



סיכום אינטגרלים – חדו"א 2 לירן

מסמך זה הורד מהאתר <http://www.underwar.co.il/>.
אין להפיץ מסמך זה במדיה כלשהי, ללא אישור מפורש מאת המחבר.
מחבר המסמך איננו אחראי לכל נזק, ישיר או עקיף, שיגרם עקב השימוש במידע המופיע במסמך, וכן
לנכונות התוכן של הנושאים המופיעים במסמך. עם זאת, המחבר עשה את מירב המאמצים כדי לספק את
המידע המדויק והמלא ביותר.

כל הזכויות שמורות ללירן.

אינטגרל קווי סוג I

סימון: $\int_C f(x, y, z) ds \triangleq \int_C f(x, y, z) dl$

אופן החישוב:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| dt$$

איפיונים ושימושים:

- כיוון העקום C לא חשוב
- F היא פונקציה סקלרית
- אם $F \equiv 1$ אזי האינטגרל הקווי מבטא את אורך העקום
- משמעות פיזיקלית: אם F חיובית ניתן להתייחס כצפיפות ליחידת אורך ואז האינטגרל הקווי מבטא את מסת העקום.
- אם $f(x, y)$ פונקציה ב-2 משתנים אז האינטגרל הקווי מבטא את שטח "הוילון" בין מישור XY לערך הפונקציה בנקודה.

הדרך לפיתרון:

- (א) פרמטריזציה - רושמים את העקום בצורה פרמטרית $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
- (ב) גזירה - מחשבים את $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ ואז $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$
- (ג) רושמים את ערך הפונקציה על העקום: $f(\vec{r}'(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$
- (ד) בודקים/קובעים את גבולות הפרמטר t: $a \leq t \leq b$
- (ה) פותרים את האינטגרל על t (שרשום באופן החישוב)

מקרים מיוחדים:

(1) עקום מישורי שנתון בצורה מפורשת: $y=f(x)$ אזי:

$$\int_C F(x, y) ds = \int_a^b F(x, f(x)) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

(2) עקום מישורי בהצגה פולרית $(\theta, \rho(\theta))$ ופונקציה $F(x, y)$ אזי:

$$\int_C F(x, y) ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\rho(\theta) \cos(\theta), \rho(\theta) \sin(\theta)) \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2} d\theta$$

אינטגרל קוי סוג II (עבודה)

סימון: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \triangleq \int_C Pdx + Qdy + Rdz$

אופן החישוב:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)) dt$$

איפיונים ושימושים:

- כיוון העקום C **חשוב!**
- F היא פונקציה וקטורית
- עבודת שדה F לאורך מסלול C: הרכיב הניצב למסלול לא עושה עבודה, הרכיב המקביל למסלול הוא זה שתורם לאינטגרל.
- משמעות פיזיקלית: **עבודה**
- $\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{BA} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

הדרך לפיתרון:

- (א) פרמטריזציה - רושמים את העקום בצורה פרמטרית $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
- (ב) גזירה - מחשבים את $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$
- (ג) אם השדה לא נתון במפורש מזהים אותו מתוך האינטגרל (הסימון השני) ומחשבים $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$
- (ד) בודקים האם כיוון עליית הפרמטר מתאים לכיוון שבו צריך לחשב את האינטגרל, אם לא – מוסיפים מינוס בתשובה.
- (ה) רושמים את האינטגרל באמצעות הפרמטר ופותרים.

מקרים מיוחדים:

- (1) עקום מישורי שנתון בצורה פרמטרית: $y=f(x)$ אזי:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt$$
- (2) עקום מישורי בהצגה מפורשת $y(x)$ ו $a \leq x \leq b$ אזי:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)) dx$$

משפטים שקשורים:

- **משפט גרין** – הופך מאינטגרל קוי סוג II (2 משתנים) לאינטגרל כפול על תחום D.
- **משפט סטוקס** – הפוך מאינטגרל קוי סוג II (3 משתנים) לאינטגרל השטף (משטחי II) רוטור.

אינטגרל משטחי סוג I

סימון: $\iint_S F(x, y, z) ds$

אופן החישוב:

$$\iint_S F(x, y, z) ds = \iint F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

איפיונים ושימושים:

- F היא פונקציה סקלרית
- אם $F \equiv 1$ אזי האינטגרל המשטחי מבטא את שטח הפנים $A(S) = \iint_S ds$
- משמעות פיזיקלית: אם F חיובית ניתן להתייחס כצפיפות ליחידת שטח ואז האינטגרל המשטחי מבטא את מסת המשטח S .

הדרך לפיתרון:

- פרמטריזציה - רושמים את המשטח בצורה פרמטרית $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
- גזירה - מחשבים את r'_u, r'_v
- מחשבים $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ ומכאן $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$
- קובעים את גבולות הפרמטרים שיתראו את הפיסה הדרושה מהמשטח
- רושמים את האינטגרל $\iint F(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$
- פותרים את האינטגרל (שרשום באופן החישוב)

מקרים מיוחדים:

- עקום מישורי שנתון בצורה מפורשת: $z = f(x, y)$ אז הפרמטריזציה:
 $\vec{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$ ומתקיים: $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-z_x, -z_y, 1)$, $|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}$
אז: $\iint_S F(x, y, z) ds = \iint F(x, y, z(x, y)) \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy$

אינטגרל משטחי סוג II (שטף)

סימון: $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds \triangleq \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$

אופן החישוב:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv = \iint_D \vec{F}(\vec{x}(u, v), \vec{y}(u, v), \vec{z}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v dudv$$

איפיונים ושימושים:

- כיוון הנורמל למשטח S חשוב: עבור משטח סגור: הצד החיובי הוא הפונה החוצה מהגוף הכלוא, עבור משטח פתוח: הצד החיובי הוא זה שלנורמל רכיב Z חיובי
- F היא פונקציה ווקטורית
- משמעות פיזיקלית: שטף.

הדרך לפיתרון:

(א) פרמטריזציה - רושמים את המשטח בצורה פרמטרית $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

(ב) גזירה – מחשבים את r'_u, r'_v

(ג) מחשבים $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$

(ד) בדיקת הצד של המשטח, האם $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ מתאים לצד הדרוש, אם לא – מוסיפים מינוס. איך בודקים? אפשר לפי רכיב ה Z, אפשר לקחת נקודה ולבדוק מה הנורמל בנקודה

(ה) מחשבים את $\vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v dudv$

(ו) מוצאים את הגבולות הרלוונטים של u ו v

(ז) בונים $\iint \vec{F} \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v dudv$

מקרים מיוחדים:

(1) משטח שנתון בצורה מפורשת: $z = f(x, y)$ אז הפרמטריזציה: $\vec{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$

ומתקיים: $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-z_x, -z_y, 1)$ אז: $\iint \vec{F} \cdot \vec{r}_x \times \vec{r}_y dxdy = \iint (-Pz'_x - Qz'_y + R) dxdy$.

(2) כאשר המשטח הוא חלק ממישור שמקביל לאחד ממישורי הצירים, אפשר לרשום בפשטות את

נורמל היחידה (לדוגמא $\hat{n} = (0, 0, 1)$ עבור המשטח $Z = 0$) לחשב את $\vec{F} \cdot \hat{n}$ על המשטח, ואז

לבצע אינטגרל $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds$ על שנים מהשתנים X, Y, Z.

משפטים שקשורים:

- משפט גאוס – הופך מאינטגרל השטף (על שפת משטח סגור!!!) לאינטגרל משולש.
- משפט סטוקס – הופך לאינטגרל שטף (רוטור של F) מאינטגרל קו סוג II.

משפט גרין:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

תנאים:

$$(1) \quad Q(x, y), P(x, y) \in C^1 \text{ שתי פונקציות (בעלות נ"ח רציפות)}$$

$$(2) \quad D - \text{תחום דו מימדי, ששפתו } C - \text{עקום חלק למקוטעין}$$

$$(3) \quad \text{מגדירים את כיוון העקום } C, \text{ כך שהתחום נמצא משמאלו}$$

$$\text{אזי:} \quad \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy \quad (\text{אינטגרל כפול}) \quad (\text{אינטגרל קוי מסוג II})$$

משפט סטוקס:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} ds$$

תנאים:

$$(1) \quad \vec{F}(x, y, z) \in C^1 \text{ שדה וקטורי בעל נגזרות חלקיות רציפות (בסביבת המשטח S)}$$

$$(2) \quad S - \text{משטח חלק למקוטעין, ששפתו } C - \text{עקום חלק למקוטעין}$$

$$(3) \quad \text{כיוון המסלול } C \text{ וכיוון הנורמל } \hat{n} \text{ של המשטח } S \text{ מוגדרים לפי כלל היד הימנית}$$

$$\text{אזי:} \quad \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} ds \quad (\text{אינטגרל משטחי מסוג II}) \quad (\text{אינטגרל קוי מסוג II})$$

משפט גאוס:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dx dy dz$$

תנאים:

$$(1) \quad \vec{F}(x, y, z) \in C^1 \text{ שדה וקטורי בעל נגזרות חלקיות רציפות בתחום}$$

$$(2) \quad V - \text{תחום תלת מימדי חסום, ששפתו } S - \text{משטח חלק למקוטעין}$$

$$(3) \quad \text{כיוון הנורמל על המשטח } S \text{ פונה החוצה מן התחום } V$$

$$\text{אזי:} \quad \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dx dy dz \quad (\text{אינטגרל משולש}) \quad (\text{אינטגרל משטחי מסוג II})$$

משפט גאוס דו-מימדי:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_D (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dx dy$$

תנאים:

$$(1) \quad \vec{F}(x, y) \in C^1 \text{ שדה במישור } XY$$

- (2) D – תחום, ששפתו C – עקום חלק למקוטעין
 (3) כיוון הנורמל $\hat{n}$ על העקום C פונה החוצה מן התחום D

אזי: (אינטרגל כפול) $\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_D (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dx dy$ (אינטרגל משטחי מסוג II במישור ?)

משפט פאפוס:

יהי C עקום במישור XY שבו $x \geq 0$, ויהי S המשטח הנוצר מסיבוב של C סביב ציר Y, אזי השטח של S נתון ע"י $2\pi \hat{x} \cdot L$ כאשר L – אורך העקום C, $\hat{x}$ – רכיב X של מרכז המסה של העקום C.

טענה: אם $f(x, y, z) \in C^2$ בעלת נ"ח רציפות עד לסדר 2 אזי (לפליסיאן) $\oint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iiint_V \Delta f dx dy dz$

טענה: אם $f(x, y, z) \in C^2$ פונקציה הרמונית אזי $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ (לפליסיאן)

טענה: אם $\vec{F}(P, Q, R) \in C^2$ שדה אזי $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

משפט שלושית (4) התנאים השקולים:

התנאי: $\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$ שדה רציף בתחום V (ב- $\mathbb{R}^3$)

(1) לכל מסלול סגור C בתוך V מתקיים $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ (בדו-מימד $\oint_C P dx + Q dy = 0$)

(2) $\vec{F} = (P, Q, R)$ שדה משמר ב-V

(3) קיימת פונקציה פוטנציאל $U(x, y, z) \in C^1$ ב-V כך ש $\vec{\nabla} U = \vec{F} = (P, Q, R)$ ומתקיים

$\int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A)$ (בדו-מימד $\int_{A \rightarrow B} P dx + Q dy = U(B) - U(A)$)

(4) אם $\vec{F} \in C^1$ בתחום פשוט קשר V (תחום שניתן לכווץ כל מסלול סגור בו לנקודה) אזי התנאים

הנ"ל שקולים ל $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ לכל $V \in \mathbb{R}^3$ [בדו-מימד $Q_x - P_y \equiv 0$]

משפט: אם $P(x, y), Q(x, y) \in C^1$ בתחום $D \setminus \{0, 0\}$ ומתקיים $P_x = Q_y$ (בתחום) ועל מעגל שמרכזו

בראשית ומוכל D מתקיים $\oint_C P dx + Q dy = 0$ אזי $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$ שדה משמר.

הגדרה: שדה F יקרא שדה חסר מקורות אם הדיברגנץ בכל נקודה $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ (אין אף נקודה שממנה יוצאים כל החיצים)

הגדרה: שדה F יקרא שדה חסר מערבולות אם הרוטור בכל נקודה $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.