Delta} \frac{x+3y}{x^4} e^v \frac{x^4}{x+3y} du dv = \iint_{\Delta} e^v du dv = \int_{\frac{1}{2}}^1 du \int_1^4 e^v dv = \frac{e^4 - e}{2}$$

תרגיל 13

חשב $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$ כאשר $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

פתרון:

נבחר $u = x - y, v = x + y$.

הישר $x + y = 1$ יעבור לישר $v = 1$.

הישר $y = 0$ יעבור לישר $v = u$ והישר

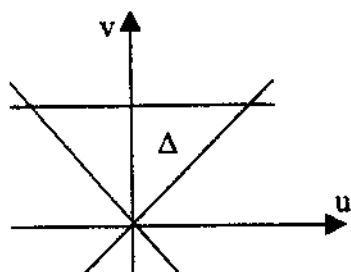
$x = 0$ יעבור לישר $v = -u$.

היעקוביאן של הטרנספורמציה ההפוכה

שווה ל- $J^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ ולכן $J = \frac{1}{2}$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du = \frac{1}{2} \int_0^1 v (e - e^{-1}) dv = \frac{e - e^{-1}}{4}$$

נחשב את האינטגרל:



פרק 13

חישוב שטחים ונפחים באמצעות אינטגרל כפול

יהי D תחום מישורי רגולרי בעל שטח S . אזי $S = \iint_D dx dy$

תהי $z = f(x, y)$ רציפה, חסומה ולא שלילית בתחום D . אזי $z = f(x, y)$ מתארת משטח רציף

שנמצא מעל לתחום מישורי D . נסמן ב- V את התחום התלת-ממדי

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

אזי הנפח של V שווה ל- $|V| = \iint_D f(x, y) dx dy$

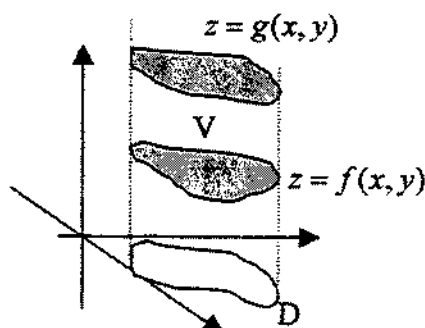
אם תחום תלת-ממדי V נמצא בין שני משטחים

$z = f(x, y)$ ו- $z = g(x, y)$ כאשר שתי

הפונקציות רציפות וחסומות בתחום D אזי נפח התחום

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

שווה ל- $|V| = \iint_D (g(x, y) - f(x, y)) dx dy$



תרגיל 1

חשב שטח התחום D החסום על-ידי הלמיסקטה $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$

פתרון:

כאשר מחליפים במשוואה את x ב- $-x$ או את y ב- $-y$ המשוואה לא משתנה ולכן

התחום D סימטרי ביחס לשני הצירים. אם כן, מספיק לחשב שטח התחום D^* שנמצא רק

ברביע הראשון ואת התוצאה לכפול ב-4. נעבור לקואורדינטות קוטביות $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$

פונקציה $r(\varphi)$ תהיה מוגדרת עבור $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \quad \text{ולכן} \quad S = \iint_D dx dy = 4 \iint_{D^*} dx dy = 4 \iint_{\Delta} r dr d\varphi$$

תרגיל 2

חשב שטח התחום D החסום על-ידי האליפסה $(ax + by + c)^2 + (dx + ey + f)^2 = R^2$

פתרון:

נציב $u = ax + by + c$, $v = dx + ey + f$ ונקבל במישור u, v את המעגל $u^2 + v^2 = R^2$

שים לב : שטח האליפסה בדרך כלל לא יהיה שווה לשטח המעגל למרות שהטרנספורמציה היא חד-חד ערכית.

נחשב $J^* = \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} = ae - bd$ ונניח שהיעקוביאן שונה מאפס.

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{\Delta} |J| du dv = \frac{1}{|ae - bd|} \iint_{\Delta} du dv = \frac{\pi R^2}{|ae - bd|}$$

(האינטגרל $\iint_{\Delta} du dv$ מסמן שטח העיגול $u^2 + v^2 = R^2$)

תרגיל 3

תחום מישורי D נמצא ברביע הראשון וחסום על-ידי עקום סגור $\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$

מצא נפח של גוף תלת-ממדי V כאשר $V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq \sqrt{xy}\}$

פתרון:

נעבור לקואורדינטות אליפטיות $x = \sqrt{3}r \cos \varphi, y = \sqrt{2}r \sin \varphi$ היעקוביאן הוא $J = \sqrt{6} \cdot r$

נרשום את העקום $\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$ בעזרת קואורדינטות אליפטיות $r = \sqrt[4]{0.5 \sin 2\varphi}$

הפונקציה $r(\varphi)$ מוגדרת לכל $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. לכן במישור φ, r נקבל תחום נורמלי Δ :

$$\Delta = \{(\varphi, r) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sqrt[4]{0.5 \sin 2\varphi}\}$$

נחשב את הנפח:

$$|V| = \iint_D \sqrt{xy} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[4]{0.5 \sin 2\varphi}} \sqrt{0.5 \sin 2\varphi} \cdot \sqrt{6} \cdot r^2 dr = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

תרגיל 4

חשב נפח הגוף החסום בין $z = x^2 + y^2$ ו- $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

פתרון:

הגוף חסום מלמטה על-ידי הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$ ומלמעלה על-ידי החרוס $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

שני המשטחים נחתכים לאורך עקום מרחבי שהיסלו קובע את התחום D במישור xy . אחרי הצבה

נקבל $z = 2\sqrt{z}$ ומכאן שהמשטחים נפגשים עבור $z = 0$ או $z = 4$. אחרי שנציב $z = 4$ באחת

מסתי המשוואות נקבל מעגל $x^2 + y^2 = 4$. לכן תחום D חסום על ידי המעגל.

$$|V| = \iint_D (2\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2r - r^2) \cdot r dr = \frac{8\pi}{3}$$

נחשב את הנפח

תרגיל 5

מצא נפח הגוף החסום בין $z = x + y$ ו- $z = x^2 + y^2$.

פתרון:

הגוף חסום מלמטה על-ידי הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$ ועל-ידי המישור $z = x + y$.

שני המשטחים נחתכים לאורך עקום מרחבי שהיסלו על מישור xy הוא $x^2 + y^2 = x + y$

משוואה זו ניתן לרשום גם כך $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. זהו מעגל מוזז שראשיתו ב- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

הנפח שווה ל- $|V| = \iint_D ((x + y) - (x^2 + y^2)) dx dy$ כאשר D הוא תחום החסום על-ידי העיגול

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות ונעשה גם ה הזה:

$$x - \frac{1}{2} = r \cos \varphi, y - \frac{1}{2} = r \sin \varphi, J = r$$

אחרי הזה נקבל מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו $\frac{1}{\sqrt{2}}$. שים לב שהביטוי הרשום

$$\frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 : \text{ בתוך האינטגרל } (x + y) - (x^2 + y^2) \text{ ניתן לרשום כך:}$$

$$|V| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - r^2\right) \cdot r dr = \frac{\pi}{2} (r^2 - r^4) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{8} \quad \text{לכן}$$

תרגיל 6

מצא נפח של גוף החסום בין שני גלילים $x^2 + z^2 = R^2$ ו- $y^2 + z^2 = R^2$.

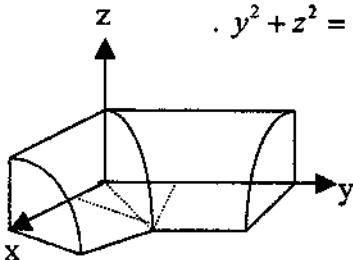
פתרון:

גליל הסימטריה של הגוף מספיק לחשב את הנפח

שנמצא בשמינית הראשונה של המרחב $x, y, z \geq 0$

מעל המשולש $0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq x$ ולכפול את

$$|V| = 16 \int_0^R dx \int_0^x \sqrt{R^2 - x^2} dy = 16 \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{16R^3}{3} \quad \text{לכן. 16. התוצאה ב-}$$



תרגיל 7

תחום מישורי D חסום על-ידי הקווים $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $x = y^2$, $x = \frac{1}{2}y^2$.

מצא נפח של גוף V כאשר $V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq xy\}$

פתרון:

נגדיר טרנספורמציה $u = \frac{x^2}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$ ממישור xy למישור uv . טרנספורמציה זו מעתיקה את

הפרבולות לישרים המקבילים לצירים u ו- v . ולכן $\Delta = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\}$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & \frac{-y^2}{x^2} \\ \frac{-x^2}{y^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3 \quad \text{ולכן} \quad J = \frac{1}{3} \quad \text{בנוסף קל לראות כי} \quad xy = uv.$$

$$|V| = \iint_D xy dx dy = \int_1^2 du \int_1^2 3uv dv = \frac{27}{4} \quad \text{נקבל:}$$

מרכז המסה של פלטה מישורית

נתונה פלטה מישורית D (אנו מניחים שהפלטה שטוחה בלי עובי) בעלת צפיפות המסה $f(x, y)$.

אזי מסה של הפלטה שווה ל- $m = \iint_D f(x, y) dx dy$ והשיעורים של מרכז המסה (x_0, y_0)

$$y_0 = \frac{\iint_D y \cdot f(x, y) dx dy}{m}, \quad x_0 = \frac{\iint_D x \cdot f(x, y) dx dy}{m} \quad \text{נתונים על-ידי הנוסחאות:}$$

כאשר הפלטה הומוגנית מניחים בדרך כלל כי $f(x, y) \equiv 1$

תרגיל 8

נתונה פלטה מישורית $D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$ בעלת צפיפות המסה $f(x, y) = y$.

חשב מרכז המסה.

פתרון:

$$m = \iint_D y dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \frac{4}{5} \quad \text{נחשב מסה הפלטה}$$

הפלטה סימטרית ביחס לציר ה- y וצפיפות המסה אינה תלויה ב- x ולכן מטעמי הסימטריה

$$x_0 = 0 \quad \text{ברור ש-} \quad \iint_D y f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y^2 dy = \frac{4}{7} \quad \text{ולכן} \quad y_0 = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{7}$$

פרק 14

אינטגרל משולש

תהי $f(x, y, z)$ רציפה בתיבה $V = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$ אזי

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz$$

יהיה $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ תחום במישור xy ויהי V גוף

תלת-ממדי : $V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$ ותהי $f(x, y, z)$ רציפה

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad \text{ב-} V \text{ אזי}$$

האינטגרל המשולש $\iiint_V dx dy dz$ שווה לנפח של הגוף V .

שינוי המשתנים באינטגרל משולש

תהי $f(x, y, z)$ רציפה ב- V ונניח שנתונה טרנספורמציה חד-חד ערכית המעתיקה גוף V^*

ממרחב uvw לגוף V במרחב xyz : $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$.

נניח שהפונקציות שמתארות את הטרנספורמציה בעלות נגזרות חלקיות רציפות. כמו באינטגרל כפול ניתן להגדיר את היעקוביאן של הטרנספורמציה המקורית ואת היעקוביאן של הטרנספורמציה

$$\text{ההפוכה :} \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad \text{ומתקיים :} \quad J \cdot J^* = 1 \quad J^* = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J| du dv dw$$

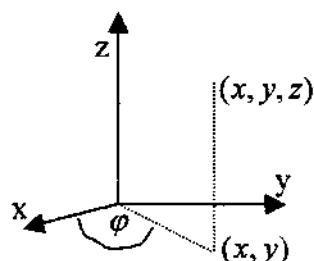
הערה : כמו באינטגרל כפול, אפשר להחליש חלק מהדרישות של המשפט. למשל המשפט יישאר נכון

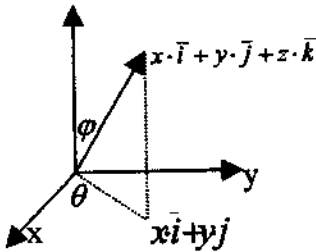
אם הטרנספורמציה לא תהיה חד-חד ערכית בתת-קבוצה של V^* בעלת נפח השווה לאפס.

טרנספורמציה לקואורדינטות גליליות

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$$

היעקוביאן הוא $J = r$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $r \geq 0$.





בסרטפוטמציה לקואורדינטות כדוריות

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$$

היעקוביאן שווה ל- $J = r^2 \sin \varphi$.

(הזווית φ היא בין הכיוון החיובי של ציר ה- z לבין

וקטור המצב של הנקודה $x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$ והזווית θ היא

הזווית בין היטלו של וקטור המצב על המישור xy לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x) θ, φ, r משתנים

$$\text{בגבולות } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r$$

הערה: בדרך כלל מומלץ לעבור לקואורדינטות גליליות כאשר לגוף V יש סימטריה צירית או שהפונקציה

הרשומה בתוך האינטגרל המשולש כוללת ביטוי $x^2 + y^2$. לקואורדינטות כדוריות עוברים בדרך כלל אם

לגוף V יש סימטריה כדורית או שבתוך האינטגרל המשולש מופיע הביטוי $x^2 + y^2 + z^2$.

לקואורדינטות $x = ar \sin \theta \cos \varphi, y = br \sin \theta \sin \varphi, z = cr \cos \theta$ נקרא כדוריות מוכללות.

היעקוביאן שווה ל- $J = abcr^2 \sin \varphi$.

תרגיל 1

חשב את האינטגרל המשולש $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ כאשר V חסום על-ידי המשטחים:

$$z = 1 \quad \text{ו-} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

פתרון:

V חסום מלמטה על-ידי החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ומלמעלה על-ידי המישור $z = 1$.

לגוף יש סימטריה מסביב לציר ה- z ולכן נעבור לקואורדינטות גליליות.

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 r^2 dz = 2\pi \int_0^1 r^2 (1-r) dr = \frac{\pi}{6}$$

תרגיל 2

חשב את האינטגרל המשולש $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ כאשר V חסום על-ידי

$$\text{המשטח: } x^2 + y^2 + z^2 = z$$

פתרון:

$$\text{המשוואה } x^2 + y^2 + z^2 = z \text{ מתארת כדור מוחזק שמשקו}$$

למישור xy .

נעבור לקואורדינטות כדוריות במשוואה $x^2 + y^2 + z^2 = z$ ונקבל $r = \cos \varphi$.
 במשוואה זו לא רשומה הזווית θ ולכן היא משתנה באופן חופשי בין 0 ל- 2π . (הדבר גם
 ברור משיקולים גיאומטריים). $r \geq 0$ ולכן יש לדרוש שהזווית φ תשתנה בין 0 ל- $\frac{\pi}{2}$.
 (ושוב הדבר ברור משיקולים גיאומטריים כי וקטור המצב של הנקודה שנמצאת על הכדור הנ"ל
 יוצר זווית 0 כאשר הנקודה נמצאת על החלק החיובי של ציר ה- z וגדלה עד ל- $\frac{\pi}{2}$ ככל שהנקודה
 יורדת ומתקרבת ל"קוטב הדרומי" של הכדור המונח על המישור xy).

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^3 \sin \varphi dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{10}$$

תרגיל 3

חשב נפח של הגליל $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$ החסום מלמעלה ומלמטה על-ידי $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
 (זהו גוף של Viviani).

פתרון:

הגוף סימטרי ביחס למישור xy וביחס למישור $y=0$ (החלפת y ב- $-y$ לא משנה את שתי

המשוואות) ולכן אחרי שנעבור לגליליות נחשב את הנפח רק עבור $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

ונכפול את התוצאה ב-4. המשוואה $x^2 + y^2 = ax$ תהפוך ל- $r = a \cos \varphi$ והמשוואה

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{ל-} \quad z = \sqrt{a^2 - r^2} \quad \text{לכן הנפח שווה ל-}$$

$$\iiint_V dx dy dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} dr \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

תרגיל 4

מצא נפח הגוף החסום על-ידי המשטח הסגור $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z$.

פתרון:

אנף שמאל של המשוואה אינו שלילי ולכן $z \geq 0$, כלומר הגוף נמצא כולו מעל המישור xy .
 כאשר מחליפים במשוואה x ב- $-x$ או y ב- $-y$ המשוואה לא משתנה ולכן מספיק לחשב את
 הנפח עבור $x, y, z \geq 0$ ולכפול את התוצאה ב-4. נעבור לקואורדינטות כדוריות ונקבל את

$$|V| = \iiint_V dx dy dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\cos \varphi}} r^2 \sin \varphi dr = \frac{\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{3}, \quad r = \sqrt[3]{\cos \varphi}$$

תרגיל 5

חשב נפח המקבילון החסום בין שלושה זוגות של מישורים מקבילים :

$$x + y + z = \pm 1, 2x + y + 3z = \pm 2, 3x + 2y + z = \pm 3$$

פתרון:

נעבור לקואורדינטות חדשות $u = x + y + z, v = 2x + y + 3z, w = 3x + 2y + z$

ונקבל במרחב uvw תיבה V^* : $-1 \leq u \leq 1, -2 \leq v \leq 2, -3 \leq w \leq 3$

נחשב את היעקוביאן של הסרנספורמציה ההפוכה $J^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$ ולכן $J = \frac{1}{3}$

$$|V| = \iiint_V dx dy dz = \frac{1}{3} \iiint_{V^*} du dv dw = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 = 16$$

(שים לב ש- $\iiint_{V^*} du dv dw$ מסמן נפח של התיבה V^*)

חישוב מסה ומרכז המסה של גוף תלת-ממדי.

נסמן ב- $P(x, y, z)$ נקודה כלשהי של גוף תלת-ממדי V ונסמן $f(P) = f(x, y, z)$ צפיפות

המסה בנקודה P . אזי המסה של הגוף V שווה ל- $m = \iiint_V f(P) dv = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$

והשיעורים של מרכז המסה הם:

$$z_0 = \frac{\iiint_V zf(P) dv}{m}, \quad y_0 = \frac{\iiint_V yf(P) dv}{m}, \quad x_0 = \frac{\iiint_V xf(P) dv}{m}$$

כאשר הגוף הומוגני מרחיק בדרך כלל ש- $f(x, y, z) \equiv 1$

תרגיל 6

מצא מרכז המסה של גוף הומוגני החסום על-ידי המישור $z = 1$ וחרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

פתרון:

$x_0 = 0, y_0 = 0$ כי מסעמי הסימטריה ברור כי $m = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^1 dz = \frac{\pi}{3}$

ולכן השיעורים של $z_0 = \frac{\iiint_V z dx dy dz}{m} = \frac{3}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^1 z dz = 3 \int_0^1 r(1-r^2) dr = \frac{3}{4}$

מרכז הכובד הם $\left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$

פרק 15

אינטגרל קווי מסוג ראשון ומסוג שני

אינטגרל קווי מסוג ראשון

יהי L עקום מישורי חלק הנתון על-ידי הצגה פרמטרית $x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, כאשר $x(t)$ ו- $y(t)$ בעלות נגזרות רציפות וגם $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0$ ותהי $f(x, y)$ רציפה על העקום L . בתנאים אלה ניתן להפוך את האינטגרל הקווי מסוג ראשון $\int_L f(x, y) dl$

$$\text{לאינטגרל רימן: } \int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

באופן דומה, אם L הוא עקום מרחבי הנתון בעזרת ההצגה: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ כאשר $x(t), y(t)$ ו- $z(t)$ בעלות נגזרות רציפות וגם $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 > 0$ ו- $f(x, y, z)$ רציפה על L אזי:

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

כאשר הפונקציה f שווה באופן זהותי ל-1 נקבל למעשה נוסחה לחישוב אורך העקום:

$$\int_L dl = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

אם $f(x, y)$ מסמנת צפיפות המסה של עקום מישורי L אזי מסה של העקום שווה

$$\text{לאינטגרל הקווי } m = \int_L f(x, y) dl \quad \text{ומרכז המסה נתון על-ידי הנוסחאות:}$$

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_L x f(x, y) dl \quad \text{ו-} \quad y_0 = \frac{1}{m} \int_L y f(x, y) dl$$

תרגיל 1

$$\text{חשב אורך העקום } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$$

פתרון:

העקום סימטרי ביחס לשני הצירים כי החלפה של x ב- $-x$ או y ב- $-y$ אינה משנה את המשוואה. אם כן, מספיק לחשב אורך העקום שנמצא ברביע הראשון ולכפול את התוצאה ב-4.

$$\text{נציב: } x = \cos^3 t, y = \sin^3 t \quad \text{כאשר } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_L dl = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt =$$

$$12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \cdot \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6$$

תרגיל 2

חשב $I = \int_L (x+y) dl$ כאשר L הוא קטע של ישר המחבר $O(0,0)$ עם $A(1,2)$.

פתרון:

ההצגה של הישר היא $x=t, y=2t, 0 \leq t \leq 1$.

$$I = \int_0^1 (t+2t) \cdot \sqrt{1+4} dt = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

תרגיל 3

חשב $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ כאשר L הוא המעגל $x^2 + y^2 = 2x$.

פתרון:

נעבור לקואורדינטות קוטביות $r = 2\cos\varphi$, נדרוש $r \geq 0$ ונקבל: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

נניח ש- φ הוא הפרמטר. אזי $x = 2\cos^2\varphi, y = 2\sin\varphi\cos\varphi$

$$, dl = \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2} = 2d\varphi, f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\cos\varphi$$

$$. I = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = 8 \quad \text{ולכן}$$

תרגיל 4

חשב $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$ כאשר L הוא קו בורג $x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \pi$.

פתרון:

$$, dl = \sqrt{1+1} dt = \sqrt{2} dt, x^2 + y^2 + z^2 = 1+t^2$$

$$I = \sqrt{2} \int_0^\pi (1+t^2) dt = 2\sqrt{2}\pi \left(1 + \frac{4\pi^2}{3}\right) \quad \text{ונקבל}$$

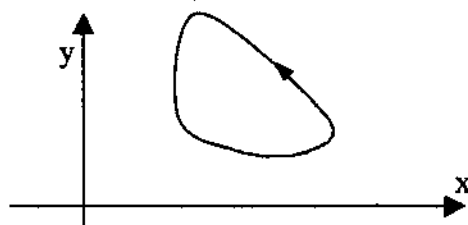
אינטגרל קווי מסוג שני במישור

יהי L עקום מישורי חלק בעל קצוות בנקודות A ו- B ונניח שהגורו עליו כיוון ההליכה מהנקודה A לנקודה B . נניח שנתון שדה וקטורי $\vec{F} = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$, כאשר $P(x, y), Q(x, y)$ רציפות על L . נניח שעקום L ניתן לרשום בעזרת ההצגה הפרמטרית $x = x(t), y = y(t)$ כאשר $\alpha \leq t \leq \beta$. נסמן ב- $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ וקטור המצב של העקום L ו- $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}$

$$\int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt \quad \text{אזי}$$

נסמן ב- $-L$ את המסלול בכיוון ההפוך מנקודה B לנקודה A , אזי $\int_{-L} \vec{F} d\vec{r} = - \int_L \vec{F} d\vec{r}$

אם הנקודות A ו- B מתלכדות זו עם זו אזי נקבל עקום רגולרי סגור. אינטגרל לאורך עקום סגור נסמן בדרך כלל כך $\oint_L \vec{F} d\vec{r}$ ונקרא לו הצירקולציה של השדה $\vec{F}$ לאורך המסלול הסגור L .
על מסלול סגור אפשר ללכת בכיוון הטריגונומטרי (נגד כיוון השעון) או בכיוון ההפוך.



כיוון טריגונומטרי



כיוון ההפוך לטריגונומטרי

המשמעות הפיזיקלית של האינטגרל הקווי מסוג שני

אם $\vec{F}$ מסמן כוח המופעל על חלקיק הנע לאורך המסלול L מקצה A לקצה B אזי האינטגרל הקווי $\int_L \vec{F} d\vec{r}$ מסמן את העבודה בהזזת החלקיק לאורך המסלול L מנקודה A לנקודה B .

תרגיל 5

חשב $\int_L y dx + x^2 dy$ כאשר L הוא המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$ ו- L נתון

על-ידי המשוואה: א' $y = 2x$

ב' $y = x^2$

פתרון:

א' נרשום את החצבה הפרמטרית $x=t, y=2t$. נקבל $dx=dt, dy=2dt$, $0 \leq t \leq 2$

$$\int_L y dx + x^2 dy = \int_0^2 2t dt + t^2 \cdot 2 dt = t^2 + 2 \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{28}{3}$$

ב' נציב $x=t, y=t^2$, $dx=dt, dy=2t dt$, $0 \leq t \leq 2$

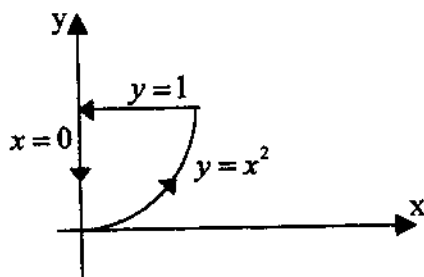
$$\int_L y dx + x^2 dy = \int_0^2 t^2 dt + t^2 \cdot 2t dt = \int_0^2 (t^2 + 2t^3) dt = \frac{32}{3}$$

הערה: שים לב שהאינטגרל תלוי בבחירת המסלול שמחבר את הנקודות $(0,0)$ ו- $(2,4)$.

תרגיל 6

חשב $\oint_L (x-y^2) dx + dy$ כאשר המסלול L

מתואר בציור :

פתרון:

המסלול חלק למקוטעין ולכן נפרק אותו לשלושה מסלולים חלקים:

$$I_1 = \int_0^1 (t-t^4) dt + 2t dt = \frac{13}{10} \quad \text{נקבל} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \text{כאשר} \quad L_1: x=t, y=t^2$$

$$I_2 = \int_1^0 (t-1) dt = \frac{1}{2}, \quad dx=dt, dy=0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \text{כאשר} \quad L_2: x=t, y=1$$

$$I_3 = \int_1^0 dt = -1, \quad dx=0, dy=dt, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \text{כאשר} \quad L_3: x=0, y=t$$

$$I = \frac{13}{10} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{8}{10} \quad \text{ולכן}$$

תרגיל 7

חשב את האינטגרלים : א' $\oint_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ ב' $\oint_L \frac{x dy + y dx}{x^2 + y^2}$ כאשר L

הוא המעגל $x^2 + y^2 = a^2$ בכיוון הסריגנומטרי.

פתרון:

נציב $dx = -a \sin t dt$, $dy = a \cos t dt$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $x = a \cos t$, $y = a \sin t$

$$\oint_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}{a^2} dt = 2\pi \quad \text{א'}$$

$$\oint_L \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a \cos t \cdot (-a \sin t) + a \sin t \cdot a \cos t}{a^2} dt = 0 \quad \text{ב'}$$

שדה משמר (שדה פוטנציאלי)

יהי $\vec{F} = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$ שדה וקטורי רציף בתחום D.

אם קיימת פונקציה סקלרית $U(x, y)$ כך ש- $\vec{F} = \nabla U$ אזי נקרא לשדה כזה

שדה משמר (פוטנציאלי) ולפונקציה U הפוטנציאל של השדה F.

נתבונן באינטגרל הקווי $\int_{AB} P dx + Q dy$ כאשר A ו-B שתי נקודות כלשהן השייכות ל-D.

AB מסמן מסלול חלק כלשהו המחבר A עם B ומסלול זה נמצא ב-D. אם האינטגרל הזה

אינו תלוי במסלול אלא רק בנקודות ההתחלה A ובנקודות הסוף B אזי נאמר שהאינטגרל אינו תלוי במסלול האינטגרציה.

משפט

האינטגרל $\int_{AB} P dx + Q dy$ אינו תלוי במסלול אם ורק אם השדה $\vec{F} = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$

הוא שדה משמר ו- $\int_{AB} P dx + Q dy = U(B) - U(A)$

מסקנה: אם השדה $\vec{F} = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$ משמר בתחום D אזי $\oint_L \vec{F} d\vec{r} = 0$

לכל מסלול סגור L המוכל ב-D.

משפט (תנאי הכרחי לשדה משמר)

יהי $\vec{F} = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$ שדה וקטורי השייך ל- C^1 מעל תחום D.

אם השדה $\vec{F}$ משמר ב-D אזי $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

הגדרה

לתחום D נקרא תחום פשוט קשר אם כל מסלול סגור שנמצא ב-D חוסם אך ורק נקודות השייכות לתחום D.

למשל מלבן או עיגול הם תחומים פשוטי קשר. לעומת זאת הטבעת $1 < x^2 + y^2 < 4$ או עיגול בלי נקודת הראשית $0 < x^2 + y^2 < 4$ הם תחומים לא פשוטי קשר.

משפט (תנאי מספיק והכרחי לשדה משמר בתחום פשוט-קשר)

יהיה $\vec{F} = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$ שדה השייך ל- C^1 בתחום פשוט-קשר D .

השדה $\vec{F}$ משמר בתחום D אם ורק אם $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ב- D .

אם שדה $\vec{F} = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$ משמר אז ניתן לחשב את הפוטנציאל $U(x, y)$ בעזרת

הנוסחה: $U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C$ כאשר C מספר קבוע כלשהו.

משפט

יהי $\vec{F} = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$ שדה השייך ל- C^1 בתחום פשוט-קשר D פרט אולי

לנקודה (x_0, y_0) השייכת ל- D ונניח שבכל הנקודות של D פרט לנקודה זו מתקיים

התנאי $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. אזי לכל שני עקומים חלקים וסגורים L_1, L_2 המקיפים את

הנקודה (x_0, y_0) מתקיים השוויון $\oint_{L_1} \vec{F} d\vec{r} = \oint_{L_2} \vec{F} d\vec{r}$ (על שני העקומים בוחרים אותו כיוון)

תרגיל 8

נתון שדה וקטורי $\vec{F} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$ ונתונים שלושה מסלולים:

$$L_1: x^2 + y^2 = 1 \text{ בכיוון הסריגנומטרי}$$

$$L_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ בכיוון ההפך לסריגנומטרי}$$

$$L_3: (x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \text{ בכיוון הסריגנומטרי}$$

חשב $\oint_{L_1} \vec{F} d\vec{r}$, $\oint_{L_2} \vec{F} d\vec{r}$, $\oint_{L_3} \vec{F} d\vec{r}$

פתרון:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad P = 1 + \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

פרט ל- $(0,0)$.

$$\oint_{L_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \sin t)(-\sin t) + \cos^2 t}{1} dt = 2\pi \quad \text{ונקבל } x = \cos t, y = \sin t$$

א' נציב

$$\oint_{L_2} \vec{F} d\vec{r} = -2\pi$$

ב' המסלול מקיף את הנקודה הסינגולרית $(0,0)$ בכיוון ההפוך לסריגנומטרי ולכן

ג' הנקודה $(0,0)$ נמצאת מחוץ למסלול ולכן תחום D החסום על-ידי המסלול L_3 פשוט-קשר ולכן

$$\oint_{L_3} \vec{F} d\vec{r} = 0$$

התנאי $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (שמתקיים ב- D) מהווה תנאי הכרחי ומספיק. השדה משמר ולכן

תרגיל 9

נתון שדה וקטורי $\vec{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$ ויהיו L_1 ו- L_2 שני המסלולים מ- $(2,0)$

ל- $(-2,0)$ הנתונים על-ידי: $L_1: x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$ ו- $L_2: x^2 + y^2 = 4, y \leq 0$

$$\int_{L_1} \vec{F} d\vec{r} \quad \text{א' חשב} \quad \int_{L_2} \vec{F} d\vec{r} \quad \text{ב' חשב}$$

ב' הוכח כי $\vec{F}$ משמר בחצי הטבעת $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$

ג' יהי $U(x, y)$ הפוטנציאל של $\vec{F}$ ב- D כך ש- $U(2, 0) = 1$. חשב $U(-2, 0)$

ד' הוכח כי $\vec{F}$ לא משמר בכל הטבעת $E = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

הסבר מדוע ניתן לבנות פונקציית הפוטנציאל בחצי-הטבעת D ולא ניתן לבנות את

הפוטנציאל בטבעת E .

פתרון:

א' $0 \leq t \leq \pi$, $dy = 2 \cos t dt$, $dx = -2 \sin t dt$, $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$

$$\int_{L_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^\pi \frac{4 \sin^2 t + \cos^2 t}{4} dt = \int_0^\pi dt = \pi$$

$$\int_{L_2} \vec{F} d\vec{r} = - \int_0^\pi dt = -\pi$$

ב' הפעם הכיוון הפוך ולכן

ג' D . $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$. הוא פשוט-קשר ולכן זהו תנאי הכרחי ומספיק

לשדה משמר ב- D .

ד' נחשב את האינטגרל על המסלול הסגור $L: x^2 + y^2 = 4$ ונקבל $\oint_L \vec{F} d\vec{r} = 2\pi \neq 0$

ולכן השדה לא משמר ב- E . בחצי הטבעת הפוטנציאל של השדה הוא $U(x, y) = \arctan \frac{y}{x} = \varphi$

כאשר עוברים על המעגל בכיוון הטריגונומטרי הזווית φ גדלה באופן רציף. כאשר חוזרים אחרי סיבוב שלם לנקודת ההתחלה מקבלים בנקודת ההתחלה את הערך של הפוטנציאל $\varphi + 2\pi$ כלומר $U(x, y)$ אינה פונקציה כי באותה הנקודה $U(x, y)$ שווה ל φ וגם ל- $\varphi + 2\pi$.
שים לב שכל עוד לא משלמים את הסיבוב, $U(x, y)$ היא פונקציה ולכן בחצי - הטבעת השדה משמר.

פרק 16

משפט גרין במישור

משפט גרין בתחום פשוט-קשר

יהי D תחום פשוט-קשר ונניח ששפתו עקום סגור וחלק L (או חלק למקוטעין).

תהינה P, Q ו- $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ רציפות ב- D ועל L , אזי:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

כאשר L בכיוון הסריגונומטרי.

משפט גרין בתחום מרובה-קשר

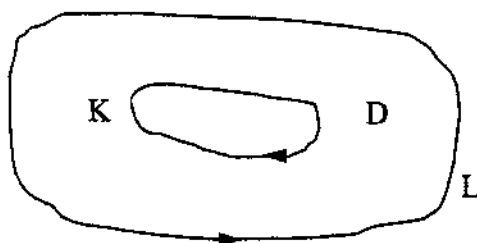
יהי D תחום מרובה-קשר ונניח ששפתו מורכבת משני עקומים סגורים וחלקים: עקום חיצוני L

ועקום פנימי K ותהינה P, Q ו- $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ רציפות ב- D ועל L ו- K

$$\oint_L Pdx + Qdy + \oint_K Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad \text{אזי:}$$

כאשר L בכיוון הסריגונומטרי ו- K בכיוון ההפוך לסריגונומטרי.

הערה: ההסכם הוא שכאשר מקיפים את התחום D רואים אותו תמיד מצד שמאל.

תרגיל 1

$$\text{חשב } I = \oint_L (xy^2 + e^{\sin x} + y) dx + yx^2 dy \quad \text{כאשר } L \text{ הוא } |x| + |y| = 1$$

בכיוון הסריגונומטרי.

פתרון:

$$I = - \iint_D dxdy = -2 \quad \text{ולפי גרין נקבל } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy - 2xy - 1 = -1$$

(שטח הריבוע $|x| + |y| = 1$ שווה ל-2)

תרגיל 2

חשב $I = \int_L (e^x \sin y - y + 1) dx + (e^x \cos y - 1) dy$ כאשר L הוא חצי-מעגל

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad y \geq 0, \quad \text{לנקודה } (2, 0) \text{ ונקודה } (0, 0).$$

פתרון:

המסלול אינו סגור ולכן כדי להשתמש במשפט גרין, נסגור אותו על-ידי הוספת המסלול $K: x = t, y = 0$

כאשר $0 \leq t \leq 2$ (הוספנו את הקוטר של המעגל שנמצא על ציר ה- x). כעת נוכל להשתמש

$$\oint_{L \cup K} (e^x \sin y - y + 1) dx + (e^x \cos y - 1) dy = \iint_D dx dy = \frac{\pi}{2} \quad \text{במשפט גרין:}$$

(שטח של חצי-המעגל שווה ל- $\frac{\pi}{2}$). כעת יש להוריד מתוצאה זו את האינטגרל הקווי על המסלול K .

$$K: x = t, y = 0, \quad \text{לכן } dx = dt, dy = 0$$

$$\int_K (e^x \sin y - y + 1) dx + (e^x \cos y - 1) dy = \int_0^2 dt = 2 \quad \text{ולכן } I = \frac{\pi}{2} - 2$$

תרגיל 3

חשב $I = \int_L (y + \sin^3 x) dx + (3x - \sin^3 y) dy$ כאשר L היא הפרבולה $y = x^2$ המחברת

את הנקודה $(0, 0)$ עם $(1, 1)$.

פתרון:

נסגור את המסלול על-ידי הוספת קטע של ישר $y = x$ המחבר בין $(0, 0)$ ל- $(1, 1)$.

$$\oint_{L \cup K} (y + \sin^3 x) dx + (3x - \sin^3 y) dy = 2 \iint_D dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy = \frac{1}{3}$$

על המסלול K שהוספנו נקבל $x = t, y = t, \quad dx = dt, dy = dt, \quad 0 \leq t \leq 1$.

$$\int_K (y + \sin^3 x) dx + (3x - \sin^3 y) dy = \int_0^1 (t + \sin^3 t) dt + \int_0^1 (3t - \sin^3 t) dt = 4 \int_0^1 t dt = -2$$

$$I = \frac{1}{3} - (-2) = 2\frac{1}{3} \quad \text{לסיכום:}$$

תרגיל 4

חשב את האינטגרל $I = \iint_D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^4} \right] dx dy$ כאשר $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

פתרון:

נניח ש- $P(x, y) \equiv 0$, $Q = \frac{x}{(x^2 + y^2)^4}$ ונשתמש במשפט גרין:

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ כאשר } L \text{ הוא המעגל החיצוני } I = \oint_L \frac{x}{(x^2 + y^2)^4} dy + \oint_K \frac{x}{(x^2 + y^2)^4} dy$$

בכיוון הסריגנומטרי ו- K הוא המעגל הפנימי $x^2 + y^2 = 1$ בכון ההפוך לסריגנומטרי.

אחרי שנגזור להצגה הפרמטרית $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ במעגל L ולהצגה הפרמטרית

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{4 \cos^2 t}{4^4} dt - \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{1^4} dt = \pi \cdot \left(\frac{1}{4^3} - 1 \right) \text{ במעגל } K \text{ נקבל } y = \sin t, x = \cos t$$

תרגיל 5

א' יהי D תחום פשוט-קשר כאשר שפתו עקום סגור וחלק L . נניח ש- S מסמן שטח של D .

הוכח כי $S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$, כאשר L בכיוון טריגנומטרי.

$$\text{ב' } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ חשב שטח החסום על-ידי האליפסה}$$

$$\text{ג' } \text{חשב שטח החסום על-ידי ה"עלה של דקרט" } x^3 + y^3 = 3xy$$

פתרון:

נניח ש- $P = -y$, $Q = x$ ונשתמש במשפט גרין:

$$\frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \iint_D (1+1) dx dy = \iint_D dx dy = S$$

א' נציב $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ונקבל

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \pi ab$$

$$\text{ג' נציב } y = tx \text{ ונקבל את ההצגה הפרמטרית } x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

קל לראות כי עבור $t = 0$ נקבל את הנקודה $(0, 0)$. כאשר t ישתנה בצורה רציפה

בין 0 ל- ∞ נקבל את הנקודות של העלה. כמו כן, כאשר $t \rightarrow \infty$ $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{9}{2} \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{3}{2} \text{ ולכן } dx = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} dt, dy = \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2} dt$$

פרק 17

אינטגרל משטחי מסוג ראשון ומסוג שני

אינטגרל משטחי מסוג ראשון

יהי S משטח דו-צדדי וחלק הנתון בעזרת הצגה פרמטרית $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ כאשר $(u, v) \in D$. נניח שהפונקציות $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ בעלות נגזרות חלקיות רציפות ב- D . נגדיר וקטור המצב של המשטח $\vec{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \vec{i} + y(u, v) \cdot \vec{j} + z(u, v) \cdot \vec{k}$, ונניח שעל המשטח

מוגדרת פונקציה רציפה $f(x, y, z)$. אלמנט שטח של המשטח נתון על-ידי $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$

$$\text{ומתקיים:} \quad \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

במקרה ש- $f(x, y, z)$ היא צפיפות המסה של המשטח אזי האינטגרל המשטחי מסוג ראשון מסמן את המסה של המשטח S .

אם $f(x, y, z) \equiv 1$ אז האינטגרל $S = \iint_S dS = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$ מסמן שטח של המשטח S .

אם המשטח S מוגדר באופן מפורש $z = z(x, y)$ כאשר $(x, y) \in D$ (ז"א המשטח מיוצג על-ידי פונקציה רציפה) אזי:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

$$\text{אם } f(x, y, z) \equiv 1 \text{ אזי האינטגרל } S = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

נותן שטח המשטח S .

כאשר המשטח הוא כדור $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ניתן להציג אותו בצורה פרמטרית על-ידי קואורדינטות כדוריות $\vec{r}(\theta, \varphi) = a \sin \varphi \cos \theta \cdot \vec{i} + a \sin \varphi \sin \theta \cdot \vec{j} + a \cos \varphi \cdot \vec{k}$ ואפשר להראות כי אלמנט שטח של הכדור הוא $dS = |\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi| d\theta d\varphi = a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$.

כאשר המשטח הוא גליל $x^2 + y^2 = a^2$ ניתן להציג אותו בצורה פרמטרית בעזרת קואורדינטות גליליות $\vec{r}(\varphi, z) = a \cos \varphi \cdot \vec{i} + a \sin \varphi \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ואפשר להראות כי אלמנט שטח של הגליל הוא $dS = |\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z| d\varphi dz = a d\varphi dz$.

שימושים במכניקה

אם $f(x, y, z)$ מסמן צפיפות המסה של משטח אזי שיעורי מרכז המסה של המשטח הם:

$$z_0 = \frac{1}{M} \iint_S z f(x, y, z) ds, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_S y f(x, y, z) ds, \quad x_0 = \frac{1}{M} \iint_S x f(x, y, z) ds$$

כאשר M מסה של המשטח $M = \iint_S f(x, y, z) dS$.

תרגיל 1

חשב שטח הפנים של המשטח $z = xy$ החסום על ידי הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

פתרון:

$$S = \iint_S ds = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} r dr = \frac{2\pi}{3} (\sqrt{8} - 1)$$

תרגיל 2

מצא שטח הפנים של החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ החסום בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 2x$.

פתרון:

$$S = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \pi \cdot \sqrt{2}$$

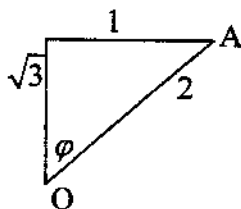
תרגיל 3

מצא שטח הפנים של משטח כדורי $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ כאשר $z \geq \sqrt{3}$.

פתרון:

בעזרת שיקולים טריגונומטריים פשוטים

נמצא כי $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ולכן $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$.



OA מסמן וקטור המצב של המשטח, כאשר O ראשית הכדור ו- φ הזווית המקסימלית בין OA

לבין הכיוון החיובי של ציר ה- z .

$$S = \iint_D 4 \sin \varphi d\theta d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \varphi d\varphi = 8\pi \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right)$$

תרגיל 4

נתון תחום תלת-ממדי $V = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$. נסמן ב- S משטח המהווה

שפתו של V (המעטפת של החרוט ובסיס החרוט) . צפיפות המסה של המשטח שווה ל-
 $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. חשב מסה של המשטח S .

פתרון:

$$M = \iint_{S_1} (x^2 + y^2) ds + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) ds$$

כאשר S_1 המעטפת של החרוט ו- S_2 הבסיס

$$\iint_{S_1} (x^2 + y^2) ds = \iint_D (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

של החרוט.

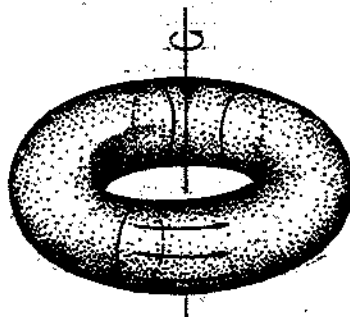
$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

אחרי מעבר לקואורדינטות קוטביות נקבל את התוצאה

$$M = \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2}) \quad \text{ולכן} \quad \iint_{S_2} (x^2 + y^2) ds = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}$$

תרגיל 5

בציור מתואר גוף הנקרא טורוס (נראה כמו גלגל ים) . ההצגה הפרמטרית של המשטח היא
 $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi, x = (4 + 2\cos u)\cos v, y = (4 + 2\cos u)\sin v, z = 2\sin u$
 (אפשר לקבל את המשטח למשל על-ידי סיבוב סביב ציר ה- z של המעגל $(x-4)^2 + z^2 = 2^2$)



מצא שטח הפנים של הטורוס.

פתרון:

$$\vec{r} = (4 + 2\cos u)\cos v \cdot \vec{i} + (4 + 2\cos u)\sin v \cdot \vec{j} + 2\sin u \cdot \vec{k}$$

נסמן

$$\vec{r}'_u = -2\sin u \cos v \cdot \vec{i} - 2\sin u \sin v \cdot \vec{j} + 2\cos u \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r}'_v = (4 + 2\cos u)(-\sin v) \cdot \vec{i} + (4 + 2\cos u)\cos v \cdot \vec{j}$$

$$\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = (-8 - 4 \cos u)(\cos u \cos v \cdot \vec{i} + \cos u \sin v \cdot \vec{j} + \sin u \cdot \vec{k})$$

ולכן $|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'| = 4(2 + \cos u)$. מכאן נקבל :

$$S = \iint_S |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'| du dv = 4 \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} (2 + \cos u) dv = 32\pi^2$$

תרגיל 6

מצא מסה של חצי-כדור $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, כאשר הצמיפות של המעטפת נתונה

על-ידי $f(x, y, z) = z$.

פתרון:

$$M = \iint_S z ds = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \pi$$

אינטגרל משטחי מסוג שני

יהי S משטח חלק דו-צדדי והי $\vec{n}$ וקטור נורמל יחידה למשטח S . נניח שעל המשטח S מוגדר

שדה וקטורי רציף $\vec{F} = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k}$.

אם $\vec{F}$ מסמן זרימת נוזל במרחב אזי האינטגרל המשטחי מסוג שני $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ מסמן כמות

הנוזל שעברה דרך המשטח S ביחידת זמן. לאינטגרל $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ נקרא שטף של שדה $\vec{F}$ דרך S .

לפעמים רושמים את האינטגרל באופן סקלרי : $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$:

אם S נתון בצורה פרמטרית $\vec{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \vec{i} + y(u, v) \cdot \vec{j} + z(u, v) \cdot \vec{k}$ כאשר

הפונקציות $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ בעלות נגזרות חלקיות רציפות בתחום D , אזי

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'| du dv$$

אם משטח S מוגדר באופן מפורש (המשטח הוא פונקציה) $(x, y) \in D$, $z = z(x, y)$ אזי

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \iint_D \frac{\vec{F} \cdot \vec{n} dx dy}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} \quad \text{אזי}$$

באופן דומה, אם S מתואר בעזרת $y = y(x, z)$ אזי

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \frac{\vec{F} \cdot \vec{n} dx dz}{|\vec{n} \cdot \vec{j}|}$$

תרגיל 7

חשב $\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds$ כאשר $\vec{A} = x \cdot \vec{i} + \vec{j} + z \cdot \vec{k}$,

$$S = \{(x, y, z) : x + 2y + z = 1, x, y, z \geq 0\}$$

ו- $\vec{n}$ נורמל יחידה היוצר זווית חדה עם ציר ה- z .

פתרון:

נשתמש בנוסחה $\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \frac{\vec{A} \cdot \vec{n} dx dy}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}$, $\vec{n} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}$,

$$|\vec{n} \cdot \vec{k}| = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \vec{A} \cdot \vec{n} = \frac{x+2+z}{\sqrt{6}} = \frac{x+2+1-x-2y}{\sqrt{6}} = \frac{3-2y}{\sqrt{6}}$$

ולכן $\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = dx dy = \iint_D \frac{\vec{A} \cdot \vec{n} dx dy}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (3-2y) dy = \frac{5}{6}$, $\frac{\vec{A} \cdot \vec{n}}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} = 3-2y$

תרגיל 8

חשב שטף של שדה וקטורי $\vec{F} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ דרך משטח סגור S המהווה שפה של הגוף $V = \{(x, y, z) : 3 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$. וקטור הנורמל $\vec{n}$ מכוון כלפי חוץ.

פתרון:

נסמן ב- $S_1 : z = 4 - x^2 - y^2$, וקטור הנורמל $\vec{n}$ שווה לגרדיאנט של $x^2 + y^2 + z - 4$

המחולק באורכו: $\vec{n} = \frac{2x \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$. ולכן $|\vec{n} \cdot \vec{k}| = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$

: S_1 נקבל את השטף דרך $\frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} = 2(x^2 + y^2 + 1)$

$$I_1 = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 2 \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2 + 1) r dr = \frac{16\pi}{3}$$

$I_2 = \iint_D -2 dx dy = -2\pi$ ולכן $ds = dx dy$, $\vec{F} \cdot \vec{n} = -2$, $\vec{n} = -\vec{k}$, $S_2 : z = 1$

לסיכום נקבל: $\frac{16\pi}{3} - 2\pi = \frac{10\pi}{3}$

תרגיל 9

חשב $\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds$ כאשר $\vec{A} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + \vec{k}$, $S : \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq -\sqrt{3}\}$

פתרון:

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad \vec{n} = \frac{2x \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + 2z \cdot \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}{2}$$

ואלמנט שטח של משטח כדורי הוא $ds = 4 \sin \varphi d\theta d\varphi$. הזווית θ משתנה בין 0 ל- 2π

והזווית φ משתנה בין 0 ל- $\frac{5\pi}{6}$ (ראה הסבר גאומטרי בתרגיל 3), נקבל:

$$\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iint_D 2 \cdot 4 \sin \varphi d\theta d\varphi = 8 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sin \varphi d\varphi = 16\pi \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

פרק 18

אינטגרל קווי במרחב ואנליזה וקטורית במרחב

נתבונן באופרטור וקטורי (נבלה) $\nabla = \bar{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$ ונניח שנתונה פונקציה

סקלרית $\Phi(x, y, z)$ ופונקציה וקטורית $\vec{A}(x, y, z) = P \cdot \bar{i} + Q \cdot \bar{j} + R \cdot \bar{k}$ ונניח שפונקציות

אלו שייכות ל- C^1 . בעזרת האופרטור ניתן להגדיר שלוש פונקציות חדשות :

$$\nabla \Phi = \text{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \bar{k} \quad , \quad \text{גרדיאנט}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \text{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{דיברגנץ}$$

הרוטור של $\vec{A}(x, y, z) = P \cdot \bar{i} + Q \cdot \bar{j} + R \cdot \bar{k}$ מוגדר באופן הבא:

$$\nabla \times \vec{A} = \text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot \bar{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \bar{k}$$

ניתן להוכיח על-ידי חשבון פשוט כי :

$$\nabla \times (\Phi \cdot \vec{A}) = (\nabla \Phi) \times \vec{A} + \Phi \cdot (\nabla \times \vec{A}) \quad , \quad \nabla (\Phi \cdot \vec{A}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{A} + \Phi \cdot (\nabla \vec{A})$$

בנוסף אם נניח ש- $\Phi, \vec{A}$ שייכות ל- C^2 אזי $\nabla(\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$

$$(\nabla \times (\nabla \Phi)) = 0 \quad \text{וא} \quad \text{rot}(\text{grad} \Phi) = 0 \quad \text{וא} \quad \text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0 \quad \text{וא} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

המשמעות הפיזיקלית של דיברגנץ

אם $\vec{A}$ מסמן מהירות הזרימה של נוזל במרחב ו- dV מסמן אלמנט נפח אזי $\text{div} \vec{A} dV$

מסמן כמות הנוזל שיוצאת (או נכנסת) מתוך dV ביחידת זמן.

האינטגרל המשולש $\iiint_V \text{div} \vec{A} dV$ כאשר V גוף חסום מסמן כמות הכללית של נוזל שיצא

מתוך V ביחידת זמן.

המשמעות הפיזיקלית של רוטור

נניח ש- $\vec{A}$ מסמן מהירות הזרימה של נוזל במרחב. נתבונן בכדור קטן מאד שנמצא בתוך הנוזל.

הוקטור $\vec{A}$ מראה כיוון ההתקדמות של הכדור (כלומר את המהירות הקווית).

בנוסף לכך הכדור יכול להסתובב סביב צירו (כמו כדור הארץ שמקיף את השמש ובו זמנית גם מסתובב סביב צירו) נניח שהמהירות הזוויתית של הכדור היא ω . אזי ניתן להוכיח שבקירוב $|\text{rot}\vec{A}| \approx 2\omega$ ולכן אם $\text{rot}\vec{A} = 0$ אזי בנוהל אין מערבולות.

המדה

שדה רציף $\vec{A}$ נקרא משמר במרחב אם קיימת פונקציה סקלרית $\Phi(x, y, z)$ השייכת ל- C^1 כך ש- $\nabla\Phi = \vec{A}$.
אם נניח ש- $\Phi(x, y, z)$ שייכת ל- C^2 , נוכל להשתמש בזהות $\text{rot}(\text{grad}\Phi) = 0$ ולכן נקבל את המסקנה : בשדה משמר אין מערבולות.

המדה

תחום מרחבי V נקרא פשוט-קשר אם לכל עקום סגור ופשוט L (שנמצא כולו ב- V) ניתן למצוא משטח ששפתו L והמשטח כולו נמצא ב- V .
למשל : תחום תלת-ממדי שנמצא בין שני כדורים $1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4$ הוא פשוט-קשר. לעומת זאת טורוס (ראה ציור בפרק הקודם) אינו פשוט-קשר.
גליל סיבובי שבסיסיו מעגלים בעלי רדיוס R וגובה H הוא תחום פשוט-קשר. אם נטלק מהגליל את כל הנקודות השייכות לציר הסיבוב נקבל גוף שאינו פשוט-קשר.

משפט (תנאי הכרחי ומספיק)

יהי V תחום פשוט-קשר במרחב ויהי $\vec{A}$ שדה וקטורי השייך ל- C^1 ב- V .
השדה $\vec{A}$ משמר אם ורק אם $\text{rot}\vec{A} = 0$.

אינטגרל קווי מסוג שני במרחב

יהי L עקום חלק במרחב, הנתון על-יד ההצגה הפרמטרית $\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$ כאשר $x(t), y(t), z(t)$ בעלי נגזרות רציפות בקטע $\alpha \leq t \leq \beta$ (אנו מניחים שהכיוון של L מתאים לגידול של הפרמטר t מ- α ל- β) . נניח שנתון שדה וקטורי :

$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\cdot\vec{i} + Q(x, y, z)\cdot\vec{j} + R(x, y, z)\cdot\vec{k}$ השייך ל- C^1 אזי :

$$\int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

הערה : הכיוון הסטנדרטי על L הוא הכיוון הסריגונומטרי ולכן אם לא מציינים במפורש מהו הכיוון יש תמיד להניח שזהו כיוון הסריגונומטרי.

תרגיל 1

חשב $I = \int_L x dx + dy + y dz$ כאשר L הוא קו החיתוך בין הגליל $x^2 + y^2 = 4$ ומישור $z = x + y$.

פתרון:

נבחר בהצגה הפרמטרית $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2 \cos t + 2 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

אז $dx = -2 \sin t dt, dy = 2 \cos t dt, dz = (-2 \sin t + 2 \cos t) dt$.

נציב תוצאות אלו באינטגרל הקווי $I = \int_L x dx + dy + y dz$ ונקבל:

$$I = \int_0^{2\pi} 2 \cos t (-2 \sin t) dt + 2 \cos t dt + 2 \sin t (-2 \sin t + 2 \cos t) dt$$

אחרי פישוטים נקבל :

$$I = \int_0^{2\pi} (2 \cos t - 4 \sin^2 t) dt = -4\pi \quad (\text{בדוק!})$$

תרגיל 2

חשב $I = \int_L y dx + z dy + x dz$ כאשר L הוא קו הבורג $x = \cos t, y = \sin t, z = t$.

כאשר $0 \leq t \leq 2\pi$.

פתרון:

$$I = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + (1+t) \cos t) dt = -\pi$$

תרגיל 3

חשב $I = \oint_L (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$ כאשר L הוא המעגל שמתקבל מחיתוך

של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ עם המישור $y = \sqrt{3}x$.

פתרון:

אחרי שנציב במשוואה של הכדור את $y = \sqrt{3}x$ נקבל $4x^2 + z^2 = 36$. נרשום משוואה זו

כך: $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1$. זהו החיטל של המעגל L על המישור xz . ההצגה הפרמטרית של מעגל L

היא: $x = 3 \cos t, z = 6 \sin t, y = 3\sqrt{3} \cos t$ כאשר $0 \leq t \leq 2\pi$. מכאן נקבל:

$$I = \int_0^{2\pi} (3\sqrt{3} \cos t - 6 \sin t)(-3 \sin t) dt + (6 \sin t - 3 \cos t)(-3\sqrt{3} \sin t) dt + (3 \cos t - 3\sqrt{3} \cos t) 6 \cos t dt = \int_0^{2\pi} (18 - 18\sqrt{3}) dt = 36\pi(1 - \sqrt{3})$$

חישוב הפוטנציאל של שדה משמר במרחב

נניח ש- $\vec{F}$ משמר בתיבה V המכילה מסלול האינטגרציה L . ניתן לחשב את האינטגרל

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} \quad \text{הקווי} \quad \text{באמצעות הפוטנציאל של השדה כמו שהדבר נעשה במישור.}$$

הנוסחה לפוטנציאל של השדה $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k}$

$$\Phi(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + C \quad \text{היא :}$$

תרגיל 4

$$\text{יהי } \vec{A} = (x^2 + y^2 z^3, y + 2xyz^3, z^3 + 3xy^2 z^2) \text{ שדה ב- } R^3.$$

א' הוכח כי השדה משמר.

$$\text{ב' חשב } \int_L \vec{A} d\vec{r} \text{ כאשר } L \text{ הוא המסלול } x=t, y=t^5, z=t^3+t \text{ מהנקודה } K(0,0,0)$$

לנקודה $L(1,1,2)$.

פתרון:

א' תנאי מספיק והכרחי לשדה משמר בתחום פשוט-קשר הוא ש- $\text{rot} \vec{A} = 0$. (השדה מוגדר

בכל המרחב ולכן זהו תחום פשוט-קשר). לא קשה לבדוק על-ידי חישובים כי אומנם הרוטור

שווה לאפס (בדוק!) ולכן השדה משמר בכל המרחב.

ב' נמצא את הפוטנציאל של השדה:

$$\begin{aligned} \Phi = \int_0^x P(x, y, z) dx + \int_0^y Q(0, y, z) dy + \int_0^z R(0, 0, z) dz + C &= \int_0^x (x^2 + y^2 z^3) dx + \\ &+ \int_0^y y dy + \int_0^z z^3 dz + C \end{aligned}$$

$$\text{ולכן } \Phi = \frac{x^3}{3} + xy^2 z^3 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^4}{4} + C$$

$$\int_L \vec{A} d\vec{r} = \Phi(1,1,2) - \Phi(0,0,0) = 12 \frac{5}{6}$$

תרגיל 5

נסמן $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ונגדיר שדה וקטורי

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{בתחום } V = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

א' הוכח כי השדה משמר ב- V .

ב' הוכח כי $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

ג' חשב $\oint_L \vec{A} d\vec{r}$ כאשר L הוא קו החיתוך בין $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ו- $z = x + y$.

הערה: זהו שדה רדיאלי שיש לו שימושים רבים בפיסיקה.

פתרון:

א' לא קשה לנחש ש- $\Phi = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$. ובאמת $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$.

ובאופן סימטרי ניתן לחשב גם את $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ו- $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$. לסיכום השדה משמר ב- V .

ב' באופן סימטרי ניתן לקבל את שאר הנגזרות $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$.

$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{x^2 + z^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$.

ואחרי שנבר אותן זו לזו נקבל כי $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

ג' העקום L נמצא ב- V . בסעיף א' הוכחנו כי השדה $\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$.

משמר בתחום V ולכן $\oint_L \vec{A} d\vec{r} = 0$.

פרק 19

משפט גאוס ומשפט סטוקס

משפט גאוס (משפט הדיברגנץ)

יהי V גוף חסום על-ידי משטח S פשוט סגור וחלק (או חלק למקוטעין). נסמן ב- $\vec{n}$ נורמל חיצוני ל- S

ויהי $\vec{A}(x, y, z) = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$ שדה וקטורי השייך ל- C^1 ב- V ועל S אזי:

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dx dy dz$$

משפט גאוס מאפשר להגדיר את המושג של דיברגנץ בלי תלות בבחירת מערכת הצירים:

נבחר גוף חסום V המכיל בתוכו נקודה M ונתחיל לקבץ את V לנקודה M (ד"א $V \rightarrow M$)

כאשר V יהיה מאד קטן נוכל להניח ש- $\operatorname{div} \vec{A}$ כמעט ולא משתנה ב- V ונקבל בקירוב

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dx dy dz \approx \operatorname{div} \vec{A} \cdot \iiint_V dx dy dz = V \cdot \operatorname{div} \vec{A}$$

נחלק שוויון זה ב- V ונדרוש ש- V יתכווץ ל- M נקבל:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow M} \frac{\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds}{V}$$

הגדרה זו של הדיברגנץ אינה תלויה במערכת צירים שנבחרה.

אם $\vec{A}$ מסמן מהירות של נוזל במרחב (ההנחה היא כי הנוזל אינו דחיס ובעל צפיפות $\rho \equiv 1$)

אזי $\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds$ מסמן כמות הנוזל היוצאת (או נכנסת) דרך המשטח S ביחידת זמן. לכן הגבול

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow M} \frac{\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds}{V}$$

מסמן כמות הנוזל היוצאת (או נכנסת) מנקודה M ביחידת זמן ליחידת נפח.

אם $\operatorname{div} \vec{A} > 0$ אזי בסביבה מאד קטנה של M יש מקורות. אם $\operatorname{div} \vec{A} < 0$ אז בסביבה מאד קטנה

של M יש שקעים. אם $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ אזי בסביבה מאד קטנה של M אין מקורות או שקעים.

לכן אם בתחום V תמיד $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ אזי ב- V אין מקורות או שקעים.

תרגיל 1

הוכח שאם $\vec{A} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ וגוף V חסום על-ידי משטח S סגור, פשוט וחלק אז נפח הגוף נתון על-ידי הנוסחה $V = \frac{1}{3} \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds$, כאשר $\vec{n}$ נורמל חיצוני למשטח S .

פתרון:

$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dx dy dz = 3 \iiint_V dx dy dz = 3V \quad \text{נשתמש במשפט גאוס:}$$

תרגיל 2

חשב $\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds$ כאשר S שפה של הקוביה $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

$$\vec{A} = (e^{\sin y} + x) \cdot \vec{i} + (y + \cos x^2) \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \quad \text{ונתון:}$$

פתרון:

$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dx dy dz = 3 \iiint_V dx dy dz = 3 \quad \text{ולכן } \operatorname{div} \vec{A} = 1 + 1 + 1 = 3$$

תרגיל 3

נתון הגליל: $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$ ונסמן ב- S משטח סגור

המהווה את השפה של הגליל. (מעטפת גלילית + שני בסיסים), נגדיר שדה וקטורי $\vec{A}$:

$$\vec{A} = [x + \sin(y^{10} + z^7)] \cdot \vec{i} + [y - e^{x^2 z}] \cdot \vec{j} + [\ln(x^2 + y^2 + 1) - z] \cdot \vec{k}$$

חשב שטף $\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds$.

פתרון:

$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dx dy dz = 12\pi \quad \text{ולכן } \operatorname{div} \vec{A} = 1 + 1 - 1 = 1$$

(12π הוא נפח הגליל בעל רדיוס בסיס 2 וגובה 3)

תרגיל 4

חשב $I = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds$ דרך המשטח $S = \{(x, y, z) : z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$

(S הוא משטח פרבולואידי שנמצא מעל חמישור xy) כאשר $\vec{A}$ הוא השדה:

$$\vec{A} = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2, 2x \arctan y, \frac{-2xz(1+y) + 1+y^2}{1+y^2} \right)$$

פתרון:

כדי להשתמש במשפט גאוס נסגור את הפרבולואיד מלמטה על ידי העיגול שנמצא במישור $z=0$:
 $S^* = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, z=0\}$. נסמן ב- V את הגוף החסום על-ידי שני המשטחים.

נחשב את הדיברגנץ : $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{2xy}{1+y^2} + \frac{2x}{1+y^2} - \frac{2x(1+y)}{1+y^2} = 0$ ולכן נקבל

$$\iint_{S^*} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dx dy dz = 0$$

נשאר לחשב את האינטגרל $\iint_{S^*} \vec{A} \cdot \vec{n} ds$

S^* נמצא במישור xy ולכן $ds = dxdy$ והנורמל כלפי חוץ הוא $\vec{n} = -\vec{k}$

$$\iint_{S^*} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = - \iint_{x^2+y^2 \leq 4} dxdy = -4\pi, \quad (\text{שים לב ש- } z=0) \quad \vec{A} \cdot \vec{n} = \vec{A} \cdot (-\vec{k}) = -1$$

$$\text{לסיכום} \quad I = 0 - (-4\pi) = 4\pi$$

תרגיל 5

חשב $\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} ds$ כאשר $\vec{A} = (x+1) \cdot \vec{j}$,

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq -\sqrt{2}\}$$

(S הוא חלק של משטח כדורי שנמצא מעל המישור $z = -\sqrt{2}$)

פתרון:

כדי להשתמש במשפט הדיברגנץ נסגור את V מלמטה על-ידי הוספת העיגול ברדיוס $\sqrt{2}$:

$$S^* = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2, z = -\sqrt{2}\}$$

כידוע $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$ ולכן נקבל

$$\iint_{S^*} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) dx dy dz = 0$$

נחשב את האינטגרל המשטחי $\iint_{S^*} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} ds$:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x+1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$$

לשם כך נחשב את $\vec{n}$ על המשטח S^* . $ds = dxdy, \vec{n} = -\vec{k}$

$$\iint_{S^*} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} ds = \iint_{S^*} \vec{k} \cdot (-\vec{k}) dxdy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 2} dxdy = -2\pi$$

מכאן

$$\text{לסיכום} \quad I = 0 - (-2\pi) = 2\pi$$

תרגיל 5

יהי S משטח חלק, פשוט וסגור החוסם גוף V . גניח ש- $f(x, y, z)$ שייכת ל- C^2 ב- V ועל S ומקיימת משוואת לפלס: $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$. הוכח כי $\oint_S f \cdot \frac{\partial f}{\partial n} ds \geq 0$.
 כאשר $\bar{n}$ נורמל חיצוני ל- S ו- $\frac{\partial f}{\partial n}$ מסמן את הנגזרת המכוונת בכיוון $\bar{n}$.

פתרון:

לפי הנתון $f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית ולכן $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \bar{n}$ ולכן נוכל לרשום את האינטגרל באופן הבא $\oint_S f \cdot \frac{\partial f}{\partial n} ds = \oint_S f \nabla f \cdot \bar{n} ds$. ונגיח כי השדה הוקטורי הוא $\vec{A} = f \cdot \nabla f$.
 נחשב את $\text{div} \vec{A}$: $\nabla(f \cdot \nabla f) = (\nabla f)^2 + f \cdot \nabla^2 f = (\nabla f)^2$ (נתון ש- $\nabla^2 f = 0$).
 נשתמש במשפט גאוס ונקבל $\oint_S f \cdot \frac{\partial f}{\partial n} ds = \iiint_V (\nabla f)^2 dx dy dz \geq 0$
 (אינטגרל משולש ממוקציה רציפה ולא שלילית חייב להיות לא שלילי)

תרגיל 6 (חוק גאוס)

יהי S משטח סגור, חלק ופשוט החוסם גוף V . אם V מכיל את הנקודה $(0, 0, 0)$ אזי $\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \bar{n} ds = 4\pi$ ואם S אינו מקיף את הנקודה $(0, 0, 0)$ אזי $\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \bar{n} ds = 0$.

פתרון:

בפרק הקודם בתרגיל 5 הוכחנו שאם V אינו מכיל את הראשית אזי $\text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$.

לכן אם S אינו מקיף את הראשית נוכל להשתמש במשפט גאוס ונקבל את התוצאה:

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \bar{n} ds = \iiint_V 0 dx dy dz = 0 \quad \text{אם } V \text{ מכיל את הנקודה } (0, 0, 0) \text{ לא ניתן להשתמש}$$

במשפט גאוס. נקיף את הנקודה $(0, 0, 0)$ בכדור קטן K_ε בעל רדיוס ε . אזי הגוף V^* שנמצא בין S לבין K_ε אינו מכיל את הנקודה $(0, 0, 0)$ ולכן נוכל הפעם להשתמש במשפט

$$\text{הדיברגנץ.} \quad \oint\oint_{S+K_\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V 0 dx dy dz = 0 \quad \text{לכן} \quad \oint\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} ds + \oint\oint_{K_\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\text{על } K_\varepsilon \text{ וקטור הנורמל הוא } \vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{\varepsilon} \quad \text{ולכן} \quad \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} = -\frac{\vec{r}}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\vec{r}}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4} = -\frac{1}{\varepsilon^2}$$

(שים לב שוקטור הנורמל ל- K_ε פונה כלפי חוץ ל- V^* ולכן כיוונו לראשית הצירים)

$$\left(\text{האינטגרל } \oint\oint_{K_\varepsilon} ds \text{ שווה לשטח הכדור} \right) \quad \oint\oint_{K_\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} ds = -\frac{1}{\varepsilon^2} \oint\oint_{K_\varepsilon} ds = -\frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi$$

$$\text{לכן} \quad \oint\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} ds + (-4\pi) = 0 \quad \text{ונקבל} \quad \oint\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} ds = 4\pi$$

תרגיל 7

נתונה פירמידה משולשת OABC שאשר הקודקוד שלה $C(2,4,5)$ והבסיס OAB נמצא במישור xy ו- $O(0,0,0), A(3,0,0), B(0,4,0)$.

$$\text{נסמן} \quad \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \quad \text{ו-} \quad \vec{r}_C = 2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} + 5 \cdot \vec{k} \quad \text{נגדיר} \quad \vec{A} = \vec{r} - \vec{r}_C$$

$$\text{אמת משפט הדיברגנץ} \quad \oint\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \text{div} \vec{A} dx dy dz \quad \text{עבור הפירמידה } V.$$

פתרון:

אם הנקודה (x, y, z) נמצאת על הפאה OAC אזי הוקטור $\vec{A} = \vec{r} - \vec{r}_C$ נמצא במישור המשולש OAC ולכן אם $\vec{n}$ וקטור הנורמל לפאה OAC אזי $\vec{A} \cdot \vec{n} = 0$ ולכן השטף

$$\iint_{OAC} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad \text{שווה לאפס. באופן דומה} \quad \iint_{OBC} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad \text{וגם} \quad \iint_{ABC} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = 0$$

נחשב $\iint_{OAB} \vec{A} \cdot \vec{n} ds$. המשולש OAB נמצא במישור xy ולכן $ds = dxdy$, $\vec{n} = -\vec{k}$,

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = (\vec{r} - \vec{r}_C) \cdot (-\vec{k}) = ((x-2) \cdot \vec{i} + (y-4) \cdot \vec{j} + (z-5) \cdot \vec{k}) \cdot (-\vec{k}) = -z + 5 = 5$$

$$\text{(כי } z=0 \text{).} \quad \text{לכן} \quad \iint_{OAB} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = 5 \iint_{OAB} dxdy = \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{2} = 30$$

$$\text{לכן} \quad \oint\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = 30$$

$$\oint\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = 3 \iiint_V dxdydz \quad \text{div} \vec{A} = \text{div}(\vec{r} - \vec{r}_C) = 3 \quad \text{נעת נשתמש במשפט גאוס}$$

האינטגרל המשולש $\iiint_V dx dy dz$ מתאר נפח הפירמידה השווה ל- $\frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 10$ ולכן $\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = 3 \iiint_V dx dy dz = 3 \cdot 10 = 30$.

משפט סטוקס (משפט הרוטור)

יהי S משטח בעל שני צדדים וחלק למקוטעין ויהי L עקום חלק למקוטעין המחווה שפה של S . יהי $\vec{F}(x, y, z)$ שדה וקטורי בעל נגזרות חלקיות רציפות בתחום המכיל את S , אזי

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} ds$$

כאשר $\vec{n}$ נורמל למשטח. כיוון האינטגרציה והכיוון של $\vec{n}$ קובעים באופן הבא: אם הולכים על המסלול L כך שרואים את S מצד שמאל אזי הראש מראה את הכיוון של הוקטור $\vec{n}$.

בעזרת משפט סטוקס ניתן להגדיר את הרוטור כך שההגדרה לא תהיה תלויה במערכת קואורדינטות. לשם כך נבחר במרחב נקודה M כלשהי ונעביר ממנה וקטור יחידה $\vec{n}$ בכיוון כלשהו. כעת נקיף את הנקודה M במסלול מישורי L סגור וחלק כך שהמישור יהיה ניצב לווקטור $\vec{n}$. נסמן ב- S את החלק של המישור החסום על-ידי L . אזי לפי משפט סטוקס

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} ds$$

נכווץ את S לנקודה M ($S \rightarrow M$). עבור S מספיק קטן נוכל להניח ש- $\nabla \times \vec{F}$ כמעט לא משתנה ולכן

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} ds \approx (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \iint_S ds = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \cdot S$$

כאשר נעבור לגבול נקבל את ההגדרה של הרוטור שאינה תלויה בבחירת מערכת צירים:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\oint_L \vec{F} d\vec{r}}{S}$$

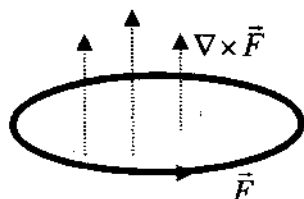
ז"א החיטל של הרוטור בסביבה קרובה של הנקודה M בכיוון $\vec{n}$ כלשהו שווה בערך לצירוקולציה של השדה $\oint_L \vec{F} d\vec{r}$ המחולקת בשטח המשטח S ששפתו L .

הפרוש הפיסיקלי של משפט סטוקס

נניח שעקום סגור L הוא חוט חשמלי דרכו זורם זרם חשמלי משתנה. נניח ש- $\vec{F}$ מודד כיוונו ועוצמתו של שדה חשמלי בכל נקודה ונקודה של החוט. אזי $\oint_L \vec{F} d\vec{r}$ מודד בערך את הזרם החשמלי בחוט. זרם חשמלי משתנה משרה שדה מגנטי בכיוון הוקטור $\nabla \times \vec{F}$. אם S הוא משטח

כלשהו ששפתו L אזי השטף של השדה המגנטי נתון על-ידי האינטגרל $\oint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} ds$.

משפט סטוקס מאפשר למצוא קשר כמותי בין השדה החשמלי לבין השדה המגנטי.



תרגיל 8

חשב בעזרת משפט סטוקס את האינטגרל $\oint_L \vec{F} d\vec{r}$ כאשר L הוא קו החיתוך בין הגליל

$x^2 + y^2 = 1$ למישור $z = x + y$ (L בכיוון הטריגונומטרי כאשר מסתכלים על L מכיוון

החיובי של ציר ה- x) ו- $\vec{F} = z \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$.

פתרון:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

נניח ש- S הוא החלק של המישור $z = x + y$.

החסום על-ידי העקום L . בחרנו על L את הכיוון הטריגונומטרי ולכן יש לבחור את הכיוון של $\vec{n}$

כך ש- $\vec{n}$ יוצר זווית חדה עם הכיוון החיובי של ציר ה- z . $\vec{n} = \frac{-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$. המקדם של $\vec{k}$

הוא מספר חיובי ולכן קוסינוס הזווית עם ציר ה- z חיובי. $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} = -1 \quad \text{ולכן} \quad |\vec{n} \cdot \vec{k}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$I = \oint_L \vec{F} d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} ds = \iint_D \frac{(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} dx dy = - \iint_D dx dy$$

נשתמש במשפט סטוקס

(כאשר D הוא המעגל $x^2 + y^2 \leq 1$). האינטגרל $\iint_D dx dy$ שווה לשטח התחום D (המעגל)

$$I = -\pi \quad \text{ולכן}$$

תרגיל 9

חשב את הצירקולציה $\oint_L \vec{F} d\vec{r}$ של השדה $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$ על המסלול הסגור L

המתקבל מחיתוך של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ עם המישור $x + y + z = 0$ בכיוון הטריגונומטרי.

פתרון:

נניח ש-S הוא המעגל בעל רדיוס 1 שנמצא במישור $\nabla \times \vec{F} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

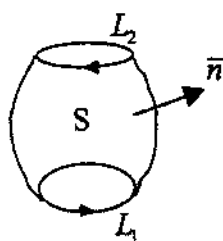
$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = (-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \cdot \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} \quad \text{ולכן } x + y + z = 0$$

$$I = \oint_L \vec{F} d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} ds = -\sqrt{3} \iint_S ds = -\sqrt{3} \cdot \pi \quad \text{נשתמש במשפט סטוקס}$$

תרגיל 10

חשב $I = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} ds$ כאשר S הוא החלק של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ שמצא בין

שני המישורים $z = -\sqrt{3}$ ו- $z = \sqrt{3}$, ו- $\vec{F} = xz \cdot \vec{j}$.

פתרון:

$$\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} ds = \oint_{L_1} \vec{F} d\vec{r} + \oint_{L_2} \vec{F} d\vec{r} \quad \text{לפי משפט סטוקס}$$

כאשר L_1 הוא המעגל $x^2 + y^2 = 1$ הנמצא במישור

$z = -\sqrt{3}$ (בכיוון הטריגונומטרי) ו- L_2 הוא המעגל

$x^2 + y^2 = 1$ הנמצא במישור $z = \sqrt{3}$

(בכיוון ההפוך לטריגונומטרי). שים לב שיש ללכת על L_1 ועל L_2 כך שנראה את S מצד שמאל.

$$\oint_{L_1} \vec{F} d\vec{r} = \oint_{L_1} xz dy = -\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = -\pi\sqrt{3}$$

$$\oint_{L_2} \vec{F} d\vec{r} = \oint_{L_2} xz dy = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi\sqrt{3} \quad \text{ולכן } I = -2\pi\sqrt{3}$$

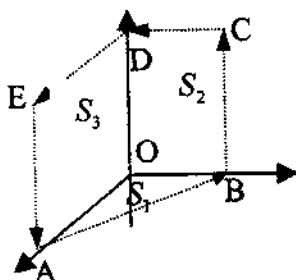
תרגיל 11

נתון שדה $\vec{F} = -y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

וננתן מסלול סגור ABCDEA (ראה ציור) כאשר

$$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 1, 1), D(0, 0, 1), E(1, 0, 1)$$

$$I = \oint_{ABCDEA} \vec{F} d\vec{r} \quad \text{מצא}$$



פתרון:

נתבונן בשלושה מסלולים סגורים AODEA, BCDOB, ABOA החוסמים בהתאמה את המשולש S_1 במישור xy, את הריבוע S_2 במישור yz ואת הריבוע S_3 במישור xz.

$$\oint_{ABOA} \vec{F} d\vec{r} + \oint_{BCDOB} \vec{F} d\vec{r} + \oint_{AODEA} \vec{F} d\vec{r} = \oint_{ABCDEA} \vec{F} d\vec{r}$$

לא קשה לראות ש-

$$\int_{OD} + \int_{DO} = 0 \quad , \quad \int_{OA} + \int_{AO} = 0 \quad , \quad \int_{OB} + \int_{BO} = 0 \quad \text{כי}$$

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = 2 \quad \text{ולכן} \quad \vec{n} = \vec{k} \quad \text{הוא} \quad S_1 \quad \text{וקטור הנורמל ל-} \quad \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = 2\vec{k}$$

$$\vec{n} = \vec{i} \quad \text{הוא} \quad S_2 \quad \text{וקטור הנורמל ל-} \quad \oint_{ABOA} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} ds = 2 \iint_S ds = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{נקבל}$$

$$\oint_{BCDOB} \vec{F} d\vec{r} \quad \text{אם נשתמש במשפט סטוקס עבור האינטגרל} \quad (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = 2\vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad \text{ולכן}$$

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = 2\vec{k} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{n} = \vec{j} \quad S_3 \quad \text{באופן דומה עבור} \quad \oint_{AODEA} \vec{F} d\vec{r} = 0$$

$$I = \oint_{ABCDEA} \vec{F} d\vec{r} = 1 \quad \text{לסיכום:} \quad \oint_{AODEA} \vec{F} d\vec{r} = 0$$