

בן-ציון קון

חשבון

ד' יפרנציאלי

ו'

אינטגרלי 2

חלק ב'

תיאוריה ותרגילים

בן הוצאת בק - ספרי לימוד - BAK

04-8322970 8

03-9601940 8

04-8641706 8

הפצה: מכלול - קרית הטכניק חיפה 32000

ישוו! הפצת ספרים בע"מ - רח' קורדובה 91, מושב משמר השבעה 50297

הדפסה: מיכאל לחמן בע"מ רח' פבנור 62 חיפה 33135

חדו"א 2

איטנגרלים התלויים בפרמטר
אינטגרלים כפולים ומשולשים
אינטגרלים, קווים ומשטחים
אנליזה וקטורית

בן-ציון קון

מהדורה שלישית

הקדמה

ספר זה מהווה חלק אחרון מסידרה של שלושה ספרים בנושא חדו"א (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי), המכיל את הנושא של חשבון אינטגרלי מפונקציות במספר משתנים.

הספר מכיל שבעה פרקים. כל פרק מכיל –

הגדרות ודוגמאות המסבירות אותן.

משפטים, הוכחת המשפטים ודוגמאות לשימוש בתוצאותיהם.

הושם דגש על שימושים גיאומטריים של תוצאות שונות וחשובים מקורבים.

נתונות טכניקות שונות לפתירת תרגילים בנושאים הנלמדים.

לאחר כל סעיף נתונים תרגילים (עם תשובות) לעבודה עצמית.

מיספור נוסחאות בכל סעיף משלו.

מיספור משפטים, הגדרות ודוגמאות לאורך כל הפרק.

סימן ■ מסמן סוף הוכחה.

מספר כפול לאחר מלה, משפט או דוגמה, מסמן את הפרק ומספרו לדוגמה: משפט 7.3 מסמן משפט 3, מפרק 7.

הספר מכיל כ-110 תרגילים פתורים וכ-270 תרגילים לעבודה עצמית.

תודתי לפרופ' בוריס פענח מהטכניון, לפרופ' שלמה רייזנר מאוניברסיטת חיפה, לד"ר ארקדי ויסמן ממדרשת הגליל – על ההערות וההצעות החשובות. כמו-כן תודתי לסטודנט יאיר גורדון על עבודתו המסורה בהגהת המהדורה השלישית.

תודתי לרוני מור ממשרד מ. לחמן בע"מ על עבודתה הנזהרת בהדפסת החומר.

בן-ציון קון

כל הזכויות שמורות © All rights reserved
למחבר 1990, 1992, 1994, 1995, 1996, 2002 to the author

אין להעתיק, לצלם, או לתרגם את הספר או כל חלק ממנו בצורה כלשהיא או באמצעים כלשהם, לרבות הקלטה ואיסוסן מאגר מידע, אלא באישור בכתב מבעל זכויות היוצרים.

No part of this book may be reproduced by any mechanical, photographic, or electronic process, transmitted or otherwise copied for public or private use, without written permission from the author.

תוכן העניינים

הקדמה

פרק 16: אינטגרלים התלויים בפרמטר

1. הגדרת אינטגרלים התלויים בפרמטר..... 1
2. תכונות של אינטגרלים התלויים בפרמטר..... 2
3. המשך: אינטגרציה של אינטגרל התלוי בפרמטר..... 6
4. אינטגרלים התלויים בפרמטר כאשר הפרמטר נמצא גם כגבולות האינטגרציה..... 10
5. אינטגרלים לא אמיתיים ותלויים בפרמטר..... 13
6. תכונות של אינטגרלים לא אמיתיים התלויים בפרמטר..... 16

פרק 17: אינטגרל כפול

1. הגדרת שטח התחום..... 20
2. הגדרה של אינטגרל כפול..... 21
3. תכונות של אינטגרל כפול..... 25
4. חישוב של אינטגרל כפול..... 26
5. המשך: מקרה כללי..... 30
6. החלפת משתנים באינטגרל כפול..... 38
7. שימושים של אינטגרל כפול..... 45
- I. חישוב שטחים
- II. נפח של הגוף
- III. מסה של גוף מישורי
- IV. מומנט סטטי. מרכז הכובד
8. אינטגרלים כפולים לא אמיתיים..... 51

פרק 18: אינטגרל משולש

1. הגדרה וחישוב של אינטגרל משולש..... 54
2. המשך (מקרה כללי)..... 56
3. החלפת משתנים באינטגרל משולש..... 60
4. שימושים של אינטגרל משולש..... 64

פרק 16

אינטגרלים התלויים בפרמטר

בפרק זה נחקר פונקציות המוגדרות על-ידי אינטגרלים. לדוגמה, אם נבצע אינטגרציה של הפונקציה $f(x, y)$ לפי המשתנה x נקבל פונקציה של משתנה יחיד y . בפרק זה נלמד את התכונות הפונקציונליות של הפונקציות הנ"ל.

1. הגדרת אינטגרלים התלויים בפרמטר

תהי $f(x, y)$ פונקציה של שני משתנים המוגדרת במלבן

$$R = [a, b] \times [c, d], \quad R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

הגדרה 1: אם $f(x, y)$ אינטגרבילית לפי x בקטע $[a, b]$ עבור כל y קבוע מ- $[c, d]$, אזי הפונקציה

$$(1) \quad \varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

נקראת אינטגרל התלוי בפרמטר y .

באופן דומה, אם $f(x, y)$ אינטגרבילית לפי y ב- $[c, d]$ לכל x קבוע מ- $[a, b]$, אזי הפונקציה

$$(2) \quad \psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

היא אינטגרל התלוי בפרמטר x .

בסעיפים הבאים נחקר אינטגרלים מסוג (1) ו- (2) גם כאשר גבולות האינטגרציה הם פונקציות של y ו- x בהתאמה וגם כאשר גבולות האינטגרציה הם אינטרפיים.

דוגמה 1:

א. תהי $f(x, y) = \sin(x^2 y^2)$ המוגדרת במלבן $[0, 1] \times [2, 1]$.

פרק 19: פונקציות וקטוריות של משתנה סקלרי

1. הגדרה ותיאור גיאומטרי של פונקציות וקטוריות ממשתנה אחד 66
2. גבולות ורציפות של פונקציה וקטורית 69
3. נגזרת של פונקציה וקטורית 71
4. אורך הקשת 75
5. פונקציה וקטורית התלוייה בשני משתנים 79
6. שדה וקטורי 82
- I. הדיברגנט
- II. רוטור של שדה וקטורי

פרק 20: אינטגרל קווי

1. אינטגרל קווי מסוג ראשון 86
2. אינטגרל קווי מסוג שני 90
3. משפט גרין 98
4. אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול האינטגרציה 106
5. שדה משמר (מישורי). פונקציה פוטנציאל 110
6. צורות שונות של נוסחת גרין. פונקציות הרמוניות 116

פרק 21: אינטגרל משטחי

1. הגדרת המשטח 119
2. שטח פנים של משטח 121
3. אינטגרל משטחי מסוג ראשון 124
4. אינטגרל משטחי מסוג שני 126
5. משפט הדיברגנט (גאוס) 132
6. משפט סטוקס 136
7. תרגילים נוספים 141
- שדה משמר (כללי) 142

פרק 22: חזרות. דוגמאות של בחינות

- 147
- רשימת מקורות 171
- מפתח מונחים 172
- תשובות 173

הפונקציה $\varphi(y) = \int_0^1 \sin(x^2 y^2) dx$ היא אינטגרל התלוי בפרמטר y

והפונקציה $\psi(x) = \int_1^2 \sin(x^2 y^2) dy$ היא אינטגרל התלוי בפרמטר x .

ב. תהי $f(x, y) = e^{xy^2}$ מוגדרת ב- $[0, 1] \times [2, 1]$. נבנה פונקציות

$$\varphi(y) = \int_0^1 e^{xy^2} dx = \frac{1}{y^2} e^{xy^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{y^2} e^{y^2} - \frac{1}{y^2}, \quad \psi(x) = \int_1^2 e^{xy^2} dy$$

לכן הפונקציה $\varphi(y) = \frac{1}{y^2} (e^{y^2} - 1)$ היא אינטגרל התלוי בפרמטר y

ו- $\psi(x)$ אינטגרל התלוי בפרמטר x .

2. תכונות של אינטגרלים התלויים בפרמטר

בסעיף זה נחקור רציפות וגזירות של פונקציות התלויות בפרמטר.

משפט 1: אם הפונקציה $f(x, y)$ רציפה (כפונקציה של שני משתנים) במלבן $R = [a, b] \times [c, d]$ אזי הפונקציה

$$(1) \quad \varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

רציפה ב- $[c, d]$.

הוכחה: נוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל Δy המקיים $|\Delta y| < \delta$ מתקיים $|\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)| < \varepsilon$. נחשב

$$(2) \quad \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y) = \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx$$

היות והפונקציה $f(x, y)$ רציפה במלבן סגור, אזי לפי משפט קנטור (פרק 11, משפט 9) היא רציפה במידה שווה. לכן לפי $\varepsilon > 0$ ניתן לבחור $\delta > 0$ כך שלכל x מ- $[c, d]$ ולכל y ו- $y + \Delta y$ מ- $[c, d]$ ו- $|\Delta y| < \delta$, מתקיים

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

נציב ב-(2), נקבל

$$|\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

מה שמוכיח את רציפותה של $\varphi(y)$ בכל נקודה של $[c, d]$.

הערה 1: באופן דומה מוכיחים שאם $f(x, y)$ רציפה ב- R , אזי האינטגרל התלוי בפרמטר x

$$(3) \quad \psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

הוא פונקציה רציפה ב- $[a, b]$.

נעבור לחקירת הגזירות של הפונקציות $\varphi(y)$, $\psi(x)$ המוגדרות על-ידי (1) ו-(3).

משפט 2 (כלל לייבניץ): אם הפונקציות $f(x, y)$ ו- $f'_y(x, y)$ רציפות במלבן R , אזי הפונקציה $\varphi(y)$ גזירה ב- $[c, d]$ ו-

$$(4) \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

במילים אחרות, את האינטגרל התלוי בפרמטר ניתן לגזור לפי הפרמטר בתוך האינטגרל.

הוכחה: נקבע y_0 כלשהו וניתן לו תוספת Δy , נקבל

$$\frac{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx$$

נשתמש במשפט לגרונ' ונקבל

$$= \int_a^b \frac{f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y}{\Delta y} dx = \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx$$

באשר $0 < \theta < 1$, כלומר קיבלנו

$$\frac{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx$$

על-מנת להשלים את הוכחת המשפט מספיק להוכיח כי

$$(5) \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx$$

$$\varphi'(y) = \frac{d}{dy} \int_0^1 \frac{dx}{1+xy} = - \int_0^1 \frac{xdx}{(1+xy)^2}$$

קל לראות ש- $\varphi'(a) = - \int_0^1 \frac{xdx}{(1+ax)^2}$, היות ו- $\varphi(y) = \frac{1}{y} \ln(1+y)$ נחשב

$$\varphi'(a) = \left(-\frac{1}{y^2} \ln(1+y) + \frac{1}{y(1+y)} \right)_{y=a} = -\frac{1}{a^2} \ln(1+a) + \frac{1}{a(a+1)}$$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2} \ln(1+a) - \frac{1}{a(1+a)} \quad \text{תשובה:}$$

ב. נבנה אינטגרל התלוי בפרמטר

$$\varphi(y) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{1}{y}$$

ניגזור את $\varphi(y)$ לפי כלל ליבניץ ונקבל

$$\varphi'(y) = - \int_0^1 \frac{2ydx}{(x^2+y^2)^2} = \left(\frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \right)' = -\frac{1}{y^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{y} - \frac{1}{y(1+y^2)}$$

נחלק את שני האגפים ב- $(-2y)$, נקבל

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2y^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2(1+y^2)}$$

ניגזור פעם נוספת את שני האגפים לפי y , נקבל

$$- \int_0^1 \frac{4ydx}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3}{2y^4} \operatorname{arctg} \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^3} \cdot \frac{1}{1+y^2} - \frac{1+2y^2}{y^3(1+y^2)^2}$$

לאחר חילוק ב- $(-4y)$ וכינוס איברים, נציב $y=a$ ונקבל את התשובה:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \frac{5a^2+3}{8a^4(1+a^2)^2}$$

ג. על-מנת לחשב את האינטגרל, נבנה אינטגרל התלוי בפרמטר באופן כזה, שלאחר גזירתו לפי אותו פרמטר נקבל פונקציה שקל לחשב את האינטגרל שלה.

ואנחנו, היות ו- $f'_y(x,y)$ רציפה ב- R היא רציפה במידה שווה ב- R ולכן לפי $\varepsilon > 0$ ניתן לבחור $\delta > 0$ כך שלכל x ולכל $|\Delta y| < \delta$ מתקיים

$$|f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) - f'_y(x, y_0)| < \varepsilon$$

זוהי מוכיח את (5).

באופן דומה מוכיחים את המשפט הבא:

משפט 3: אם הפונקציות $f(x,y)$ ו- $f'_x(x,y)$ רציפות ב- R , אזי הפונקציה $\psi(x)$ גזירה ו-

$$(6) \quad \frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x,y) dy = \int_c^d f'_x(x,y) dy$$

דוגמה 2: הפונקציות א. $\varphi(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx$, $y \geq 1$;

ב. $g(y) = \int_a^b \frac{dx}{1+xy}$, $y > 0$; ג. $\psi(x) = \int_0^1 \ln(3x-4y^2) dy$, $x > 2$

רציפות בתחום הגדרתן כיוון שפונקציה משני משתנים בתוך האינטגרל רציפה במלבן המתאים.

בדוגמאות הבאות נשתמש בכלל ליבניץ לחישוב האינטגרלים:

דוגמה 3: חשב:

$$א. \int_0^1 \frac{xdx}{(1+ax)^2} \quad ב. \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} \quad ג. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

פתרון:

א. נבנה פונקציה עזר $\varphi(y)$ שהיא אינטגרל התלוי בפרמטר

$$\varphi(y) = \int_0^1 \frac{dx}{1+xy} = \frac{1}{y} \ln(1+y), \quad 0 \leq y \leq a$$

הפונקציה $\frac{1}{1+xy}$ רציפה במלבן $[0,1] \times [0,a]$, ניגזרתה לפי y היא

$$-\frac{x}{(1+xy)^2}$$

ורציפה באותו מלבן, לכן לפי משפט 2

נתבונן ב-

$$I(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2} dx, \quad 0 \leq y \leq 1$$

ברור ש- $I(1) = 1$, $I(0) = 0$. ניגזור את $I(y)$ לפי y ונקבל

$$I'(y) = \int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)(1+xy)}$$

נבצע את האינטגרציה על-ידי פירוק לגורמים

$$I'(y) = \frac{1}{1+y^2} \int_0^1 \left(\frac{x+y}{1+x^2} - \frac{y}{1+xy} \right) dx = \frac{1}{1+y^2} \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} y - \ln(1+y) \right)$$

קל לראות ש- $I'(y) = I(1) - I(0) = 1$ וגם

$$1 = \int_0^1 I'(y) dy = \frac{1}{2} \ln 2 \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{y}{1+y^2} dy - \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{1+y^2} dy =$$

$$= \frac{\pi}{8} \ln 2 + \frac{\pi}{8} \ln 2 - 1$$

קיבלנו $I = \frac{\pi}{4} \ln 2 - 1$ ולכן $2I = \frac{\pi}{4} \ln 2$. תשובה: $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

תרגילים

1. הוכח: $\varphi(y) = \int_0^1 f(x,y) dx$, כאשר $f(x,y) = \cos(x-y)$ רציפה.

2. הוכח: אם $f(x)$ רציפה ושונה מאפס ב- $[0,1]$,

אזי $\varphi(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2} dx$ רציפה ב- $(0,1]$.

3. האם ניתן להשתמש במשפט 2 עבור $\varphi(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2+y^2} dx$

בנקודות: א. $1 \leq y \leq 3$; ב. $y=0$.

4. חשב $F'(x)$: א. $F(x) = \int_a^b e^{-xy^2} dy$; ב. $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{y} \ln(a^2+xy) dy$.

5. חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x \sqrt{1-x^2}} dx$

ב. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx$, רמז: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx, 0 \leq y \leq 1$

ג. $\int_0^1 x^n \ln x dx$, רמז: חשב את הניגזרת של $F(y) = \int_0^1 x^y dx$

3. המשך: אינטגרציה של אינטגרל התלוי בפרמטר

בסעיף הקודם ראינו שאם הפונקציה $f(x,y)$ רציפה במלבן R , אזי הפונקציות

$$(1) \quad \varphi(y) = \int_a^b f(x,y) dx$$

$$(2) \quad \psi(x) = \int_c^d f(x,y) dy$$

גם כן רציפות ב- $[c,d]$ ו- $[a,b]$ בהתאמה. לכן הן אינטגרביליות, כלומר קיימים האינטגרלים

$$I_1 = \int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

$$I_2 = \int_a^b \psi(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

בהמשך נרשום את האינטגרלים האלה באופן הבא:

$$(3) \quad I_1 = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx$$

$$(4) \quad I_2 = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy$$

השאלה העיקרית היא, האם האינטגרלים הללו שווים?

משפט 4: אם הפונקציה $f(x, y)$ רציפה במלבן R אזי $I_1 = I_2$. כלומר

$$(5) \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

להוכחת המשפט נקדים למה:

למה 1: אם פונקציה $f(x, y)$ רציפה במלבן R , אזי הפונקציה

$$(6) \quad \Phi(x, t) = \int_c^t f(x, y) dy$$

רציפה במלבן $R = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$.

הוכחה: נראה כי $\Phi(x, t)$ רציפה בנקודה (x_0, t_0) .

קל לבדוק שהפונקציה $\Phi(x, t)$ רציפה לפי x (בדוק!) וגזירה לפי t ו- $\Phi'_t = f(x, t)$ לכל x קבוע מ- $[a, b]$ ולכן היות והפונקציה $f(x, t)$ חסומה ב- R מקבלים ש- $|\Phi'_t(x, t)| < L$ ב- R . מהתנאים הנ"ל נובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שעבור כל t המקיים $|t - t_0| < \delta$, מתקיים

$$|\Phi(x, t) - \Phi(x, t_0)| < L|t - t_0|$$

ומכאן נובע שהפונקציה $\Phi(x, t)$ רציפה בנקודה (x_0, t_0) (ראה תרגיל 3 בעמוד 167, חלק א'). ■

הוכחת משפט 4: נוכיח שיוויון יותר כללי מ-(5). נראה שלכל $t \in [c, d]$ מתקיים

$$(7) \quad \int_c^t dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^t f(x, y) dy$$

היות ו- $\varphi(y)$ רציפה והפונקציה $\int_c^t \varphi(y) dy$ רציפה וגזירה לפי t , לכן

$$\frac{d}{dt} \left(\int_c^t \varphi(y) dy \right) = \varphi(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

מצד שני, באגף הימין נמצא $\int_a^b \Phi(x, t) dx$ כאשר $\Phi(x, t)$ הפונקציה (6) ולכן

לפי למה 1 היא רציפה. מכאן לפי משפט 2, פונקציה $\int_a^b \Phi(x, t) dx$ כאינטגרל התלוי בפרמטר t , גזירה וניגזרת

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \Phi(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) dx = \int_a^b f(x, t) dx$$

כלומר, קיבלנו שהפונקציות בשני האגפים של (7) גזירות ובעלות ניגזרות שוות ולכן הן שוות אחת מהשנייה באופן קבוע. היות ושתייהן שוות לאפס כאשר $t = c$, נסיק שהן שוות לכל t . כלומר, הוכחנו את נוסחה (7). במקרה פרטי כאשר $t = d$, נקבל את (5). ■

נשתמש במשפט 4 לחישוב אינטגרלים:

דוגמה 4: חשב את האינטגרל

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad (b > a > -1)$$

פתרון: על מנת לחשב את האינטגרל, נבנה פונקציית עזר $f(x, y) = x^y$ המוגדרת במלבן $[0, 1] \times [a, b]$, לפי משפט 4

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx$$

נחשב את האינטגרל באגף השמאלי, נקבל

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_0^1 x^y \frac{1}{\ln x} \Big|_a^b dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = I$$

נחשב עתה את האינטגרל באגף הימני, נקבל

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{1}{y+1} x^{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln(b+1) - \ln(a+1)$$

$$I = \ln \frac{b+1}{a+1} \quad \text{לכן}$$

הערה 2: אם תנאי משפט 4 לא מתקיימים, אזי נוסחה (7) יכולה לא להתקיים.

דוגמה 5: הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

מוגדרת בכל המישור.

נראה שהאינטגרלים $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy$, $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx$ אינם שווים זה לזה.

פתרון: קל לבדוק ש- $f(x,y)$ אינה רציפה במלבן $[0,1] \times [0,1]$ ולכן לא ניתן להשתמש במשפט 4, אמנם:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_0^1 dy = \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4}$$

באופן דומה

לכן באינטגרל זה לא ניתן להחליף את סדר האינטגרציה.

תרגילים: חשב:

$$1. f(x,y) = \frac{1}{1+x^2y^2}, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \text{רמז: } \int_0^1 \frac{\arctg x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$2. \int_0^1 dx \int_1^2 \left(\frac{x^5}{y^3} - \frac{2x^3}{y^2} \right) e^{-\frac{x^2}{y}} dy$$

$$3. \int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad b > a > -1, \quad \text{רמז: דוגמה 4.}$$

$$4. \int_0^1 \cos(\ln \frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad b > a > 1$$

4. אינטגרלים התלויים בפרמטר, כאשר הפרמטר נמצא גם בגבולות האינטגרציה

בסעיף זה נחקור אינטגרלים התלויים בפרמטר מהסוג

$$(1) \quad \varphi(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y) dx$$

כאשר $a \leq \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \leq b, \quad c \leq y \leq d$

משפט 5: אם הפונקציה $f(x,y)$ רציפה במלבן $R = [a,b] \times [c,d]$ והפונקציות $\alpha(y)$ ו- $\beta(y)$ רציפות ב- $[c,d]$, אזי $\varphi(y)$ רציפה ב- $[c,d]$.

הוכחה: נבנה פונקציית עזר

$$(2) \quad \Phi(y,s,t) = \int_t^s f(x,y) dx$$

כאשר

$$(3) \quad t = \alpha(y), \quad s = \beta(y)$$

$\Phi(y,s,t)$ היא פונקציה מורכבת ו- $\varphi(y) = \Phi(y, \alpha(y), \beta(y))$.

היות והפונקציה $\Phi(y,s,t)$ רציפה כפונקציה של שלושת המשתנים (הוכח! על סמך למד 1) ו- $\alpha(y)$ ו- $\beta(y)$ רציפות, אזי הפונקציה המורכבת $\varphi(y)$ רציפה ב- $[c,d]$ (ראה סעיף 11.5). ■

משפט 6: תהיינה הפונקציות $f(x,y)$ ו- $f'_y(x,y)$ רציפות במלבן R והפונקציות $\alpha(y)$ ו- $\beta(y)$ גזירות בקטע $[c,d]$, אזי הפונקציה $\varphi(y)$ מ- (1) גזירה ב- $[c,d]$ ומתקיים:

$$(4) \quad \varphi'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y) dx + \beta'(y)f(\beta(y),y) - \alpha'(y)f(\alpha(y),y)$$

הוכחה: נחזור לפונקציה $\Phi(y,s,t)$ מ- (2). ניגזרותיה החלקיות רציפות (ברוק!) לכן היא דיפרנציאבילית. נשתמש בכלל השרשרת, כאשר מתקיים (3), נקבל

$$(5) \quad \frac{d\varphi}{dy} = \Phi'_t t'_y + \Phi'_s s'_y + \Phi'_y$$

נציב את

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_t^s f(x,y) dx - \int_0^t f(x,d) dx \right) = -f(t,y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = f(s,y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_t^s \frac{\partial f}{\partial y} dx; \quad t'_y = \alpha'(y), \quad s'_y = \beta'(y)$$

ב- (5) ונקבל את (4). ■

$$\text{דוגמה 6: מצא את הניגזרת של הפונקציה } F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin(ux)}{u} du$$

3. חשב את $F'(t)$ כאשר $F(t) = \int_0^t dx \int_{x-t}^{x+1} \sin(x^2 + y^2 - t^2) dy$

4. חשב את $F'(x)$ כאשר $F(x) = \int_x^{x^3} e^{-xy^2} dy$

5. הוכח כי הפונקציה $F(x) = \int_{\sin x}^x e^{t^2} dt$ מונוטונית עולה.

5. אינטגרלים לא אמיתיים התלויים בפרמטר

תהי הפונקציה $f(x, y)$ מוגדרת ברצועה

$$R_\infty = \{(x, y) : a \leq x < \infty, x \leq y \leq d\}$$

הגדרה 2: אם לכל y קבוע מהקטע $[c, d]$ קיים האינטגרל

$$(1) \quad \varphi(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

אזי ל- $\varphi(y)$ קוראים אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר y .

דוגמה 8: בדוק התכנסות (קיום) של האינטגרלים התלויים בפרמטר:

א. $\int_1^\infty \frac{\sin(xy)}{x^2} dx$

ב. $\int_1^\infty xye^{-(x^3+y^3)} dx$

פתרון: בשני המקרים הללו נוכיח שלכל y קבוע האינטגרלים קיימים:

א. קל לראות שלכל y , $\left| \frac{\sin(xy)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, לכן

$$\left| \int_1^\infty \frac{\sin(xy)}{x^2} dx \right| \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right)_1^A = 1$$

ב. נחשב את האינטגרל ישירות

$$\int_1^\infty xye^{-x^3-y^3} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(ye^{-y^3} \int_1^A xe^{-x^3} dx \right) = \frac{y}{2} e^{-y^3} - 1$$

פתרון: נשתמש בנוסחה (4), נקבל

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{x^2}^{e^x} \left(\frac{\sin(ux)}{u} \right)'_x du + \frac{\sin(xe^x)}{e^x} (e^x)' - \frac{\sin(x^3)}{x^2} (x^2)' = \\ &= \int_{x^2}^{e^x} \cos(ux) du + \sin(xe^x) - \frac{2}{x} \sin x^3 = \\ &= \frac{1}{x} \sin(ux) \Big|_{x^2}^{e^x} + \sin(xe^x) - \frac{2}{x} \sin x^3 = \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \sin(xe^x) - \frac{3}{x} \sin x^3 \end{aligned}$$

דוגמה 7: הוכח: אם $F(t)$ גזירה, אזי הפונקציה

$$u(x, y) = \int_{x-ay}^{x+ay} F(t) dt, \quad a \neq 0$$

מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית $u''_{yy} = a^2 u''_{xx}$

פתרון: נחשב את u'_x ו- u'_y . נקבל

$$u'_x = F(x+ay) - F(x-ay), \quad u'_y = aF(x+ay) + aF(x-ay)$$

ניגזור את הפונקציות הללו לפי x ולפי y בהתאמה, נקבל

$$u''_{xx} = F'(x+ay) - F'(x-ay)$$

$$u''_{yy} = a^2 F'(x+ay) - a^2 F'(x-ay)$$

קל לראות ש- $u(x, y)$ מקיימת את המשוואה $u''_{yy} = a^2 u''_{xx}$

תרגילים

1. חשב את $F'(y)$ כאשר $F(y) = \int_0^y f(x+y, x-y) dx$, בתנאי ש- $f(u, v)$ דיפרנציאבילית.

2. חשב את $F'(y)$ כאשר $F(y) = \int_{y \tan y}^y \ln(x^2 + y^2) dx$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

בתורת האינטגרלים הלא-אמיתיים התלויים בפרמטר, המושג התכנסות במידה שווה משמש תפקיד חשוב (דומה להתכנסות במידה שווה של טורים).

הגדרה 3: אינטגרל (1) מתכנס במידה שווה בקטע $[c, d]$ לפי פרמטר y , אם הוא מתכנס ב- $[c, d]$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $E > 0$ התלוי ב- ε בלבד, כך שלכל $A > E$ ולכל $y \in [c, d]$ מתקיים

$$(2) \quad \left| \int_A^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

מההגדרה נובע הקריטריון הבא להתכנסות במידה שווה של אינטגרלים התלויים בפרמטר.

משפט 7 (קריטריון קושי): אינטגרל (1) מתכנס במידה שווה ב- $[c, d]$ לפי פרמטר y אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר $a < E$, כך שלכל $A' > E$ ו- $A'' > E$ ולכל $y \in [c, d]$ מתקיים

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

את הוכחת המשפט נשאיר לקורא.

לבדיקת ההתכנסות במידה שווה של (1) נביא את המבחן הבא שהוא תנאי מספיק בלבד.

משפט 8 (מבחן וירשטרס): תהיה הפונקציה $f(x, y)$ מוגדרת ב- R_∞ ואינטגרלית לפי x בכל קטע $[a, A]$ לכל y קבוע מ- $[c, d]$. אם בכל הנקודות של R_∞ מתקיים

$$(4) \quad |f(x, y)| \leq g(x)$$

אזי מהתכנסות האינטגרל

$$(5) \quad \int_a^\infty g(x) dx$$

נובעת ההתכנסות במידה שווה ב- $[c, d]$ של (1).

הוכחה: לפי קריטריון קושי להתכנסות האינטגרל (5), נובע

$$\forall \varepsilon > 0, \exists E > a, \forall A'' > A' > E \rightarrow \int_{A'}^{A''} g(x) dx < \varepsilon$$

ולכן תוך שימוש ב-(4) נקבל

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| \leq \int_{A'}^{A''} g(x) dx < \varepsilon$$

לכן לפי משפט 7, ההתכנסות היא במידה שווה ב- $[c, d]$.

נביא ללא הוכחה מבחן נוסף להתכנסות במידה שווה של אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר.

משפט 9: אם $\int_a^\infty f(x, y) dx$ מתכנס במידה שווה ב- $[c, d]$ והפונקציה

$\varphi(x, y)$ חסומה ומונוטונית לפי x , אזי $\int_a^\infty f(x, y) \cdot \varphi(x, y) dx$ מתכנס במידה שווה ב- $[c, d]$.

דוגמה 9: הוכח שהאינטגרל $\int_a^\infty ye^{-yx} dx$ מתכנס במידה שווה, ב- $0 < a \leq y \leq b$, ולא מתכנס במידה שווה ב- $[0, b]$.

פתרון:

א. בקטע $[a, b]$ מקבלים

$$|ye^{-yx}| < be^{-ax}$$

היות ו- $\int_0^\infty be^{-ax} dx$ מתכנס, אזי לפי משפט 8 האינטגרל הנתון מתכנס במידה שווה ב- $[a, b]$.

ב. נחשב

$$\int_E^\infty ye^{-yx} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_E^A ye^{-yx} dx = - \lim_{A \rightarrow \infty} (e^{-yA} - e^{-yE}) = e^{-yE}$$

ל- $0 < \varepsilon$ נתון נבחר y הנמצא ב- $0 < y < \frac{1}{E} \ln \frac{1}{\varepsilon}$, נקבל ש-

$$\int_E^\infty ye^{-yx} dx = e^{-yE} > \varepsilon$$

ולכן ההתכנסות היא לא במידה שווה בקטע $[0, b]$.

דוגמה 10: בדוק התכנסות במידה שווה ב- $0 \leq y < \infty$ של

$$\int_1^{\infty} e^{-xy} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

פתרון: היות ו- $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ מתכנס (בדוק!) והפונקציה e^{-xy} חסומה ומונוטונית לפי x לכל y קבוע, אזי לפי משפט 9 האינטגרל הנתון מתכנס במידה שווה ב- $[0, \infty]$.

הערה 3: באופן דומה ניתן להגדיר אינטגרלים לא-אמיתיים התלויים בפרמטר כאשר הקטע $[a, b]$ הוא סופי אבל הפונקציה $f(x, y)$ לא חסומה ב- $[a, b]$.

תרגילים: הוכח התכנסות במידה שווה של האינטגרלים התלויים בפרמטר:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xy}{4+x^2} dx, -\infty < y < \infty \quad 2. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx, 0 \leq y < \infty$$

$$3. \int_1^{\infty} x^{-y} dx, \frac{3}{2} \leq y \leq 5 \quad 4. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} dx, a \leq y \leq b$$

$$5. \int_0^{\infty} e^{(y^2-y-2)x^2} dx, 0 \leq y \leq 1$$

6. תכונות של אינטגרלים לא-אמיתיים התלויים בפרמטר

בסעיף זה נביא ללא הוכחות משפטים הדומים למשפטים 1, 2, 4 (את ההוכחות נשאיר לקורא).

משפט 10: אם הפונקציה $f(x, y)$ רציפה ב- $R_{\infty} = [a, \infty) \times [c, d]$ והאינטגרל התלוי בפרמטר

$$(I) \quad \varphi(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

מתכנס במידה שווה ב- $[c, d]$, אזי $\varphi(y)$ רציפה ב- $[c, d]$.

משפט 11: יהיו $f(x, y)$ ו- $f'_y(x, y)$ רציפות ב- R_{∞} . אינטגרל (1) מתכנס ואינטגרל $\int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx$ מתכנס במידה שווה ב- $[c, d]$, אזי $\varphi(y)$ גזירה ב- $[c, d]$ ומתקיים

$$(2) \quad \varphi'(y) = \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx$$

משפט 12: אם הפונקציה $f(x, y)$ רציפה ב- R_{∞} ואינטגרל (1) מתכנס במידה שווה ב- $[c, d]$, אזי

$$(3) \quad \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy$$

הערה 4: נוסחה (3) מתקיימת גם כאשר $a = -\infty, c = -\infty, d = \infty$.

נשתמש במשפטים הללו לחישוב אינטגרלים לא-אמיתיים.

$$\text{דוגמה 11: חשב } \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 1.$$

פתרון: נבנה אינטגרל התלוי בפרמטר y

$$I(y) = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin xy}{x} dx, \quad y > 0$$

כאשר k מספר חיובי.

היות והניגזרת $(e^{-kx} \frac{\sin xy}{x})'_y = e^{-kx} \cos(xy)$ היא פונקציה רציפה, האינטגרל $I'(y)$ שווה ל-

$$I'(y) = \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos(xy) dx$$

ומתכנס במידה שווה כיוון ש-

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} dx < \infty \quad \text{ו-} \quad |e^{-kx} \cos(xy)| \leq e^{-kx}$$

לאחר חישוב לפי חלקים נקבל $I'(y) = \frac{k}{y^2 + k^2}$, ולכן

$$\int_2^5 I(y) dy = \int_2^5 dy \int_0^\infty e^{-xy} dx =$$

נחליף את סדר האינטגרציה

$$= \int_0^\infty dx \int_2^5 e^{-xy} dy = \int_0^\infty \frac{e^{-2x} - e^{-5x}}{x} dx$$

מצד שני $I = \ln \frac{5}{2}$ סופית $\int_2^5 I(y) dy = \int_2^5 \frac{dy}{y} = \ln \frac{5}{2}$

תרגילים

1. תוך שימוש בדוגמה 12 חשב: $\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n} dx$
2. חשב: $\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^4}$, רמז: השתמש ב- $\int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$
3. חשב: $\int_0^\infty \frac{1-\cos(xy)}{x} e^{-3x} dx$, $y > 0$, רמז: $\int_0^\infty \frac{1-\cos(xy)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$
4. חשב: $\int_0^\infty \frac{1-e^{-xy}}{x} \cos x dx$, רמז: השתמש ב- $\int_0^\infty \frac{1-\cos(xy)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$
5. חשב: $\int_0^\infty \frac{\ln(1+yx^2)}{1+x^2} dx$, רמז: $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$
6. חשב: $\int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, רמז: $\int_0^\infty \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$
7. הוכח: $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$, $b > a > 0$
8. הוכח: $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{b-a}{2} \pi$, $b > a > 0$
9. הוכח כי $y = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ הוא פתרון של המשוואה $y'' + y = \frac{1}{x}$

$$I(y) = \int_0^y \frac{k}{y^2 + k^2} dy = \arctg \frac{y}{k}$$

קיבלנו את $I(y)$ כאשר $k > 0$. לכל y קבוע הפונקציה $I(y)$ רציפה לפי k ולכן אם נעבור לגבול כאשר $k \rightarrow 0$ שואף לאפס נקבל $I_0(y) = \lim_{k \rightarrow 0} I(y) = \frac{\pi}{2}$

ולכן סופית: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

דוגמה 12: חשב $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

פתרון: נציב $x = yt$ כאשר y הוא פרמטר חיובי, נקבל

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = y \int_0^\infty e^{-y^2 t^2} dt$$

נכפיל את שני האגפים ב- e^{-y^2} ונבצע אינטגרציה לפי y ב- $[0, \infty)$

$$\int_0^\infty I e^{-y^2} dy = \int_0^\infty y e^{-y^2} dy \int_0^\infty e^{-y^2 t^2} dt$$

$$I^2 = \int_0^\infty dy \int_0^\infty y e^{-y^2(1+t^2)} dt$$

או

נחליף את סדר האינטגרציה, נקבל

$$I^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty y e^{-y^2(1+t^2)} dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

ולבסוף $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. את הצדקת החלפת סדר האינטגרציה נשאיר לקורא.

דוגמה 13: חשב: $I = \int_0^\infty \frac{e^{-2x} - e^{-5x}}{x} dx$

פתרון: נתבונן באינטגרל $I(y) = \int_0^\infty e^{-xy} dx = \frac{1}{y}$, $2 \leq y \leq 5$

$I(y)$ מתכנס במידה שווה ב- $[2, 5]$. נבצע אינטגרציה

פרק 17 אינטגרל כפול

1. הגדרת שטח התחום

במתמטיקה אלמנטרית הגדרנו שטחם של מצולעים (משולש, מרובע, מחומש וכו'ומה). בסעיף זה נרחיב את מושג השטח של התחום המישורי D החסום על-ידי קו סגור L (השפה של D).

נחלק את התחום D לחלקים אלמנטריים על-ידי קווים מקבילים לצירי הקואורדינטות ונקבל "רשת" מלבנית המכסה את התחום D המכילה שלושה סוגים של מלבנים:

סוג 1: מלבנים המכילים לפחות נקודה אחת של השפה L .

סוג 2: מלבנים פנימיים.

סוג 3: מלבנים שאין להם אף נקודה משותפת עם $D \cup L$.

הגדרה 1: מצולע המורכב ממלבנים מסוג 1 נקרא **כיסוי מלבני** של הקו L . כל המלבנים מסוג 2 יוצרים מצולע החסום בתחום D , וכל המלבנים מסוג 1 ו-2 יוצרים מצולע החוסם את D .

נסמן על-ידי S_1 שטח המצולע החסום ב- D , על-ידי S_2 את שטח המצולע החוסם את D ועל-ידי $S(D)$ נסמן את השטח של D .

ברור שלכל חלוקה

$$S_1 \leq S(D) \leq S_2$$

נכסה את D על-ידי רשת יותר "צפופה". זאת אומרת, שהאלכסון המקסימלי של המלבנים האלמנטריים שלה יותר קטן מהאלכסון המקסימלי של המלבנים האלמנטריים של הרשת הקודמת.

תהיה $\{S_1\}$ קבוצת השטחים של המצולעים החסומים ב- D ו- $\{S_2\}$ קבוצת השטחים של המצולעים החוסמים את D .

קל להבין שהקבוצה $\{S_1\}$ חסומה מלמעלה (על-ידי S_2) ו- $\{S_2\}$ חסומה מלמטה ולכן קיימים $\bar{S} = \sup\{S_1\}$, $\underline{S} = \inf\{S_2\}$.

הגדרה 2: אומרים שתחום D הוא בעל שטח אם השטח העליון $\bar{S}$ שווה לשטח התחתון $\underline{S}$. המספר $S(D) = \bar{S} = \underline{S}$ נקרא שטח התחום D .

משפט 1: תחום D הוא בעל שטח אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת רשת כזו אשר $S_1 - S_2 < \varepsilon$.

הוכחה: נניח שהתחום D הוא בעל שטח, כלומר $\bar{S} = \underline{S} = S(D)$ לפי הגדרת סופרמום ואינפמום ניתן למצוא מצולע חסום בעל שטח S_1 כזה ש- $S(D) - S_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ וכן מצולע חוסם בעל שטח S_2 כזה ש- $S_2 - S(D) < \frac{\varepsilon}{2}$. אם נחבר את שני האי-שוויונים הנ"ל נקבל $S_2 - S_1 < \varepsilon$.

כיוון שני, נניח כי S_1 ו- S_2 משטחים של מצולעים אשר עבורם $S_2 - S_1 < \varepsilon$. היות ו- $S_1 \leq \bar{S} \leq S_2$ נקבל $|\bar{S} - \underline{S}| < \varepsilon$ וכיוון ש- ε מספר כלשהו, מקבלים $\bar{S} = \underline{S}$.

הגדרה 3: העקום L הוא בעל שטח אפס, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי מלבני של L ששטחו S_0 קטן מ- ε .

אם L שפתו של D , אזי קל לראות כי $S_0 = S_2 - S_1$ ולכן את משפט 1 ניתן לנסח באופן הבא:

משפט 1*: תחום D הוא בעל שטח אם ורק אם שפתו היא עקום בעל שטח אפס (נציין שקיימים עקומים ששטחם אינו אפס. דוגמאות של עקומים כאלה חורגים ממסגרת קורס זה).

הערה 1: באותה שיטה ניתן להגדיר נפח של גוף, כלומר על-ידי חלוקת הגוף לתיבות אלמנטריות ובמקרה זה משפט דומה למשפט 1* הוא:

משפט 1:** גוף V הוא בעל נפח אם ורק אם שפתו היא משטח בעל שטח אפס.

2. הגדרה של אינטגרל כפול

תהיה $f(x, y)$ פונקציה המוגדרת מעל מלבן $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. נחלק את הקטע $[a, b]$ ל- n קטעים אלמנטריים על-ידי נקודות

מזהגדרה נובע כי $\iint_R dx dy$ שווה לשטח המלבן R . אמנם, אם $f(x, y) = 1$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Delta x_i \Delta y_j = S(R) \quad (1):$$

קבוצות של פונקציות אינטגרביליות.

ברור שרק לפונקציות חסומות בתחום R יכול להיות גבול סופי $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma$ לכן אם הפונקציה $f(x, y)$ אינטגרבילית מעל R , אזי היא חסומה שם.

באופן דומה לאינטגרל רימן (ראה חדר"א 1, פרק 10, סעיפים 3-1) ניתן לבנות תיאוריה של האינטגרל הכפול. נביא כאן רק את ראשי הפרקים של התיאוריה הב"ל.

תהיה T חלוקת מלבן R למלבנים אלמנטריים R_{ij} .

נסמן על-ידי m_{ij} ו- M_{ij} את האינפימום והסופרמום של הפונקציה $f(x, y)$ ב- R_{ij} בהתאמה.

נבנה שני סכומים המתאימים לחלוקתו של המלבן R :

הסכום העליון של רבוב

$$(3) \quad S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

והסכום התחתון של רבוב

$$(4) \quad s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

נביא ללא הוכחה (ההוכחות דומות לטענות המתאימות לאינטגרל רימן) את תכונותיהם של סכומי רבוב.

1. לכל חלוקה T (הנתונה מראש) ולכל $\varepsilon > 0$ ניתן לבחור נקודות $(u_i, v_j) \in R_{ij}$ כך ש- $0 \leq S - \sigma < \varepsilon$, באופן דומה ניתן לבחור (u'_i, v'_j) כך ש- $0 \leq \sigma - s < \varepsilon$.

2. אם חלוקה T' של R מתקבלת מחלוקה T על-ידי הוספת קווים נוספים מקבילים לצירי הקואורדינטות, אזי סכום רבוב העליון S' המתאים לחלוקה T' לא עולה על סכום רבוב העליון S המתאים ל- T , וסכום רבוב התחתון s' המתאים ל- T' לא קטן יותר מסכום רבוב תחתון s המתאים ל- T , כלומר $S' \leq S$, $s' \geq s$.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

ונסמן את אורך הקטע $[x_{i-1}, x_i]$ על-ידי $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

באופן דומה נחלק את הקטע $[c, d]$ ל- m קטעים אלמנטריים על-ידי נקודות $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ ונסמן $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

נעביר דרך הנקודות x_i ו- y_j קווים מקבילים לצירים x ו- y בהתאמה.

נקבל רשת המכסה את R ובעלת מלבנים אלמנטריים

$$R_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} < x < x_i, y_{j-1} < y < y_j\}$$

$$1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

כאשר השטח של המלבן האלמנטרי R_{ij} הוא $\Delta R_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$.

נסמן על-ידי $d_{ij} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}$ את אלכסון המלבן R_{ij} ו- $\Delta_T = \max_{ij} d_{ij}$.

תהיה (u_i, v_j) נקודה כלשהי ב- R_{ij} . נבנה את הסכום

$$(1) \quad \sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

הגדרה 4: הסכום (1) הוא הסכום האינטגרלי של הפונקציה $f(x, y)$ המתאים לחלוקה הנתונה T ותלוי בבחירת הנקודה (u_i, v_j) במלבן R_{ij} .

הגדרה 5: אומרים שהפונקציה $f(x, y)$ אינטגרבילית (לפי רימן) מעל המלבן R אם קיים גבול סופי של הסכום האינטגרלי (1), כאשר האלכסון המקסימלי Δ_T שואף לאפס, שאינו תלוי בחלוקה T של המלבן R ואינו תלוי בבחירת הנקודה (u_i, v_j) .

את הגבול נסמן על-ידי

$$(2) \quad I = \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(M) d\sigma$$

I הוא אינטגרל כפול של הפונקציה $f(x, y)$ מעל R .

3. לכל שתי חלוקות T', T'' עם סכומי דרבו S', s' ו- S'', s'' בהתאמה מתקיים $s'' \leq S', s' \leq S''$.

4. קבוצת כל סכומי דרבו העליונים $\{S\}$ של הפונקציה $f(x, y)$, לפי כל החלוקות האפשריות של המלבן R , חסומה מלמטה וקבוצת כל הסכומים התחתונים $\{s\}$ חסומה מלמעלה. לכן קיימים $\bar{I} = \inf\{S\}$, $\underline{I} = \sup\{s\}$.

באופן דומה לאינטגרליות של פונקציה ממשותנה אחד ניתן להוכיח את המשפט הבא:

משפט 2: הפונקציה החסומה $f(x, y)$ במלבן R אינטגרלית עליו אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T של R שעבורה $S - s < \varepsilon$.

מחשפט הנ"ל ניתן לקבל מחלוקות חשובות של פונקציות אינטגרליות.

משפט 3: אם הפונקציה $f(x, y)$ רציפה ב- R , אזי היא אינטגרלית על R . נגדיר מחלקה נוספת של פונקציות אינטגרליות.

הגדרה 6: הפונקציה $f(x, y)$ רציפה כמעט בכל מקום ב- R אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי מלבני (הגדרה 1) של כל נקודות אי-הרציפות שלה ב- R ששטחו קטן מ- ε .

דוגמה 1: הוכח כי הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 + x^2 + y^2, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1, -2 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

רציפה כמעט בכל מקום במלבן $[-2, 3] \times [-3, 4]$.

כתרון: כל נקודות האי-רציפות של $f(x, y)$ הן המעגל $x^2 + y^2 = 1$. היות והמעגל הוא קו בעל שטח אפס קיים כיסוי שלו על-ידי מלבנים, כזה ששטח של כל המלבנים המכסים את המעגל יהיה קטן מכל מספר ε . הנתון מראש. המשפט הבא מרחיב את קבוצת הפונקציות האינטגרליות.

משפט 4: פונקציה חסומה ורציפה כמעט בכל מקום ב- R , אינטגרלית שם. נעבור עתה להגדרת אינטגרל כפול במקרה הכללי.

תהיה $f(x, y)$ פונקציה מוגדרת וחסומה מעל תחום חסום וסגור D בעל שטח. נסמן על-ידי R את המלבן החוסם את D . נגדיר ב- R את פונקציות העזר

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R - D \end{cases}$$

הגדרה 7: נאמר ש- $f(x, y)$ אינטגרלית ב- D אם $F(x, y)$ אינטגרלית ב- R , והמספר $I = \iint_R F(x, y) dx dy$ יקרא האינטגרל הכפול של $f(x, y)$ מעל D . נסמן אותו

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(M) d\sigma$$

מסקנה 1: נשאר לקרוא להוכיח כי $\iint_D dx dy$ שווה לשטח התחום D .

3. תכונותיו של האינטגרל הכפול

בסעיף זה נביא את התכונות העיקריות של האינטגרל הכפול.

1. אם הפונקציות $f(x, y)$, $g(x, y)$ אינטגרליות ב- D , אזי

א. לכל a ו- b ממשיים הפונקציה $af(x, y) + bg(x, y)$ אינטגרלית ו-

$$\iint_D [af(M) \pm bg(M)] d\sigma = a \iint_D f(M) d\sigma \pm b \iint_D g(M) d\sigma$$

ב. הפונקציה $f(x, y) \cdot g(x, y)$ אינטגרלית ב- D .

ג. אם בנוסף $f(x, y) \leq g(x, y)$ בכל הנקודות של D , אזי גם

$$\iint_D f(M) d\sigma \leq \iint_D g(M) d\sigma$$

2. אם $f(x, y)$ אינטגרלית ב- D אזי גם $|f(x, y)|$ אינטגרלית ו-

$$\left| \iint_D f(M) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(M)| d\sigma$$

נציין שמאינטגרליות של $|f(x, y)|$ לא נובעת אינטגרליות של $f(x, y)$ באותו תחום D .

3. אם הפונקציה $f(x, y)$ אינטגרלית ב- D ו- $M = \sup_D f(x, y)$, $m = \inf_D f(x, y)$ אזי

$$m \cdot S(D) \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S(D)$$

כאשר $S(D)$ מסמן את שטח התחום D .

אם בנוסף התחום D קשיר (ראה פרק 10, סעיף 12) והפונקציה $f(x,y)$ רציפה ב- D , אזי קיימת נקודה (x_0, y_0) ב- D כזאת ש-

$$\iint_D f(x,y) dx dy = f(x_0, y_0) \cdot S(D)$$

4. אם הפונקציה $f(x,y)$ אינטגרלית ב- D , והתחום D מחולק על-ידי עקום L , בעל שטח אפס, לשני תחומים קשירים D_1 ו- D_2 ללא נקודות משותפות פנימיות, אזי $f(x,y)$ אינטגרלית מעל D_1 ו- D_2 ומקיימת

$$\iint_D f(M) d\sigma = \iint_{D_1} f(M) d\sigma + \iint_{D_2} f(M) d\sigma$$

את הוכחת התכונות האלה נשאיר לקרוא.

תרגילים: תוך שימוש בתכונה 3 הערך את האינטגרלים:

$$1. I = \iint_D (x+y+10) dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$2. I = \iint_D \frac{dx dy}{16 + \cos^2 x + \cos^2 y}, \quad D = \{|x| + |y| \leq 4\}$$

$$3. I = \iint_D (x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2) dx dy, \quad D = [0, 2] \times [0, 2]$$

4. חישוב של אינטגרל כפול

בסעיף זה נחשב אינטגרלים של פונקציות המוגדרות במלבן.

משפט 5: תהיה הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת במלבן $R = [a, b] \times [c, d]$ נניח שקיים אינטגרל כפול

$$(1) \quad \iint_R f(x,y) dx dy$$

ולכל x מהקטע $[a, b]$ קיים האינטגרל

$$(2) \quad I(x) = \int_c^d f(x,y) dy, \quad (a \leq x \leq b)$$

אזי קיים גם האינטגרל

$$(3) \quad \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy$$

ומתקיים

$$(4) \quad \iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy$$

הוכחה: באופן דומה לסעיף 2 נחלק את המלבן R על-ידי נקודות

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

למלבנים אלמנטריים $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$ נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ ו-

$$m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f(x,y), \quad M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f(x,y)$$

לכל נקודות המלבן R_{ij} מתקיים

$$(5) \quad m_{ij} \leq f(x,y) \leq M_{ij}$$

ולכל נקודה t_i מהקטע $[x_{i-1}, x_i]$ מתקיים $m_{ij} \leq f(t_i, y) \leq M_{ij}$.

נבצע אינטגרציה של אי-השוויון האחרון לפי y בקטע $[y_{j-1}, y_j]$ נקבל

$$m_{ij} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(t_i, y) dy \leq M_{ij} \Delta y_j$$

(האינטגרל קיים לפי (2)).

נסכם לפי j (מ-1 עד m) ונקבל

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(t_i, y) dy = \int_c^d f(t_i, y) dy = I(t_i) \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j$$

נכפיל את שלושת האגפים באי-השוויון הנ"ל ב- Δx_i ונסכם לפי i (מ-1 עד n), נקבל

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{i=1}^n I(t_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

הסכומים הכפולים הם סכומי ריבוי s ו- S (ראה סעיף 2).

$$I_2 = \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2-y^2}} \right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2-y^2}} \right) dy =$$

$$= \arcsin y \Big|_0^1 - \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

ג. נשתמש בנוסחה (6)

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^2 xy^2 \cos(x^2 y) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin(x^2 y) \Big|_0^2 dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin 4y dy = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} y \cos 4y \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{32} \sin 4y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{16}$$

תרגילים

חשב:

$$1. \iint_R \frac{x^2}{1+y^2} dx dy, \quad R = [0,1] \times [0,1]$$

$$2. \iint_R \frac{1}{(x+y)^2} dx dy, \quad 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2$$

$$3. \iint_R x^2 y e^{xy} dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$$

$$4. \iint_R y \sin(x+y) dx dy, \quad R = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times [0, \pi]$$

5. תהי $R = [a,b] \times [c,d]$ הוכח:

$$\iint_R f(x) \cdot g(y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) dy$$

נעבור לגבול כאשר האלכסון המקסימלי של המלבנים R_{ij} שואף לאפס, נקבל $\int_a^b f(x) dx = \underline{S} = \bar{s}$. מקיום האינטגרל הכפול (1) נובע ש- $\underline{S} = \bar{s}$ שווים לו זה מזה שמוכיח (4). ■

הערה 2: במשפט 4 ניתן להחליף את מקומותיהם של x ו- y , ולקבל, שאם יחד עם האינטגרל הכפול (1) קיים אינטגרל $\int_a^b f(x,y) dx$, אזי

$$(6) \quad \iint_R f(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx$$

דוגמה 2: חשב:

$$א. I_1 = \iint_R \frac{dx dy}{(1+x+y)^3}, \quad R = [2,3] \times [0,1]$$

$$ב. I_2 = \iint_R \frac{x dx dy}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R = [0,1] \times [0,1]$$

$$ג. I_3 = \iint_R xy^2 \cos(x^2 y) dx dy, \quad R = [0,2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

פתרון:

א. נשתמש בנוסחה (4), נקבל

$$I_1 = \iint_R \frac{dx dy}{(1+x+y)^3} = \int_2^3 dx \int_0^1 \frac{dy}{(1+x+y)^3} = \int_2^3 \left(-\frac{1}{2(1+x+y)^2} \right) \Big|_0^1 dx =$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2(2+x)^2} \right) dx = -\frac{1}{2(1+x)} \Big|_2^3 + \frac{1}{2(2+x)} \Big|_2^3 = \frac{1}{60}$$

ב. נשתמש בנוסחה (4) ו-(6), נקבל

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x dy}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

קל לראות שנוח יותר לחשב את האינטגרל השני, כלומר מהתחלה יכולנו להשתמש רק בנוסחה (6)

$$(3) \quad \iint_R F(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y) dy$$

נחשב את האינטגרל הפנימי ב-(3), לכל x קבוע מהקטע $[a,b]$ נקבל

$$(4) \quad \int_c^d F(x,y) dy = \int_c^{y_1(x)} F(x,y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x,y) dy + \int_{y_2(x)}^d F(x,y) dy$$

היות ש- $F(x,y)$ שווה לאפס כאשר $c \leq y \leq y_1(x)$ ו- $y_2(x) \leq y \leq d$ האינטגרל הראשון והשלישי באגף הימני של (4) שווה לאפס. כמו-כן, כיוון ש- $F(x,y) = f(x,y)$ כאשר $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, נקבל מ-(4)

$$\int_c^d F(x,y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy$$

נציב את האינטגרל האחרון ב-(3) ונקבל את נוסחה (1). ■

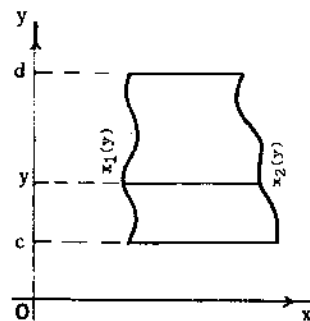
באופן דומה מקבלים את המשפט הבא:

משפט 7: תהיה הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת בתחום D בעל התכונות הבאות:

1. D חסום וסגור.

2. כל קו ישר המקביל לציר x חותך את שפת התחום בלא יותר משתי נקודות $x_1(y)$ ו- $x_2(y)$. $(x_2(y) \geq x_1(y))$

3. מלמעלה ולמטה D נמצא בין הקווים $y=c$ ו- $y=d$ (ראה איור)



$$d = \max \{y : (x,y) \in D\}$$

$$c = \min \{y : (x,y) \in D\}$$

אם $f(x,y)$ אינטגרלית ב- D ולכל

$$y \text{ קבוע מ- } [c,d] \text{ קיים } \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx$$

$$\text{אזי קיים } \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx \text{ ומתקיים}$$

$$(5) \quad \iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx$$

■ את הוכחת המשפט נשאיר לקורא.

5. המשך: מקרה כללי

נעבור עתה לחישוב אינטגרלים של פונקציות המוגדרות בתחום כללי.

משפט 6: תהיה הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת בתחום D בעל התכונות הבאות:

1. D - חסום וסגור.

2. כל קו ישר המקביל לציר y חותך את שפת התחום בלא יותר משתי נקודות $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$. $(y_2(x) > y_1(x))$

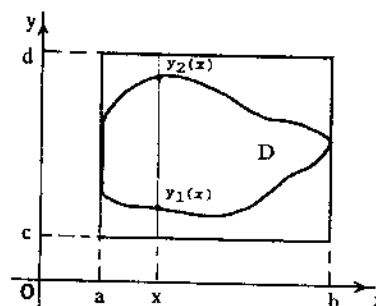
3. התחום D חסום מצידיו על-ידי הקווים $x=a$ ו- $x=b$ (ראה ציור)

$$a = \min \{x : (x,y) \in D\}, \quad b = \max \{x : (x,y) \in D\}$$

אם קיים $\iint_D f(x,y) dx dy$ ולכל x קבוע מ- $[a,b]$ קיים

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy, \text{ אזי קיים } \int_a^b I(x) dx \text{ ומתקיים}$$

$$(1) \quad \iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy$$



הוכחה: נחסום את התחום D במלבן

$$R = [a,b] \times [c,d]$$

$$c \leq \min \{y : (x,y) \in D\}$$

$$d \geq \max \{y : (x,y) \in D\}$$

נגדיר ב- R פונקציה חדשה $F(x,y)$ באופן הבא

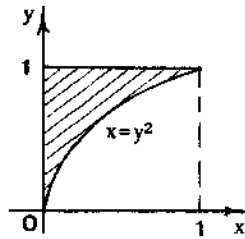
$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R-D \end{cases}$$

היא מתלכדת שם עם $f(x,y)$ כי

היא אינטגרלית גם מעל $R-D$ ו- $\iint_{R-D} F(x,y) dx dy = 0$, לכן

$$(2) \quad \iint_R F(x,y) dx dy = \iint_D f(x,y) dx dy$$

נשתמש בנוסחה (4), מהסעיף הקודם, נקבל



דוגמה 4: חשב $I = \iint_D e^y dx dy$ כאשר התחום D נמצא בין הקווים $x=0$, $x=y^2$, $x=1$.
פתרון: נצייר את התחום (ראה איור).
נשתמש בנוסחה (1), נקבל

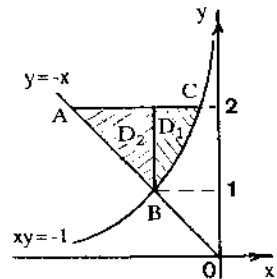
$$I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^y dy$$

קל לראות שחישוב האינטגרל הפנימי לפי y הוא בלתי אפשרי בפונקציות אלמנטריות ולכן נוסחה (1) לא יעילה. נשתמש בנוסחה (5), כלומר נחליף את סדר האינטגרציה. מהמבנה של התחום ברור ש- $0 \leq y \leq 1$ ו- $0 \leq x \leq y^2$, לכן

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^y dx = \int_0^1 ye^y \Big|_0^{y^2} dy = \int_0^1 (ye^{y^2} - y) dy = \left(\frac{1}{2} e^{y^2} - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

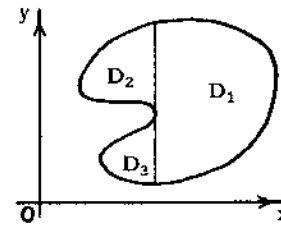
הערה 4: בחישוב אינטגרלים כפולים יש לקחת בחשבון את הקושי בחישוב האינטגרל הפנימי ולהשתמש בהתאם בנוסחה (1) או (5).

דוגמה 5: חשב $I = \iint_D x^2 y dx dy$ כאשר D הוא התחום החסום על-ידי הקווים $y=2$, $y=-x$, $xy=-1$.



פתרון: נשרטט את התחום D . נמצא את שיעורי הנקודות A , C , B , A . נקודת החיתוך של הישרים $y=-x$ ו- $y=2$, לכן $A(-2, 2)$. באופן דומה $B(-1, 1)$, $C(-1/2, 2)$.

התחום הנתון D מקיים את תנאי משפט 6 (בדוקו) ולכן ניתן להשתמש בנוסחה (1). מהאיור רואים ש- x משתנה מ- -2 עד $-1/2$. כל קו ישר מקביל לציר y חותך את השפה של D בשתי נקודות בלבד.

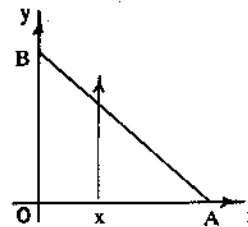


הערה 3: אם התחום D מורכב יותר, אזי מחלקים אותו למספר תחומים מהצורה הנזכרת במשפטים 6 ו-7.

לדוגמה: התחום באיור נחלק לשלושה תחומים על-ידי ישר המקביל לציר y . כל תחום D_1, D_2, D_3 מקיים את תנאי משפט 6 ולכן ניתן לחישוב לפי נוסחה (1), ו-

$$\iint_D f d\sigma = \iint_{D_1} f d\sigma + \iint_{D_2} f d\sigma + \iint_{D_3} f d\sigma$$

דוגמה 3: חשב $I = \iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}$ כאשר D משולש בעל קודקודים $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.



פתרון: קל לראות שהתחום D מקיים את תנאי המשפטים 6 ו-7 ולכן ניתן להשתמש בנוסחה (1) או בנוסחה (5).

נשתמש בנוסחה (1). נרשום קודם את משוואת הישר AB , היא $x+y=1$. רואים ש- x משתנה מנקודה O עד A , כלומר $0 \leq x \leq 1$. לכל x קבוע y משתנה מהציר x עד הישר AB , זאת אומרת ש- $0 \leq y \leq 1-x$, לכן

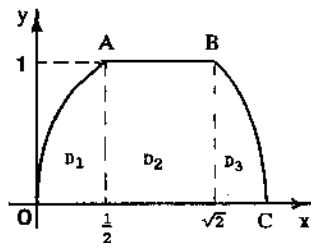
$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^3} = \int_0^1 dx \left(-\frac{1}{2(1+x+y)^2} \right) \Big|_0^{1-x} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4} \right) dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x} \Big|_0^1 - \frac{1}{8} x \Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

באופן דומה ניתן להשתמש בנוסחה (5) לחישוב אותו אינטגרל.

מהאיור רואים ש- $0 \leq y \leq 1$ ולכל y קבוע x משתנה מציר y עד הישר AB , כלומר $0 \leq x \leq 1-y$, לכן

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \frac{dx}{(1+x+y)^3}$$

את חישוב האינטגרל נשאיר לקורא.



מגבולות האינטגרציה ברור ש- $0 \leq y \leq 1$ ו- $\frac{1}{2}y^2 \leq x \leq \sqrt{3-y^2}$. כלומר y נמצא בין שני קווים ישרים $y=0$ ו- $y=1$, ו- x נמצא בין קשת BC של המעגל $x^2 + y^2 = 3$ ובין קשת OA של הפרבולה $x = \frac{1}{2}y^2$. (ראה איור).

נחשב את השיעורים של הנקודות C, B, A. נקבל

$$C(\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{2}, 1), A(\frac{1}{2}, 1)$$

נחלק את התחום D לשלושה תחומים על-ידי הישרים $x = \frac{1}{2}$ ו- $x = \sqrt{2}$ ונחשב אינטגרל כפול על כל אחד מהתחומים:

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy$$

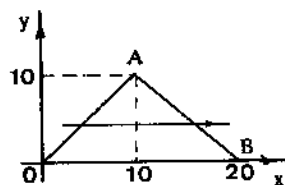
$$I_2 = \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x, y) dy$$

$$I_3 = \iint_{D_3} f(x, y) dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y) dy$$

ולבסוף $I = I_1 + I_2 + I_3$ או

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f dy$$

ב. נשחזר את התחום D.



באינטגרל הראשון רואים שכאשר x משתנה מ-0 עד 10, y רץ מציר x עד הישר $y=x$. מגבולות האינטגרציה של האינטגרל השני רואים שכאשר x משתנה מ-10 עד 20, y משתנה מ-0 עד הישר $y=20-x$. התחום הוא משולש OAB שבו משוואת OA היא $y=x$ ומשוואת AB היא $y=20-x$.

החלק התחתון של השפה מורכב משני עקומים $y=-x$ ו- $y=-\frac{1}{x}$ ומשוואתו

$$y_1(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x \leq -1 \\ -\frac{1}{x}, & -1 < x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

המרכיב העליון של השפה הוא $y_2=2$ ולכן את האינטגרל לפי y יש לחלק לאינטגרל לפי שני התחומים D_1 ו- D_2 . נקבל

$$I = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-x}^2 x^2 y dy + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} dx \int_{-\frac{1}{x}}^2 x^2 y dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{-1} (x^2 y^2) \Big|_{-x}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (x^2 y^2) \Big|_{-\frac{1}{x}}^2 dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1} \left(2x^2 - \frac{x^4}{2} \right) dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(2x^2 - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{47}{30} + \frac{1}{3} = \frac{57}{30}$$

את החישוב ניתן לפשט אם נשתמש בנוסחה (5)

$$I = \int_{-1}^2 dy \int_{-y}^{-\frac{1}{y}} x^2 y dx = \int_{-1}^2 \frac{x^3 y}{3} \Big|_{-y}^{-\frac{1}{y}} dy = \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{3} y^4 - \frac{1}{3y^2} \right) dy = \frac{57}{30}$$

דוגמה 6: החלק סדר אינטגרציה באינטגרלים הכפולים

$$I = \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx \quad \text{א.}$$

$$I = \int_0^{10} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{10}^{20} dx \int_0^{20-x} f(x, y) dy \quad \text{ב.}$$

פתרון

א. נשחזר את התחום D.

$$.y^2 \leq 8x, y \leq 2x, y+4x \leq 24 \quad \text{ה.} \quad .x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 \leq 0 \quad \text{ד.}$$

2. צייר את התחום והחלק סדר אינטגרציה באינטגרלים הבאים:

$$\text{א.} \quad \int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y) dy \quad \text{ב.} \quad \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y) dy$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^2 dx \int_{\frac{4-x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy \quad \text{ד.} \quad \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} f(x,y) dy$$

$$\text{ה.} \quad \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_0^x f dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f dy \quad \text{ו.} \quad \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^3 dx \int_0^2 f dy$$

3. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א.} \quad \iint_D \sqrt{xy-y^2} dx dy \quad \text{כאשר } D \text{ הוא משולש בעל קודקודים } (0,0), (1,1), (10,1)$$

$$\text{ב.} \quad \iint_D (x^2+y) dx dy \quad \text{כאשר } D = \{y \geq x^2, y^2 \leq x\}$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{1+\cos x}{2}} y^2 \sin x dy \quad \text{ד.} \quad \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{1}{y} \sin \frac{\pi x}{2y} dy$$

$$\text{ה.} \quad \iint_D xy dx dy \quad \text{כאשר } D = \{xy \geq 1, x+y \leq \frac{5}{2}\}$$

$$\text{ו.} \quad \iint_D e^{\frac{x}{y^2}} dx dy \quad \text{כאשר } D = \{x \geq y^2, x \leq 2y^2, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\text{ז.} \quad \iint_D x \sqrt{1-y^2} dx dy \quad \text{כאשר } D = \{x^3 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$$

$$\text{ח.} \quad \iint_D \frac{y^2 e^{y^2}}{x^2 + y^2} dx dy \quad \text{כאשר } D = \{0 \leq x \leq y, 1 \leq y \leq 2\}$$

תוך שימוש בנוסחה (5), נקבל

$$I = \int_0^{10} dy \int_y^{20-y} f(x,y) dx$$

דוגמה 7: חשב $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$ כאשר

$$D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3}x, x > 0\}$$

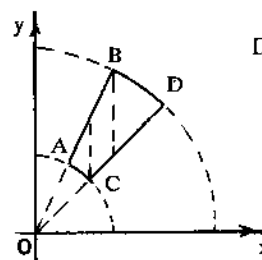
פתרון: משוואת AB: $y = \sqrt{3}x$

משוואת CD:

$y = x$ משוואת הקשת

AC: $y = \sqrt{1-x^2}$

הקשת BD: $y = \sqrt{4-x^2}$



לאחר חישוב מקבלים את הקואורדינטות של הנקודות $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$B(1, \sqrt{3})$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $D(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. נחלק את התחום D לשלושה

תחומים על-ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ונרשום את גבולות האינטגרציה

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{1-x^2}}}^{\sqrt{3}x} \arctg \frac{y}{x} dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_x^{\sqrt{3}x} \arctg \frac{y}{x} dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{4-x^2}} \arctg \frac{y}{x} dy$$

את החישובים נשאיר לקורא ורק נציין ש- $I = \frac{7\pi^2}{192}$ (ראה גם דוגמה 11).

תרגילים

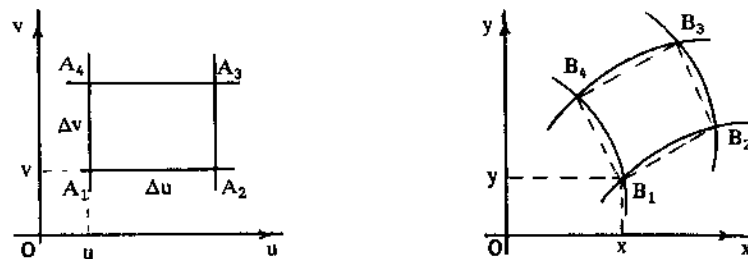
1. כתוב את גבולות האינטגרציה של $\iint_D f(x,y) dx dy$ כאשר D הוא:

א. טרפז בעל קודקודים $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

ב. גזרה $|x| \leq y$, $x^2 + y^2 \leq 2$. ג. $y^2 - x^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq 9$.

$$(3) \quad S(D) = \iint_{\Delta} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv$$

הוכחה: נתבונן במלבן אלמנטרי במישור (u,v) בעל צלעות $\Delta u, \Delta v$ ותמונתו (בהעתקה (1)) במישור (x,y) תהיה "מרובע" $B_1 B_2 B_3 B_4$



איור 2

אם הקודקודים של המלבן $A_1 A_2 A_3 A_4$ הם בעלי קואורדינטות $A_1(u,v), A_2(u+\Delta u, v), A_3(u+\Delta u, v+\Delta v), A_4(u, v+\Delta v)$ אזי הקואורדינטות המתאימות של "המרובע" $B_1 B_2 B_3 B_4$ הן:

$$B_1[x(u,v), y(u,v)], \quad B_2[x(u+\Delta u, v), y(u+\Delta u, v)] \\ B_3[x(u+\Delta u, v+\Delta v), y(u+\Delta u, v+\Delta v)], \quad B_4[x(u, v+\Delta v), y(u, v+\Delta v)]$$

נשתמש בנוסחת טיילור (7) מפרק 13 סעיף 5 לפיתוח הפונקציות $x(u,v), y(u,v)$ בסתפק באיברים מסדר ראשון יחסית ל- $\Delta u, \Delta v$ נקבל את הקואורדינטות של הנקודות B_i :

$$B_1(x, y), \quad B_2\left(x + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, y + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u\right),$$

$$B_3\left(x + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, y + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v\right),$$

$$B_4\left(x + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, y + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v\right)$$

כאשר $x = x(u,v)$ ו- $y = y(u,v)$ וכל הניגודות הן בנקודה (u,v) .

קל לראות ש- $B_1 B_2 B_3 B_4$ מקבילית. אמנם, הוקטורים

$$\overrightarrow{B_2 B_1} = \left(-\frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, -\frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right), \quad \overrightarrow{B_4 B_1} = \left(-\frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, -\frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \right)$$

6. החלפת משתנים באינטגרל כפול

בסעיף זה נקבל נוסחה המאפשרת לעבור למשתני אינטגרציה חדשים המאפשרים לפשט במקרים רבים את חישוב האינטגרל.

בפרק 11, סעיף 5, ראינו שאם תחום D במישור (x,y) , חסום וסגור ומערכת הפונקציות

$$(1) \quad x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad (u,v) \in \Delta$$

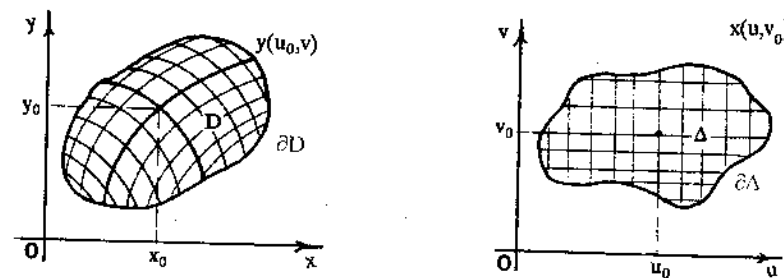
רציפה ובעלת ניגודות חלקיות רציפות וגם כזאת שהיעקוביאן שלה

$$(2) \quad \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

שונה מאפס ב- D , אזי מערכת (1) מעתיקה את התחום D לתחום Δ במישור (u,v) . אם העתקה היא חד-חד ערכית אזי השפה ∂D של התחום D עוברת לשפה $\partial \Delta$ של התחום Δ (ראה איור 1). הנקודות הפנימיות של D עוברות לנקודות פנימיות של Δ (תרצאה ישירה ממשפט 14.3).

זוג מספרים (u_0, v_0) מהתחום Δ מגדיר חד-משמעית נקודה (x_0, y_0) מהתחום D (ולהיפך). זה מאפשר לקרוא ל- (u,v) קואורדינטות עקומיות של הנקודה (x,y) מ- D .

לפעמים אומרים ש- (1) היא הצורה הפרמטרית של התחום D .



איור 1

משפט 8: אם מערכת (1) של פונקציות רציפות ובעלות ניגודות חלקיות רציפות

מעתיקה תחום D לתחום Δ חד-חד ערכית והיעקוביאן $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ ב- Δ

אזי שטח $S(D)$ של התחום D הוא

$$(5) \quad S(D) - S(d) = \iint_{\Delta-\delta} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv$$

נניח שהיעקוביאן חסום על-ידי מספר M , נקבל

$$\left| \iint_{\Delta} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv - \iint_{\Delta-\delta} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv \right| = \iint_{\delta} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv \leq MS(\delta)$$

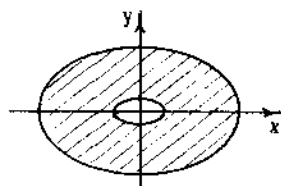
נעבור לגבול ב-(5) כאשר d ו- δ שואפים לאפס ונקבל את נוסחה (3) גם במקרה זה. ■

נדגים את ההערה הנ"ל בדוגמה הבאה.

דוגמה 9: חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$

פתרון: נשתמש בקואורדינטות קוטביות מוכללות

$$(*) \quad \begin{cases} x = a\rho \cos \varphi \\ y = b\rho \sin \varphi \end{cases}$$



נציב x ו- y במשוואת האליפסה, נקבל $\rho^2 \leq 1$ ולכן $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

קל לראות שהיעקוביאן של המערכת $(*)$ שווה ל- $J = ab\rho$ ומתאפס בנקודה $\rho = 0$. נקיק את

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ונקבל טבעת אליפטית שתמונתה מלבן $\{0 \leq \varphi \leq 2\pi, \epsilon \leq \rho \leq 1\}$. בכל התחומים המקווקים ניתן להשתמש ב-(3) והיות ושטח השטחים הלא המקווקים שואף לאפס, אזי לאור הערה 5 ניתן להשתמש ב-(3) ולקבל ששטח האליפסה הוא

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab\rho d\rho = \pi ab$$

דוגמה 10: חשב את השטח החסום על-ידי האסטרואיד $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = a^2$ (ראה איור בעמוד 217, חלק א').

פתרון: נרשום את משוואת האסטרואיד בצורה פרמטרית

מקבילים. באופן דומה הוקטורים $\overline{B_3B_2}$ ו- $\overline{B_4B_1}$ גם מקבילים.

נחשב שטח המקבילית $B_1B_2B_3B_4$. נשתמש בנוסחה הבאה: אם $M_i(x_i, y_i)$, $i=1,2,3,4$ קודקודי המקבילית, אזי שטחה הוא

$$S = \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} \right|$$

$$S_{B_1B_2B_3B_4} = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \\ \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \Delta u \Delta v \quad \text{לכן}$$

בעת אם נחלק את התחום Δ (איור 1) למלבנים אלמנטריים, נקבל חלוקה מקבילה של התחום D למרובעים עקומים. נחבר את כל השטחים האלמנטריים ונעבור לגבול כאשר אלכסון המקסימלי של המלבנים שואף לאפס ונקבל את נוסחה (3). ■

דוגמה 8: מצא את שטח הגיזרה

$$D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3x}, x \geq 0\}$$

פתרון: נשתמש בקואורדינטות קוטביות $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ (ראה סעיף 5, פרק 14 וגם דוגמה 16 באותו פרק). היעקוביאן של המערכת

$$J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \neq 0$$

והתחום D עובר לתחום $\Lambda = \{1 \leq \rho \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\}$ ולכן לפי נוסחה (3)

$$S = \iint_{\Lambda} \rho d\rho d\varphi = \int_1^2 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \rho d\varphi = \frac{\pi}{8}$$

הערה 5: נציין שנוסחה (3) הוכחה בתנאי שהיעקוביאן שונה מאפס בכל הנקודות של D (A). לעיתים קרובות קורה שהיעקוביאן מתאפס במספר סופי של נקודות או לאורך עקומים בודדים.

במקרה זה אם ניתן לכסות את הנקודות האלה על-ידי תחומים קטנים כרצוננו d (ב- D) ו- δ (ב- Δ), אזי ניתן להשתמש ב-(3) ולקבל

דוגמה 12: חשב:

$$D = \{1-x \leq y \leq 4-x, 4x^3 \leq y \leq 16x^3\} \quad \text{כאשר} \quad \iint_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} dx dy$$

פתרון: נעבור לקואורדינטות $u = x+y$, $v = \frac{y}{x^3}$, נחשב

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3y}{x^4} & \frac{1}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{3y+x}{x^4}$$

$$\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| = \frac{x^4}{3y+x} \quad (\text{ראה משפט 11.4})$$

התחום D עובר ל- $\Delta = \{1 \leq u \leq 4, 4 \leq v \leq 16\}$. נשתמש ב-(6), נקבל

$$I = \int_1^4 du \int_4^{16} \frac{x+3y}{x^4} \cdot \frac{x^4}{3y+x} e^v dv = \int_1^4 du \int_4^{16} e^v dv = 3(e^{16} - e^4)$$

דוגמה 13: חשב $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ כאשר $D = \{(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}\}$ פתרון: נשתמש בקואורדינטות קוטביות $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ ונקבל לאחר הצבה במשוואת המעגל

$$(\rho \cos \varphi - \frac{1}{2})^2 + (\rho \sin \varphi - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\rho^2 - \rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi \leq 0 \quad \text{או}$$

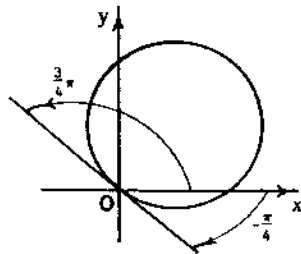
$$\text{לכן } 0 \leq \rho \leq \cos \varphi + \sin \varphi$$

מהאיור רואים שכאשר $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi$, אז ρ מכסה את המעגל. לכן D עובר ל-

$$\Delta = \{-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi, 0 \leq \rho \leq \cos \varphi + \sin \varphi\}$$

נשתמש ב-(6) ונקבל

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi \int_0^{\cos \varphi + \sin \varphi} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2}} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = 2\sqrt{2}$$



$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

זה מאפשר לעבור לקואורדינטות עקומיות

$$x = a \rho \cos^3 t, \quad y = a \rho \sin^3 t$$

$$\text{היות ש- } (a \rho \cos^3 t)^{\frac{2}{3}} + (a \rho \sin^3 t)^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}} \quad \text{נקבל ש- } 0 \leq \rho \leq 1 \quad \text{ו- } 0 \leq t < 2\pi.$$

נחשב את יעקוביאן המערכת

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,t)} = \begin{vmatrix} a \cos^3 t & -3a \rho \cos^2 t \sin t \\ a \sin^3 t & 3a \rho \sin^2 t \cos t \end{vmatrix} = 3a^2 \rho \cos^2 t \sin^2 t = \frac{3}{4} a^2 \rho \sin^2 2t$$

לאור הערה 5 נשתמש בנוסחה (3) ונקבל

$$S = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \frac{3}{4} a^2 \rho \sin^2 2t d\rho = \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3}{8} a^2 \pi$$

מסקנה 2: אם בנוסף להנחות של משפט 8 הפונקציה $f(x,y)$ אינטגרלית ב- D , אזי

$$(6) \quad \int_D f(x,y) dx dy = \int_{\Delta} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv$$

את ההוכחה של המסקנה נשאיר לקורא ורק נציין שהיא נובעת מהגדרת האינטגרל הכפול וממשפט 8. ■

דוגמה 11: חשב $\iint_D \frac{y}{x} \arctg \frac{y}{x} dx dy$, כאשר

$$D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3}x, x \geq 0\}$$

פתרון: נעבור לקואורדינטות קוטביות: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. ברורש- $J = \rho$ ו- $\Delta = \{1 \leq \rho \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\}$ לכן

$$I = \iint_{\Delta} \arctg \left(\frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} \right) \rho d\rho d\varphi = \int_1^2 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \rho \varphi d\varphi = \frac{7\pi^2}{192}$$

$$\iint_D xy \, dx dy, \quad D = \{3 \leq x^2 - y^2 \leq 6, y \geq 0, 0 \leq x \leq 3\} \quad \text{א.}$$

$$\text{רמז: } v = x^2, u = x^2 - y^2$$

$$\iint_D \frac{2x^2 e^{x^2}}{x^2 + y^2} \, dx dy, \quad D = \{1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\} \quad \text{ב.}$$

$$\text{רמז: } v = \frac{y}{x}, u = x^2, \text{ או קואורדינטות קוטביות.}$$

$$\iint_D \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \, dx dy, \quad D = \{\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\} \quad \text{ג.}$$

$$\text{רמז: } y = \rho^4 \sin^4 \varphi, x = \rho^4 \cos^4 \varphi$$

7. שימושים של אינטגרל כפול

בסעיף זה נביא דוגמאות לשימושים של אינטגרל כפול בחישוב שטחים של תחומים מישוריים, חישוב נפח של גופים וגם שימושים במכניקה כמו חישוב מומנטים סטטיים, מומנט אינרציה וקואורדינטות של מרכז הכובד של תחומים מישוריים.

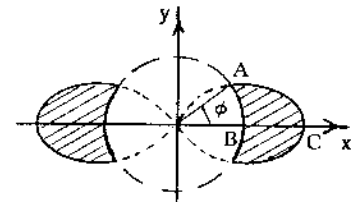
א. חישוב שטחים

מהגדרת אינטגרל כפול נובע מיד ששטח התחום D הוא (ראה מסקנה 1, סעיף 2)

$$(1) \quad S(D) = \iint_D dx dy$$

דוגמה 14: חשב את שטח התחום

$$D = \{(x^2 + y^2)^2 \leq 2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 \geq 1\}$$



פתרון: התחום הנ"ל חסום על-ידי למניסקטה ברנולי ומעגל מהסימטריה של התחום יחסית לצירים x ו- y מספיק לחשב את שטח רבע התחום ABC נעבור לקואורדינטות קוטביות $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ משוואת המעגל בקואורדינטות אלה היא $\rho = 1$, משוואת הלמניסקטה היא

$$\rho^4 = 2\rho^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \rightarrow \rho = \sqrt{2 \cos 2\varphi}$$

לכן ρ משתנה בין $1 \leq \rho \leq \sqrt{2 \cos 2\varphi}$

תרגילים

1. חשב את האינטגרלים הבאים על-ידי שימוש בקואורדינטות קוטביות או משוכללות.

$$\text{א. } \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$$

$$\text{ב. } \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy, \quad D = \{(x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x \geq 0\}$$

$$\text{ג. } \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx dy, \quad D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

$$\text{ד. } \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq Rx\}$$

$$\text{ה. } \iint_D (1 - 2x - y) \, dx dy, \quad D = \{x^2 + 4x + y^2 - 6y + 9 \leq 0\}$$

$$\text{רמז: } y = \rho \sin \varphi + 3, x = \rho \cos \varphi - 2$$

$$\text{ו. } \iint_D \sqrt{xy} \, dx dy, \quad D = \left\{ \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \right)^4 \leq \frac{xy}{\sqrt{6}}, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

2. חשבו:

$$\text{א. } \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} \, dx dy, \quad D = \{1 \leq x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$\text{רמז: } v = x+y, u = x-y$$

$$\text{ב. } \iint_D \left(\frac{x}{3} - y \right)^2 \cos(y - 3x) \, dx dy, \quad D = \{3x - 3 \leq y \leq 3x + 2, 3y - 1 \leq x \leq 3y + 1\}$$

$$\text{ג. } \iint_D \frac{x+y-1}{y^2} e^{\frac{x-1}{y}} \, dx dy, \quad D = \{1 \leq x+y \leq 2, y+1 \leq x \leq 3y+1\}$$

$$\text{ד. } \iint_D (x-y) \, dx dy, \quad D = \{0 \leq x-y \leq 1, 1 \leq xy \leq 2\}$$

$$\text{ה. } \iint_D \frac{\sin(x+y)}{(x-y-1)^4} \, dx dy, \quad D = \{x \leq y \leq \frac{\pi}{2} + x, -x \leq y \leq \frac{\pi}{2} - x\}$$

לחישוב היעקוביאן הדרוש נחשב את

$$J^* = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{y}{x} & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v$$

נשתמש במשפט 5, מפרק 14 ונקבל

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{J^*} = \frac{1}{2v}$$

הגבולות הם $1 \leq u \leq 2$, $\frac{1}{2} \leq v \leq 2$.

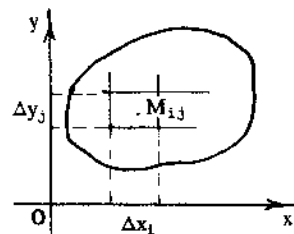
נציב $x^2 + y^2 = y^2 \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = uv \left(1 + \frac{1}{v^2}\right)$ בנוסחה של v ונקבל

$$V = \int_1^2 du \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{u}{2} \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) dudv = \frac{9}{4}$$

נעבור לשימושים פסיקליים.

III. מסה של גוף מישורי

יהיה D גוף מישורי בעל צפיפות מישורית $\rho(x,y)$ של מסה המשתנה מנקודה לנקודה בתחום D . לחישוב המסה של D נפעיל את אותו תהליך כמו בסעיף 2.



(3)

$$m = \iint_D \rho(x,y) dx dy$$

(ראה הגדרת האינטגרל הכפול).

דוגמה 16: מצא את המסה של ממברנה עגולה בעלת רדיוס R אם צפיפות החומר בכל נקודה פרופורציונית למרחק הנקודה הנ"ל מנקודה על שפת הממברנה, ושווה ל- a .

מהאיור רואים שכאשר הזווית φ משתנה מ- 0° עד הזווית $\angle AOB$, ρ מכסה את התחום ABC . לכן נשאר לחשב את הזווית $\angle AOB$.

על-מנת למצוא את קואורדינטות הנקודה A , נפתור את המערכת

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

ומקבלים $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ לכן $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$, כלומר $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$.

לכן תחום ההישתנות של φ : $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$, לבסוף נקבל

$$S(ABC) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_1^{\sqrt{2 \cos 2\varphi}} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\cos 2\varphi - \frac{1}{2} \right) d\varphi = \frac{1}{12} (3\sqrt{3} - \pi)$$

תשובה: השטח הנדרש הוא $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

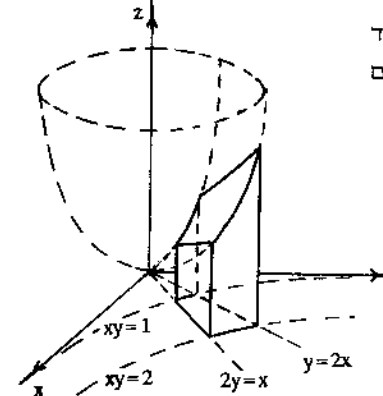
II. נפח הגוף

יהיה (V) גוף גלילי החסום על ידי משטח גלילי עם המדריך מקביל לציר z וחסום מלמעלה על-ידי משטח $z = f(x,y)$ ומלמטה על-ידי מישור xy . יהיה D היטל של המשטח $z = f(x,y)$ על המישור xy .

את נפח הגוף (V) מחשבים לפי הנוסחה

$$(2) \quad V = \iint_D f(x,y) dx dy$$

דוגמה 15: חשב את נפח הגוף החסום על-ידי הפרבולויד $z = x^2 + y^2$ והמשטחים הגליליים $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2x$, $2y = x$, $x \geq 0$.



פתרון: גוף חסום על-ידי פרבולויד

$z = x^2 + y^2$ נמצא מעל התחום

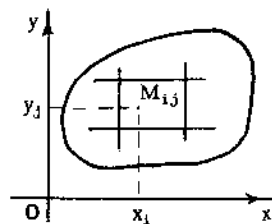
$$D = \{1 \leq xy \leq 2, 0 \leq \frac{x}{2} \leq y \leq 2x\}$$

(ראה איור). נשתמש ב-(2), נקבל

$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

נעבור לקואורדינטות עקומיות

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}$$



אם נסכם את כל המומנטים האלמנטריים ונעבור לגבול כאשר חלוקה הופכת להיות עדינה יותר, נקבל את המומנט הדרוש

$$(4) \quad M_y = \iint_D x \cdot \rho(x, y) dx dy$$

באופן דומה מקבלים נוסחה למומנט סטטי יחסית לציר x

$$(5) \quad M_x = \iint_D y \cdot \rho(x, y) dx dy$$

נמצא עתה את מרכז הכובד (x_0, y_0) של הגוף המישורי D.

ידוע שאם הגוף נמצא בשיווי משקל, אזי סכום כל המומנטים שווה לאפס, כלומר

$$mx_0 = M_y, \quad my_0 = M_x$$

ומכאן תוך שימוש בנוסחאות (3), (4), (5) נקבל נוסחאות לקואורדינטות מרכז הכובד.

$$(6) \quad x_0 = \frac{\iint_D x \cdot \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}, \quad y_0 = \frac{\iint_D y \cdot \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}$$

דוגמה 17: מצא את מרכז הכובד של הממברנה מודגמה 16.

פתרון: בדוגמה 16 קיבלנו שמסת הממברנה שווה $m = \frac{32}{9} a R^2$.

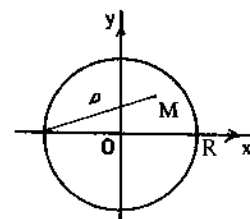
נחשב כעת את המומנט הסטטי יחסי לציר x ונקבל

$$M_x = \iint_D y \frac{a}{R} \sqrt{(x+R)^2 + y^2} dx dy$$

נשתמש באותם קואורדינטות קוטביות כמו בדוגמה 16 ונקבל

$$M_x = \frac{a}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} \rho \sin \varphi \cdot \rho^2 d\rho = \frac{a}{4R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2R \cos \varphi)^4 \sin \varphi d\varphi = 0$$

באופן דומה מומנט סטטי יחסית לציר y הוא



פתרון: נניח שראשית הצירים נמצאת במרכז הממברנה והנקודה הקבועה על המעגל היא $M(-R, 0)$. אזי הצפיפות בכל נקודה $M(x, y)$ היא

$$\rho(x, y) = c \sqrt{(x+R)^2 + y^2}$$

כדי למצוא את c נשתמש בתנאי ש-

$$\rho(0, 0) = a, \quad c \sqrt{R^2} = a, \quad \text{כלומר} \quad c = \frac{a}{R}$$

$$m = \frac{a}{R} \iint_D \sqrt{(x+R)^2 + y^2} dx dy \quad \text{לכן} \quad \rho(x, y) = \frac{a}{R} \sqrt{(x+R)^2 + y^2}$$

כאשר $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$

כדי לחשב את האינטגרל נעבור לקואורדינטות קוטביות מוכללות

$$x = -R + \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

קל לראות שהיעקוביאן $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \rho$ והתחום D עובר ל-

$$(-R + \rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 \leq R^2$$

$$\text{או} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2R \cos \varphi \quad \text{ולכן}$$

$$m = \frac{a}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} \rho^2 d\rho = \frac{8R^2 a}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{32a}{9} R^2$$

IV. מומנט סטטי, מרכז הכובד

נוכיר שמומנט סטטי של נקודה בעלת מסה m יחסית לציר L, הוא מכפלת המסה במרחק עד הציר L.

נחשב מומנט סטטי של גוף מישורי D בעל צפיפות מישורית $\rho(x, y)$ יחסית לציר y. נחלק את D למלבנים אלמנטריים Δ_{ij} (כמו בתת-סעיף הקודם)

נבחר נקודה $M_{ij}(x_i, y_j)$ מ- Δ_{ij} .

המומנט הסטטי של Δ_{ij} יחסית לציר y שווה ל- $x_i \rho(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$.

$$M_y = \iint_D x \frac{a}{R} \sqrt{(x+R)^2 + y^2} dx dy = \frac{a}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} (-R + \rho \cos \varphi) \rho^2 d\rho =$$

$$= -\frac{32a}{9} R^3 + 4R^3 a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{32}{45} a R^2$$

לבסוף נשתמש בנוסחאות (6) ונקבל

$$x_0 = \left(\frac{32}{45} a R^3 \right) : \left(\frac{32}{9} a R^2 \right) = \frac{1}{5} R, \quad y_0 = 0$$

תרגילים

1. חשב את שטח התחומים החסומים על-ידי העקומים הבאים:

א. $x + y = 3, y^2 = 4x$

ב. אליפסה: $(y-x)^2 + x^2 = 1$, רמז: $-1 \leq x \leq 1$

ג. $y^2 = 7x, x = y^2, x^2 = 4y, x^2 = 2y$

ד. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = x^2 + y^2, x > 0, y > 0$

רמז: $x = a \rho \cos^2 t, y = b \rho \sin^2 t$

ה. האליפסה: $(3x+7y+1)^2 + (2x+4y-11)^2 = 4$

2. חשב את נפח הגופים החסומים על-ידי המשטחים הבאים:

א. $z = 0, y = 0, x = 0, y = 3, x = 2, z = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6}$

ב. $z = 0, x^2 + y^2 - z^2 = 9, 6z = x^2 + y^2$

ג. $y = 2x, y = x, xy = 2, xy = 1, z = x + y, y > 0, x > 0$

ד. $z = 0, y = 0, y = 2x, \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, x \geq 0$

ה. $x^2 + y^2 = Rx, x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

ו. $z \geq 0, y \geq 0, x \geq 0, (x^2 + y^2)^2 = 2xy, z = \sqrt{xy}$

3. מצא את מרכז הכובד של גופים משטחיים הומוגניים ($\rho(x, y) = 1$) הבאים:

א. $D = \{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$

ב. $D = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 \leq 8xy, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $D = \{(x, y) : y^2 \leq 4x + 4, y^2 \leq -2x + 4\}$

8. אינטגרלים כפולים לא-אמיתיים

נסיים את הפרק בהגדרת אינטגרל כפול מעל תחום לא חסום D . נסמן על-ידי $\{D_n\}$ את סדרת התחומים הפתוחים ועל-ידי $\bar{D}_n$ סגור של D_n .

הגדרה 8: סדרה של תחומים פתוחים $\{D_n\}$ מכסה מונוטונית את התחום

D אם: א. $\bar{D}_n \subset D_{n+1}$ לכל n . ב. $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

דוגמה 18: נביא דוגמה לכיסוי מונוטוני של תחום:

א. $D = \{(x, y) : a < x < b, 0 < y < \infty\}$ במישור.

ב. $D = \{(x, y, z) : 0 < x < \infty, 0 < y < \infty, 0 < z < \infty\}$ במרחב.

פתרון:

א. קיימים אינסוף כיסויים מונוטוניים של התחום הנתון.

נביא שניים מהם:

1. $D_n = \{(x, y) : a < x < b, 0 < y < n\}$

2. $D_n = \{(x, y) : a < x < b, 0 < y < (x-n)^2\}$

ב. גם במקרה זה נביא שני כיסויים:

1. $D_n = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < n^2, x > 0, y > 0, z > 0\}$

2. $D_n = \{(x, y, z) : 0 < x < n, 0 < y < n, 0 < z < n\}$

נגדיר עתה אינטגרל כפול לא-אמיתי.

הגדרה 9: תהיה הפונקציה $f(x,y)$ אינטגרלית מעל כל חלק חסום וסגור של תחום מישורי אינסופי D . אם לכל כיסוי מונטוני $\{D_n\}$ של D קיים גבול סופי של סדרת המספרים

$$(1) \quad \iint_{D_n} f(x,y) dx dy$$

והגבול הנ"ל אינו תלוי בבחירת הסדרה $\{D_n\}$, אזי הוא נקרא **אינטגרל לא-אמיתי** של $f(x,y)$ מעל D ומסמנים

$$\iint_D f(x,y) dx dy$$

במקרה זה אומרים שהאינטגרל הנ"ל **מתכנס**.

התיאוריה הכללית של האינטגרלים הלא-אמיתיים יוצאת מהמסגרת של ספר זה, לכן נביא כאן רק תנאים להתכנסות אינטגרלים של פונקציות לא-שליליות.

משפט 9: תהיה $f(x,y)$ פונקציה לא-שלילית בתחום לא חסום D . אינטגרל לא-אמיתי (1) מתכנס אם ורק אם לפחות לכיסוי מונטוני אחר $\{D_n\}$ של D , הסדרה

$$(2) \quad a_n = \iint_{D_n} f(x,y) dx dy$$

חסומה. או במילים אחרות, הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x,y) dx dy$ קיים וסופי.

הוכחה: התנאי ההכרחי נובע ישירות ממונטוניות הסדרה $\{a_n\}$ והגדרה 9. נעבור להוכחה של התנאי המספיק. נניח שלפי סדרת התחומים $\{D_n\}$ הסדרה $\{a_n\}$ חסומה. היות ו- $f(x,y)$ חיובית, הסדרה $\{a_n\}$ מונטונית עולה ולכן יש לה גבול $I = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. נוכיח שלכל כיסוי מונטוני אחר $\{D'_n\}$ של D , הסדרה

$$a'_n = \iint_{D'_n} f(x,y) dx dy$$

מתכנסת לאותו גבול.

נקבע n ונתבונן ב- D'_n . קיים מספר n_1 כזה ש- $D' \subset D_{n_1}$ ולכן $a'_n \leq a_{n_1} \leq I$. מכאן נובע ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = I' \leq I$ (ברור שהסדרה $\{a'_n\}$ גם מונטונית עולה).

אם נחליף עתה את מקומותיהם של a_n ו- a'_n נקבל $a_n = I' \geq I$ ולכן

$$\blacksquare, I = I'$$

דוגמה 19: בדוק את התכנסות האינטגרל $I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, כאשר $D = \{(x,y) : 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty\}$.

פתרון: היות והפונקציה $e^{-x^2-y^2} > 0$ ניתן להשתמש במשפט 9.

ניקח $\bar{D}_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ ונעבור לקואורדינטות קוטביות. נקבל

$$a_n = \iint_{\bar{D}_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^n e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2})$$

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4}$$

ואת זה ניתן לרשום בצורה הבאה:

$$(3) \quad \iint_{0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4}$$

נציין שאת אינטגרל (3) ניתן לרשום באופן הבא (ראה משפט 12, פרק 16).

$$\iint_{0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ולכן } \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{ראה דוגמה 12, פרק 16}).$$

הערה 5: באופן דומה מגדירים אינטגרלים לא-אמיתיים של פונקציות לא חסומות מעל תחום חסום וסגור.

תרגילים: חשב את האינטגרלים הבאים:

$$1. \quad \iint_{0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty} e^{-x-y} dx dy \quad 2. \quad \iint_{0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$3. \quad \iint_D \frac{dx dy}{x^4 + y^2}, \quad D = \{x \geq 1, y \geq x^2\} \quad \text{כאשר}$$

$$M_j = \sup_{(\Delta v_j)} f(x, y, z), \quad m_j = \inf_{(\Delta v_j)} f(x, y, z) \quad \text{כאשר}$$

באופן דומה לתיאוריה של אינטגרל כפול (ראה סעיפים 2 ו-3 בפרק הקודם), מקבלים שהאינטגרל (3) קיים אם ורק אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (S - s) = 0$ ומכאן כל

הפונקציות הרציפות מעל (V) אינטגרליות.

באופן דומה למשפט 4 מהפרק הקודם ניתן להוכיח שאם הפונקציה $f(x, y, z)$ חסומה ב- (V) וכל הנקודות האי-רציפות שלה נמצאות על מספר סופי של משטחים בעלי נפח אפס, אזי היא אינטגרלית. תכונות האינטגרל המשולש דומות לאלו של האינטגרל הכפול (ראה סעיף 17.3). נביא כאן רק שתיים:

$$A. \quad \iiint_{(V)} dx dy dz = V, \quad \text{כאשר } V \text{ הוא נפח הגוף } (V).$$

ב. אם הפונקציה $f(x, y, z)$ אינטגרלית ב- (V) ומקימת את $m \leq f(x, y, z) \leq M$ לכל $(x, y, z) \in (V)$ אזי

$$m \cdot V \leq \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz \leq M \cdot V$$

נעבור לנוסחאות לחישוב האינטגרל המשולש (3).

משפט 1: תהיה הפונקציה $f(x, y, z)$ אינטגרלית מעל תיבה $T = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$ ולכל x קבוע מ- $[a, b]$ קיים אינטגרל כפול $\iint_R f(x, y, z) dy dz$, כאשר R הוא המלבן $[c, d] \times [e, f]$, אזי

מתקיים

$$(4) \quad I = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_R f(x, y, z) dy dz$$

ההוכחה מתבססת על אותו רעיון כמו במשפט 17.4 ודומה להוכחה של אותו משפט, לכן נשאיר אותה לקורא.

באופן דומה ניתן לקבל

$$(5) \quad I = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_Q dx dy \int_c^f f(x, y, z) dz$$

כאשר Q הוא מלבן $[a, b] \times [c, d]$.

אם נשתמש עתה במשפט 17.5 נקבל את הנוסחה הבאה

פרק 18 אינטגרל משולש

1. הגדרה וחישוב של אינטגרל משולש

בסעיף זה נגדיר אינטגרל של הפונקציה $f(x, y, z)$ המוגדרת מעל גוף (V) בעל נפח V (ראה הערה 1, פרק 17).

נשתמש בשיטה הדומה לזו שבסעיף 17.2

נחלק את הגוף (V) ל- n גופים אלמנטריים $(\Delta v_1), (\Delta v_2), \dots, (\Delta v_n)$ בעלי נפח $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ בהתאמה.

ידוע $\text{diam}(\Delta v_i)$ הקוטר של הגוף האלמנטרי (Δv_i) . נסמן על-ידי $\Delta = \max \text{diam}(\Delta v_i)$ נבחר ב- (Δv_i) נקודה (u_i, t_i, w_i) ונחשב את $f(u_i, t_i, w_i)$. נבנה סכום אינטגרלי

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n f(u_i, t_i, w_i) \Delta v_i$$

הגדרה 1: אם קיים

$$(2) \quad I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, t_i, w_i) \Delta v_i$$

והוא אינו תלוי בחלוקה של הגוף (V) ובבחירת נקודה (u_i, t_i, w_i) , אזי הוא נקרא **האינטגרל המשולש של $f(x, y, z)$ בתחום (V) ומסמנים**

$$(3) \quad I = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dv = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$$

הגבול הסופי (2) קיים רק עבור פונקציות חסומות מעל (V) ולפונקציות אלו ניתן לבנות את תורת סכומי דרבו

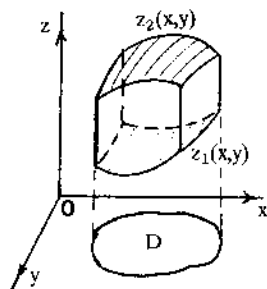
$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta v_i, \quad S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta v_i,$$

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in (V) \\ 0, & (x,y,z) \in T - (V) \end{cases}$$

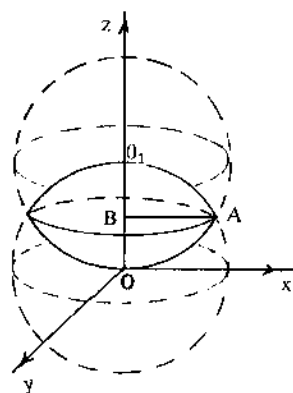
באופן דומה לסעיף 17.5 נקבל את הנוסחאות הבאות לחישוב האינטגרל המשולש בהתאם לצורת הגוף (V) .

1. אם הגוף (V) הוא "גוף גלילי ישר" החסום בין שני משטחים $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$ הנמצאים מעל תחום D במישור (x,y) , ראה איור 1, אזי

$$(7) \quad \iiint_{(V)} f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$$



איור 1



איור 2

דוגמה 2: כתוב את גבולות האינטגרציה $I = \iiint_{(V)} f(x,y,z) dv$ כאשר (V) הוא

החלק המשותף של הכדורים $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ ו- $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$. (ראה איור 2).

פתרון: הגוף (V) נמצא בין המשטחים

$$z_2 = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, z_1 = R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

ההיטל של הגוף הנתון על המישור (x,y) הוא עיגול בעל רדיוס AB שמרכזו O_1 א. ממשולש שווה צלעות O_1AO

$$(OO_1 = O_1A = OA = R)$$

מקבלים $AB = \frac{\sqrt{3}}{2} R$ ולכן

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4} R^2\}$$

מ- (7) נקבל

$$I = \iint_D dx dy \int_{R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} f(x,y,z) dz =$$

$$(6) \quad \iiint_T f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z) dz$$

דוגמה 1: חשב $I = \iiint_T \frac{dx dy dz}{\sqrt{1+x+y+z}}$ כאשר T קוביה $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

פתרון: לפי נוסחה (6)

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+x+y+z}} = \int_0^1 dx \int_0^1 2(\sqrt{2+x+y} - \sqrt{1+x+y}) dy =$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{2}{3} \left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{3}{2}} \right] dx = \frac{8}{15} (31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3})$$

תרגילים: חשב:

$$1. \quad \iiint_T (2x - y + 3z) dx dy dz, \quad T = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

$$2. \quad \iiint_T z^2 e^{x+y} dx dy dz, \quad T = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$3. \quad \iiint_T \frac{(1+y)z dx dy dz}{(1+x^2+z^2)^2}, \quad T = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$4. \quad \iiint_T x^2 y^3 z dx dy dz, \quad T = \{1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

5. הוכח שאם $F(x,y,z) = \varphi(x) \cdot h(y) \cdot g(z)$ והמלבן $T = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$ אזי

$$\iiint_T F(x,y,z) dx dy dz = \left(\int_a^b \varphi(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right) \left(\int_e^f g(z) dz \right)$$

2. המשך (מקרה כללי)

תחיה הפונקציה $f(x,y,z)$ מוגדרת מעל גוף (V) החסום במיבנה T . נבנה פונקציה עזר $F(x,y,z)$ באופן הבא

III. אם גוף (V) נתון על-ידי משוואות באופן הבא

$$(V) = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

אזי

$$(11) \quad \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

רוגמה 4: חשב $\iiint_{(V)} x^2 dx dy dz$ כאשר

$$(V) = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 2, \frac{1}{3}x \leq z \leq \frac{1}{2}x, \frac{1}{4}y^2 \leq z \leq y^2\}$$

פתרון: נרשום את הגוף (V) באופן הבא:

$$(V) = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 2, \sqrt{z} \leq y \leq 2\sqrt{z}, 2z \leq x \leq 3z\}$$

ונשתמש בנוסחה (11), נקבל

$$\iiint_{(V)} x^2 dx dy dz = \int_0^2 dz \int_{\sqrt{z}}^{2\sqrt{z}} dy \int_{2z}^{3z} x^2 dx = \frac{608}{27} \sqrt{2}$$

הערה 1: באופן דומה לסעיף 17.8 ניתן להגדיר גם כאן אינטגרלים משולשים לא-אמיתיים.

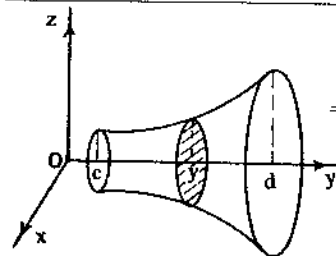
תרגילים: חשב את האינטגרלים הבאים:

$$1. \quad \iiint_{(V)} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}, \quad (V) = \{(x, y, z) : x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

$$2. \quad \iiint_{(V)} (x+y+z)^2 dv, \quad (V) = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 \leq 3, x^2-y^2 \leq 2z\}$$

$$3. \quad \iiint_{(V)} x dv, \quad (V) = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, x \geq 0\}$$

$$4. \quad \iiint_{(V)} (x+y+z) dv, \quad (V) = \{(x, y, z) : \sqrt{y^2+z^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2-z^2}\}$$



איור 3

$$= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}R}^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} dx \int_{-\sqrt{\frac{3}{4}R^2-x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}R^2-x^2}} dy \int_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$$

II. אם גוף (V) נמצא בין המישורים

$$y = c = \min\{y : (x, y, z) \in (V)\}$$

$$y = d = \max\{y : (x, y, z) \in (V)\}$$

ולכל y קבוע מ- $[c, d]$ המישור המקביל למישורים אלה חותך מהגוף (V) תחום P_y (ראה איור 3), אזי

$$(8) \quad \iiint_{(V)} f(x, y, z) dv = \int_c^d dy \iint_{P_y} f(x, y, z) dz dx$$

באופן דומה ניתן לקבל את הנוסחאות הבאות:

$$(9) \quad \iiint_{(V)} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \iint_{P_x} f(x, y, z) dz dy$$

$$(10) \quad \iiint_{(V)} f(x, y, z) dv = \int_c^f dz \iint_{P_z} f(x, y, z) dx dy$$

רוגמה 3: חשב $\iiint_{(V)} z dx dy dz$ כאשר (V) הוא חלק של הפרבולויד

$$z = 4(x^2 + y^2) \quad \text{בין המישור } (x, y) \text{ והמישור } z = 2.$$

פתרון: הגוף הנתון נמצא בין המישורים $z = 0$ ו- $z = 2$ ולכל z קבוע מישור מקביל למישור (x, y) חותך מהפרבולויד תחום

$$P_z = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{z}{4}\}$$

נשתמש בנוסחה (10) ונקבל:

$$1 = \iiint_{(V)} z dx dy dz = \int_0^2 dz \iint_{P_z} z dx dy = \int_0^2 z dz \iint_{P_z} dx dy$$

היות ש- P_z הוא מעגל בעל רדיוס $\frac{\sqrt{z}}{2}$ האינטגרל הכפול הפנימי שווה לשטחו

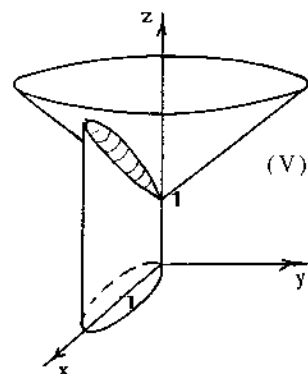
$$1 = \int_0^2 z \frac{\pi}{2} z dz = \frac{\pi}{3} \quad \text{ולכן} \quad \pi \left(\frac{\sqrt{z}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} z$$

הערה 2: אם היעקוביאן (2) מתאפס במספר סופי של נקודות או מעל משטחים בודדים, ואם ניתן לחסום את קבוצת האפסים על-ידי גופים קטנים, כרצוננו, אזי נוסחה (3) בעלת תוקף גם במקרה זה.

מסקנה 1: אם הפונקציה $f(x, y, z)$ אינטגרלית ב- (V) ומתקיימים התנאים של משפט 2, אזי

$$(4) \quad \iiint_{(V)} f dv = \iiint_{(V')} f(x(u, t, w), y(u, t, w), z(u, t, w)) \cdot \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, t, w)} \right| du dt dw$$

דוגמה 5: חשב את $\iiint_{(V)} z \sqrt{x^2 + y^2} dv$ כשהגוף (V) חסום על-ידי המשטחים



$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + 1, z = 0, x^2 + y^2 = 2x$$

פתרון: הגוף (V) הוא

$$(V) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} + 1\}$$

(ראו איור).

נעבור לקואורדינטות גליליות

$$(5) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

ונחשב את היעקוביאן

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

כעת נמצא את תמונת הגוף (V)

$$x^2 + y^2 = 2x \rightarrow \rho^2 = 2\rho \cos \varphi$$

לכן $0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} + 1$ (כיוון ש- $0 \leq z \leq \rho + 1$).

קיבלנו לבסוף $(V') = \{0 \leq z \leq \rho + 1, 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$ לכן

$$5. \quad \iiint_{(V)} \frac{y dv}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (V) = \{(x, y, z) : -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq 1 - x^2 - y^2, y \geq 0\}$$

$$6. \quad \iiint_{(V)} z dv, \quad \text{חסום על-ידי משטחים}$$

$$z \geq 0; z = 6 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$7. \quad \iiint_{(V)} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}, \quad (V) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\},$$

$$8. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} dx dy dz$$

3. החלפת משתנים באינטגרל משולש

לחישוב אינטגרלים משולשים לפעמים נזקקים להחלפת משתנים, כאשר החישוב במשתנים אחרים הוא יותר פשוט.

נביא את המשפט העיקרי על החלפת משתנים:

משפט 2: יהיה (V) גוף חסום וסגור, ותהיה

$$(1) \quad x = x(u, t, w), y = y(u, t, w), z = z(u, t, w)$$

מערכת פונקציות רציפות ובעלות ניגזרות חלקיות רציפות ב- (V) , המעתיקה אותו לגוף (V') חד-חד ערכית, כלומר היעקוביאן

$$(2) \quad \frac{D(x, y, z)}{D(u, t, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_t & x'_w \\ y'_u & y'_t & y'_w \\ z'_u & z'_t & z'_w \end{vmatrix}$$

שונה מאפס ב- (V') , אזי נפחו של (V) שווה

$$(3) \quad V = \iiint_{(V')} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, t, w)} \right| du dt dw$$

הוכחת משפט זה דומה להוכחת משפט 17.8.

גם במקרה זה יש מקום לטענה דומה להערה 17.5.

$$J^* = \frac{D(u, t, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{z} & \frac{2y}{z} & -\frac{x^2+y^2}{z^2} \\ y & x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{x^2+y^2}{z^2} \cdot \frac{2y}{x}$$

לכן לפי משפט 14.5

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, t, w)} = \frac{1}{J^*} = -\frac{z^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x}{2y}$$

נשתמש ב-(4) ונקבל

$$I = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \frac{xy}{z} \cdot \frac{z^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x}{y} du dt dw = \frac{1}{2} \int_1^3 du \int_1^2 dt \int_3^4 \frac{1}{u \cdot w} dw =$$

$$= \frac{3}{4} \ln 3 \cdot \ln \frac{4}{3}$$

תרגילים: חשב:

1. $\iiint_{(V)} z|y| dx dy dz$, $(V) : \{x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq 1\}$

2. $\iiint_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dv$, $(V) : \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$

רמז: $x = ap \cos \varphi \cdot \sin \theta$, $y = bp \sin \varphi \cdot \sin \theta$, $z = cp \cos \theta$

3. $\iiint_{(V)} (xyz)^{-\frac{2}{3}} dv$, $(V) : \{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \leq 1\}$

רמז: $w = \sqrt[3]{z}$, $t = \sqrt[3]{y}$, $u = \sqrt[3]{x}$

4. $\iiint_{(V)} \frac{dv}{x^2+y^2+z^2}$, $(V) : \{(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + z^2 \leq \frac{1}{2}\}$

(היעזר בדוגמה 17.13)

5. $\iiint_{(V)} \frac{2y^2+x^2}{xy} dv$

$(V) : \{y \leq x^2 \leq 2y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 4 \leq x+y+z \leq 6, x > 0\}$

6. $\iiint_{(V)} (x-y+z)^2 dv$, $(V) : \{|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| \leq 1\}$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos \varphi} dp \int_0^{p+1} z \cdot p \cdot p dz = \frac{3}{2}\pi + \frac{1168}{225}$$

דוגמה 6: חשב $I = \iiint_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv$, $(V) = \{x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$

פתרון: הביטוי $x^2+y^2+z^2$ רומז שכדאי לעבור לקואורדינטות כדוריות (ראה סעיף 9.4).

(6)
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cdot \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

נחשב את היעקוביאן של המערכת (6)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cdot \sin \theta & -\rho \sin \varphi \cdot \sin \theta & \rho \cos \varphi \cdot \cos \theta \\ \sin \varphi \cdot \sin \theta & \rho \cos \varphi \cdot \sin \theta & \rho \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\rho \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \theta$$

על-ידי ההעסקה הנ"ל הכדור (V) עובר לתיבה

$$(V') = \{(x, y, z) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

לכן $I = \iiint_{(V')} \rho^2 \sin \theta \cdot \rho d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^R \rho^3 \sin \theta d\rho = \pi R^4$

דוגמה 7: חשב את $I = \iiint_{(V)} \frac{xy}{z} dv$, כאשר

$$(V) = \{(x, y, z) : z \leq x^2 + y^2 \leq 3z, 1 \leq xy \leq 2, 3x \leq y \leq 4x\}$$

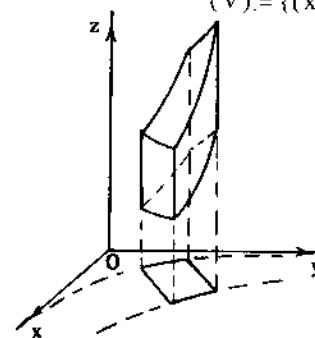
פתרון: נעבור למשתנים חדשים

$$u = \frac{x^2+y^2}{z}, t = xy, w = \frac{y}{x}$$

הקואורדינטות האלו מעבירות את הגוף (V) (ראה איור) לתיבה

$$(V') = \{1 \leq u \leq 3, 1 \leq t \leq 2, 3 \leq w \leq 4\}$$

נחשב את היעקוביאן של המערכת:



14. מרכז הכובד של הגוף

את מרכז הכובד (x_0, y_0, z_0) של הגוף (V) מחשבים לפי הנוסחאות:

$$(4) \quad x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$$

כאשר את M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} מחשבים לפי נוסחאות (3) ו- m מוצאים מנוסחה (2).

תרגילים

1. מצא את המסה של רבע החרוט החסום על-ידי המשטחים

$$x=0, y=0, z=1, z^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}, z \geq 0$$

$$\text{שלו נתון על-ידי } \rho(x, y, z) = \frac{xy}{\sqrt{z}}$$

2. מצא את מרכז הכובד של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10z$, בעל משקל סגולי

$$\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

3. חשב את נפח הגוף $(V) = \{2 \leq x+y+z \leq 5, 1 \leq x+y \leq 3, x \leq y \leq 2x\}$.

4. מצא את מרכז הכובד של גוף הומוגני $(\rho(x, y, z) = 1)$ החסום על-ידי

$$\text{הפרבולויד } y^2 + 2z^2 = 4x \text{ והמישור } x = 2.$$

5. מצא מסת הגוף

$$(V) = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

שבו המשקל הסגולי בכל נקודה שווה למרחק הנקודה ממישור xy .

6. חשב את נפח הגוף החסום על-ידי המשטחים $z^2 = x^2 + y^2, (z \geq 0)$

$$\text{ו- } 2x + 4y + 3z = 1$$

$$7. \quad \iiint_{(V)} \frac{xyz}{x^2 + y^2} dv, \quad (V) = \{(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 4xy, z \geq 0\}$$

$$8. \quad \iiint_{(V)} x^2 e^{y^2 + z^2} dv, \quad \text{גליל } (V) = \{y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq x \leq 2\}$$

$$9. \quad \iiint_{(V)} z dx dy dz, \quad (V) = \{\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\}$$

$$10. \quad \iiint_{(V)} (x^2 - y^2) dx dy dz$$

$$(V) = \{x-1 \leq y \leq x, 1-y \leq x \leq 2-y, y^2 - x^2 + 1 \leq z \leq y^2 - x^2 + 2x\}$$

4. שימושים של אינטגרל משולש

נביא מספר שימושים של האינטגרל המשולש הדומים לאלה של האינטגרל הכפול (ראה סעיף 17.7).

I. נפח גוף

כמו שראינו בסעיף 1, נפחו של גוף (V) הוא

$$(1) \quad V = \iiint_{(V)} dx dy dz$$

II. מסה של גוף

יהיה (V) גוף הבנוי מחומר בעל משקל סגולי $\rho(x, y, z)$ (המשחנה מנקודה לנקודה). מתוך שיקולים דומים לאלו מסעיף 17.7, מקבלים שמסת הגוף שווה ל-

$$(2) \quad m = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

III. מומנט סטטי של גוף

בהמשך לתת-סעיף II תוך שימוש בהגדרת מומנט סטטי של גוף והגדרת האינטגרל המשולש, נקבל (באותה שיטה כמו בסעיף 17.7) נוסחאות למומנטים סטטיים M_{xz}, M_{yz}, M_{xy} יחסית למישורים $y=0, x=0, z=0$ בהתאמה.

$$(3) \quad \begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_{(V)} zp(x, y, z) dv, & M_{yz} &= \iiint_{(V)} xp(x, y, z) dv \\ M_{xz} &= \iiint_{(V)} yp(x, y, z) dv \end{aligned}$$

פרק 19 פונקציות וקטוריות של משתנה סקלרי

1. הגדרה ותיאור גיאומטרי של פונקציות וקטוריות ממשתנה אחד

הגדרה 1: וקטור

$$(1) \quad \mathbf{V}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

כאשר $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ הן פונקציות סקלריות של משתנה t , נקרא וקטור פונקציה.

לכל t_0 קבוע, וקטור הפונקציה (1) מגדיר וקטור קבוע

$$\mathbf{V}(t_0) = x(t_0)\hat{i} + y(t_0)\hat{j} + z(t_0)\hat{k}$$

לכן, כל הפעולות עם הוקטורים, כמו חיבור, חיסור, מכפלה בסקלר, מכפלות סקלרית ווקטורית מפעילים באופן דומה לפרק 8 גם על וקטור פונקציות.

נניח כעת (ולא הגבלת הכלליות) שכל הוקטורים מתחילים בראשית.

הגדרה 2: מקום גיאומטרי של קצוות הוקטור $\mathbf{V}(t)$ כאשר $\alpha \leq t \leq \beta$ נקרא הודוגרף או גרף של פונקציה וקטורית $\mathbf{V}(t)$.

נציין שהודוגרף של פונקציה וקטורית הוא הכללה של גרף של פונקציה סקלרית.

לכל t קבוע נקודה בעלת שיעורים

$$(2) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

נמצאת על הגרף של וקטור פונקציה $\mathbf{V}(t)$.

מערכת (2) היא הצגה פרמטרית של העקום במרחב שהוא גרף של וקטור הפונקציה (ראה פרק 7, סעיף 10 וגם חדו"א 1, פרק 2, סעיף 10), ו-(1) היא הצגה וקטורית של אותו עקום. ולהיפך, לכל עקום במרחב ניתן להתייחס כגרף של איזה שהוא וקטור-פונקציה.

דוגמה 1: מצא את גרף הפונקציה הוקטורית

$$\mathbf{V}(t) = 3\cos t\hat{i} + 3\sin t\hat{j}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

פתרון: הקואורדינטות של קצה הוקטור $\mathbf{V}(t)$ הן

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

קיבלנו צורה פרמטרית של עקום במישור.

כדי למצוא את משוואת העקום נחליף את t מהמערכת, נקבל

$$x^2 + y^2 = 9\cos^2 t + 9\sin^2 t = 9$$

כלומר, גרף הוא מעגל $x^2 + y^2 = 9$, זאת אומרת, אם t עובר קטע $[0, 2\pi)$ קצה של הוקטור $\mathbf{V}(t)$ עובר מעגל בעל רדיוס 3.

דוגמה 2: מצא את גרף הפונקציה הוקטורית (קו הבורג)

$$\mathbf{V}(t) = 2\cos t\hat{i} + 3\sin t\hat{j} + t\hat{k}, \quad -\infty < t < \infty$$

פתרון: נרשום את קואורדינטות הקצה של $\mathbf{V}(t)$

$$x = 2\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad z = t, \quad -\infty < t < \infty$$

קל לראות שעבור t בלשהו

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{מקבלים } z = t$$

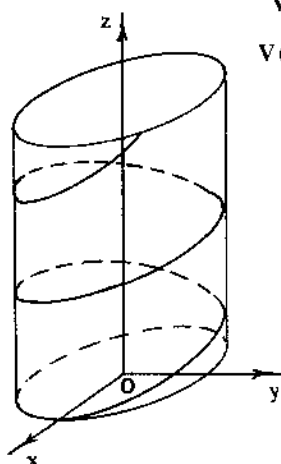
כלומר, אם $-\infty < t < \infty$, קצה של $\mathbf{V}(t)$ נע לאורך ספירלה הנמצאת מעל גליל אלפטי

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

דוגמה 3: מצא את ההצגה הוקטורית של העקומים הבאים:

א. $x^3 + y^3 = a^3$ (אסטרואיד).

ב. $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$



תרגילים

- צייר את הגרף של הפונקציות הוקטוריות הבאות:
 - $V(t) = t\hat{i} + (3t^2 + 1)\hat{j}$
 - $V(t) = t\hat{i} + t\hat{j} + t^2\hat{k}$
- רשום בצורה וקטורית את העקומים הבאים:
 - $x^2 - y^2 = a^2, y > 0$
 - $y = \sin x, -\infty < x < \infty$
 - $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$
 - $64x^2 + 9y^2 = 1$
 - $x^2 = z, y^2 = x$
 - קרדיאואידה $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2), a > 0$
 - ישר העובר דרך הנקודות $M_1(2, 4, 5)$ ו- $M_0(1, 2, 3)$

2. גבולות ורציפות של פונקציות וקטוריות

בסעיפים הבאים נחקור את התכונות הפונקציונליות של פונקציה וקטורית.

הגדרה 3: וקטור קבוע $L(L_1, L_2, L_3)$ הוא גבול של וקטור פונקציה $V(t)$ כאשר $t > t_0$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שעבור כל t המקיים $0 < |t - t_0| < \delta$ מתקיים

$$(I) \quad |V(t) - L| < \epsilon$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} V(t) = L \quad \text{נרשום}$$

את (I) ניתן לרשום באופן הבא:

$$(I') \quad \sqrt{[x(t) - L_1]^2 + [y(t) - L_2]^2 + [z(t) - L_3]^2} < \epsilon$$

משפט 1: וקטור קבוע $L(L_1, L_2, L_3)$ הוא גבול של וקטור פונקציה $V(t)$ כאשר $t \rightarrow t_0$ אם ורק אם

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = L_3, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = L_2, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = L_1$$

את הוכחת המשפט נשאיר לקורא (השווה עם משפט 2, פרק 10).

פתרון:

א. נרשום את העקום הנתון בצורה פרמטרית (ראה סעיף 7.12).

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ומכאן נקבל את וקטור הפונקציה המתאימה

$$V(t) = a \cos^3 t \hat{i} + a \sin^3 t \hat{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(ראה איור, פרק 14, סעיף 2).

ב. נרשום את הפונקציה $y = f(x)$ בצורה פרמטרית. נסמן $x = t$ ונקבל $y = f(t)$, כאשר $a \leq t \leq b$, לכן

$$V(t) = t\hat{i} + f(t)\hat{j}, \quad a \leq t \leq b$$

דוגמה 4: רשום בצורה וקטורית את העקום המתקבל על-ידי חיתוך של המשטחים הבאים:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 = Rx, \quad z \geq 0$$

פתרון: נרשום את העקום בצורה פרמטרית.

נשתמש בקואורדינטות קוטביות

$$x = \rho \cos t, \quad y = \rho \sin t$$

נציב במשוואת המעגל $x^2 + y^2 = Rx$

$$\rho^2 = R\rho \cos t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

מכאן $\rho = R \cos t$, לכן

$$x = R \cos^2 t, \quad y = R \sin t \cdot \cos t$$

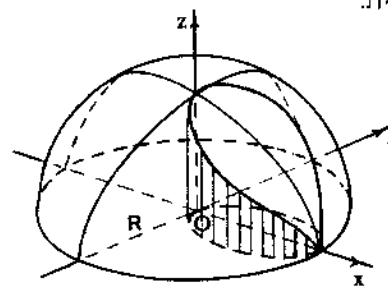
למצוא את z כפונקציה של הפרמטר t נציב x ו- y במשוואת הכדור

$$(R \cos^2 t)^2 + (R \sin t \cdot \cos t)^2 + z^2 = R^2$$

$$z^2 = R^2 - R^2 \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2 \sin^2 t$$

$$z = R |\sin t|$$

$$V(t) = R \cos^2 t \hat{i} + R \sin t \cdot \cos t \hat{j} + R |\sin t| \hat{k}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{סופית}$$



דוגמה 4: חשב

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{V}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \hat{i} + \ln(1+t) \hat{j} + e^t \hat{k} \right)$$

פתרון: תוך שימוש במשפט 1 נקבל

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{V}(t) = \hat{i} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} + \hat{j} \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t) + \hat{k} \lim_{t \rightarrow 0} e^t = \hat{i} + \hat{k}$$

משפט 2: יהיה $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{V}(t) = \mathbf{L}$ ו- $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{W}(t) = \mathbf{M}$ אזי

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{V}(t) \pm \mathbf{W}(t)] = \mathbf{L} \pm \mathbf{M} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{W}(t)] = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{V}(t) \times \mathbf{W}(t)] = \mathbf{L} \times \mathbf{M} \quad \text{ג.}$$

את הוכחת המשפט נשאיר לקורא.

הגדרה 4: וקטור הפונקציה $\mathbf{V}(t)$ המוגדרת בסביבת נקודה t_0 נקראת

רציפה ב- t_0 אם $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(t_0)$

מהגדרה 4 ומשפט 1 נובעת מסקנה 1.

מסקנה 1: הפונקציה $\mathbf{V}(t)$ רציפה ב- t_0 אם ורק אם כל הקואורדינטות שלה הן פונקציות רציפות בנקודה t_0 . הגרף של הפונקציה הווקטורית הרציפה ממשתנה סקלרי הוא קו רציף במרחב.

תרגילים

1. חשב גבולות של וקטורי הפונקציות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \hat{i} + \frac{t-1}{t+2} \hat{j} + \arctan t \hat{k} \right)$$

$$\text{ב. } \lim_{t \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin t}{t-\pi} \hat{i} + \frac{1+\cos t}{t} \hat{j} + \frac{t}{\pi} \hat{k} \right)$$

$$\text{ג. } \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{t}}{1+t} \hat{i} + \frac{t+2}{1-t} \hat{j} + \hat{k} \right)$$

2. הוכח: אם $\mathbf{V}(t)$ ו- $\mathbf{W}(t)$ וקטורי פונקציות רציפים ב- t_0 , אזי $\mathbf{V}(t) \pm \mathbf{W}(t)$, $\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{W}(t)$, $\mathbf{V}(t) \times \mathbf{W}(t)$ גם רציפים ב- t_0 .

3. נגזרת של פונקציה וקטורית

תהיה

$$(1) \quad \mathbf{V}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

פונקציה וקטורית המוגדרת בסביבת נקודה t_0 .

ניתן ל- t_0 תוספת Δt ונקבל

$$\mathbf{V}(t_0 + \Delta t) = x(t_0 + \Delta t)\hat{i} + y(t_0 + \Delta t)\hat{j} + z(t_0 + \Delta t)\hat{k}$$

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{V}(t_0) \quad \text{נסמן}$$

הגדרה 5: אם קיים גבול סופי

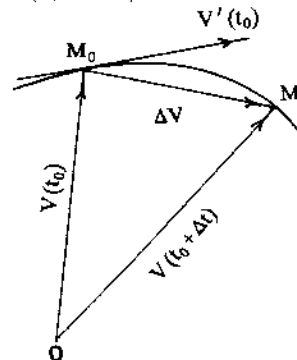
$$(2) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{V}(t_0)}{\Delta t}$$

אזי וקטור הפונקציה $\mathbf{V}(t)$ גזירה בנקודה t_0 ונגזרתו שווה לגבול

$$\mathbf{V}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t}$$

נביא תיאור גיאומטרי של הנגזרת.

לנקודה t_0 מתאימה נקודה $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ על הגרף של $\mathbf{V}(t)$.



ל- $t_0 + \Delta t$ מתאימה הנקודה M על אותו עקום. נבנה וקטור $\Delta \mathbf{V} = \overline{M_0 M}$ (ראה איור).

אם $\Delta t \rightarrow 0$, נקודה M מתקרבת לנקודה M_0 לאורך הגרף של $\mathbf{V}(t)$. לכן כאשר $\Delta t \rightarrow 0$ (או בדומה $M \rightarrow M_0$) המצב הגבולי של המיתרים $\overline{M_0 M}$ הוא משיק לגרף של $\mathbf{V}(t)$ בנקודה M_0 . זאת אומרת, הוקטור $\mathbf{V}'(t)$ הוא בכיוון המשיק לעקום $\mathbf{V}(t)$.

נניח שהקואורדינטות של $\mathbf{V}(t)$ מ- (1) הן פונקציות גזירות בנקודה t .

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} \times W(t+\Delta t) + V(t) \times \frac{W(t+\Delta t) - W(t)}{\Delta t} \right) =$$

$$= V'(t) \times W(t) + V(t) \times W'(t)$$

את הוכחת יתור הטענות נשאיר לקורא, רק נציין שניתן להוכיח אותן גם על-ידי שימוש בנוסחה (3). ■

דוגמה 5: מצא את הניגזרת של

$$V(t) = \sin t \hat{i} + e^{3t} \hat{j} - t^2 \hat{k} \quad \text{א.}$$

$$V^2(t) \quad \text{ב.}$$

פתרון:

$$\text{א. לפי נוסחה (3) נקבל } V'(t) = \cos t \hat{i} + 3e^{3t} \hat{j} - 2t \hat{k}$$

$$\text{ב. נרשום } V^2(t) = V \cdot V \text{ ונשתמש במשפט 3 (III)}$$

$$[V^2(t)]' = (V \cdot V)' = V' \cdot V + V \cdot V' = 2(V \cdot V')$$

מדיוגמה זו נובעת המסקנה הבאה:

מסקנה 3: אם וקטור $V(t)$ כזה ש- $|V(t)|$ קבוע, אזי $V(t)$ מאונך ל- $V'(t)$.

הוכחה: היות ו- $|V(t)|$ קבוע, לכן $V^2(t) = V \cdot V$ קבוע ולאחר גזירה נקבל $(V^2(t))' = 0 = 2(V \cdot V')$. מכפלה סקלרית $V \cdot V'$ היא אפס ולכן הוקטורים מאונכים. ■

דוגמה 6: מצא משוואת המשיק בנקודה $(0, a)$ לעקום (קרדיאוידה) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, $a > 0$. ראה ציור 1, עמוד 76.

פתרון: נרשום את הקו הנתון בצורה וקטורית. נשתמש בקואורדינטות קוטביות $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin t$ ונציב אותן במשוואת העקום הנתון, נקבל

$$(\rho^2 - \rho a \cos t)^2 = a^2 \rho^2 \rightarrow \rho^2 - a \rho \cos t = a \rho$$

$$\rho = a(1 + \cos t)$$

טופית, משוואת העקום בצורה וקטורית היא

$$V(t) = a(1 + \cos t) \cos t \hat{i} + a(1 + \cos t) \sin t \hat{j}$$

נרשום (2) באופן הבא:

$$V'(t) =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t+\Delta t) - x(t)]\hat{i} + [y(t+\Delta t) - y(t)]\hat{j} + [z(t+\Delta t) - z(t)]\hat{k}}{\Delta t} =$$

$$= \hat{i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \hat{j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} + \hat{k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} =$$

$$= x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}$$

כלומר

$$(3) \quad V'(t) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}$$

הוכחנו את המסקנה הבאה.

מסקנה 2: וקטור פונקציה גזיר אם ורק אם הקואורדינטות שלו הם פונקציות גזירות. ניגזרת של וקטור הפונקציה בנקודה על הגרף שלו, הוא וקטור בכיוון המשיק לגרף באותה נקודה.

משפט 3: יהיו פונקציות וקטוריות $V(t)$ ו- $W(t)$ גזירות ו- C וקטור קבוע, אזי

$$\text{I. } C' = 0 \quad \text{II. } [(V(t) \pm W(t))]' = V'(t) \pm W'(t)$$

$$\text{III. אם } f(t) \text{ פונקציה סקלרית גזירה, אזי}$$

$$[f(t)V(t)]' = f'(t)V(t) + V'(t)f(t)$$

$$\text{IV. } [V(t) \cdot W(t)]' = V'(t) \cdot W(t) + V(t) \cdot W'(t)$$

$$\text{V. } [V(t) \times W(t)]' = V'(t) \times W(t) + V(t) \times W'(t)$$

הוכחה: נוכיח למשל את V. נשתמש בהגדרת הניגזרת (2), נקבל

$$(V \times W)' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t+\Delta t) \times W(t+\Delta t) - V(t) \times W(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t+\Delta t) \times W(t+\Delta t) - V(t) \times W(t+\Delta t) + V(t) \times W(t+\Delta t) - V(t) \times W(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[V(t+\Delta t) - V(t)] \times W(t+\Delta t) + V(t) \times [W(t+\Delta t) - W(t)]}{\Delta t} =$$

את הנקודה $(0, a)$ נקבל כאשר $t = \frac{\pi}{2}$. נמצא שיפוע המשיק בנקודה הנתונה.
וקטור $V'(t)$ הוא בכיוון המשיק לעקום הנתון

$$V'(t) = -a(\sin t + 2\cos t \cdot \sin t)\hat{i} + a(\cos t + \cos 2t)\hat{j}$$

$$V'(\frac{\pi}{2}) = -a\hat{i} - a\hat{j}$$

לכן המשיק מקביל לוקטור $-\hat{i} - \hat{j}$.

משוואת הישר העובר דרך נקודה $(0, a)$ ומקביל לוקטור $(1, 1)$ היא $y = x + a$.
המשפט הבא הוא משפט ערך הביניים (הכללה של משפט לגרנז' לפונקציות סקלריות במשתנה אחד).

משפט 4: אם וקטור הפונקציה

$$V(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

רציף בסביבת הנקודה t_0 ובעל נגזרת רציפה ב- t_0 , אזי קיימת נקודה t^* מהסביבה הנ"ל שבה

$$(4) \quad V(t + \Delta t) - V(t) = V'(t^*) \cdot \Delta t + \bar{\epsilon}(t, \Delta t) \cdot \Delta t$$

כאשר וקטור הפונקציה $\bar{\epsilon}(t, \Delta t)$ מקיים

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\epsilon}(t, \Delta t) = 0$$

הוכחה: נרשום את אגף שמאל של (4) בצורה מפורשת

$$V(t + \Delta t) - V(t) = [x(t + \Delta t) - x(t)]\hat{i} + [y(t + \Delta t) - y(t)]\hat{j} + [z(t + \Delta t) - z(t)]\hat{k}$$

ונשתמש במשפט לגרנז' לכל אחד מהרכיבים באגף הימני

$$= [x'(t + \theta_1 \Delta t)\hat{i} + y'(t + \theta_2 \Delta t)\hat{j} + z'(t + \theta_3 \Delta t)\hat{k}] \Delta t$$

כאשר $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$.

ניקח נקודה $t^* = t + \theta \Delta t$ כאשר $0 < \theta < 1$ ונרשום

$$V(t + \Delta t) - V(t) = V'(t^*) \cdot \Delta t +$$

$$+ \{ [x'(t + \theta_1 \Delta t) - x'(t^*)]\hat{i} + [y'(t + \theta_2 \Delta t) - y'(t^*)]\hat{j} + [z'(t + \theta_3 \Delta t) - z'(t^*)]\hat{k} \} \Delta t$$

$$= V'(t^*) \Delta t + \bar{\epsilon}(t, \Delta t)$$

סימנו על-ידי $\bar{\epsilon}(t, \Delta t)$ וקטור בסוגריים הגבוהות $\{\dots\}$, נקבל (4).

כיוון שנגזרות רציפות, כל אחד מהרכיבים של $\bar{\epsilon}(t, \Delta t)$ רציפים וגבולם שווה לאפס כאשר $\Delta t \rightarrow 0$. זו הוכחת המשפט. ■

תרגילים

1. הוכח:

$$[V(t) \cdot V'(t)]' = |V'(t)|^2 + V(t) \cdot V''(t) \quad \text{א.}$$

$$[V(t) \times V'(t)]' = V(t) \times V''(t) \quad \text{ב.}$$

2. יהיו a ו- b וקטורים קבועים ו- α סקלר.

נגדיר $V(t) = a \cos \alpha t + b \sin \alpha t$. הוכח:

$$V(t) \times V'(t) = \alpha a \times b \quad \text{א.}$$

$$V''(t) + \alpha^2 V(t) = 0 \quad \text{ב.}$$

3. גזור את וקטורי הפונקציות הבאים:

$$\text{א. } V(t) = t e^t \hat{i} + \sin^2 t \hat{j} + \frac{1}{t} \hat{k}$$

$$\text{ב. } V(t) = \frac{1}{2} t^2 \hat{i} - t \sin t \hat{j} + e^t \hat{k}$$

4. מצא משוואת המשיק לעקומים

$$\text{א. } z = x^2, \quad x = y^2 \quad \text{בנקודה } (1, 1, 1).$$

$$\text{ב. } x^2 + y^2 = 1 \quad \text{בנקודה } \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

5. על העקום $V(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ מצא נקודה שבה משיק מקביל למישור $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$.

4. אורך הקשת

נתון עקום רציף Γ בצורה פרמטרית

$$(1) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

או בצורה וקטורית

$$(1^*) \quad V(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

נחלק את העקום לקטעים אלמנטריים על-ידי נקודות $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$.

$$(4) \quad L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

אם העקום Γ במישור נתון בצורה מפורשת, כלומר $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, אזי הצורה הוקטורית של Γ היא $x\hat{i} + f(x)\hat{j}$ ולכן מ-(3) נובע

$$(5) \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

נציין שבמקרה והעקום נתון בקואורדינטות קוטביות, כלומר $\rho = \Phi(\varphi)$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ ניתן לחשב את אורך הקשת לפי הנוסחה

$$(6) \quad L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi$$

שים לב שנוסחה (6) אינה נכונה במקרה של קואורדינטות קוטביות מוכללות.

דוגמה 7: מצא את אורך הקשת של העקומים:

א. $r(t) = \cos t \hat{i} + \sin t \hat{j} + t \hat{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (קו הבורג), ראה באיור בעמ' 67.

ב. $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, $a > 0$ קרדיואידה.

פתרון:

א. נשתמש בנוסחה (4)

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

ב. נעבור לקואורדינטות קוטביות
 $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$

בקואורדינטות הנ"ל משוואת העקום מקבלת צורה $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

כדי לחשב את אורך הקו נשתמש בנוסחה (6)

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a$$

נחבר את הנקודות הנ"ל על-ידי קו שבור, בעל חוליות שאת אורכן נסמן על-ידי ℓ_i .
 לכן האורך של הקו השבור הוא $\sum_i \ell_i$.

הגדרה 6: אם קיים גבול $\lim \sum_i \ell_i$ לפי כל

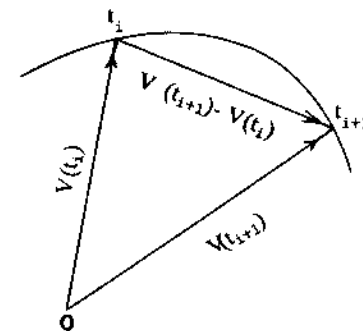
החלוקות של הקטע $[\alpha, \beta]$ אזי עקום Γ הוא בעל אורך ואורכו

$$L = \lim \sum_i \ell_i$$

(2)

משפט 5: יהיה עקום Γ מוגדר על-ידי (1) או (1*). אם הפונקציות $z(t), y(t), x(t)$ בעלות ניגזרות רציפות ב- $[\alpha, \beta]$ אזי אורך הקשת L הוא

$$(3) \quad L = \int_a^b |V'(t)| dt$$



הוכחה: נחלק את העקום על-ידי

נקודות $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$
 ונחבר אותן על-ידי קו שבור.

אורך החולייה $\ell_i = |V(t_{i+1}) - V(t_i)|$.

לפי הגדרה 6 אורך הקשת

$$L = \lim \sum_i |V(t_{i+1}) - V(t_i)|$$

נשתמש במשפט 4, נקבל

$$L = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i |V'(t_i^*) + \vec{\epsilon}(t_i, \Delta t)| \cdot \Delta t$$

היות ו- $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\epsilon}(t, \Delta t) = 0$ (במידה שווה ביחס ל- Δt).

נקבל שבאגף הימני נמצא סכום אינטגרלי של פונקציה סקלרית $|V'(t)|$ ולכן מקבלים (3). ■

נרשום את (3) בשפת הקואורדינטות כיוון ש-

$$|V'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

ונקבל

דוגמה 8: מצא את אורך הקשת של הפרבולה $y = x^2$ בין הנקודות $x = 0$ ו- $x = \frac{1}{2}$.

פתרון: נשתמש בנוסחה (5) ונקבל

$$L = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+(2x)^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+4x^2} dx$$

מהצבת $x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} t$ (אם $x = 0$, אזי $t = 0$, אם $x = \frac{1}{2}$, אזי $t = \frac{\pi}{4}$), נקבל

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} \cdot \frac{dt}{2 \cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{2 \cos^3 t} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t dt}{\cos^4 t} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2}$$

לאחר פירוק לשברים רציונאליים נקבל סופית $L = \frac{1}{4} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$.

הערה 1: מנוסחאות (4), (5), (6) נקבל קשת אלמנטרית $d\ell$. אורך הקשת של העקום $\Gamma: \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ בקטע $[\alpha, t]$ שווה ל-

$$L(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

לכן

$$(7) \quad d\ell = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = |\vec{r}'(t)| dt, \quad (dt = \Delta t)$$

באופן דומה מקבלים מ-(5)

$$(8) \quad d\ell = \sqrt{1+f'^2(x)} dx, \quad (dx = \Delta x)$$

תרגילים

1. חשב את אורך הקשת של הקווים הבאים:

א. ציקלואידה: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

ב. אסטרוידה: $\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} = \frac{2}{a^3}$.

ג. $y^2 = x^3$, $y \geq 0$, ב- $[0, 4]$.

ד. $x = \ln \frac{1}{\cos y}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$.

ה. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$.

ו. $x = 2(\cos t + t \sin t)$, $y = 2(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

ז. אורך של הספירלה $\rho = \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

ח. $x = 3 \sin t$, $y = 4 \sin t$, $z = 5 \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

ט. $\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)^2 = x^2 - 4y^2$.

רמז: $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$, $x = 2\rho(\varphi) \cos \varphi$.

2. הוכח את נוסחה (6).

רמז: $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$, $x = 2\rho(\varphi) \cos \varphi$ והשתמש ב-(4).

5. פונקציה וקטורית התלויה בשני משתנים

הגדרה 7: וקטור

$$(1) \quad \mathbf{V}(t, u) = x(t, u)\hat{i} + y(t, u)\hat{j} + z(t, u)\hat{k}, \quad (t, u) \in \Delta$$

נקראת **פונקציה וקטורית** התלויה ב- t ו- u המוגדרת בתחום Δ .

נציין שהגרף של פונקציה וקטורית משני משתנים הוא משטח במרחב. להיפך, כל משטח במרחב ניתן להציג בצורה וקטורית (1).

דוגמה 9: מצא את המשטח המתאים לפונקציה וקטורית

$$\mathbf{V}(t, u) = u \cos t \hat{i} + u \sin t \hat{j} + u^2 \hat{k}, \quad (-\infty < u < \infty, 0 \leq t < 2\pi)$$

פתרון: מהנתונים $z = u^2$, $y = u \sin t$, $x = u \cos t$ נחלץ את u ו- t .

נחשב את $x^2 + y^2 = u^2 \sin^2 t + u^2 \cos^2 t = u^2$ לכן $x^2 + y^2 = z$ כלומר המשטח הוא פרבולואיד $x^2 + y^2 = z$.

דוגמה 10: רשום בצורה וקטורית את אליפסויד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

$$(3) \quad \mathbf{N} = \mathbf{V}'_t(t_0, u_0) \times \mathbf{V}'_u(t_0, u_0)$$

לעיתים אנו נשתמש בוקטור יחידה של הנורמל $\hat{n}$

$$(4) \quad \hat{n} = \frac{\mathbf{V}'_t \times \mathbf{V}'_u}{|\mathbf{V}'_t \times \mathbf{V}'_u|}$$

נציין שאם המשטח S נתון בצורה מפורשת $z = f(x, y)$, אזי תוך שימוש בנוסחאות (2) ו-(3), נקבל

$$(5) \quad \mathbf{N} = -f'_x \hat{i} - f'_y \hat{j} + \hat{k}$$

אם המשטח נתון בצורה $F(x, y, z) = 0$, אזי (ראה סעיף 8, פרק 12)

$$(6) \quad \mathbf{N} = \nabla F = F'_x \hat{i} + F'_y \hat{j} + F'_z \hat{k}$$

דוגמה 12: מצא נורמל ומישור משיק בנקודה $(t_0, u_0) = (1, -2)$ למשטח

$$\mathbf{V}(t, u) = \{u+t, (u+t)^2, u^2-3t^2\}$$

פתרון: נמצא וקטור נורמל לפי נוסחה (3). נחשב קודם

$$\mathbf{V}'_t(1, -2) = \hat{i} + 2(u+t)\hat{j} - 6t\hat{k}|_{(1, -2)} = \hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\mathbf{V}'_u(1, -2) = \hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}'_t \times \mathbf{V}'_u = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4\hat{i} - 2\hat{j} + 0\hat{k}$$

מישור המשיק, כמו הנורמל, עוברים דרך הנקודה M_0 ששיעוריה $\mathbf{V}(t_0, u_0)$ ו-1 $x = u_0 + t_0 = -1$, $y = 1$, $z = 1$, לכן משוואת המישור המשיק היא

$$(x+1)(-4) + (y-1)(-2) + (z-1) \cdot 0 = 0$$

$$2x + y + 1 = 0$$

או

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1}, \quad z=1$$

משוואת הנורמל היא $z=1$

פתרון: נשתמש בקואורדינטות כדוריות מוכללות (פרק 9, סעיף 4)

$$x = a\rho \cos \varphi \cdot \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \varphi \cdot \cos \theta, \quad z = c\rho \sin \theta$$

לכן אם $\rho = 1$ נקבל משוואת אליפסואיד. כלומר

$$\mathbf{V}(t, u) = a \cos t \cdot \cos u \hat{i} + b \sin t \cdot \cos u \hat{j} + c \sin u \hat{k}, \quad \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq t \leq 2\pi \right\}$$

דוגמה 11: רשום בצורה וקטורית את המשטח $(x, y) \in D$, $z = f(x, y)$

פתרון: נסמן $x = t$, $y = u$ ונקבל: $\mathbf{V}(t, u) = t\hat{i} + u\hat{j} + f(t, u)\hat{k}$ או

$$(2) \quad \mathbf{V}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} + f(x, y)\hat{k}$$

אם נשתמש בדוגמה (11) נוכל לרשום משטח $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0$

$$\mathbf{V}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} + c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\hat{k}$$

הערה 2: אם משטח נתון בצורה פרמטרית (וקטורית) $\mathbf{V}(t, u)$, אזי ל- t ו- u קוראים קואורדינטות עקומיות.

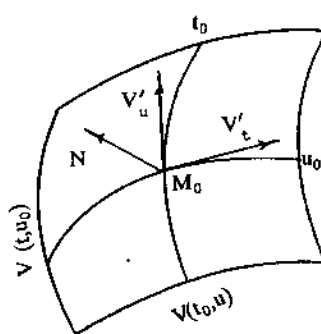
נמצא כעת נורמל למשטח S הנתון על-ידי

$$\mathbf{V}(t, u) = x(t, u)\hat{i} + y(t, u)\hat{j} + z(t, u)\hat{k}$$

בנקודה (t_0, u_0) עליו. אם נקבע את u_0 נקבל את העקום

$$\mathbf{V}(t, u_0) = x(t, u_0)\hat{i} + y(t, u_0)\hat{j} + z(t, u_0)\hat{k}$$

על פני המשטח S העובר דרך נקודה M_0 (ראה איור).



וקטור $\mathbf{V}'_t(t_0, u_0)$ הוא בכיוון המשיק לעקום $\mathbf{V}(t, u_0)$ בנקודה M_0 וכמובן נמצא במישור המשיק למשטח S . באופן דומה אם נקבע את t_0 נקבל עקום $\mathbf{V}(t_0, u)$ על S ו- $\mathbf{V}'_u(t_0, u_0)$ כיוון המשיק לעקום $\mathbf{V}(t_0, u)$ הנמצא על המישור המשיק ל- S בנקודה (t_0, u_0) . היות ונורמל מאונך למישור המשיק, כלומר למישור הוקטורים $\mathbf{V}'_t(t_0, u_0)$ ו- $\mathbf{V}'_u(t_0, u_0)$, לכן הנורמל $\mathbf{N}$ שווה ל-

תרגילים

1. מצא את משוואת המשטח בקואורדינטות קרטזיות

א. $V(t, u) = (t \cos u, t \sin u, \sqrt{a^2 - t^2})$

ב. $V(t, u) = (a(u+t), b(u-t), ut)$

ג. $V(t, u) = (R \cos t \sin u, R \sin t \sin u, R \cos u)$

ד. $V(t, u) = (t, u, \sqrt{t^2 + u^2})$

ה. $V(t, u) = \frac{t-u}{t+u} \hat{i} + \frac{tu+1}{t+u} \hat{j} + \frac{tu-1}{t+u} \hat{k}$

2. מצא את משוואת הנורמל ומישור משיק למשטחים הבאים:

א. $V(t, u) = (u+t, u-t, ut)$ בנקודה $(t=1, u=2)$.

ב. $V(t, u) = (u+t, u^2+t^2, u^3+t^3)$ בנקודה $(t, u)=(1, 2)$.

ג. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ בנקודה $(3, 4, -7)$.

6. שדה וקטורי

הגדרה 8: אם בכל נקודה $M(x, y, z)$ מגוף V מוגדר וקטור

(1) $F(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$

אזי נאמר ש- $F(x, y, z)$ מגדיר שדה וקטורי מעל V .

באופן דומה מגדירים שדה וקטורי מעל תחום מישורי D , כלומר

(2) $F(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$

בפרק 12 סעיף 8 ראינו שלכל שדה סקלרי $u = f(x, y, z)$ מתאים שדה וקטורי שהוא גרדיננט u

$$F(M) = f'_x(M)\hat{i} + f'_y(M)\hat{j} + f'_z(M)\hat{k} = \nabla u$$

דוגמאות נוספות של שדה וקטורי: שדה מגנטי, שדה של כוח-משיכה שיוצר כדור-הארץ.

1. הדיברגנט

תהיה $F(x, y, z)$ שדה וקטורי (1) מעל גוף V . נניח כי $F(x, y, z)$ רציפה וגזירה חלקית ב- V .

הגדרה 9: הדיברגנט

(3) $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$

נקרא דיברגנט של השדה הווקטורי F ומסמנים אותו $\text{div } F$.

אם נשתמש באופרטור $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ (ראה סעיף 12.8) נקבל

(4) $\text{div } F = \nabla \cdot F$

דוגמה 13: חשב דיברגנט של שדה וקטורי:

א. $F = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ב. $F = xyz\hat{i} + e^{xy^2}z\hat{j} + \hat{k}$

פתרון: נשתמש בנוסחה (3) ונקבל

א. $\text{div } F = 1+1+1=3$ ב. $\text{div } F = yz + 2yze^{xy^2}$

נציג דוגמה פיסיקלית המביאה להגדרת הדיברגנט.

דוגמה 14: יהי $F(x, y, z)$, מקור זרימה יציב, זאת אומרת וקטור הפונקציה F מגדיר כמות המטענים העוברים ביחידת זמן דרך יחידת שטח מאונך לו. נחשב כמות המטענים היוצאת דרך יחידת נפח ביחידת זמן.

כמות המטענים היוצאת דרך הפאה B היא $Q(x, y, z) \cdot \Delta x \Delta z$ ודרך הפאה A היא $Q(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z$.

סה"כ כמות המטענים היוצאת בכיוון ציר y היא

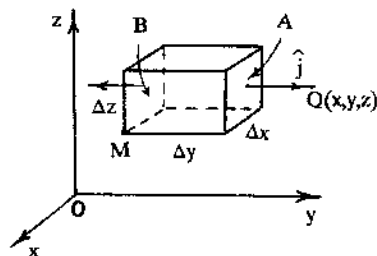
$$[Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)] \Delta x \Delta z = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y + \theta \Delta y, z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

(השתמשנו במשפט לגרנג').

באופן דומה נקבל את כמות המטענים היוצאת בכיוון הצירים x ו- z .

$$\frac{\partial R}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z, \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

בהתאמה, סה"כ כל כמות המטענים היוצאת מנקודה M היא



$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

מכאן המשמעות הפיסיקלית של הדיברגנט $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ היא צפיפות המטענים של המקור בנקודה M ליחידת זמן.

II. רוטור של שדה וקטורי

הגדרה 10: הוקטור

$$(5) \quad \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

נקרא רוטור של השדה הוקטורי

$$\mathbf{F} = P(x, y, z) \hat{i} + Q(x, y, z) \hat{j} + R(x, y, z) \hat{k}$$

ומסמנים $\text{rot } \mathbf{F}$. תוך שימוש באופרטור ∇ ניתן לרשום את (5) באופן הבא

$$(6) \quad \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$(7) \quad \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

דוגמה 15: חשב רוטור של השדה $\mathbf{F} = z^2 \hat{i} + x^2 \hat{j} + y^2 \hat{k}$.

פתרון: נשתמש ב-(7) ונקבל

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = 2y \hat{i} + 2z \hat{j} + 2x \hat{k}$$

דוגמה 16: חשב $\text{div}(\text{rot } \mathbf{F})$.

פתרון: נרשום דיברגנט ורוטור על-ידי אופרטור ∇ (גבלה)

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

לסיכום, לכל שדה וקטורי $\mathbf{F}$ מתאימים שני שדות: שדה סקלרי $\text{div } \mathbf{F}$ ושדה וקטורי $\text{rot } \mathbf{F}$.

תרגילים

1. חשב את הדיברגנט ואת הרוטור של שדות וקטוריים הבאים בנקודה המתאימה:

א. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \hat{i} + 2xy \hat{j} + 3z \hat{k}$, $(1, 2, 1)$

ב. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \hat{i} + yz \hat{j} + zx \hat{k}$, $(1, 1, 1)$

ג. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$, $(1, 0, -1)$

2. הוכח שעבור שדות וקטוריים כלליים $\mathbf{F}(x, y, z)$, $\mathbf{G}(x, y, z)$ ופונקציה סקלרית $f(x, y, z)$ מתקיימים:

א. $\text{div}(\mathbf{F} \pm \mathbf{G}) = \text{div } \mathbf{F} \pm \text{div } \mathbf{G}$

ב. $\text{div}(f \cdot \mathbf{F}) = f \text{div } \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \text{grad } f$

ג. $\text{rot}(\mathbf{F} \pm \mathbf{G}) = \text{rot } \mathbf{F} \pm \text{rot } \mathbf{G}$

ד. $\text{rot}(f \cdot \mathbf{F}) = f \text{rot } \mathbf{F} + (\text{grad } f) \times \mathbf{F}$

ה. $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$

ו. $\text{div}(\text{grad } f) = \Delta f$ (כאשר אופרטור $\Delta = \nabla \cdot \nabla$, זאת אומרת $\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz}$)

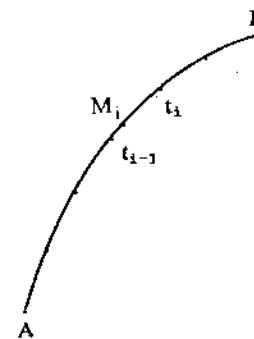
פרק 20 אינטגרל קווי

בפרק זה נגדיר ונחקור אינטגרלים מסוג חדש שהם הכללה של אינטגרל רימן.

1. אינטגרל קווי מסוג ראשון

נחקור את הבעיה הפיסיקלית הבאה.

דוגמה 1: חשב מסה של קטע העקום L הנמצא בין הנקודות A ו- B , שמשוואתו בצורה וקטורית $\alpha \leq t \leq \beta$, $r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$, בעל צפיפות מסה המשתנה מנקודה לנקודה לפי $\Phi(x, y, z)$.



פתרון: נחלק את העקום AB על-ידי נקודות $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ לקשתות אלמנטריות, (t_{i-1}, t_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. נסמן את אורך הקשת על-ידי Δt_i .

על הקשת (t_{i-1}, t_i) נבחר נקודה M_i המתאימה לפרמטר t_i^* , זאת אומרת בעלת קואורדינטות $(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*))$. בנקודה M_i צפיפות המסה היא $\Phi(M_i) = \Phi(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*))$.

אם אורך הקשת Δt_i מספיק קטן, אזי מסה של (t_{i-1}, t_i) שווה בערך ל- $\Phi(M_i) \cdot \Delta t_i$. נסכם את כל המסות של הקשתות האלמנטריות ונקבל $\sum_i \Phi(M_i) \Delta t_i$. זהו קירוב ראשוני למסת הקשת AB . כדי לקבל את המסה

המדויקת נצטרך לעבור לגבול, כאשר חלוקת הקשת AB תהיה יותר ויותר עדינה, בנוסף נקבל ש- $m = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i \Phi(M_i) \Delta t_i$.

הגבול באגף הימני הוא האינטגרל הקווי.

נעבור להגדרה מדויקת של אינטגרל קווי.

יהיה $\Phi(x, y, z)$ שדה סקלרי המוגדר מעל עקום

$$(1) \quad L: r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

נחלק את L על-ידי נקודות $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ לקשתות אלמנטריות (t_{i-1}, t_i) בעלות אורך Δt_i , $i = 1, 2, \dots, n$. בכל אחת מהקשתות (t_{i-1}, t_i) נבחר נקודה $M_i(x_i, y_i, z_i)$. נחשב את הערך של השדה הסקלרי $\Phi(M_i)$ בבנה סכום אינטגרלי:

$$\sum_i \Phi(M_i) \Delta t_i$$

נעבור לגבול כאשר חלוקת L הופכת להיות יותר ויותר עדינה (זאת אומרת $\max \Delta t_i \rightarrow 0$). אם הגבול קיים ואינו תלוי בבחירת M_i ואינו תלוי בחלוקת העקום, אזי לגבול הנ"ל קוראים **אינטגרל קווי מסוג ראשון**, ומסמנים

$$(2) \quad \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i \Phi(M_i) \Delta t_i = \int_L \Phi(x, y, z) d\ell$$

כפי שראינו בדוגמה 1, אחד מהתיאורים הפיסיקליים של אינטגרל קווי מסוג ראשון הוא מסה של הקשת L , בעל צפיפות ליניארית $\Phi(x, y, z)$.

נקבל עתה נוסחאות לחישוב האינטגרל הקווי (2).

כפי שראינו בסעיף 19.4 (נוסחה (7)) אם L נתון על-ידי (1), אזי

$$(3) \quad \Delta \ell_i = |r'_i(t)| \Delta t_i$$

לכן אם נציב ב-(2) את (3) וניזכור ש- $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, נקבל

$$(4) \quad \int_L \Phi(x, y, z) d\ell = \int_\alpha^\beta \Phi(x(t), y(t), z(t)) |r'(t)| dt$$

אם העקום L הוא עקום מישורי הנתון בקואורדינטות קוטביות $\rho = \rho(\phi)$ אזי תוך שימוש בנוסחה (6) מסעיף 19.4, נקבל

$$(5) \quad \int_L \Phi(x, y) d\ell = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \Phi(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\phi$$

הערה 1: אם $\Phi(x, y, z) = 1$ נקבל ש- $\int_L d\ell$ שווה לאורך הקשת L . (ראה סעיף 19.4).

הטענה הנ"ל נובעת מנוסחאות (4) ו-(4) מסעיף 19.4.

$$m = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \cos \varphi + 2\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \sin \varphi \right) \cdot \sqrt{4\cos 2\varphi + 4 \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi) \cdot \frac{2}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 4(\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2}$$

תרגילים: חשב את האינטגרלים הבאים:

1. $L: \{x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0\}$ כאשר $\int_L x^2 y d\ell$

2. $L: \{|x| + |y| = 1\}$ כאשר $\int_L (x+y) d\ell$

3. $L: \{(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\}$ כאשר $\int_L |y| d\ell$

4. $L: \{x^2 + y^2 = 4x\}$ כאשר $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} d\ell$

5. $L: \{x=t, y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z=\frac{1}{2}t^2, 0 \leq t \leq 1\}$ כאשר $\int_L xyz d\ell$

6. מצא את המסה של קשת קו הבורג

$$x=4\cos t, y=4\sin t, z=3t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

אם הצפיפות בכל נקודה שווה לריבוע המרחק של הנקודה מהראשית.

7. מצא את המסה של העקום

$$L: \{x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, \quad 0 \leq t \leq 1\}$$

אם הצפיפות היא קבועה ושווה ל- $\sqrt{3}$.

8. מצא את המסה של הפרבולה $y^2 = 4x, 0 \leq x \leq 1$ אם הצפיפות בנקודה (x, y) שווה ל- $|y|$.

9. מצא את אורך הקשת של העקום

$$L: \{x = \sqrt{t} \cos t, y = \sqrt{t} \sin t, z = t, \quad 0 \leq t \leq 1\}$$

דוגמה 2: חשב $\int_L (x+y) d\ell$, כאשר

$$L: \{(t - \sin t)\hat{i} + (1 - \cos t)\hat{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

פתרון: נשתמש בנוסחה (4), נחשב

$$|r'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2\sin \frac{t}{2}$$

נציב ב-(4) ונקבל

$$\begin{aligned} \int_L (x+y) d\ell &= \int_0^{2\pi} (t - \sin t + 1 - \cos t) \cdot 2\sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} t \sin \frac{t}{2} dt - 2 \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \sin \frac{t}{2} dt + 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 8\pi - 0 + 8 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3} + 8\pi \end{aligned}$$

דוגמה 3: חשב $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) d\ell$, כאשר L הוא קו הבורג

$$r(t) = 2\cos t \hat{i} + 2\sin t \hat{j} + \hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

פתרון: נחשב

$$|r'(t)| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 0} = 2\sqrt{2}$$

נשתמש בנוסחה (4) ונקבל

$$\int_L (x^2 + y^2 + z^2) d\ell = \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 1) \cdot 2\sqrt{2} dt = 20\sqrt{2}\pi$$

דוגמה 4: מצא מסה של למניסכתה ברנולי $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2), x \geq 0$, בעלת צפיפות ליניארית $f(x, y) = x + y$.

פתרון: המסה היא $\int_L (x+y) d\ell$

נעבור לקואורדינטות קוטביות $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$. בקואורדינטות הנ"ל

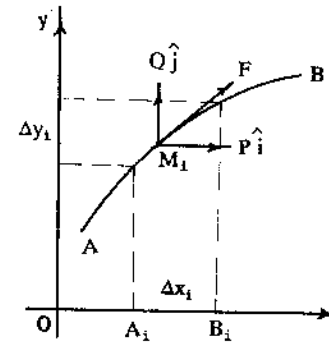
$$\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}. \quad (\text{ראה סעיף 19.1}).$$

נשתמש בנוסחה (5), נקבל

2. אינטגרל קווי מסוג שני

נדגים את הגדרת האינטגרל בדוגמה.

דוגמה 5: מצא את עבודת השדה הוקטורי $F(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$ בהעברת חלקיק מנקודה A לנקודה B לאורך המסלול L הנתון על-ידי וקטור הפונקציה $r(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$.



פתרון: נחלק את העקום AB לחלקים אלמנטריים (t_{i-1}, t_i) ו- $\Delta x_i, \Delta y_i$ היטלי הקשת האלמנטרית הנ"ל על ציר x, y בהתאמה.

כמקובל, נפרק את השדה F לסכום של שתי שדות $P\hat{i}$ ו- $Q\hat{j}$ בכיווני הצירים x ו-y בהתאמה.

נחשב את העבודה של כל אחד מהשדות הנ"ל בנפרד ונקבל: כוח $P\hat{i}$ הפועל בכיוון הציר x מעביר את החלקיק מנקודה A_i לנקודה B_i ועושה עבודה השווה ל- $P(M_i) \cdot \Delta x_i$.

כמו-כן Δx_i הוא מרחק מ- B_i ל- A_i ו- $P(M_i)$ ערך של השדה בנקודה M_i כלשהי מ- (t_{i-1}, t_i) . באופן דומה כוח $Q\hat{j}$ עושה עבודה $Q(M_i) \cdot \Delta y_i$ וסך כל העבודה בהזזת החלקיק מנקודה t_{i-1} ל- t_i היא $P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i$.

אם נסכם את העבודות האלמנטריות ונעבור לגבול כאשר החלוקה הופכת להיות יותר ויותר עדינה נקבל את העבודה של השדה F, כלומר:

$$A = \lim \sum_i (P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i)$$

לגבול הזה ניתן בהמשך שם של אינטגרל קווי מסוג שני.

נעבור להגדרה מדויקת של אינטגרל קווי מסוג שני.

נגדיר את הכיוון החיובי על העקום L הנתון בצורה וקטורית

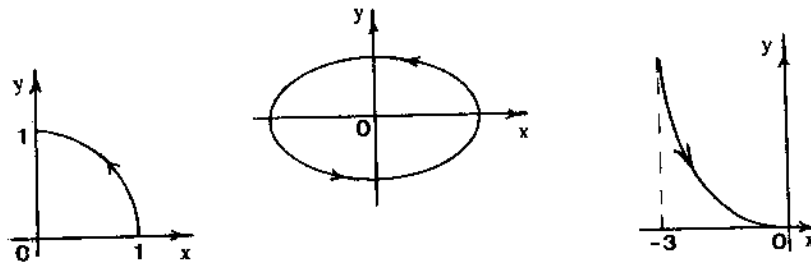
$$(1) \quad r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

הגדרה 1: הכיוון החיובי על L. הנתון על-ידי (1) הוא כיוון עליית הפרמטר t. אם L קו סגור, אזי בוחרים את משוואתו (1) כך שכאשר הפרמטר עולה, הכיוון על L הוא כזה שבמשך התנועה לאורך L, בכיוון זה התחום הסופי החסום על ידיו ישאר מצד שמאל.

דוגמה 6: צייר את הכיוון החיובי של הקווים:

א. $y = x^2, -3 \leq x \leq 0$ ב. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ג. $r(\varphi) = \hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$



נעבור להגדרת האינטגרל. יהי

$$(2) \quad F(M) = P(M)\hat{i} + Q(M)\hat{j} + R(M)\hat{k}, \quad M = (x, y, z) \in L$$

שדה וקטורי המוגדר מעל העקום L הנתון על-ידי (1).

נחלק את העקום L לקטעים אלמנטריים על-ידי נקודות

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$$

ונחשב $r(t_i) - r(t_{i-1})$ נניח כי ההיטלים של הוקטור $r(t_i) - r(t_{i-1})$ על הצירים x, y, z הם $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ בהתאמה, וההעתקה הנ"ל היא חד-חד ערכית.

נבחר בקטע (t_{i-1}, t_i) נקודה t_i^* ובהתאמה $M_i(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*))$ נבנה את הסכום האינטגרלי

$$(3) \quad \sum_i [P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i + R(M_i) \Delta z_i]$$

נעבור לגבול כאשר החלוקה הופכת להיות יותר ויותר עדינה. אם גבול קיים, אינו תלוי בבחירת נקודה M_i ולא תלוי גם בחלוקה אזי לגבול הזה קוראים **אינטגרל קווי מסוג שני** או אינטגרל לפי מסלול L ומסמנים

$$(4) \quad \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_L F \cdot dr$$

(נזכיר ש- $dr = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ נתון על-ידי (2)).

$$\int_L (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = a \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + b \int_L \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\left| \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right| \leq \max |\mathbf{F}| \cdot \ell \quad \text{ב. כאשר } \ell \text{ אורך הקשת של } L.$$

ג. אם העקום L מורכב ממספר סופי של עקומים חלקיים (זאת אומרת, בעלי ניגזרות רציפות) $L_1, L_2, \dots, L_k$, אזי

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^k \int_{L_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

ד. אינטגרל קווי (4) תלוי בכיוון המוגדר על L . כלומר, אם נעבור על אותו מסלול בכיוון ההפוך סימן האינטגרל מתחלף

$$\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{BA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

הטענה נובעת מהגדרת האינטגרל הקווי. אמנם אם משנים את הכיוון על העקום, הוקטור $\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})$ גם משנה את הכיוון ולכן ההיטלים שלו על הצירים מחליפים את הכיוון ל- $-\Delta z_i, -\Delta y_i, -\Delta x_i$. בהתאמה.

ניתן להסביר את ד' ממבט פסיקלי. אם $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ הוא עבודה של השדה $\mathbf{F}$ בהוות החלקיק מנקודה A לנקודה B לאורך מסלול L , אזי בכיוון ההפוך יש לעשות אותה כמות של עבודה אך נגד השדה הוקטורי $\mathbf{F}$. יתר הטענות נובעות ישירות מהגדרת האינטגרל ונוסחה (5).

נרשום את נוסחה (5) בצורה נוספת. נניח שהעקום L

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

שייך למחלקה C^1 ו- $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ קוסינוסי הכיוון של המשיק וקטור $(x'(t), y'(t), z'(t))$ הוא בכיוון המשיק (ראה פרק 19, סעיף 3), נחשב

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y, z) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t)) \cos \alpha dt = \int_L P(x, y, z) \cos \alpha d\ell \end{aligned}$$

באופן דומה נקבל

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\ell \quad (6)$$

נקבל עתה נוסחה לחישוב של האינטגרל הקווי (4).

נניח כי העקום $L: \{\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \alpha \leq t \leq \beta\}$ הינו קו רציף, ו- $\mathbf{r}(t)$ גזיר ב- $[\alpha, \beta]$. לכן ניתן לרשום:

$$\Delta x = x'(t) \Delta t, \quad \Delta y = y'(t) \Delta t, \quad \Delta z = z'(t) \Delta t$$

נציב אותם ב-(3) ונעבור לגבול כאשר $\Delta t \rightarrow 0$. נקבל

$$(5) \quad \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt$$

או בצורה וקטורית

$$(5^*) \quad \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' dt$$

אם $\mathbf{F} = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$ כלומר $\mathbf{F}$ וקטור מישורי, כלומר $\mathbf{F} = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$ וקטור L נתון בצורה מפורשת, $L = \{y = f(x), a \leq x \leq b\}$ נוסחה (5) מקבלת צורה

$$(5^{**}) \quad \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)] dx$$

מנוסחאות (5), (5*) ו-(5**) מקבלים את המקרים הפרטיים הבאים:

הערה 2: אם $L: \{y = c, \alpha \leq x \leq \beta\}$ הוא קו ישר מקביל לציר x , אזי מנוסחה (5**) מקבלים

$$(6) \quad \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} P(x, c) dx$$

אם $L: \{x = c, \gamma \leq y \leq \delta\}$ הוא קו ישר מקביל לציר y , מ-(5) נקבל

$$(7) \quad \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma}^{\delta} Q(c, y) dy$$

הערה 3: האינטגרל הקווי (4) הוא בעל אותם תכונות כמו אינטגרל רימן מסויים.

א. אם קיימים $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ו- $\int_L \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$ אזי לכל a ו- b קבועים

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= [(2t+1)^2 + 1]\hat{i} + [2(2t+1) - t - 1]\hat{j} + [2t+1 - t - 1 - 3t]\hat{k} = \\ &= (4t^2 + 4t + 2)\hat{i} + (3t+1)\hat{j} + (-2t)\hat{k} \end{aligned}$$

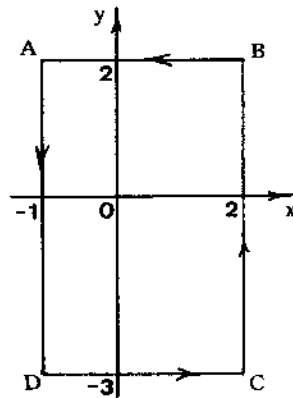
נחשב $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'$ ונשתמש בנוסחה (5*): נקבל

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 [(4t^2 + 4t + 2) \cdot 2 - (3t+1) + 3(-2t)] dt = \\ &= \int_0^1 (8t^2 - 1 + 3) dt = \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{31}{6} \end{aligned}$$

דוגמה 9: חשב את האינטגרל הקווי

$$\int_L -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

כאשר L הוא שפה של המלבן בעל הקודקודים $A(-1, 2)$, $B(2, 2)$, $C(2, -3)$, $D(-1, -3)$ בכיוון החיובי.



פתרון: נשתמש בהערה 3 ונרשום את האינטגרל הנתון כסכום של ארבעת האינטגרלים הבאים:

$$\int_L = \int_{AD} + \int_{DC} + \int_{CB} + \int_{BA}$$

נחשב את כל אחד מהאינטגרלים:

באינטגרל הראשון

$$\int_{AD} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

AD מקביל לציר y ומשוואתו $x = -1$ ולכן ניתן להשתמש בנוסחה (7)

$$\int_{AD} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_{-3}^2 \frac{-1 dy}{(-1)^2 + y^2} = \int_{-3}^2 \frac{dy}{1 + y^2} = \arctg y \Big|_{-3}^2 = \arctg 2 - \arctg(-3)$$

באופן דומה מחשבים את האינטגרלים הבאים

$$x = 2, \quad \int_{CB} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_{-3}^2 \frac{2 dy}{4 + y^2} = \arctg 1 - \arctg(-\frac{3}{2})$$

דוגמה 7: חשב את האינטגרל הקווי $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\hat{i} + (x+y)\hat{j} + (x+y+z)\hat{k}$$

$$L = \{x = \sin t, y = \cos t, z = \sin t + \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

פתרון: נשתמש בנוסחה (5*). נרשום את העקום L בצורה וקטורית וניגזור

$$\mathbf{r}(t) = \sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + (\sin t + \cos t) \hat{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \cos t \hat{i} - \sin t \hat{j} + (\cos t - \sin t) \hat{k}$$

ולכן

נחשב $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'$ נקבל

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' &= \sin t \cdot \cos t + (\sin t + \cos t) \cdot (-\sin t) + 2(\sin t + \cos t) \cdot (\cos t - \sin t) = \\ &= -\sin^2 t + 2(\cos^2 t - \sin^2 t) = 2\cos^2 t - 3\sin^2 t \end{aligned}$$

נעבור לחישוב האינטגרל

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (2\cos^2 t - 3\sin^2 t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt - \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = 2\pi - 3\pi = -\pi \end{aligned}$$

דוגמה 8: חשב

$$\int_L (x^2 + 1) dx + (2x + y) dy + (x + y - z) dz$$

לאורך הישר $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ מנקודה $(1, -1, 0)$ עד לנקודה $(3, -2, 3)$.

פתרון: נרשום את הישר בצורה וקטורית. היות $\frac{x-1}{2} = t, \frac{y+1}{-1} = t, \frac{z}{3} = t$ ו- $\frac{x-1}{2} = t$

נקבל $\mathbf{r}(t) = (2t+1)\hat{i} - (t+1)\hat{j} + 3t\hat{k}$. קל לראות שאם $t = 0$ נקבל נקודה $(1, -1, 0)$ וכאשר $t = 1$ נקבל נקודה $(3, -2, 3)$. זאת אומרת, t משתנה מאפס עד אחד. נחשב את ערך השדה

$$\mathbf{F} = (x^2 + 1)\hat{i} + (2x + y)\hat{j} + (x + y - z)\hat{k}$$

מעל הישר הנתון נקבל

תרגילים

1. חשב את העבודה של שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2+y^2} \hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \hat{j} + z^2 \hat{k}$

לאורך המסלול $\mathbf{r}(t) = 2\cos t \hat{i} + 2\sin t \hat{j} + 3t \hat{k}$ מנקודה $A(2,0,0)$ עד $B(2,0,6\pi)$.

2. חשב $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$ ו- C קו סגור נתון על-ידי הוקטור

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + \sqrt{3} \sin t) \hat{i} + (2\cos t + 1) \hat{j} + (\sqrt{3} \sin t - \cos t) \hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

3. חשב $\int_L \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ כאשר L שפה של ריבוע בעל קודקדים $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$ נגד כיוון השעון.

4. חשב $\int_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ כאשר $L: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ בכיוון החיובי רמז: $x = 2 + \cos t$, $y = 3 + \sin t$.

5. נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = y\hat{j} + xz\hat{k}$

א. חשב $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר L הוא חלק מהפרבולה $y = x^2$ (במישור $z = 0$) מנקודה $(0,0,0)$ עד הנקודה $(-1,1,0)$.

ב. חשב $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר Γ הוא העקום על פני הפרבולויד $z = x^2 + y^2$ מחלק א' על המישור $z = 0$.

6. חשב $\int_L y^3 z^2 dx + (x^2 + y^2 + z^2) dy + z dz$ כאשר $L = \{y^2 + z^2 = 4, x = 0\}$ מנקודה $(0,-2,0)$ עד $(0,2,0)$ בכיוון החיובי.

7. חשב $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F} = (y + tg^3 x) \hat{i} + (3x - tg^3 y) \hat{j}$ ו- L נתון על-ידי $\mathbf{r}(t) = x\hat{i} + x^3 \hat{j}$, $0 \leq x \leq 1$.

8. חשב $\int_L x^2 dx + y^2 dy$ כאשר $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$y = -3, \quad \int_{DC} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_{-1}^2 \frac{-(-3) dx}{x^2 + 9} = \arctg \frac{2}{3} - \arctg \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$y = 2, \quad \int_{BA} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_2^{-1} \frac{-2 dx}{x^2 + 4} = -\arctg \left(-\frac{1}{2}\right) + \arctg 1$$

נחבר את כל האינטגרלים ונשתמש בנוסחאות טריגונומטריות:

$$\arctg \alpha + \arctg \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \quad \text{ו-} \quad \arctg(-\alpha) = -\arctg \alpha$$

$$\int_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \arctg 2 + \arctg 3 + \arctg 1 + \arctg \frac{3}{2} + \arctg \frac{2}{3} +$$

$$+ \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{2} + \arctg 1 = 2\pi$$

דוגמה 10: חשב $\int_L (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$ כאשר L הוא מעגל $\{x^2 + y^2 + z^2 = 36, y = \sqrt{3}x\}$.

פתרון: נרשום את העקום L בצורה וקטורית. היות ובנוסחה של מופיעים ריבועים של המשתנים, ניקח $x = \rho \cos t$ נקבל $y = \sqrt{3} \rho \cos t$ ו- $z = \alpha \rho \sin t$ נציב במשוואת הכדור, נקבל:

$$\rho^2 \cos^2 t + 3\rho^2 \cos^2 t + \alpha^2 \rho^2 \sin^2 t = 36$$

אם נבחר $\alpha = 2$ ו- $\rho = 3$ נקבל צורה וקטורית של L .

$$\mathbf{r}(t) = 3\cos t \hat{i} + 3\sqrt{3}\cos t \hat{j} + 6\sin t \hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

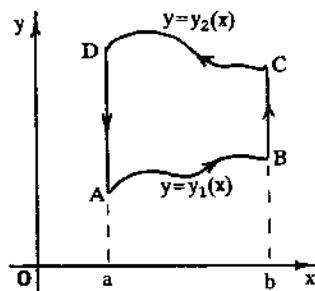
נשתמש בנוסחה (5*): נקבל:

$$\int_0^{2\pi} [(3\sqrt{3}\cos t - 6\sin t)(-3\sin t) + (6\sin t - 3\cos t)(-3\sqrt{3}\sin t) + (3 - 3\sqrt{3})\cos t \cdot 6\cos t] dt = 36\pi(1 - \sqrt{3})$$

$$(1) \quad \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

הוכחה: נוביח את המשפט בשלבים:

שלב א': נניח ש- D הוא תחום הנמצא בין הקווים $y = y_1(x)$ ו- $y = y_2(x)$ ו- $x = a$, $x = b$, ובנוסף כל קו ישר המקביל לציר y חותך את השפה של D בלא יותר משתי נקודות (ראה איור). נחשב



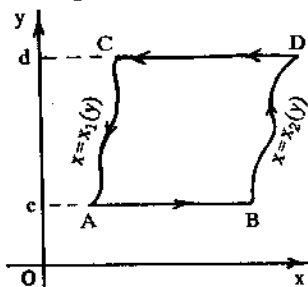
$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx \end{aligned}$$

קל לראות ש- $\int_a^b P(x, y_2(x)) dx$ הוא אינטגרל קווי לאורך המסלול $y_2(x)$ בכיוון מנקודה D לנקודה C , לכן

$$\int_a^b P(x, y_2(x)) dx = \int_{CD} P(x, y) dx$$

באופן דומה $\int_a^b P(x, y_1(x)) dx = \int_{AB} P(x, y) dx$ לאורך המסלול $y = y_1(x)$ והיות ו- $\int_{BC} P(x, y) dx = 0$ ו- $\int_{DA} P(x, y) dx = 0$ לאורך הקווים $x = b$ ו- $x = a$ בהתאמה, נקבל לבסוף ש:

$$(2) \quad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{AB} P dx - \int_{BC} P dx - \int_{CD} P dx - \int_{DA} P dx = - \int_{ABCD} P(x, y) dx$$



שלב ב': נניח עתה ש- D הוא תחום הנמצא בין הקווים $x = x_1(y)$ ו- $x = x_2(y)$ ו- $y = c$, $y = d$, וכל קו ישר המקביל לציר x חותך את התחום בלא יותר משתי נקודות (ראה איור).

באופן דומה לא נקבל

$$9. \quad \text{חשב } \int_L F \cdot dr \text{ כאשר } F(x, y, z^2)$$

$$L = \{x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 = 4x, z \geq 0\}$$

$$10. \quad \text{חשב } \int_L F \cdot dr \text{ כאשר } F = 2y\hat{i} + 3y\hat{j} \text{ ו- } L \text{ הוא קו } y = \sin x$$

$$\text{מנקודה } (0,0) \text{ עד } (\frac{\pi}{2}, 1)$$

$$11. \quad \text{חשב } \int_C xy dx + yz dy + zx dz \text{ כאשר } C \text{ הוא חצי המעגל}$$

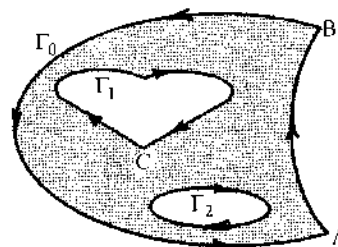
$$C = \{x^2 + y^2 + z^2 = 8x, z = x, y > 0\}$$

$$12. \quad \text{הוכח כי } \left| \int_L P dx + Q dy \right| \leq M \cdot \ell \text{ כאשר}$$

$$M = \max_{(x,y) \in L} \sqrt{[P(x,y)]^2 + [Q(x,y)]^2} \text{ ו- } \ell \text{ הוא אורך הקשת של } L.$$

3. משפט גרין (G. Green)

בסעיף זה נמצא קשר בין אינטגרל קווי במישור ואינטגרל כפול. תהיה D תחום קשיר בעל שפה Γ (מורכב ממספר סופי של קווים סגורים וחלקים במקוטעין) בכיוון החיובי, זאת אומרת בכיוון כזה שבמשך התנועה לאורך Γ התחום D יישאר מצד שמאל.



דוגמה 11: באיור D הוא תחום קשיר ו- Γ מורכב משלושה חלקים סגורים $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ עם נקודות סינגולריות A, B, C .

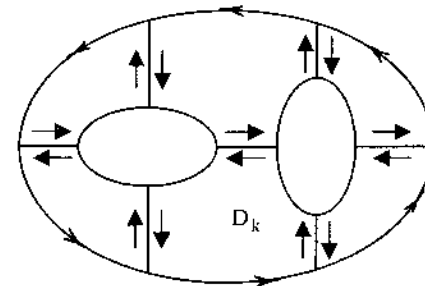
הכיוון החיובי מודגש על-ידי חיצים.

משפט 1: תהיה D תחום (קשיר ופתוח) בעל שפה Γ בכיוון החיובי. יהיה שדה וקטורי $F(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$ שייך למחלקה C^1 ב- $\bar{D}$ (ראה סעיף 13.1), אזי מתקיים

* קו הוא חלק במקוטעין אם יש בו רק מספר סופי של נקודות סינגולריות והוא אינו חותך את עצמו (ראה סעיף 14.2).

* C^1 היא מחלקה של כל הפונקציות הרציפות ובעלות המיגורות החלקיות הרציפות עד סדר ראשון.

$$(3) \quad \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{ABCD} Q(x, y) dy$$



שלב ג': מקרה כללי.

אם תחום D מקיים את התנאים א' ו-ב', אזי מנוסחאות (2) ו-(3) מקבלים את (1).

נניח כעת שאת התחום D ניתן לחלק למספר סופי של תחומים D_k המקיימים את התנאים א' ו-ב'.

הנוסחה (1) נובעת מהשיקולים הבאים:

לתחום D_k בעל שפה Γ_k מתקיימת נוסחה (1), זאת אומרת:

$$\iint_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma_k} P dx + Q dy$$

מתכונות האינטגרלים נובע כי

$$\sum_k \iint_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

מצד שני סכום האינטגרלים הקווים $\sum_k \int_{\Gamma_k} P dx + Q dy$ שווה ל- $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$

כיוון שהאינטגרלים לפי חלקים משותפים של השפה Γ_k מצטמצמים, כי הם מחושבים לפי כיוונים מנוגדים (ראה איור). זה משלים את ההוכחה.

הוכחת המקרה כאשר תחום D לא ניתן לפירוק לסכום התחומים המקיימים את התנאים א' ו-ב' יוצאת ממסגרת הקורס. ■

בדוגמאות הבאות נשתמש בנוסחת גרין לחישוב אינטגרלים קווים.

דוגמה 12: חשב $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר

א. $L: x^2 + y^2 = R^2$ ו- $\mathbf{F} = (e^{x^2} - x^2 y) \hat{i} + (xy^2 - e^{y^2}) \hat{j}$ בכיוון החיובי.

ב. $L: x^2 + y^2 = R^2$ ו- $\mathbf{F} = \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j}$ בכיוון החיובי.

ג. שדה $\mathbf{F}$ כמו ב-ב' ו- $L: (x-5)^2 + (y-3)^2 = 1$ בכיוון החיובי.

ד. שדה $\mathbf{F}$ כמו ב-ב' ו- $L: |x| + |y| = 100$ בכיוון החיובי.

פתרון:

א. נסמן $Q(x, y) = xy^2 - e^{y^2}$, $P(x, y) = e^{x^2} - x^2 y$. פונקציות P ו- Q מקיימות את התנאים של משפט גרין ולכן ניתן להשתמש בנוסחה (1).

היות ש- $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$ נקבל

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) dx dy$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות ונקבל

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \cdot \rho^2 d\rho = \frac{1}{2} \pi R^4$$

ב. במקרה זה $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ פונקציות לא-רציפות בתחום $D: x^2 + y^2 \leq R^2$ (נקודה $(0,0)$ שייכת ל- D). לכן לא ניתן להשתמש במשפט גרין. נחשב את האינטגרל הנתון באופן ישיר.

נרשום את L בצורה וקטורית $\mathbf{r}(t) = R \cos t \hat{i} + R \sin t \hat{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

נחשב $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = \frac{R \sin t \cdot R \sin t}{R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} + \frac{R \cos t \cdot R \cos t}{R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} = 1$

לכן $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' dt = 2\pi$

נבדוק ש-(1) לא מתקיימת. נחשב

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

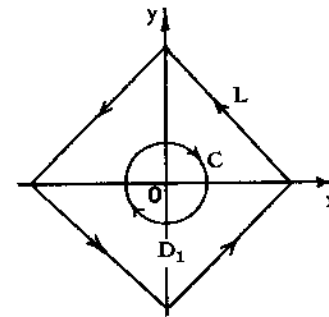
מכאן $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$ נוסחה (1) לא מתקיימת.

ג. במקרה זה הפונקציות $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ו- $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$

מקיימות את תנאי משפט גרין במעגל $(x-5)^2 + (y-3)^2 \leq 1$ (בדוק!) לכן ניתן להשתמש בנוסחה (1)

$$\int_L P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx dy = 0$$

ד. בתרגיל הנתון לא ניתן, כמו בתרגיל ב', להשתמש בנוסחה (1), נעזר בדוגמה ב' לחישוב אינטגרל הנתון.



הבעיה העיקרית היא אי-רציפות של P ו-Q בנקודה (0,0) שבתחום $D: |x| + |y| \leq 100$. נקיף את הראשית במעגל C בעל רדיוס R ונתבונן בתחום D_1 בעל שפה LUC (הכיוון על LUC חיובי).

בתחום D_1 הפונקציות P ו-Q רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות ולכן ניתן להשתמש בנוסחה (1). זאת אומרת

$$\int_{LUC} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \iint_{D_1} \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx dy = 0$$

קיבלנו ש-

$$0 = \int_{LUC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

מכאן $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר הכיוון על C הוא שלילי (בכיוון השעון).

מדוגמה ב' אינטגרל באף הימני שווה ל- 2π ולכן התשובה הסופית היא:

$$\int_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

הערה 4: תנאי של רציפות הפונקציות $Q'_x(x,y), P'_y(x,y), Q(x,y), P(x,y)$ בתחום D הוא תנאי מספיק בלבד (ראה דוגמה 13).

דוגמה 13: חשב $\int_L \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ כאשר $L: x^2 + y^2 = R^2$.

פתרון: הפונקציות $P(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ו- $Q(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ לא-רציפות ב-D: $x^2 + y^2 \leq R^2$ ולכן לא ניתן להשתמש במשפט גרין. לאחר חישוב ישיר

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{מצד שני} \quad \int_L \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{מקבלים}$$

ולכן $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$, זאת אומרת נוסחה (1) מתקיימת במקרה זה.

$$\mathbf{F} = \frac{x^2 y + y^3 + y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{5x^3 + 5xy^2 - x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \quad \text{כאשר} \quad \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{דוגמה 14: חשב}$$

$$L: (x-1)^2 + y^2 = 9$$

פתרון: לחישוב האינטגרל לא ניתן להשתמש בנוסחת גרין. חישוב ישיר של האינטגרל מביא לאינטגרלים קשים. לחישוב האינטגרלים נשתמש בשיטה של דוגמה 12.

נשאיר לקורא לבדוק ש- $Q'_x - P'_y = 2$.

נקיף את הנקודה הסינגולרית (0,0) על-ידי מעגל $C: x^2 + y^2 = 1$ ונשתמש בנוסחת גרין כאשר D הוא טבעת בין המעגלים L ו-C.

$$\int_{LUC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2(9\pi - \pi) = 16\pi$$

מכאן

$$(*) \quad \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 16\pi - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

נרשום את C בצורה וקטורית: $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ונחשב את האינטגרל השני

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{(\cos^2 t \sin t + \sin^3 t + \sin t)(-\sin t) + (5\cos^3 t + 5\cos t \sin^2 t - \cos t) \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-2\sin^2 t + 4\cos^2 t] dt = \int_0^{2\pi} (6\cos^2 t - 2) dt = \int_0^{2\pi} (1 + 3\cos 2t) dt = 2\pi \end{aligned}$$

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 16\pi - 2\pi = 14\pi \quad \text{נציב ב-} (*) \text{ ונקבל}$$

נציין שבנוסחה (1) ניתן להשתמש לחישוב אינטגרלים קוויים לפי מסלולים לא סגורים.

דוגמה 15: חשב $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F} = \frac{2x(2-e^y)}{(1+x^2)^2} \hat{i} + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 3x \right) \hat{j}$

ו- L הוא החלק העליון של המעגל $x^2 + y^2 = 1$ מהנקודה $A = (-1, 0)$ עד הנקודה $B = (1, 0)$.

פתרון: נסגור את L על-ידי קטע BA של הציר x ונקבל קו סגור $AmBA$. את האינטגרל הנתון נרשום באופן הבא:

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AmBA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{BA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

נחשב כל אחד מהאינטגרלים באגף הימני.

לחישוב האינטגרל הראשון נשתמש במשפט גרין ונקבל

$$\int_{AmBA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \iint_D \left(3 - \frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} + \frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} \right) dx dy = -3 \iint_D dx dy = -\frac{3}{2} \pi$$

(סימן מינוס לפני האינטגרל הכפול הוא משום שהכיוון $AmBA$ הוא שלילי).

נחשב עתה את האינטגרל השני. נשתמש בנוסחה (6) מחסעיף הקודם ונקבל:

$$\int_{BA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^{-1} \frac{2x}{(1+x^2)^2} = - \frac{1}{1+x^2} \Big|_1^{-1} = 0$$

$$\therefore \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{3}{2} \pi$$

מסקנה 1: שטח של התחום D בעל שפה L המורכב ממספר סופי של קווים סגורים שווה ל:

$$(3) \quad S = \frac{1}{2} \int_L x dy - y dx$$

הוכחה: נשתמש במשפט גרין לחישוב האינטגרל הקווי ב-(3). נשים לב ש- $Q(x, y) = x$, $P(x, y) = -y$ ונקבל

$$\frac{1}{2} \int_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \iint_D (1+1) dx dy = \iint_D dx dy = S$$

הערה 5: נוסחה (3) היא אחת מהנוסחאות הרבות לחישוב שטחים על-ידי אינטגרל קו. למשל $S = \int_C y dx$ או $S = \int_C x dy$.

דוגמה 16: חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

פתרון: נרשום את משוואת האליפסה בצורה וקטורית

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \hat{i} + b \sin t \hat{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ונשתמש בנוסחה (3)

$$S = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t \cdot b \cos t + b \sin t \cdot a \sin t] dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

נרשום את נוסחה (1) בצורה וקטורית (ראה גם סעיף 6 מהפרק הבא).

לשרה וקטורית נתון $\mathbf{F} = P(x, y) \hat{i} + Q(x, y) \hat{j}$ נחשב $\text{rot } \mathbf{F}$ נקבל:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

לכן את הנוסחה (1) ניתן לרשום בצורה וקטורית הבאה

$$(4) \quad \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \hat{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F} dx dy$$

תרגילים

1. חשב $\int_L (x^2 - 3xy - 2x + y) dx + (3xy + x - 2y^2) dy$ כאשר

$$L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{א.} \quad L: x^2 + y^2 = x \quad \text{ב.}$$

(L הוא בכיוון החיובי בשני המקרים).

2. חשב

$$\int_L (3x^2 y^2 \cdot \sin xy + x^3 y^3 \cdot \cos xy) dx + (x + 2x^3 y \cdot \sin xy + x^4 y^2 \cdot \cos xy) dy$$

כאשר L הוא החלק התחתון של האסטרואיד $x^3 + y^3 = 1$ מנקודה $(1, 0)$ עד הנקודה $(-1, 0)$.

דוגמה 17: נתון שדה וקטורי $F = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}$ מעל תחום $\bar{D}: 1 \leq x^2+y^2 \leq 100$.

האם האינטגרל $\int_L F \cdot dr$ כאשר L קו סגור כלשהו ב- D שווה לאפס?

פתרון: כפי שראינו בדוגמה 10, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ ולכן אם קו L אינו עוקב את הראשית (זאת אומרת, ניתן להשתמש במשפט גרין) האינטגרל $\int_L F \cdot dr = 0$. אם העקום L עוקב את הראשית אוי תוך שימוש ברעיון של תרגיל 10, $\int_L F \cdot dr = 2\pi$. לכן התשובה שלילית, לא כל קו סגור $\int_L F \cdot dr$ שווה לאפס.

דוגמה 18: הוכח ש- $\int_L \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy = 0$ לכל קו סגור L שכולו נמצא בתחום $\bar{D}: 1 \leq x^2+y^2 \leq 100$.

פתרון: את הבדיקה נשאיר לקרוא. נציין רק שניתן להשתמש ברעיון של דוגמאות 10 ו-13. נוכיח את המשפט הבא:

משפט 2: יהיה $F(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ שדה וקטורי רציף המוגדר מעל תחום מישורי D . שלושת הטענות הבאות שקולות:

1. $\int_L F \cdot dr = 0$ לכל קו סגור L ב- D .
2. האינטגרל $\int_{AB} F \cdot dr$ אינו תלוי במסלול המחבר את הנקודות A ו- B שכולו נמצא בתחום D .
3. קיימת פונקציה סקלרית רציפה $u(x,y)$ כזאת ש: $\nabla u = F(x,y)$ במילים אחרות, הביטוי $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ הוא דיפרנציאל שלם, כלומר $du = Pdx + Qdy$ ומתקיים

$$(1) \quad \int_{AB} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)$$

* את הגדרת התחום ראה טעין 10.1.

3. יהיה $F(x,y)$ שדה רציף ובעל נגזרות חלקיות רציפות בתחום D . בעל שפה L , פרט לנקודות (x_i, y_i) , $i=1,2,\dots,k$. נסמן על-ידי $L_i: (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 = \epsilon_i^2$ מספרים קטנים, הוכח:

$$\text{אם } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ בתחום } D, \text{ אזי } \int_L F \cdot dr = \sum_{i=1}^k \int_{L_i} F \cdot dr$$

4. חשב $\int_L \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{(x-1)^2+y^2} \right) dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} \right) dy$ כאשר $L: x^2+y^2=100$ בכיוון החיובי (ראה תרגיל 3).

5. חשב $\int_L F \cdot dr$ כאשר $F = \frac{1}{x+y}\hat{i} - \frac{1}{x+y}\hat{j}$ ו- $L: |x|+|y|=1$ בכיוון השעון.

6. חשב $\int_L [2y\hat{i} - (6x + \sin^2 y^3)\hat{j}] \cdot dr$ כאשר $L: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 100$ בכיוון החיובי.

7. חשב $\int_L (y + tg^3 x)dx + (3x - tg^3 y)dy$ לאורך העקום $y = x^3$ מנקודה $(0,0)$ עד הנקודה $(1,1)$, רמז: סגור על-ידי קו ישר $y = x$.

8. חשב את שטח התחום החסום על-ידי העקומים הבאים:

$$A. \text{ הקרדיאלידה } x = a(2\cos t - \cos 2t), y = a(2\sin t - \sin 2t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$B. \text{ הציקלואידה } x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi \text{ וציר } x.$$

$$ג. (x+y)^3 = xy$$

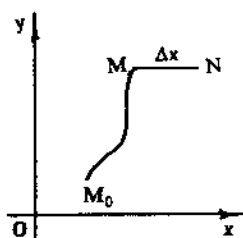
$$9. \text{ חשב } \iint_D \frac{\partial}{\partial y} \left(y \cdot e^{\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)} \right) dx dy \text{ כאשר } D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

רמז: השתמש במשפט גרין.

4. אי-תלותו של אינטגרל קווי במסלול האינטגרציה

בסעיף זה נמשיך לחקור אינטגרלים קווים במישור. המטרה העיקרית היא לקבל תנאים על השדה הוקטורי F המקיים $\int_L F \cdot dr = 0$ לכל קו סגור L הנמצא

כולו ב- D . נביא שתי דוגמאות.



$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{MN} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} P(x, y) dx}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \theta \Delta x, y) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \\ &P(x, y), \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

כלומר הוכחנו ש- $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, באופן דומה מוכיחים ש- $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$.

בנינו פונקציה $u(x, y)$ על-ידי (2) בעלת נגזרות רציפות $u'_x = P$, $u'_y = Q$ ולכן היא דיפרנציאבילית ו- $du = Pdx + Qdy$.

נוכיח עתה את נוסחה (1). נחבר את הנקודות A ו-B על-ידי קו רציף $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(a \leq t \leq b)$ הנמצא ב-D ו- $A(x(a), y(a))$, $B(x(b), y(b))$. נחשב את האינטגרל

$$\begin{aligned} \int_{AB} Pdx + Qdy &= \int_a^b [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt = \\ &= \int_a^b u'_t dt = u(x(b), y(b)) - u(x(a), y(a)) = u(B) - u(A) \end{aligned}$$

שלב ג': $1 \rightarrow 3$. אם L קו סגור אזי הנקודה ההתחלתית מתלכדת עם הנקודה הסופית ולכן מנוסחה (1)

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = u(A) - u(A) = 0$$

במקרים רבים נוח יותר להשתמש במשפט הבא. נקדים למשפט הגדרה.

הגדרה 2: תחום מישורי D נקרא תחום פשוט קשר אם שפתו מורכבת מקו סגור אחד שאינו חותך את עצמו.

במילים אחרות, תחום מישורי D נקרא תחום פשוט קשר אם לכל קו סגור L ב-D קיים תחום D_1 ב-D כזה ש-L הוא שפתו.

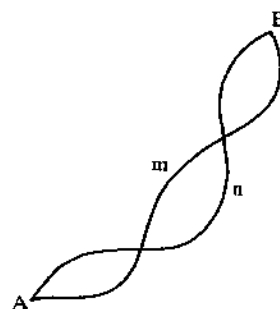
נציין שתחום פשוט קשר הוא תחום בלי "חורים".

משפט 3: אם שדה $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$ רציף ובעל נגזרות חלקיות רציפות בתחום (שייך למחלקה C^1) פשוט קשר $\bar{D}$, אזי שלושת

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad 4: \text{הטענות מהמשפט 2 שקולות לטענה}$$

הוכחה: נוכיח שמ-1 נובע 2, מ-2 נובע 3, ומ-3 נובע 1. זה יצביע על שקילות של שלושת התנאים.

שלב א': $2 \rightarrow 1$. נתון ש- $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ שווה לאפס לפי כל קו סגור L הנמצא ב-D.



צריך להוכיח ש- $\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ אינו תלוי במסלול המחבר את A ו-B הנמצא ב-D. נחבר את A ו-B בשתי דרכים שונות $A \rightarrow B$ ו- $B \rightarrow A$. נוכיח כי האינטגרלים לפי המסלולים הללו שווים.

היות והמסלול $A \rightarrow B \rightarrow A$ סגור מקבלים מ-1 ש: $\int_{A \rightarrow B \rightarrow A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, מצד שני את האינטגרל הנ"ל ניתן לרשום באופן הבא

$$\int_{A \rightarrow B \rightarrow A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{B \rightarrow A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

$$\int_{A \rightarrow B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{B \rightarrow A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{או}$$

כלומר אינטגרל קווי לא תלוי במסלול המחבר את הנקודות A ו-B.

שלב ב': $3 \rightarrow 2$. נקבע נקודה M_0 בתחום D. נבחר נקודה כלשהי M ב-D. נחבר אותם על-ידי קו רציף שכולו ב-D. נבנה את הפונקציה

$$(2) \quad u(x, y) = \int_{M_0 M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0 M} P(x, y) dx - Q(x, y) dy$$

מ-2 נובע כי אינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את M_0 עם M ולכן $u(x, y)$ היא פונקציה המוגדרת ב-D.

נוכיח שהפונקציה $u(x, y)$ מ-2 גוירה חלקית ונחשב את נגזרותיה.

נוכיח קיום של u'_x . ניתן ל- x תוספת Δx כזה קטנה שהנקודה $N(x + \Delta x, y)$ תישאר בתחום D (זה אפשרי כי D פתוח).

לפי הגדרת הנגזרת

$$u'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{M_0 N} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{M_0 M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta x}$$

הוכחה: להוכחת המשפט מספיק לראות כי מ-3 נובע 4 ומ-4 נובע 1.

א. $3 \rightarrow 4$. מ-3 נובע שקיימת הפונקציה $u(x, y)$ כזאת ש- $du = Pdx + Qdy$. כלומר $u'_x = P$, $u'_y = Q$, היות ו- P ו- Q גזירות, נקבל

$$\frac{\partial P}{\partial y} = u''_{xy} , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = u''_{yx}$$

הניגודות המעורבות u''_{xy} ו- u''_{yx} רציפות ולכן שוות, כלומר קיבלנו

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{ש-}$$

ב. $4 \rightarrow 1$. יהיה L קו סגור כלשהו ב- D לכן הוא שפת התחום D_1 . נחשב $\int_L Pdx + Qdy$ ממשפט גרין נובע

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

נציין שאם התחום D לא פשוט קשר אזי מהנוסחה האחרונה לא בהכרח נובעת טענה 1 (ממשפט 2) משום ששפתו של D_1 יכול להיות מורכב יותר מקו סגור אחד. ■

5. שדה משמר (מישורי). פונקציות פוטנציאל

יהיה $F(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$ שדה וקטורי מישורי המוגדר מעל תחום D בעל שפה L . נניח כי F רציף ובעל נגזרות חלקיות רציפות ב- $\bar{D}$.

הגדרה 3: שדה וקטורי $F(x, y)$ הוא **שדה משמר** אם קיים שדה סקלרי $u(x, y)$ כזו ש- $\nabla u = F$. לפונקציה $u(x, y)$ קוראים **פוטנציאל של השדה F** .

מההגדרה נובע ששדה F הוא משמר אם הביטוי $Pdx + Qdy$ הוא דיפרנציאל שלם. זאת אומרת קיימת פונקציה $u(x, y)$ כזאת ש- $du = Pdx + Qdy$.

ממשפט 2 מקבלים טענות שקולות: שדה F הוא משמר ב- D אם ורק אם אינטגרל $\int_L F \cdot dr$ לפי כל קו סגור L ב- D שווה לאפס, או שדה F הוא

משמר אם ורק אם האינטגרל הקווי $\int_{AB} F \cdot dr$ אינו תלוי במסלול המחבר את הנקודות A ו- B בתחום D .

נציין שפונקציות פוטנציאל של שדה וקטורי יחידה עד כדי קבוע.

דוגמה 19: השדה $F = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}$ מעל התחום

$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 100$ אינו שדה משמר (ראה דוגמה 17) משום שקיים קו $\Gamma: x^2 + y^2 = 10$ אשר $\int_{\Gamma} F \cdot dr = 2\pi$ (בדוק).

דוגמה 20: השדה $F = \frac{x}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\hat{j}$ בתחום $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 100$

הוא שדה משמר משום ש- $\int_{\Gamma} F \cdot dr = 0$ לפי כל קו סגור Γ ב- D (דוגמה 18).

מסקנה 2: אם שדה F מוגדר מעל תחום פשוט קשר D ושייך למחלקה C^1 אזי הוא שדה משמר אם ורק אם $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

המסקנה נובעת ישירות מהגדרה 3 ומשפט 3. ■

הערה 6: תהיה F שדה וקטורי השייך למחלקה C^1 בתחום D (שאינו פשוט קשר). $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ הוא **תנאי הכרחי** ש- F יהיה משמר ב- D . אם בנוסף

D פשוט-קשר אזי התנאי הזה הוא גם תנאי מספיק.

למשל, השדה מדוגמה 19 אינו משמר למרות ש- $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

נקבל כעת נוסחה לפוטנציאל של שדה משמר $F = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$.

היות ו- F משמר קיימת פונקציה דיפרנציאלית $u(x, y)$ כזאת ש-

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

נבחר נקודה (x_0, y_0) ב- D ונבצע אינטגרציה של המשוואה $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ לפי x נקבל

$$(2) \quad u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \varphi(y)$$

נציב $x = x_0$ ב-(2), נקבל $u(x_0, y) = \int_{x_0}^{x_0} P(t, y) dt + \varphi(y)$

$$\varphi(y) = u(x_0, y)$$

מהמשוואה השנייה של (1) נובע ש- $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y) = Q(x_0, y)$

נבצע אינטגרציה בביטוי האחרון לפי y

$$(3) \quad u(x_0, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, v) dv + c$$

(כאשר c קבוע).

נציב את (3) ב-(2) ונקבל

$$(4) \quad u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, v) dv + c$$

אם מתחילים לבצע אינטגרציה לפי y בביטוי השני של (1) אזי מקבלים נוסחה אחרת לפונקציית פוטנציאל

$$(5) \quad u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x, v) dv + \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + c$$

דוגמה 21: הוכח ששדה $F = \frac{y^2 + y^4 - x^2 y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \mathbf{i} + \frac{2xy(1 + x^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} \mathbf{j}$ הוא שדה משמר בכל המישור וחשב את פונקציית הפוטנציאל של F .

פתרון: את הבריקה ש- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ נשאיר לקורא. נמצא את הפונקציה u :

נבחר נקודה $M_0 = (0, 0)$ ונשתמש בנוסחה (5). נקבל

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{2yx(1+x^2)}{(1+x^2+y^2)^2} dy + \int_0^x \frac{0}{(1+x^2)^2} dx + c = -\frac{x(1+x^2)}{1+x^2+y^2} \Big|_0^y = -\frac{x(1+x^2)}{1+x^2+y^2} + \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} + c = \frac{xy^2}{1+x^2+y^2} + c$$

אם במקום הנקודה $(0, 0)$ נבחר נקודה אחרת נקבל את הפונקציה $u_1(x, y)$ השונה מ- $u(x, y)$ בקבוע.

דוגמה 22: נתון שדה וקטורי

$$F = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

הוכח כי F שדה משמר מעל כל אחד מהתחומים הבאים ומצא את פונקציית הפוטנציאל שלה:

א. $(x-1)^2 + (y-5)^2 \leq 16$ ב. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 100, y \leq |x|$

פתרון: במקרה שלנו

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ומשום שהתחומים במקרה א' ו-ב' הם פשוטי קשר השדה הנתון בשני המקרים הללו הוא שדה משמר.

נעבור למציאת פונקציית הפוטנציאל:

א. נבחר נקודה $(x_0, y_0) = (0, 3)$ ונשתמש בנוסחה (4) לחישוב פונקציית הפוטנציאל

$$u(x, y) = \int_0^x \frac{-y dx}{x^2 + y^2} + \int_3^y \frac{0 dy}{x^2 + y^2} = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + c$$

ב. במקרה זה נקודה $(0, 3)$ גם נמצאת

בתוך התחום הנתון אבל הפונקציה

$-\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + c$ אינה פונקציית

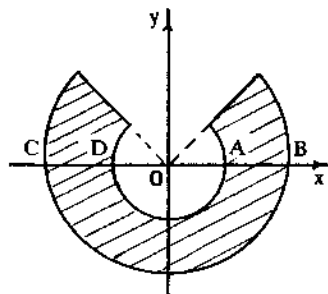
הפוטנציאל של השדה הנתון מעל התחום המתואר בצירוף זאת מהסיבה שהיא לא רציפה בתחום הנתון ואפילו אינה מוגדרת בנקודות שעל הציר x (על הקטעים AB ו- CD).

משפט 3 נובע כי בכל אופן שדה F משמר.

כדי למצוא את פונקציית הפוטנציאל נבחר קבוע c כך שהפונקציה

$-\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + c$ תהיה רציפה בכל תחום נתון. נשאיר לקורא לבדוק כי

$$U(x, y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2}, & y > 0, x > 0 \\ 0, & y = 0, x > 0 \\ -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2}, & y < 0 \\ -\pi, & y = 0, x < 0 \\ -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{3}{2}\pi, & y > 0, x < 0 \end{cases}$$



תרגילים

1. הוכח שהשדות הבאים הם שדות משמרים ומצא את הפוטנציאל של כל אחד מהם.

א. $F = e^{x-y}(1+x+y)\hat{i} + e^{x-y}(1-x-y)\hat{j}$, בכל המישור.

ב. $F = \frac{x}{1+x^2+y^2}\hat{i} + \frac{y}{1+x^2+y^2}\hat{j}$, בכל המישור.

ג. $F = -\frac{y^2}{(x-y)^2}\hat{i} + \frac{x^2}{(x-y)^2}\hat{j}$, בתחום $\bar{D}: (x+5)^2 + y^2 \leq 9$.

ד. $F = \frac{2y}{(x+y)^2}\hat{i} - \frac{2x}{(x+y)^2}\hat{j}$, בתחום שאינו מכיל את נקודות הקו $x = -y$.

2. יהיה $F = y^2\hat{i} + x^2\hat{j}$ שדה וקטורי. יהיו $I_1: y = x^3$ ו- $I_2: x = y^3$ שני מסלולים המחברים את $(0,0)$ עם הנקודה $(1,1)$:

א. חשב $I_1 = \int_{L_1} F \cdot dr$ ו- $I_2 = \int_{L_2} F \cdot dr$.

ב. הוכח שהשדה F אינו משמר.

3. חשב $\int_L F \cdot dr$ כאשר $F = (\frac{2xy}{1+x^2} + 1)\hat{i} + \ln(1+x^2)\hat{j}$ ו- L נתון

בצורה וקטורית $r(t) = \sqrt{t} \sin \frac{\pi t^2}{2} \hat{i} + t^{\frac{3}{2}} \hat{j}$, $0 \leq t \leq 1$.

4. יהיה $F = \frac{x-y}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{x+y}{x^2+y^2}\hat{j}$. הוכח ש:

א. השדה F משמר בתחום $\bar{D}_1 = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, y \geq 0\}$.

ב. השדה F משמר בתחום $\bar{D}_2 = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, y \leq 0\}$.

ג. השדה F לא משמר בתחום $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$.

רציפה ובעלת גזירות חלקיות רציפות בתחום הנתון ו- $\nabla U(x,y) = F(x,y)$.
לכן (קבוע C_1), $U(x,y) + C_1$ היא פוטנציאל של שדה F בתחום ב.

דוגמה זאת מראה כי כאשר תחום הוא טבעת כמו בדוגמה 19, לא ניתן לבנות פונקציה $U(x,y)$ רציפה בכל התחום.

דוגמה 23: מצא את העבודה של השדה הוקטורי

$$F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \right) \hat{i} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x \right) \hat{j}$$

בהחזת חלקיק מנקודה $A(-3,4)$ לנקודה $B(3,4)$ לאורך האליפסה

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{32} = 1$$

פתרון: העבודה של השדה F שווה ל-

$$\int_L F \cdot dr = \int_L \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x \right) dy$$

$$L: \left\{ \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{32} = 1 \right\}; (-3,4) \text{ עד נקודה } (3,4)$$

את האינטגרל הזה ניתן לחשב ברכיבים שונות (ראה טעיפים 2 ו-3). נשים לב ש- F שדה משמר (בדוק) בכל תחום שאינו מכיל את הראשית. נמצא את הפוטנציאל של F .

נבחר נקודה $M_0(0,1)$ ונשתמש בנוסחה (4), נקבל

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \right) dx + \int_1^y \frac{y}{\sqrt{0+y^2}} dy + c = \\ &= \left(\sqrt{x^2+y^2} + xy \right) \Big|_0^x + \int_1^y dy + c = \sqrt{x^2+y^2} - y + xy + y - 1 + c \end{aligned}$$

$$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy + c$$

נשתמש במשפט 2 ונקבל שהעבודה שווה ל-

$$\int_L F \cdot dr = u(B) - u(A) = \sqrt{3^2+4^2} + 12 - \sqrt{(-3)^2+4^2} + 12 = 24$$

6. צורות שונות של נוסחת גרין. פונקציות הרמוניות

בסעיף זה נביא מספר נוסחאות שימושיות בענפים שונים במתמטיקה.

תהיה D תחום חסום בעל שפה ∂D בכיוון החיובי ו- $\hat{n} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ נורמל יחידה ל- D כלפי חוץ.

אם בנוסחת גרין (מהסעיף הקודם) נחליף P במינוס Q ונחליף Q ב- P , נקבל את נוסחת גרין בצורה

$$(1) \quad \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P(x, y) dy - Q(x, y) dx$$

או תוך שימוש בקשר בין קוסינוסי הכיוון של המשיק והנורמל לעקום ונוסחה (6), מסעיף 2 נקבל

$$(2) \quad \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (P \cos \alpha + Q \cos \beta) d\ell$$

תהיינה $u(x, y)$ ו- $v(x, y)$ שייכות למחלקה C^2 ב- D .

אם נציב ב- (2) $P = u_x$ ו- $Q = u_y$, נקבל

$$(3) \quad \iint_D (u_{xx} + u_{yy}) dx dy = \int_{\partial D} (u'_x \cos \alpha + u'_y \cos \beta) d\ell$$

אם נסמן $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ וניגזרת מכוונת $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = u'_x \cos \alpha + u'_y \cos \beta$, אזי את (3) ניתן לרשום באופן הבא

$$(3^*) \quad \iint_D \Delta u dx dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} d\ell$$

אם נציב ב- (2) $P = v u'_x$ ו- $Q = v u'_y$, נקבל

$$(4) \quad \iint_D v \Delta u dx dy = - \iint_D (u_x v_x + u_y v_y) dx dy + \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} d\ell$$

אם נחליף ב- (4) מקומותיהם של u ו- v , נקבל

$$(4^*) \quad \iint_D u \Delta v dx dy = - \iint_D (u_x v_x + u_y v_y) dx dy + \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} d\ell$$

אם נחסר מ- (4) את (4*) נקבל את הנוסחה החשובה הבאה

$$(5) \quad \iint_D (v \Delta u - u \Delta v) dx dy = \int_{\partial D} \left(v \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} \right) d\ell$$

הגדרה 4: פונקציה $u(x, y)$ ממחלקה C^2 נקראת **הרמונית** בתחום D אם היא מקיימת את **משוואת לפלס** $\Delta u = 0$ (Laplace).

מנוסחה (3*) נובעת המסקנה הבאה:

מסקנה 3: פונקציה $u(x, y)$ הרמונית בתחום D אם ורק אם לכל קו סגור וחלק מתקיים

$$(6) \quad \int_L \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} d\ell = 0$$

נביא מספר תכונות של פונקציות הרמוניות.

I. אם $w(x, y)$ ו- $v(x, y)$ הרמוניות בתחום $\bar{D}$ ו- $u(x, y) = v(x, y) - w(x, y)$ בכל נקודה של ∂D אזי $u(x, y) = v(x, y)$ גם בכל נקודה של D .

הוכחה: נבנה פונקציה $u(x, y) = v(x, y) - w(x, y)$ המתאפסת על השפה ∂D . נוכיח שהיא שווה זהותית לאפס. נשתמש בנוסחה (4) כאשר $u = v$ ונקבל

$$- \iint_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy = 0$$

מכאן נובע שבכל התחום $u_x = u_y = 0$ לכן פונקציה $u(x, y)$ קבועה ומשום שעל ∂D היא אפס, אזי $u(x, y) = 0$ ב- $\bar{D}$. ■

II. תהיה $u(x, y)$ פונקציה הרמונית ב- D , אזי לכל מעגל Γ_R בעל רדיוס R ומרכז (x_0, y_0) שכולו בתחום D , מתקיים

$$(7) \quad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_R} u(x, y) d\ell$$

כלומר, ערך הפונקציה ההרמונית במרכז המעגל שווה ל"ערך הממוצע" של ערכיה על המעגל.

הוכחה: נקוי את הנקודה (x_0, y_0) על-ידי מעגל Γ_r בעל רדיוס r

(קטן מ- R) וניקח $v(x, y) = \frac{1}{2} \ln[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]$. קל לבדוק

שהפונקציה $v(x, y)$ הרמונית בטבעת $D : r < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R$ בעל שפה $L = \Gamma_R \cup \Gamma_r$.

פרק 21

אינטגרל משטחי

1. הגדרת המשטח

הגדרה 1: המקום הגיאומטרי של נקודות (x, y, z) בעלי קואורדינטות $(u, v) \in \Delta$, $z = z(u, v)$, $y = y(u, v)$, $x = x(u, v)$ נקרא **משטח מרחבי**.

כפי שראינו בסעיף 19.5 את המשטח ניתן להציג בצורה וקטורית

$$(1) \quad \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}, \quad (u, v) \in \Delta$$

הגדרה 2: אם וקטור הפונקציה $\mathbf{r}(t, u)$ שייך למחלקה C^1 (רציף ובעל נגזרות חלקיות מסדר ראשון רציפות) ב- Δ אזי אומרים **המשטח חלקי**.

בהמשך הפרק נטפל רק במשטחים חלקים במקוטעין, ואת אומרת חלקים ב- Δ פרט אולי למספר סופי של נקודות בודדות או קווים בודדים.

בסעיף 19.5 קיבלנו שהוקטור $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ הוא נורמל למשטח S הנתון בצורה וקטורית (1) או לפי הקואורדינטות

$$(2) \quad \mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

בהמשך נשתמש בוקטור הנורמל היחידה

$$(3) \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}$$

נזכיר שאם המשטח S נתון בצורה $\Phi(x, y, z)$, אזי וקטור הנורמל הוא

$$(2^*) \quad \mathbf{N} = \nabla \Phi = \Phi'_x \hat{i} + \Phi'_y \hat{j} + \Phi'_z \hat{k}$$

נשתמש בנוסחה (5). היות u ו- v הרמוניות באגף השמאלי, נקבל אפס, לכן

$$\int_L v \frac{\partial u}{\partial \ell} d\ell - \int_L u \frac{\partial v}{\partial \ell} d\ell = 0$$

היות ועל המעגל Γ_R הפונקציה $v(x, y) = \frac{1}{2} \ln R$ ועל γ_r

$v(x, y) = \frac{1}{2} \ln r$ ופונקציה $u(x, y)$ הרמונית, נקבל

$$\int_L v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\ell = \frac{1}{2} \ln R \int_{\Gamma_R} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\ell + \frac{1}{2} \ln r \int_{\gamma_r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\ell = 0$$

$$\int_L u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} d\ell = \int_{\Gamma_R} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} d\ell + \int_{\gamma_r} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} d\ell \quad \text{לכן}$$

$$\text{כאשר} \quad \left. \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\rho=R} = \frac{d}{d\rho} \ln \rho \Big|_{\rho=R} = \frac{1}{R}$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\rho=-r} = \frac{d}{d\rho} \ln \rho \Big|_{\rho=-r} = -\frac{1}{r} \quad \text{ו-} \quad \rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

סופית

$$\frac{1}{r} \int_{\gamma_r} u d\ell = \frac{1}{R} \int_{\Gamma_R} u d\ell$$

עבור r מספיק קטן פונקציה $u(x, y)$ שונה מעט מהערך שלה במרכז (x_0, y_0) ולכן כאשר $r \rightarrow 0$ אינטגרל באגף השמאלי שווה ל- $2\pi u(x_0, y_0)$.

נעבור לגבול ונקבל (7). ■

III. נביא ללא הוכחה את עיקרון המקסימום.

פונקציה $u(x, y)$ רציפה ב- $\bar{D}$ והרמונית ב- D מקבלת את הערך המקסימלי (מינימלי) שלה ב- D רק כאשר היא קבועה.

הגדרה 3: נקודת המשטח M_0 היא נקודה רגולרית אם דרגת המטריצה

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

המחושבת בנקודה M_0 שווה לשתיים. אם דרגת המטריצה קטנה משתיים אזי M_0 היא נקודה סינגולרית.

מהגדרה 3 נוסחה (2) נובעת המסקנה הבאה.

מסקנה 1: נקודה M_0 שעל המשטח, רגולרית אם ורק אם קיים נורמל למשטח בנקודה זו.

את הכיוון הנורמל למשטח נקבע על-ידי נוסחה (2).

אם הנקודה M_0 נעה לאורך איזה מסלול על-פני המשטח ונורמל N משתנה ברציפות, כלומר באיזה סביבה של נקודה לא-סינגולרית על-פני המשטח החלק קיים שדה רציף של נורמלים והשדה הנ"ל מגדיר את כיוון המשטח או צד המשטח. התברר שלא בכל משטח ניתן להגדיר את הכיוון. דוגמה למשטח ללא כיוון הוא משטח מויביוס (A.F. Möbius), ראה איור.

במשך התנועה לאורך הקו הסגור Γ על-פני המשטח מייביוס הנורמל חוזר לנקודה M_0 בכיוון ההפוך. למשטחים האלו קוראים משטחים חד-צדדיים.

הגדרה 4: משטח חלק שעליו ניתן להגדיר כיוון מסוים של הנורמל נקרא משטח דו-צדדי.

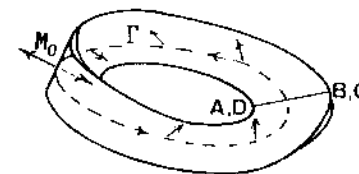
דוגמה 1: כדור, אליפסואיד, פרבולואיד, היפרבולואיד הם משטחים דו-צדדיים, משטח מויביוס הוא משטח חד-צדדי.

בהמשך נשתמש רק במשטחים דו-צדדיים.

נגדיר את הכיוון החיובי של המשטח.

הגדרה 5: הכיוון החיובי של המשטח S הנתון בצורה וקטורית (1) הוא כיוון הנורמל $N = r'_u \times r'_v$ או בצורה יותר מפורטת: אם S משטח סגור, כלומר S חוסם גוף סגור, אזי הכיוון החיובי הוא כלפי חוץ, אם המשטח הוא פתוח אזי הכיוון החיובי הוא בכיוון הציר z .

דוגמה 2: מצא את הכיוון החיובי של המשטח $z = f(x, y)$.



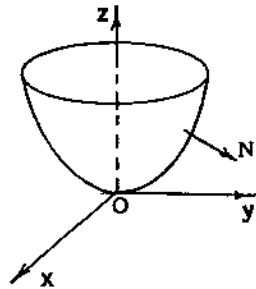
פתרון: נרשום את המשטח בצורה וקטורית $r(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} + f(x, y)\hat{k}$. הכיוון החיובי של המשטח הנתון הוא

$$(4) \quad N = r'_x \times r'_y = -f'_x \hat{i} - f'_y \hat{j} + \hat{k}$$

וזאת אומרת בכיוון הציר z .

דוגמה 3: מצא את כיוון הנורמל החיצוני למשטח $z = x^2 + y^2$.

פתרון: היות והכיוון הוא נגד הציר z , אזי $N = r'_y \times r'_x$, כאשר $r = x\hat{i} + y\hat{j} + (x^2 + y^2)\hat{k}$. ולכן $N = r'_y \times r'_x = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} - \hat{k}$.



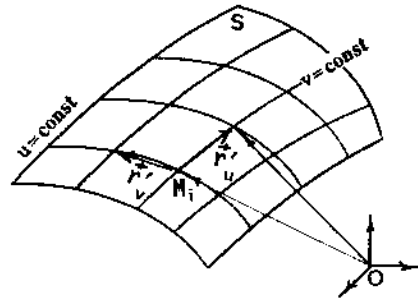
2. שטח פנים של משטח

בסעיף זה נגדיר שטח פנים של משטח חלק ללא נקודות סינגולריות ונקבל נוסחאות לחישובו.

יהיה S משטח דו-צדדי הנתון על-ידי

$$(I) \quad r(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}, \quad (u, v) \in \Delta$$

נחלק את S על-ידי קווים חלקים $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ ונקבל רשת על-פניו, המורכבת ממשטחים אלמנטריים S_i . במשטח אלמנטרי S_i נבחר נקודה M_i ודרכה נעביר מישור משיק.



נטיל את S_i על המישור המשיק.

נסמן על-ידי σ_i את השטח המישורי של ההיטל S_i . יהיה d הקוטר המקסימלי של S_i . $d = \max \text{diameter } S_i$.

נבנה את הסכום $\sum \sigma_i$.

הגדרה 6: אם קיים גבול $\lim_{d \rightarrow 0} \sum \sigma_i$ שאינו תלוי בחלוקת המשטח, אזי לגבול

הזה קוראים שטח הפנים של משטח S .

נקבל עתה נוסחאות לחישוב שטח הפנים.

נחשב

$$\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \sin \varphi \cdot \cos \theta & R \cos \varphi \cdot \cos \theta & 0 \\ -R \cos \varphi \cdot \sin \theta & -R \sin \varphi \cdot \sin \theta & R \cos \theta \end{vmatrix} =$$

$$= R^2 (\cos \varphi \cdot \cos^2 \theta \hat{i} + \sin \varphi \cdot \cos^2 \theta \hat{j} + \sin \theta \cdot \cos \theta \hat{k})$$

מכאן

$$|\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_\theta| = \sqrt{(\cos^2 \varphi \cdot \cos^4 \theta + \sin^2 \varphi \cdot \cos^4 \theta + \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta) R^4} =$$

$$= R^2 \sqrt{\cos^2 \theta} = R^2 \cos \theta$$

נשתמש בנוסחה (5), נקבל

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos \theta d\theta = 2\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 4\pi R^2$$

ב. נרשום את משוואת המשטח באופן הבא

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D : \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}$$

ונשתמש בנוסחה (6) לחישוב שטח הפנים של המשטח הנתון

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} dx dy =$$

$$= \iint_D \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ ונקבל

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \frac{R \rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 2R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

נציין שגם את תרגיל א' ניתן לפתור באותה דרך.

קל לראות שהשטח האלמנטרי σ_i שווה ל- $|\Delta_u \mathbf{r} \times \Delta_v \mathbf{r}|$, כאשר

$$\Delta_u \mathbf{r} = \mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v) \quad \Delta_v \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)$$

לפונקציות $\Delta_u \mathbf{r}$ ו- $\Delta_v \mathbf{r}$ נשתמש במשפט 19.4 ונקבל

$$\Delta_u \mathbf{r} = \mathbf{r}'_u(u + \theta_1 \Delta u, v) \cdot \Delta u + \bar{\varepsilon}_1 \Delta u, \quad \Delta_v \mathbf{r} = \mathbf{r}'_v(u, v + \theta_2 \Delta v) \cdot \Delta v + \bar{\varepsilon}_2 \Delta v$$

כאשר $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}_1 = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}_2 = 0$ ו- $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$; ולכן נקבל לסיכום ששטח אלמנטרי

$$\sigma_i \text{ שווה ל-} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \Delta u \Delta v + \varepsilon \Delta u \cdot \Delta v, \quad \text{כאשר } \lim_{\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

לפי הגדרה 6 נובע ששטח הפנים של S שווה

$$S = \lim_{d \rightarrow 0} \sum \{ |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \Delta u \Delta v + \varepsilon \Delta u \cdot \Delta v \}$$

נשתמש בהגדרת האינטגרל הכפול ונקבל ש-

$$(5) \quad S = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv$$

במקרה שהמשטח S מוגדר בצורה מפורשת $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ נקבל

$$(4) \quad |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} \quad \text{ולכן מ-(5) נובע}$$

$$(6) \quad S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy$$

דוגמה 4: חשב שטח פנים של המשטחים הבאים:

א. כדור $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

ב. גוף החסום על-ידי המשטחים

$$x^2 + y^2 = Rx, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (z \geq 0) \quad \text{(ראה איור בעמוד 68)}.$$

פתרון:

א. נרשום את המשטח הנתון בצורה פרמטרית. למטרה זו נשתמש

בקואורדינטות כדוריות. נקבל

$$x = R \cos \varphi \cdot \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \cdot \cos \theta, \quad z = R \sin \theta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

נרשום את משוואת הכדור בצורה וקטורית

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = R \cos \varphi \cdot \cos \theta \hat{i} + R \sin \varphi \cdot \cos \theta \hat{j} + R \sin \theta \hat{k}$$

תרגילים

1. מצא את הנורמל בכיוון החיובי למשטחים הבאים:

א. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ בנקודה $(3, 4)$.

ב. $3x + 4y + 5z - 4 = 0$.

ג. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ בנקודה $(0, R, 0)$.

2. מצא את שטח הפנים של המשטחים הבאים:

א. חלק של החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מעל העיגול $x^2 + y^2 \leq 2x$.

ב. חלק מהמישור $x + 2y + 3z = 6$ החסום בין צירי הקואורדינטות.

ג. חלק של כדור $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ הנמצא בתוך הגליל $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

ד. חלק של הגליל $x^2 + y^2 = a^2$ בין המישורים $z = 2x$, $z \geq 0$, $z = x$.

ה. $|x| + |y| + |z| = a$.

3. אינטגרל משטחי מסוג ראשון

באופן דומה לסעיף 20.1 נגיע להגדרת האינטגרל המשטחי מהדוגמה הפיסיקלית הבאה:

דוגמה 5: מצא את המסה של המשטח S המוגדר על-ידי

$$(I) \quad \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}, \quad (u, v) \in \Delta$$

בעל צפיפות מסות המשתנה מנקודה לנקודה לפי הכלל $\Phi(x, y, z)$.

פתרון: נכסה את המשטח S על-ידי רשת הבנויה מקווים על-פני המשטח ש: u - קבוע, t - קבוע (ראה סעיף 2). בכל אחד מהמשטחים האלמנטריים S_i נבחר נקודה M_i ונחשב $\Phi(M_i)$ (צפיפות המסה ב- S_i). אם ΔS_i מסמן את שטח הפנים של המשטח האלמנטרי S_i אזי $\Phi(M_i) \cdot \Delta S_i$ הוא המסה של המשטח S_i . נסכם את המסות האלמנטריות ונעבור לגבול כאשר "האלכסון" המקסימלי של S_i שואף לאפס (חלוקה הולכת להיות יותר ויותר עדינה) נקבל את המסת המשטח

$$(2) \quad m = \lim \sum_i \Phi(M_i) \Delta S_i$$

באופן כללי נאמר: אם הפונקציה $\Phi(x, y, z)$ מוגדרת מעל משטח S הנתון על-ידי (1) וקיים גבול (2) שאינו תלוי בחלוקת המשטח S ובחירת נקודות M_i אזי לגבול הזה קוראים **אינטגרל משטחי מסוג ראשון** ומסמנים:

$$(3) \quad \lim \sum_i \Phi(M_i) \Delta S_i = \iint_S \Phi(x, y, z) ds$$

נביא עתה נוסחה לחישוב האינטגרל הזה.

בסעיף 2 קיבלנו ש: $\Delta S_i = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \Delta u \Delta v$ ולכן מ-(3) נקבל

$$(4) \quad \iint_S \Phi(x, y, z) ds = \iint_\Delta \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv$$

דוגמה 6: חשב $I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) ds$ כאשר S הוא חלק של החרוט

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{מעל העיגול} \quad x^2 + y^2 \leq 2x.$$

פתרון: נרשום את המשטח בצורה וקטורית

$$\mathbf{r}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\hat{k}, \quad (x, y) \in D: x^2 + y^2 \leq 2x$$

תוך שימוש בנוסחה 1.4 נקבל

$$|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \sqrt{2}$$

נשתמש בנוסחה (4) לחישוב האינטגרל הנתון ונקבל

$$I = \iint_D (x^2 + y^2 + x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy \quad \text{כאשר} \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 2x\}$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות ונקבל

$$I = \sqrt{2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho \cdot 2\rho^2 d\rho = 8\sqrt{2} \int_0^\pi \cos^4\varphi d\varphi = 3\sqrt{2}\pi$$

תרגילים

1. חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\iint_S z \, ds$, כאשר

$$S = \{x = u \cos t, y = u \sin t, z = t, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

ב. $\iint_S (x^2 + y^2) \, ds$, כאשר S כדור $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

ג. $\iint_S x^2 y^2 \, ds$, כאשר S חצי-כדור $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

2. חשב את המסה של הפרבולויד $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$ בעל צפיפות משטחית $f(x, y, z) = z$

3. מצא את המסה של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ שבו צפיפות משטחית בכל נקודה שווה למרחק מהנקודה עד הציר x .

4. אינטגרל משטחי מסוג שני

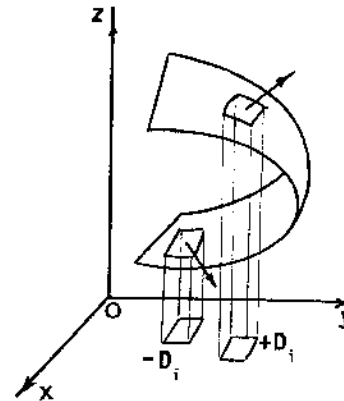
יהי S משטח דו-צדדי הנתון על-ידי

$$(1) \quad \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}, \quad (u, v) \in \Delta$$

נבחר עליו כיוון חיובי (הנורמל)

$$(2) \quad \hat{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

נחלק את המשטח S על-ידי רשת, u - קבוע ו- v - קבוע, נקבל משטחים אלמנטריים ΔS_i ונסמן על-ידי d את המקסימום של האלכסונים של ΔS_i . על-ידי D_i נסמן את ההיטל של ΔS_i על המישור xy . D_i הוא חיובי, כאשר ΔS_i הוא החלק "העליון" של המשטח S ו- D_i הוא שלילי כאשר ΔS_i הוא החלק התחתון של המשטח (ראה איור).



נניח עתה שעל פני המשטח S מוגדרת פונקציה $R(x, y, z)$.

נבחר על משטח אלמנטרי ΔS_i נקודה (כלשהי) $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ונבנה סכום אינטגרלי

$$\sigma = \sum_i R(M_i) D_i = \sum_i R(x_i, y_i, z_i) D_i$$

הגדרה 7: אם קיים גבול סופי

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_i R(x_i, y_i, z_i) D_i$$

ואינו תלוי בבחירת נקודה M_i וחלוקת המשטח S אזי לגבול הזה קוראים אינטגרל משטחי מסוג שני ומסמנים

$$(3) \quad \iint_S R(x, y, z) \, dx \, dy$$

באופן דומה אם נטיל את ΔS_i על המישורים yz , xz ונתבונן בפונקציות Q ו- P בהתאמה נקבל עוד שני אינטגרלים משטחיים מסוג שני

$$(3^*) \quad \iint_S P(x, y, z) \, dy \, dz, \quad \iint_S Q(x, y, z) \, dx \, dz$$

איחוד של שלושת האינטגרלים (3) ו-(3*) נותן אינטגרל משטחי באופן כללי

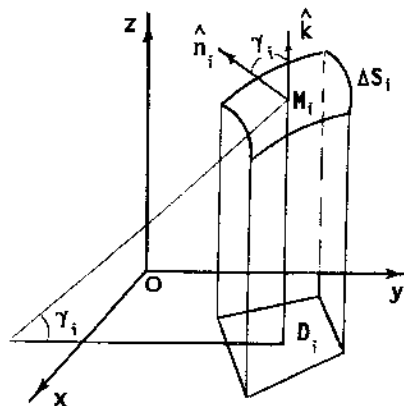
$$(4) \quad I = \iint_S P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy$$

נציין שבנוסחה (4) המשטח S הוא דו-צדדי בעל צד חיובי. מהגדרה 7 ומהגדרת ההיטלים D_i נובעת

הערה 1: אם נחליף את הצד של המשטח S אינטגרל (4) יחליף סימן.

צורת הכתיבה של האינטגרל המשטחי (4) לא מאפשרת לזהות איזה צד של המשטח S לקחנו. נעבור עכשיו לצורה אחרת של (4). במשטח אלמנטרי ΔS_i נבחר נקודה M_i , דרכה נעביר וקטור נורמל $\hat{n}_i$ (ניתן לחשבו לפי נוסחה (2)). נניח כי

$$\hat{n}_i = \cos \alpha_i \hat{i} + \cos \beta_i \hat{j} + \cos \gamma_i \hat{k}$$



ההיטל של ΔS_i על המישור xy הוא D_i . אם S_i הוא שטח הפנים של ΔS_i אזי $D_i = S_i \cos \gamma_i$ (ראה איור). באופן דומה המשתחים של ההיטל של ΔS_i על המישורים xz , yz יהיו $S_i \cos \alpha_i$, $S_i \cos \beta_i$ בהתאמה ולכן הסכום האינטגרלי σ יקבל את הצורה הבאה

$$\sigma = \sum_i [P(M_i) \cos \alpha_i + Q(M_i) \cos \beta_i + R(M_i) \cos \gamma_i] S_i$$

ואם נעבור לגבול, כאשר האלכסון המקסימלי של ΔS_i שואף לאפס נקבל:

$$(5) \quad 1 = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

נוסחה (5) היא צורה אחרת של כתיבת האינטגרל המשטחי מסוג שני (4).

נשים לב שנוסחה (5) היא אינטגרל משטחי מסוג ראשון. כלומר, קיבלנו קשר בין אינטגרלים משטחיים משני סוגים.

מנוסחה (5) גובע שלאחר החלפת ציר של המשטח, הסימן של האינטגרל מתהפך, וזה משום שהנורמל $\hat{n}$ מחליף כיוון ואז $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ מחליפים סימן.

נרשום את הנוסחאות (4) ו-(5) בצורה וקטורית. נסמן על-ידי F שדה וקטורי

$$(6) \quad F(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$$

נציב את המכפלה סקלרית $F \cdot \hat{n} = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ ב-(5)

$$(7) \quad 1 = \iint_S F \cdot \hat{n} ds$$

נוסחה (7) היא כתיבה וקטורית של האינטגרל המשטחי.

הערה 2: את האינטגרל המשטחי ניתן לרשום באחד משלושת הצורות (4), (5) או (7). לפעמים משתמשים בסימן $\vec{dS} = \hat{n} ds$.

נקבל נוסחאות לחישוב אינטגרל משטחי.

נציב ב-(6) במקום x, y, z את $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ מ-(1) בהתאמה, נקבל $F(u, v)$ ונשתמש בנוסחאות (2) ו- $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$ של ΔS_i נקבל מ-(7)

$$1 = \iint_A F \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv = \iint_A F \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v du dv$$

באינטגרל האחרון נמצאת מכפלה מעורבת של שלושת הוקטורים $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, F$ ולכן ניתן לרשום

$$(8) \quad 1 = \iint_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v du dv = \iint_A \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du dv$$

אם המשטח S מוגדר על-ידי פונקציה מפורשת $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ היות ו- $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -f'_x \hat{i} - f'_y \hat{j} + \hat{k}$ נקבל מ-(8)

$$(9) \quad 1 = \iint_D (P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}) \cdot (-f'_x \hat{i} - f'_y \hat{j} + \hat{k}) dx dy = - \iint_D (Pf'_x + Qf'_y - R) dx dy$$

דוגמה 7: חשב $\iint_S F \cdot \hat{n} ds$

$$A. \quad F = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

S - הצד הפנימי של חצי-הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$

$$B. \quad F = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$$

S - הצד החיצוני של החרוט $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$

$$G. \quad F = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k} \quad S \text{ - גליל סגור } x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3$$

פתרון:

A. לחישוב האינטגרל נשתמש בנוסחה (9). נרשום את המשטח באופן הבא $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

נשים לב שהכיוון על S הוא נגד הכיוון של ציר z ולכן

$$N = \mathbf{r}_y \times \mathbf{r}_x = f'_x \hat{i} + f'_y \hat{j} - \hat{k} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \hat{i} - \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \hat{j} - \hat{k}$$

נציב ב-(9), נקבל

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_S F \cdot \hat{n} ds = \iint_D (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \hat{i} - \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \hat{j} - \hat{k}\right) dx dy = \\ &= - \iint_D \left(\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right) dx dy \end{aligned}$$

כאשר $D: x^2 + y^2 \leq 4$

$$I_1 = \int_{z=3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \iint_D (4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + 9\hat{k}) \cdot \hat{k} \, dxdy = 9 \iint_D dxdy = 36\pi$$

$$I_2 = \iint_{z=0} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0 \quad \text{נקבל } D: x^2 + y^2 \leq 4 \text{ ו- } \hat{\mathbf{n}} = -\hat{k} \text{ במקרה זה}$$

3. נרשום את הגליל בצורה וקטורית. נשתמש בקואורדינטות גליליות $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, $z = z$ נקבל

$$\mathbf{r}(\varphi, z) = 2\cos\varphi\hat{i} + 2\sin\varphi\hat{j} + z\hat{k}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 3$$

נציב בנוסחה (8) לחישוב

$$I_3 = \iint_{\Delta} \begin{vmatrix} 8\cos\varphi & -8\sin^2\varphi & z^2 \\ -2\sin\varphi & 2\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 16(\cos^2\varphi - \sin^3\varphi) dz = 48 \int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi - \sin^3\varphi) d\varphi =$$

$$= 24 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2\varphi) d\varphi = 48\pi$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = I_1 + I_2 + I_3 = 84\pi \quad \text{ולבסוף}$$

תרגילים: חשב את האינטגרל המשטחי $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$:

א. $\mathbf{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ו- S הצד החיצוני של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
רמז: השתמש בקואורדינטות כדוריות.

$$\mathbf{F} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$$

ב. S הצד העליון של המישור $x + y + z = 1$, $z \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq 0$.

ג. $\mathbf{F} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ ו- S הצד החיצוני של המשטח החסום על-ידי המישורים $x + y + z = 1$, $z \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq 0$.

ד. $\mathbf{F} = xz^2\hat{i} + yz^2\hat{j} + \sin(4x^2y)\hat{k}$ ו- S הוא חלק מהמשטח $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq |x|$ בין המישורים $z = -1$ ו- $z = 1$, בכיוון החיובי.

ה. $\mathbf{F} = \text{rot}(xz\hat{j} - xy\hat{k})$ ו- S הוא משטח סגור החסום על-ידי המשטחים $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$. כלפי חוץ.

נעבור לקואורדינטות קוטביות באינטגרל האחרון ונקבל

$$I = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \left(\frac{\rho^2}{\sqrt{4-\rho^2}} + \sqrt{4-\rho^2} \right) d\rho = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \frac{4\rho d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} = -16\pi$$

ב. נרשום את משוואת ההרט S בצורה פרמטרית.

נשתמש בקואורדינטות גליליות

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z$$

נקבל

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi) = \rho \cos\varphi\hat{i} + \rho \sin\varphi\hat{j} + \rho\hat{k}$$

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

נשתמש בנוסחה (8) לחישוב האינטגרל הגרש, שים לב לכיוון (ראה איור).

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \iint_{\Delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_{\varphi} \times \mathbf{r}'_{\rho} \, d\varphi d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \begin{vmatrix} \rho^2 \cos^2\varphi & \rho^2 \sin^2\varphi & \rho^2 \\ -\rho \sin\varphi & \rho \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{vmatrix} d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 [-\rho^3 + \rho^3 \cos^3\varphi + \rho^3 \sin^3\varphi] d\rho = -2\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho = -8\pi$$

ג. את האינטגרל לפי המשטח הגלילי S נחלק לשלושה אינטגרלים:

1. אינטגרל I_1 לפי הבסיס העליון $z = 3$.

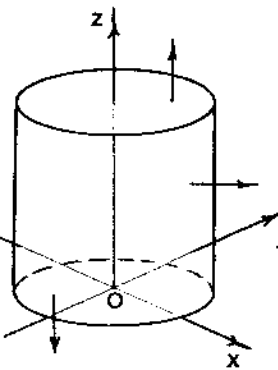
2. אינטגרל I_2 לפי הבסיס התחתון $z = 0$.

3. אינטגרל I_3 לפי המעטפת $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 3$.

נעבור לחישוב האינטגרל בכל אחד מהמקרים:

1. במקרה זה $\hat{\mathbf{n}} = \hat{k}$

ו- $D: x^2 + y^2 \leq 4$, נקבל



$$\iint_S R \cos \gamma \, ds = \iiint_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dx dy dz$$

נחשב

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} \, dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz = \\ &= \iint_D [R(x,y,\varphi_2(x,y)) - R(x,y,\varphi_1(x,y))] \, dx dy = \\ &= \iint_D R(x,y,\varphi_2(x,y)) \, dx dy - \iint_D R(x,y,\varphi_1(x,y)) \, dx dy = \\ &= \iint_{S_1} R(x,y,z) \cos \gamma \, ds + \iint_{S_2} R(x,y,z) \cos \gamma \, ds + \iint_{S_0} R(x,y,z) \cos \gamma \, ds = \\ &= \iint_S R(x,y,z) \cos \gamma \, ds \end{aligned}$$

שלב ב: תהיה V גוף גלילי ששפתו S מורכבת מהמשטחים

$$S_1 = \{(x,y,z) : x = x_1(y,z), (y,z) \in \Delta\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) : x = x_2(y,z), (y,z) \in \Delta\}$$

$$S_0 = \{(x,y,z) : x_1(y,z) < x < x_2(y,z), (y,z) \in \partial\Delta\}$$

באופן דומה מוכיחים ש-

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} \, dx dy dz = \iint_S P(x,y,z) \cos \alpha \, ds$$

שלב ג: אם גוף גלילי V בעל שפה S המורכבת ממשטחים

$$S_1 = \{(x,y,z) : y = y_1(x,z), (x,z) \in \Delta_1\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) : y = y_2(x,z), (x,z) \in \partial\Delta_1\}$$

$$S_0 = \{(x,y,z) : y_1(x,z) < y < y_2(x,z), (x,z) \in \partial\Delta_1\}$$

אזי

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx dy dz = \iint_S Q(x,y,z) \cos \beta \, ds$$

ה. S -ו $F = e^{|r|} \cdot r$, $r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ הצד העליון של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

ז. S -ו $F = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ הצד התחתון של החצי העליון של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

5. משפט הדיברגנט (גאוס, K. Gauss)

בסעיף זה נקבל קשר בין האינטגרל המשטחי לפי משטח החוסם גוף סגור V והאינטגרל המשולש לפי אותו גוף.

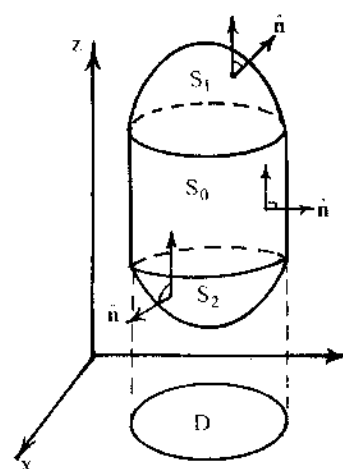
משפט 1: יהיה V גוף ששפתו משטח חלק וסגור S בעל נורמל חיצוני $\hat{n}$. אם שדה וקטורי $F = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ שייך למחלקה C^1 ב- V , אזי מתקיים

$$(1) \quad \iint_S F \cdot \hat{n} \, ds = \iiint_V \operatorname{div} F \, dv$$

את נוסחה (1) ניתן לרשום באופן הבא

$$(1^*) \quad \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, ds = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dx dy dz$$

הוכחה: נוכיח את המשפט בארבעה שלבים (באופן דומה להוכחת משפט גרין).



שלב א: נניח ש- V הוא גוף גלילי ששפתו S מורכבת משלושת המשטחים:

$$S_1 = \{(x,y,z) : z = \varphi_1(x,y), (x,y) \in D\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) : z = \varphi_2(x,y), (x,y) \in D\}$$

$$S_0 = \{(x,y,z) : \varphi_1 < z < \varphi_2, (x,y) \in \partial D\}$$

קל לראות (ראה איור) ש- $\cos \gamma > 0$ בנקודות שעל משטח S_1 , $\cos \gamma < 0$ בנקודות שעל משטח S_2 , ו- $\cos \gamma = 0$ בנקודות שעל S_0 .

נראה בשלב זה ש-

נחשב את היעקוביאן

$$J^* = \frac{D(u, t, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, t, w)} = \frac{1}{J^*} = -\frac{1}{3} \neq 0 \quad \text{ולכן היעקוביאן}$$

ההעתקה של הגוף V לגוף V' : $|u| + |t| + |w| \leq 1$ היא חד-חד ערכית ו-

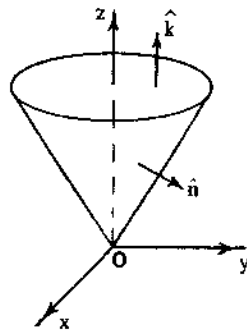
$$\iiint_V dv = \frac{1}{3} \iiint_{V'} du dt dw = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \iiint_{V'} du dt dw$$

כאשר הגוף $V' = \{u+t+w \leq 1, u \geq 0, t \geq 0, w \geq 0\}$ הוא שמינית מהגוף V' .

$$V' \text{ הוא פירמידה בעלת נפח } \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6} \text{ ולכן סופית}$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$$

דוגמה 10: חשב את השטף של השדה $\mathbf{F} = 3xy^2 \hat{i} - (y^3 + x) \hat{j} + 2z \hat{k}$ דרך המשטח $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מ- $z = 0$ עד $z = 1$ כלפי חוץ.



פתרון: השטף של השדה $\mathbf{F}$ הוא $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds$.

במקרה זה לא ניתן להשתמש במשפט גאוס משום שהמשטח S אינו סגור.

נסגור את המשטח הנתון על-ידי מישור $z = 1$ ונקבל משטח סגור $S \cup (z=1)$.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_{S \cup (z=1)} \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds - \iint_{z=1} \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds$$

נחשב כל אחד מהאינטגרלים.

בראשון ניתן להשתמש במשפט 1, נחשב את האינטגרל הראשון

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} (3xy^2) + \frac{\partial}{\partial y} (-y^3 - x) + \frac{\partial}{\partial z} (2z) = 3y^2 - 3y^2 + 2 = 2$$

שלב ד: מקרה כללי. אם גוף V בעל שפה S מקיים תנאים של השלבים א, ב, ג אזי מקבלים (1). נשאיר לקורא לאמת את (1) כאשר גוף V ניתן לחלוקה למספר סופי של גופים המקיימים את התנאים שבשלבים א, ב, ג. ■

הגדרה 8: לאינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds$ קוראים שטף של השדה הוקטורי $\mathbf{F}$ דרך המשטח S .

דוגמה 8: חשב את השטף של השדה הוקטורי $\mathbf{F} = 4x \hat{i} - 2y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$ דרך המשטח הסגור $z = 3$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ (ראה דוגמה 7).

פתרון: השטף של השדה $\mathbf{F}$ הוא $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds$. נחשב $\operatorname{div} \mathbf{F}$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} (4x) + \frac{\partial}{\partial y} (-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z} (z^2) = 4 - 4y + 2z$$

נשתמש בנוסחה (1) ונקבל

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dv = \iiint_V (4 - 4y + 2z) dx dy dz$$

נעבור לקואורדינטות גליליות $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$, כאשר $0 \leq z \leq 3$, $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ נקבל

$$\begin{aligned} \iiint_V (4 - 4y + 2z) dx dy dz &= \int_0^3 dz \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} \rho (4 - 4\rho \sin \phi + 2z) d\phi = \\ &= \int_0^3 dz \int_0^2 2\pi (4\rho + 2\rho z) d\rho = 48\pi + 36\pi = 84\pi \end{aligned}$$

דוגמה 9: חשב את השטף של השדה הוקטורי

$$\mathbf{F} = (3x - 2y + z) \hat{i} + (2x + 3y - z) \hat{j} + (x - 3y + z) \hat{k}$$

דרך המשטח $S: |3x - 2y + z| + |2x + 3y - z| + |x - 3y + z| = 1$

פתרון: $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3 + 2 + 1 = 6$, נשתמש בנוסחה (1). נקבל

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dv = 6 \iiint_V dv$$

כאשר $V: |3x - 2y + z| + |2x + 3y - z| + |x - 3y + z| \leq 1$

כדי לחשב את האינטגרל האחרון נעשה החלפת משתנים

$$u = 3x - 2y + z, \quad t = 2x + 3y - z, \quad w = x - 3y + z$$

$$\iint_{SU(z=1)} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 2 \iiint_V dv = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3} \pi$$

השתמשנו בנוסחת נפח החרוט שגובהו 1 ורדיוס הבסיס הוא 1.

את האינטגרל השני מחשבים ישירות. היות ו- $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}$ ו- $D: x^2 + y^2 \leq 1$, נקבל

$$\iint_{z=1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \iint_D (2xy^2 \hat{\mathbf{i}} - (y^3 + x) \hat{\mathbf{j}} + 2 \cdot 1 \hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{k}} \, dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2\pi$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \frac{2}{3} \pi - 2\pi = -\frac{4}{3} \pi \quad \text{לסיכום}$$

תרגילים

1. מצא את השטף של השדה הוקטורי $\mathbf{F}$ דרך המשטח S :

א. $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $\mathbf{F} = yx \hat{\mathbf{i}} - 2y \hat{\mathbf{j}} - z \hat{\mathbf{k}}$.

ב. $S: \{z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1, \text{פתוח}\}$, $\mathbf{F} = (y-z) \hat{\mathbf{i}} + (z-x) \hat{\mathbf{j}} + (x-y-1) \hat{\mathbf{k}}$.

ג. $S: \{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 1\}$, $\mathbf{F} = x^2 \hat{\mathbf{i}} + y^2 \hat{\mathbf{j}} + z^2 \hat{\mathbf{k}}$.

ד. $S: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, \text{שפת קוביה}\}$, $\mathbf{F} = x^2 \hat{\mathbf{i}} - y^2 \hat{\mathbf{j}} + z^2 \hat{\mathbf{k}}$.

ה. $S: \{z^2 = x^2 + y^2, z = x^2 + y^2\}$, $\mathbf{F} = 3x \hat{\mathbf{i}} + 4y \hat{\mathbf{j}} - z \hat{\mathbf{k}}$.

2. הוכח: אם S משטח חלק וסגור ו- $\mathbf{a}$ וקטור קבוע כלשהו אזי

$$\iint_S \cos(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{a}) \, ds = 0$$

כאשר $\hat{\mathbf{n}}$ נורמל היצוני ל- S .

6. משפט סטוקס (Stokes)

בסעיף זה נביא הכללה של משפט גרין לעקומים מרחביים.

יהי S משטח דו-צדדי ופתוח ו- $\hat{\mathbf{n}}$ נורמל יחידה בכיוון החיובי. יהיה העקום Γ שפה של המשטח S בכיוון החיובי, כלומר במשך התנועה לאורך הקו Γ המשטח הנתון נמצא מצד שמאל.

משפט 2 (סטוקס): אם באיזה שהיא סביבה של המשטח S השדה הוקטורי

$$\mathbf{F} = P \hat{\mathbf{i}} + Q \hat{\mathbf{j}} + R \hat{\mathbf{k}}$$

(רציף ובעל ניגזרות חלקיות רציפות) אזי

$$(1) \quad \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{אם} \quad \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

כאשר Γ היא השפה של המשטח S בכיוון החיובי.

הוכחה: יהי $S: \{x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in \Delta\}$ ו- $\partial \Delta$ השפה של התחום Δ .

נחשב את האינטגרל $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. לצורך זה נחשב

$$d\mathbf{r} = dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}} = (x'_u \hat{\mathbf{i}} + y'_u \hat{\mathbf{j}} + z'_u \hat{\mathbf{k}}) du + (x'_v \hat{\mathbf{i}} + y'_v \hat{\mathbf{j}} + z'_v \hat{\mathbf{k}}) dv$$

נציב באינטגרל

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial \Delta} (Px'_u + Qy'_u + Rz'_u) du + (Px'_v + Qy'_v + Rz'_v) dv$$

נשתמש בנוסחת גרין לחישוב האינטגרל האחרון ונקבל

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial u} (Px'_v + Qy'_v + Rz'_v) - \frac{\partial}{\partial v} (Px'_u + Qy'_u + Rz'_u) \right) dudv$$

לאחר גזירה, נקבל:

$$(2) \quad \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Delta} [(P'_u x'_v - P'_v x'_u) + (Q'_u y'_v - Q'_v y'_u) + (R'_u z'_v - R'_v z'_u)] dudv$$

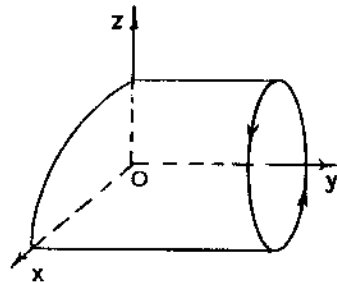
מצד שני נחשב את האינטגרל השמאלי ב-(1). תחילה נחשב $\text{rot } \mathbf{F}$.

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z) \hat{\mathbf{i}} + (P'_z - R'_x) \hat{\mathbf{j}} + (Q'_x - P'_y) \hat{\mathbf{k}}$$

נציב $z = z(u, v)$, $y = y(u, v)$, $x = x(u, v)$ ונשתמש בנוסחה (8) מסעיף 4, נקבל

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \iint_{\Delta} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \, dudv = \iint_{\Delta} \begin{vmatrix} R'_y - Q'_z & P'_z - R'_x & Q'_x - P'_y \\ x'_{uu} & y'_{uu} & z'_{uu} \\ x'_{uv} & y'_{uv} & z'_{uv} \end{vmatrix} dudv =$$

$$(3) \quad = \iint_{\Delta} [(P'_y x'_{uv} y'_{uu} + P'_z z'_{uu} x'_{uv} - P'_x x'_{uu} z'_{uv} - P'_y x'_{uu} y'_{uv}) + \\ + (Q'_x x'_{uv} y'_{uu} + Q'_z z'_{uu} y'_{uv} - Q'_z y'_{uu} z'_{uv} - Q'_x x'_{uv} y'_{uv}) +$$

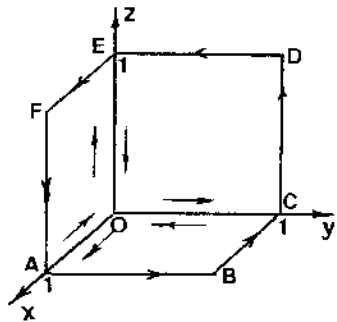


פתרון: נסמן $\mathbf{F} = z^3 \hat{i} + 3y^2 \hat{j} - x^3 \hat{k}$
ונחשב $\text{rot } \mathbf{F}$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 & 3y^2 & -x^3 \end{vmatrix} = 3(z^2 + x^2) \hat{j}$$

במקרה שלנו המשטח S הוא מישור $y=1$ מעל $x^2 + z^2 = 1$ והנורמל ל- S הוא $\hat{n} = \hat{j}$, נשתמש כמשפט סטוקס. נקבל

$$I = \iint_S 3(z^2 + x^2) ds = 3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho \cdot \rho^2 d\rho = \frac{3}{2} \pi$$



דוגמה 13: חשב בעזרת משפט סטוקס $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F} = xy \hat{i} + y^2 \hat{j} - 3yz \hat{k}$

ו- L הוא קו שבזר ABCDEFA מתואר בצורה והמרחקים $OA=OC=OE=1$.

פתרון: נרשום את האינטגרל באופן הבא

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ABCOA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{CDEOC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{EFAOE} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

נחשב כל אחד מהאינטגרלים מהאגף הימני.

1. נחשב את האינטגרל הראשון באגף הימני תוך שימוש בנוסחה (1), נקבל

$$(*) \quad \int_{ABCOA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds$$

כאן S הוא מישור $z=0$ ו- $\hat{n} = \hat{k}$, נחשב $\text{rot } \mathbf{F}$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y^2 & -3yz \end{vmatrix} = (-3z) \hat{i} - 0 \hat{j} + x \hat{k} = -3z \hat{i} + x \hat{k}$$

מ- $(*)$ נקבל

$$+ (R'_y y'_u z'_v + R'_x x'_u z'_v - R'_x z'_u x'_v - R'_y z'_u y'_v) dudv$$

נראה שהאינטגרל (3) שווה ל-(2). בביטוי

$$P'_y x'_v y'_u + P'_z z'_u x'_v - P'_z x'_u z'_v - P'_y x'_u y'_v =$$

נחבר ונחסיר $P'_x x'_u x'_v$ ונקבל:

$$= (P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u) x'_v - (P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v) x'_u = P'_u x'_v + P'_v x'_u$$

באופן דומה מוכיחים

$$Q'_x x'_v y'_u + Q'_z z'_u y'_v - Q'_z y'_u z'_v - Q'_x x'_v y'_u = Q'_u y'_v - Q'_v y'_u$$

$$R'_y y'_u z'_v + R'_x x'_u z'_v - R'_x z'_u x'_v - R'_y z'_u y'_v = R'_u z'_v - R'_v z'_u$$

■ חזרה מוכיח את המשפט.

דוגמה 11: חשב $\int_\Gamma (2y+3x)dx + (z-y^2)dy + (x+1)dz$ כאשר Γ הוא

$$\text{המעגל } \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x+y+z=0\}.$$

פתרון: נסמן $\mathbf{F} = (2y+3x)\hat{i} + (z-y^2)\hat{j} + (x+1)\hat{k}$ ונחשב $\text{rot } \mathbf{F}$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y+3x & z-y^2 & x+1 \end{vmatrix} = -\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$

נתייחס לקו Γ כשפה של המשטח $x+y+z=0$ ולכן הנורמל למישור

הוא $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$ או $\mathbf{N} = (1,1,1)$ נשתמש בנוסחת סטוקס, נקבל

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S ds = -\frac{4}{\sqrt{3}} \pi a^2$$

(שים לב $\iint_S ds$ שווה לשטח המעגל בעל רדיוס a).

דוגמה 12: חשב $\int_L z^3 dx + 3y^2 dy - x^3 dz$ כאשר L הוא מעגל

$$x^2 + z^2 = 1, y=1 \text{ בכיוון החיובי.}$$

$$\int_{ABCOA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (-3z\hat{i} - x\hat{k}) \cdot \hat{k} ds = - \iint_S x dx dy$$

כאשר S הוא ריבוע ABCO ולכן

$$\int_{ABCOA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^1 dy \int_0^1 x dx = -\frac{1}{2}$$

2. נחשב $\int_{CDEOC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ במקרה דוה המשטח S הוא מישור yz או $x=0$ והנורמל $\hat{n} = \hat{i}$

$$\int_{CDEOC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{OCDE} (-3z) dy dz = -\frac{3}{2}$$

3. באופן דומה $\int_{AOEFA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ובסוף $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 0 = -2$

תרגילים

1. חשב בעזרת משפט סטוקס את האינטגרל $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

א. $L: \{x^2 + y^2 = 4, z=1\}$ ו- $\mathbf{F} = y\hat{i} + x^2\hat{j} - z\hat{k}$

ב. $L: \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ ו- $\mathbf{F} = y\hat{i} - x\hat{j} + z\hat{k}$

ג. $L: \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z=x\}$ ו- $\mathbf{F} = y\hat{i} - x\hat{j} + z\hat{k}$

ד. $L: \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, 3x + 2y - z = 0\}$ שפה על המשטח המישורי $\mathbf{F} = (z + 2xyz)\hat{i} + x^2z\hat{j} + x^2y\hat{k}$

ה. $L: \{x^2 + y^2 = 1, x+z=1\}$ ו- $\mathbf{F} = (y-x)\hat{i} + (z-x)\hat{j} + (x-y)\hat{k}$

2. חשב $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds$ כאשר $\mathbf{F} = yz\hat{i} + (z-3)^2e^y\hat{j} + x\hat{k}$ ו- S הוא

משטח $z = xy(x-1)^2(y-1)^2 + 3$ מעל הריבוע $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ נשתמש במשפט סטוקס.

תרגילים נוספים

1. יהיה S משטח חלק וסגור, $\hat{n}$ נורמל כלפי חוץ ו- $\mathbf{a}$ וקטור קבוע, הוכח:

$$\iint_S \cos(\hat{n}, \mathbf{a}) ds = 0$$

2. תהיה S שפה חלקה של הגוף החסום V , $\hat{n}$ נורמל ל- S כלפי חוץ, $u(x,y,z)$ ו- $v(x,y,z)$ שייכות למחלקה C^2 ב- $V \cup S$, הוכח:

$$\iiint_V (v\Delta u - u\Delta v) = \iint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} \right) ds$$

כאשר $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \hat{n}) ds$$

כאשר $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ו- $(\mathbf{r}, \hat{n})$ זווית בין הוקטורים $\mathbf{r}$ ו- $\hat{n}$.

ג. אם בנוסף משטח S אינו עובר דרך הראשית, אזי

$$\iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \hat{n})}{x^2 + y^2 + z^2} ds = \begin{cases} 4\pi, & (0,0,0) \in V \\ 0, & (0,0,0) \notin V \end{cases}$$

3. הפונקציה $u(x,y,z)$ השייכת ל- C^2 מעל גוף סגור וחסום $\bar{V}$ בעל שפה חלקה S . נקראת הרמונית אם היא מקיימת את המשוואה

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$$

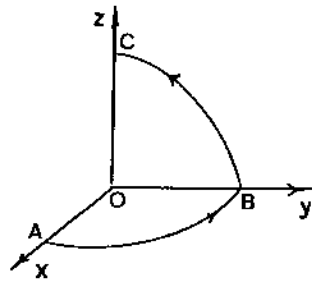
הוכח: אם $u(x,y,z)$ הרמונית ב- $\bar{V}$ אזי

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(u \frac{\cos(\mathbf{r}, \hat{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \right) ds$$

כאשר $\hat{n}$ נורמל חיצונית ל- S ו- $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

4. תהיה $u(x,y,z)$ פונקציה הרמונית בכדור S בעל רדיוס R שמרכזו בנקודה (x_0, y_0, z_0) הוכח

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x,y,z) ds$$



נבחר מסלול חדש AOC (יותר נוח לחישובים), נקבל

$$I = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AO} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{OC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

נחשב כל אחד מהאינטגרלים:

את הקטע AO ניתן לרשום בצורה וקטורית $\mathbf{r} = -x\hat{i}, 0 \leq x \leq 2$.

לכן $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -x + yz \sin(xyz)$ והיות ולאורך AO $z=0, y=0$, נקבל

$$\int_{AO} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^2 x dx = -2$$

באופן דומה $\int_{OC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ובסוף $I = -2$ (דרך נוספת ראה אחרי דוגמה 15).

הגדרה 9: לאינטגרל $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, כאשר L קו סגור, קוראים **צירקולציה** של השדה הווקטורי F.

הגדרה 10: שדה וקטורי F נקרא **שדה משמר** אם קיים שדה סקלרי u כזה ש- $\nabla u = \mathbf{F}$.

לפונקציה $u(x, y, z)$ קוראים **פוטנציאל** של השדה F.

ממשפט 3 נובע ששדה F הוא משמר אם ורק אם הצירקולציה של השדה F שווה לאפס או שדה F משמר אם ורק אם $\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$.

באופן דומה למקרה המישורי (סעיף 20.5) נקבל נוסחה לפוטנציאל של השדה המשמר.

יהיה F שדה משמר, זאת אומרת קיימת פונקציה $u(x, y, z)$ כזאת ש- $du = Pdx + Qdy + Rdz$, לכן

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z)$$

נבחר נקודה $M_0(x_0, y_0, z_0)$ בגוף V ונבצע אינטגרציה של המשוואה הראשונה ב-(2) לפי x, נקבל

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y, z) dt + \varphi(y, z)$$

7. שדה משמר (בללי)

בסעיף זה נקבל הכללה מרחבית לתוצאות של סעיפים 4 ו-5 מהפרק הקודם.

בהמשך כל העקומים הם חלקים במקוטעין והמשטחים הם דו-צדדיים **ופשוט קשר משטחי**, זאת אומרת שלכל עקום סגור L קיים משטח דו-צדדי שהקו L הוא שפתו.

המשפט הבא דן באי-תלות של האינטגרל הקווי במסלול האינטגרציה.

משפט 3: יהיה $\mathbf{F} = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$ שדה וקטורי השייך למחלקה C^1 מעל גוף פשוט קשר משטחי V. אזי, ארבעת הטענות הבאות שקולות:

$$1. \quad \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{עבור כל קו סגור L ב-V.}$$

$$2. \quad \text{האינטגרל } \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ אינו תלוי במסלול המחבר את הנקודות A ו-B שכולו נמצא בגוף V.}$$

$$3. \quad \text{קיים שדה סקלרי } u(x, y, z) \text{ כזה ש-} \nabla u = \mathbf{F}(x, y, z), \text{ במילים אחרות הביטוי } Pdx + Qdy + Rdz \text{ הוא דיפרנציאל שלם, זאת אומרת קיימת הפונקציה } u(x, y, z) \text{ כך ש-} du = Pdx + Qdy + Rdz \text{ ומתקיים}$$

$$(1) \quad \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = u(B) - u(A)$$

$$4. \quad \nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F} = 0$$

והוכחה של המשפט דומה להוכחת המשפט 20.2 ולכן נשאיר אותה לקורא. ■

דוגמה 14: חשב $I = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$$\mathbf{F} = [x - yz \sin(xyz)]\hat{i} - xz \sin(xyz)\hat{j} - xy \sin(xyz)\hat{k}$$

ו-L מורכב משני חלקים (ראה איור בעמוד הבא).

$$\{x^2 + y^2 = 4, z = 0\} \text{ מ-A(2, 0, 0) ל-B(0, 2, 0)}$$

$$\{y^2 + z^2 = 4, x = 0\} \text{ מ-B(0, 2, 0) ל-C(0, 0, 2)}$$

פתרון: את הבריקה ש- $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ נשאיר לקורא.

לפי משפט 3 האינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את הנקודות A ו-C.

נציב בשיויון האחרון $x = x_0$, נקבל ש- $u(x_0, y, z) = \varphi(y, z)$, לכן

$$(3) \quad u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y, z) dt + u(x_0, y, z)$$

נעבור למשוואה השנייה ב-(2) ונציב בה $x = x_0$, נקבל $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x_0, y, z)$ נבצע אינטגרציה לפי y , נקבל

$$u(x_0, y, z) = \int_{y_0}^y Q(x_0, v, z) dv + \varphi_1(z)$$

אם נציב $y = y_0$ נקבל $u(x_0, y_0, z) = \varphi_1(z)$, לכן

$$(4) \quad u(x_0, y, z) = \int_{y_0}^y Q(x_0, v, z) dv + u(x_0, y_0, z)$$

נתבונן במשוואה השלישית מ-(2) בנקודות (x_0, y_0, z) ונקבל

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R(x_0, y_0, z), \text{ מבאן}$$

$$(5) \quad u(x_0, y_0, z) = \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, w) dw + c$$

נציב (5) ו-(4) ב-(3), נקבל נוסחה לפונקציה הפוטנציאל $u(x, y, z)$

$$(6) \quad u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, v, z) dv + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, w) dw + c$$

באופן דומה הם מתחילים לבצע אינטגרציה לפי y או לפי z , מקבלים את הנוסחאות הבאות

$$(7) \quad u(x, y, z) = \int_{y_0}^y Q(x, v, z) dv + \int_{x_0}^x P(t, y_0, z) dt + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, w) dw + c$$

$$(8) \quad u(x, y, z) = \int_{z_0}^z R(x, y, w) dw + \int_{y_0}^y Q(x, v, z_0) dv + \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + c$$

דוגמה 15: מצא את הפוטנציאל של השדה הקטורי

$$\mathbf{F} = [x - yz \sin(xyz)]\mathbf{i} - xz \sin(xyz)\mathbf{j} - xy \sin(xyz)\mathbf{k}$$

פתרון: נבדוק שדה $\mathbf{F}$ הוא משמר. נחשב

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - yz \sin(xyz) & -xz \sin(xyz) & -xy \sin(xyz) \end{vmatrix} = 0$$

נמצא את הפוטנציאל של השדה $\mathbf{F}$. נבחר נקודה $M_0(0,0,0)$ (למען הנוחיות) ונשתמש בנוסחה (6), נקבל

$$u(x, y, z) = \int_0^x [t - yz \sin(tyz)] dt + \int_0^y 0 dv + \int_0^z 0 dw = \frac{x^2}{2} + \cos(xyz) + c$$

נחזור לדוגמה 14. את האינטגרל $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ניתן לחשב בדרך אחרת. נשתמש במשפט 3 ופונקציה הפוטנציאל שמצאנו ונקבל

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = u(C) - u(A) = \frac{0}{2} + \cos 0 - \frac{2^2}{2} - \cos 0 = -2$$

(ראה דוגמה 14).

דוגמה 16: הוכח ששדה

$$\mathbf{F} = z \left(\frac{1}{x^2 y^2} - \frac{1}{x^2 + z^2} \right) \mathbf{i} + \frac{z}{xy^2} \mathbf{j} + \left(\frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy} \right) \mathbf{k}$$

משמר בכל גוף שאינו חותך את המישורים $y = 0$, $x = 0$ ומצא את פונקציות הפוטנציאל.

פתרון: את ההוכחה ש- $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ נשאיר לקורא.

כדי למצוא את הפוטנציאל נבחר נקודה $M_0(1,1,0)$ ונשתמש בנוסחה (8), נקבל

$$u(x, y, z) = \int_0^z \left(\frac{x}{x^2 + w^2} - \frac{1}{xy} \right) dw + \int_1^y 0 dv + \int_1^x 0 dt = \arctg \frac{z}{x} - \frac{z}{xy} + C$$

תרגילים

1. הוכח שהשדות הבאים הם שדות משמרים ומצא את פוטנציאל של כל אחד מהם:

א.
$$\mathbf{F} = \left(yz + \frac{1}{yz} \right) \hat{i} + \left(xz - \frac{x}{y^2 z} \right) \hat{j} + \left(xy - \frac{x}{yz^2} \right) \hat{k}$$

ב.
$$\mathbf{F} = \frac{x}{|\mathbf{r}|} \hat{i} + \frac{y}{|\mathbf{r}|} \hat{j} + \frac{z}{|\mathbf{r}|} \hat{k} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$
 כאשר $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

ג.
$$\mathbf{F} = |\mathbf{r}| \cdot \mathbf{r}$$
 כאשר $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

ד.
$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$$

2. חשב את העבודה של השדה הווקטורי $\mathbf{F} = \frac{yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy\hat{k}}{1 + x^2 y^2 z^2}$ לאורך קו

הבורג $x = \sqrt{2} \cos t$, $y = \sqrt{2} \sin t$, $z = \frac{4}{\pi} t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

פרק 22 חזרות, דוגמאות של בחינות

בפרק זה אנו מציגים בחינות בצורות שונות (אמריקאיות, חצי-אמריקאיות, רגילות) שהתקיימו בטכניון. בחיבור הבחינות השתתפו מרצים של הקורס שביניהם גם המחבר.

בחינה 1

סמן האם הטענה בכל אחד מהשאלות נכונה או לא.

שאלה 1: נתונה סדרה $\varphi_n(x) = (1-x)x^n$

א. תחום התכנסותה $-1 \leq x \leq 1$. ב. תחום התכנסותה $-1 < x \leq 1$.

ג. סדרה $\{\varphi_n(x)\}$ מתכנס במידה שווה ב- $0 \leq x \leq 1$.

ד. סדרה $\{\varphi_n(x)\}$ מתכנס במידה שווה ב- $-0.5 \leq x \leq 0$.

ה. טור $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב- $0 \leq x \leq 1$.

ו. טור $\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n \varphi_n(x)|$ מתכנס במידה שווה ב- $0 \leq x \leq 1$.

שאלה 2: תהיה $y = f(x)$ פונקציה המקיימת $y(0) = f(0) = \alpha$, $y' = x^2 + y^2$

אני

א. $y'(0) = \alpha^2$. ב. $y''(0) = 2\alpha^3$.

ג. $y'''(0) = 6\alpha^4$. ד. $y^{(iv)}(0) = 24\alpha^5 + 4\alpha$.

ה. אין מספיק נתונים בשאלה כדי לחשב את הניגזרות של $y = f(x)$ בנקודה $x = 0$.

שאלה 3: נתונה הפונקציה $z = f(x, y)$, הגבול $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ קיים

אם:

א. קיימות נגזרות $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ בסביבת הנקודה $(0, 0)$.

ב. $f(x, y)$ רציפה ב- $(0, 0)$.

ג. $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = a$ (קבוע) לכל θ ($0 \leq \theta < 2\pi$).

ד. קיימות ארבע סדרות $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ המקיימות

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n, d_n)$$

ה. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$

ו. הפונקציה $f(x, y)$ דיפרנציאבילית.

שאלה 4: תהיה $D : \{(x, y) : (x+y)^3 \leq 2xy, x \geq 0, y \geq 0\}$

א. פונקציות $y = r \sin^2 \varphi$, $x = r \cos^2 \varphi$ מעתיקות את D על

$$\Delta = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi \right\}$$

ב. היעקוביאן של המערכת $y = r \sin^2 \varphi$, $x = r \cos^2 \varphi$ שווה ל- $r \sin 2\varphi$.

ג. השטח של התחום D שווה ל- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 2\varphi d\varphi$.

ד. נפח הגליל שבסיסו D הנמצא בין המישורים $z = -1$, $z = 2$ שווה ל- $\frac{1}{5}$.

ה. שטח של התחום D שווה ל- $\frac{3}{2}\pi$.

שאלה 5: נתונה הפונקציה $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$

והתחום $D : \{(x, y) : x + y \geq -3, x \leq 0, y < 0\}$

א. מקסימום z מעל D הוא $-\frac{1}{4}$.

ב. מינימום z מעל D הוא -1 .

ג. ל- z מעל D שבע נקודות קריטיות.

ד. ערכים מקסימליים ומינימליים מתקבלים על שפת D .

שאלה 6: יהיו נתונים השדה הוקטורי $F = \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{j}$ והתחומים

$$D_1 : \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x > 0\}, D_2 : \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x < 0\}$$

$$D : \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

א. F הוא שדה משמר ב- D_1 וב- D_2 אבל לא ב- D .

ב. F איננו שדה משמר באף אחד מהתחומים.

ג. F הוא שדה משמר בכל התחומים הנ"ל.

ד. $F = \text{grad } f$ כאשר $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$ אבל

מכיוון ש- D אינו פשוט קשר F אינו שדה משמר ב- D .

ה. $\int_C F \cdot dr = 0$ כאשר $C : \begin{cases} x = 2(t - \cos t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

שאלה 7:

א. אם $f(u)$ גזירה ב- R ו- C קו סגור כלשהו, אזי

$$\int_C x f(x^2 + y^2) dx + y f(x^2 + y^2) dy \neq 0$$

ב. אם c קו שבור המחבר נקודות

$A(1, 0), B(2, 3), C(4, 2), D(5, 1), E(7, 0)$, אזי

$$\int_{ABCDE} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dy = 6$$

ג. יהיה S צד חיובי של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, אזי

$$\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy = 4a^5$$

ד. אם שדה $F = (x, y) \hat{i} + Q(x, y) \hat{j}$ משמר מעל תחום קשיר D , אזי

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

בחינה 2

בבחינה יש שש שאלות. בכל שאלה קיים סעיף או שניים שעליהם יש לתת תשובה חישובית בדף התשובות, והיתר יש לסמן האם הטענה נכונה או לא.

שאלה 1:

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]^a$ מתכנס בהחלט עבור $\alpha > 2$ ומתכנס בתנאי כאשר $0 < \alpha \leq 2$.

ב. אם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בקטע סגור לפונקציה רציפה, אזי הטור הנ"ל מתכנס במידה שווה שם.

ג. אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס ל- $f(x)$ ב- $(-R, R)$ אזי $f(x)$ רציפה ב- $(-R, R)$.

ד. אם לכל n טבעי $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

ה. נתונה הפונקציה $f(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$. רשום במשבצת המתאימה את הערך $f(1)$.

שאלה 2:

א. המרחק הקטן ביותר מהאליפסה $x^2 + y^2 = 4$ עד ראשית הצירים שווה ל-2.

ב. לפונקציה $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ מינימום מקומי בנקודה $(-1, -1)$.

ג. רשום במשבצת המתאימה משוואת המישור המשיק למשטח $z = y + \ln \frac{x}{z}$ בנקודה $(1, 1, 1)$.

שאלה 3:

א. הפונקציה $f(x, y) = \sqrt[3]{xy^2}$ דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$.

ב. הניגזרת המכוונת לפונקציה מ- $(0, 0)$ בנקודה $(0, 0)$ ובכיוון הוקטור

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j} \text{ שווה ל-} \frac{1}{2}.$$

ג. רשום את הערך של $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

כאשר $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ במשבצת המתאימה.

ד. נתון תחום $D = \{1 \leq x^2 - y^2 \leq 4, y \geq 0, x \leq 4\}$.

המערכת $v = x^2, u = x^2 - y^2$ מעתיקה אותו למלבן, מקבילית, מעגל, טרפז, אין העתקה כזאת. ציין תשובתך במשבצת המתאימה.

ה. אם $f'_x(M_0), f'_y(M_0)$ שווים לאפס, אזי הניגזרת המכוונת בכיוון וקטור הנתון בנקודה $M_0(x_0, y_0)$ שווה בהכרח לאפס.

שאלה 4:

א. הביטוי $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ לאחר החלפת המשתנים $u = xy, v = \frac{x}{y}$ שווה: (רשום את תשובתך).

ב. המשוואה:

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$$

מגדירה את הפונקציה $y = y(x)$ בסביבת $x = 0, y = 1$. אזי $y''(0) = y'''(0)$.

ג. תהיה הפונקציה $f(x, y)$ גזירה חלקית והפונקציות $x = x(t), y = y(t)$ גזירות, אזי

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

שאלה 5:

א. נפח החסום על-ידי $z = 4, z = x^2 + y^2$ שווה ל- 8π .

ב. לאחר שינוי סדר האינטגרציה האינטגרל

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y) dx$$

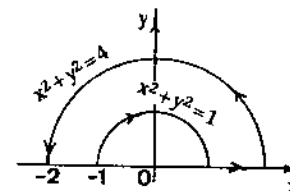
שווה ל-... (רשום תשובתך בדף התשובות).

ג. אם הפונקציה $f(x, y, z)$ גזירה חלקית אזי היא רציפה.

שאלה 6:

א. הערך של האינטגרל

$$\int_L (y-4x^3)dx + (3x-y^5)dy$$



מנקודה $(-1, 0)$ עד הנקודה $(-2, 0)$
לאורך הקו L (ראה איור) שווה ל...
(רשום את תשובתך בדף התשובות).

ב. תהיה $F = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$ שדה וקטורי רציף ובעל נגזרות חלקיות רציפות בתחום פשוט קשר D. הפונקציה

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y)dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, v)dv, \quad (x_0, y_0) \in D$$

היא פוטנציאל של השדה F.

ג. יהיה גוף V מוקף על-ידי משטח S.

אם $F = (3x + y + 2z)\hat{i} + (5 - y)\hat{j} + (2y - 3x - z)\hat{k}$ ו- $\hat{n}$ נורמל העליון למשטח S, אזי $\iint_S F \cdot \hat{n} ds$ שווה לנפח הגוף V.

ד. תהיה $F(x, y, z)$ שדה רציף ובעל נגזרות חלקיות רציפות בגוף V ו- Γ סגור כלשהו ב-V אם $\text{rot } F = 0$ אזי $\oint_{\Gamma} F \cdot dr = 0$.

ה. משוואת המשיק לעקום $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$ בנקודה $(-\pi, 0, \pi)$ היא $x + \pi = \frac{y}{\pi} = \pi - z$.

ו. שטף של שדה וקטורי $F = 3x\hat{i} + (\sin ze^{x^2z} - y)\hat{j} + z\hat{k}$ דרך המשטח הפתוח $z \geq 0, z = 4 - x^2 - y^2$ שווה ל... (רשום את התשובה במשבצת המתאימה).

בחינה 3

תן פתרון מלא.

1. מצא תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{(7^n + 5^n)} x^n$.

2. א. עבור אילו ערכים של α מתכנסת הסדרה $f_n(x) = n^\alpha x e^{-n^\alpha x}, 0 \leq x \leq 1$ ועבור אילו ערכים של α ההתכנסות היא במידה שווה.

ב. האם ניתן לגזור איבר-איבר את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ ונגזרת הסכום שווה לסכום הנגזרות? נמק.

3. נתונה מערכת $2x + y - 3z - 2u = 0, x + 2y + z + u = 0$ המגדירה פונקציות $x = x(z, u), y = y(z, u)$, חשב $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial u}$.

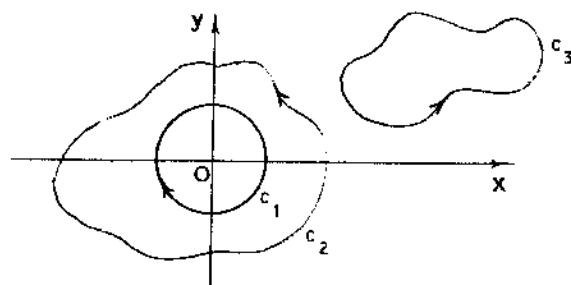
4. קבע את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה $z = x^2 + 2xy - 4x + 8$ בתוך המלבן $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

5. החלף סדר אינטגרציה: $\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\sqrt{2}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$.

6. חשב שטח החסום על-ידי הלמניסקטה $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

7. יהיה $F = \left(\frac{-y\hat{i}}{x^2 + y^2} + \frac{x\hat{j}}{x^2 + y^2} \right) + (4y + 3)\hat{i} + 4(x + y)\hat{j}$ שדה וקטורי.

מצא: א. $\oint_{C_1} F \cdot dr$ ב. $\oint_{C_2} F \cdot dr$ ג. $\oint_{C_3} F \cdot dr$ (ראה איור).



8. חשב $\iint_S (\text{rot } A) \cdot \hat{n} ds$ כאשר S חצי כופת הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

שמעל המישור xy, נורמל חיצוני $\hat{n}$
ו- $A = (x^2 + y - 4)\hat{i} + 3xy\hat{j} + (2xz + z^2)\hat{k}$

בחינה 4: תן פתרון מלא.

1. א. בדוק את התכנסות הטורים:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad 2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$$

ב. חשב סכום של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n+1}$

2. א. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{n^4+1}$ מתכנס.

ב. האם בטור הנ"ל ניתן לגזור איבר איבר וניגזרת הסכום שווה לסכום הניגזרות. נמק.

3. נתונה המערכת:

$$x^3 + 2y + z^2 + u^2 - v^2 = 0, \quad 2x + y^2 - 3z + 2u + 3v = 0$$

א. רשום את התנאים שעבורם המערכת מגדירה פונקציות סתומות $y = y(z, u, v)$, $x = x(z, u, v)$

ב. חשב $\frac{\partial x}{\partial u}$ ו- $\frac{\partial y}{\partial z}$

4. נתונה הפונקציה $f(x, y) = \sqrt{x^{15}y^2}$

א. האם הפונקציה הנ"ל רציפה ב- R^2 ?

ב. האם הפונקציה הנ"ל דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$?

ג. חשב $\frac{\partial f}{\partial a}$ בכיוון הוקטור $a = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ בנקודה $(1, 1)$.

5. א. חשב $\iint_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} dx dy$, כאשר

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x+y \leq 4, 4x^3 \leq y \leq 16x^3\}$$

ב. מצא נפח הגוף החסום על-ידי המשטחים

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + 3z^2 = 4, \quad z \geq 0$$

$$6. \text{ יהיה } F = \frac{2xyz + x^2z}{(x+y)^2} \hat{i} - \frac{x^2z}{(x+y)^2} \hat{j} + \left(2z + 3z^2 + \frac{x^2}{x+y} \right) \hat{k}$$

שדה וקטורי מעל התחום $D : (x-4)^2 + (y-8)^2 + z^2 \leq 1$

א. בדוק ששדה F הוא שדה משמר.

ב. מצא את פונקציית הפוטנציאל.

ג. חשב $\int_L F \cdot dr$ כאשר L הוא קו ישר המחבר את הנקודות $A(1,1,1)$ ו- $B(3,2,4)$ בכיוון מ- B ל- A .

7. יהיה S משטח סגור ופשוט קשר משטחי שאינו מקיף את הראשית ו- $\hat{n}$

וקטור נורמל חיצוני ל- S . הוכח: $\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{n}}{|\mathbf{r}|} ds = 2 \iiint_V \frac{dv}{|\mathbf{r}|}$ כאשר

$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. האם השוויון נכון במקרה ש- S מקיף את הראשית? נמק.

בחינה 5

בבחינה שש שאלות. בכל שאלה קיים סעיף או שניים שעליהם יש לתת תשובה חישובית בדרך התשובות, והיתר יש לסמן האם הטענה נכונה או לא.

שאלה 1:

א. אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ מתכנס אך לא בהכרח בהחלט.

ב. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אזי לאותו סכום מתכנס כל טור המתקבל ממנו על-ידי שינוי סדר כלשהו של איבריו.

ג. אם $b_n = (-1)^n \frac{7n^2+1}{n^2+5n+1}$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ מתכנס, אזי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

ד. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}})$ מתכנס במידה שווה ב- $[0, 1]$.

ה. רשום את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \sin \frac{x}{2^n}$ בדרך התשובות

במשבצת המתאימה.

שאלה 2: נתונה הפונקציה $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$

- א. בנקודה $(-1, -1)$ לפונקציה הנ"ל מקסימום מקומי.
 ב. לפונקציה z מעל $D: \{x+y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$ יש 7 נקודות קריטיות.
 ג. רשום את הערך המקסימלי של הפונקציה הנ"ל מעל התחום D (שב-ב) במשבצת המתאימה.

שאלה 3: תהיה הפונקציה $z = z(x, y)$ מוגדרת על-ידי המשוואה $z^3 - 3xyz - 4 = 0$

- א. קיימת הפונקציה $z = z(x, y)$ הרציפה בנקודה $M(1, 2)$.
 ב. הפונקציה $z = z(x, y)$ מסעיף א' לא-דיפרנציאבילית בנקודה $M(1, 2)$.
 ג. נגזרת מכוונת $D_a z(1, 2)$ כאשר $a = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ ו- $z(1, 2) = -2$ שווה ל- (רשום את התוצאה במשבצת המתאימה).
 ד. המישור $x + 2y + z = 2$ הוא מישור משיק לפונקציה הנ"ל בנקודה $P(2, 1)$.
 ה. (אין קשר עם הסעיפים הקודמים).
 הפונקציה $z = f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה M_0 אם ורק אם היא רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות ב- M_0 .

שאלה 4:

- א. הביטוי $yz'_x - xz'_y$ לאחר החלפת המשתנים $x, y, z > 0$ למשתנים s ו- t על-ידי: $s = x^2 + y^2$ ו- $t = x$ שווה לביטוי...
 ב. אם $\varphi = f(x^2z - yz)$ גזירה, אזי $x\varphi'_x + 2y\varphi'_y - 2z\varphi'_z = 0$.
 ג. אם $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin xy}{y} dy$ אזי $F'(x) = \frac{1}{x} (2 \sin x^4 - \sin x^3)$.

שאלה 5:

- א. נפח הגוף חסום על-ידי המישור xy , המשטח $z = e^{x^2 - y^2}$ והגליל $x^2 + y^2 = 1$ הוא $\pi(1 - \frac{1}{e})$.
 ב. רשום במשבצת המתאימה את השטח של התחום $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 \leq 100$.

$$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy = \int_0^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx \quad \text{ג.}$$

שאלה 6:

- א. חשב $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F} = x\hat{i} + (x+y)\hat{j} + (x+y+z)\hat{k}$ ו- C הוא $x = \sin t, y = \cos t, z = \sin t + \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$ במשבצת המתאימה.
 ב. יהיה גוף V מוקף על-ידי משטח S , נפח של הגוף V שווה ל- $\frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds$ כאשר $\mathbf{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ו- $\hat{n}$ הנמצב העליון ל- S .
 ג. נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = xy\hat{i} + x\hat{j} + 3xz\hat{k}$ ומשטח $S: \{x=u+v, y=u-v, z=uv, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ בכיוון החיובי ביחס לציר z . שטח השדה $\mathbf{F}$ דרך המשטח S שווה ל-2.
 ד. משוואת המשיק לעקום $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ בנקודה $(\frac{2x}{\pi}, y - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}(z - \frac{\pi}{2}))$ היא $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
 ה. $\int_C (x - y^3) dx + x^3 dy = 2\pi$ כאשר $C: x^2 + y^2 = 1$.
 ו. נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y)\hat{i} + (\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x)\hat{j}$ רשום במשבצת המתאימה את פונקציית הפוטנציאל של השדה הנתון (אם היא קיימת).

בחינה 6: סמן האם הטענה בכל אחד מהשאלות נכונה או לאו.

שאלה 1: אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים, אזי

- א. טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס. ב. טור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ מתכנס.
 ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$

- ה. תהיה הפונקציה $u = F(x, y, z)$ רציפה ובעל ניגזרות חלקיות רציפות בסביבת הנקודה $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ו- $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ אזי קיימת פונקציה סתומה $z = f(x, y)$ רציפה וגזירה בנקודה (x_0, y_0) .
- ו. הפונקציה $z = f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0, y_0) אם ורק אם הניגזרות החלקיות שלה רציפות באותה נקודה.

שאלה 4: (אנליזה וקטורית)

- א. יהיה C המעגל $x^2 + y^2 = r^2$ או $\int_C (x - y^3) dx + x^3 dy = 3\pi r^2$.
- ב. יהיה C העקום הנתון על-ידי $x = \cos 2\pi t, y = \sin 2\pi t, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$ או $\int_C (2xyz^3 + z) dx + x^2 z^3 dy + (3x^2 yz^2 + x) dz = 1$.
- ג. יהיה נתון השדה $F(x, y, z) = 3(y^2 - xz)z\hat{i} + x^2 y\hat{j} + (z^2 - x^2)z\hat{k}$ ויהיה S החלק הלא סגור של הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$ שנמצא מעל למישור $z = 0$ כאשר $\hat{n}$ הניצב העליון ל- S , או $\iint_S F \cdot \hat{n} ds = 0$.
- ד. יהיה נתון אותו שדה F כמו ב-ג' ויהיה S החלק של הגליל $x^2 + z^2 = 1$ המוגבל בין המישור $y = 0$ ו- $y = 4$ (המכסים אינם נכללים), ויהיה $\hat{n}$ הניצב החיצוני לגליל, או

$$\iint_S F \cdot \hat{n} ds = -4 \iint_{x^2+z^2 \leq 1} x^2 dx dz$$

- ה. יהיה F שדה בעל ניגזרות חלקיות רציפות בכל המרחב R^3 או מממשטי סטוקס והדיורגנט נובעת שרשרת השיזיונים הבאים: $\oint_L F \cdot dr = \iint_S \text{rot } F \cdot \hat{n} ds = \iiint_V \text{div } F dx dy dz$ כאשר V גוף המוקף על-ידי המשטח S ו- L עקום עליו.

שאלה 5: נתון התחום $D: \{(xy): \frac{1}{x^2} \leq y \leq \frac{8}{x^2}, y \leq x \leq 27y\}$

- א. שטח התחום D שווה ל-3.
- ב. נפח הגוף שבסיסו D וכיפתו $z = \frac{x^2}{y}$ הוא 27.
- ג. יהיה $u = \frac{y}{z}$ משקל סגולי של הגוף

- ד. אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס ב- $[a, R]$ כאשר R הוא רדיוס התכנסותו ו- $|a| < R$ אזי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ מתכנס במידה שווה ב- $[a, R]$.
- ה. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ כמו בסעיף ד', אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ מתכנס בהכרח במידה שווה ב- $[a, R]$.
- ו. הסכום של הטור $1 + 1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + \dots + n(n+1)x^n + \dots$ הוא $\frac{1-x+3x^2-x^3}{(1-x)^3}, |x| < 1$.

שאלה 2: נתונה הפונקציה $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

- א. בנקודה $M_1(0, -1)$ לפונקציה z יש מקסימום מקומי.
- ב. בנקודה $M_2(-\frac{1}{2}, 1)$ לפונקציה z יש מינימום מקומי.
- ג. לפונקציה z מעל $x^2 + y^2 \leq 1$ יש 11 נקודות קריטיות.
- ד. הערך המקסימלי של z מעל $x^2 + y^2 \leq 1$ הוא 1.
- ה. הערך המינימלי של z מעל $x^2 + y^2 \leq 2$ הוא -1.

שאלה 3: תהיה הפונקציה $z = z(x, y)$ מוגדרת על-ידי

$$(x^2 - y^2)z^5 + z^3 \sin(x-1) + (x+5y^2)z = 6$$

- א. הפונקציה $z = z(x, y)$ אינה רציפה בנקודה $M(1, 1)$.
- ב. וקטור הנורמל למשטח $z = z(x, y)$ בנקודה $M(1, 1)$ הוא $4\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k}$.
- ג. המישור $4x + 8y + 6z = 18$ הוא מישור המשיק למשטח $z = z(x, y)$ בנקודה $(1, 1)$.
- ד. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 1) = \frac{25}{9}$.

$$V : \{(x, y, z) : \frac{1}{x^2} \leq y \leq \frac{8}{x^2}, y \leq x \leq 27y, x^2 + y^2 \leq z \leq 4(x^2 + y^2)\}$$

אזי מסה של הגוף V שווה ל- $2 \ln 4$.

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{1}{y} \sin \frac{\pi x}{2y} dy = \frac{4}{\pi^2} \quad \text{ד.}$$

שאלה 6:

א. אם $F(x) = \int_{x^2}^e \frac{\sin(xu)}{u} du$ אזי $F'(x) = (1 + \frac{1}{x}) \sin(xe^x) - 3 \frac{\sin x^3}{x}$

ב. תהיה $F(u, x)$ פונקציה בעלת ניגזרות חלקיות מסדר ראשון אם

$$W = F(xz, yz) \quad \text{אזי} \quad x \frac{\partial W}{\partial x} + y \frac{\partial W}{\partial y} = z \frac{\partial W}{\partial z}$$

ג. תהיה $f(x, y)$ בעל ניגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון, ונניח כי

$$f'_y(1, 1) = 2, \quad f'_x(1, 1) = -1, \quad f(1, 1) = 1$$

נסמן $g(x) = f(x, f(x, f(x, x)))$ אזי $g(1) = 1$ וכן $g'(1) = 1$.

ד. נתונה הפונקציה $z = \sqrt[3]{x^5 y^2}$ והוקטור $a = 2\hat{i} + 3\hat{j}$, אזי לפונקציה הנתונה אין ניגזרת מכוונת בכיוון a בנקודה $(0, 0)$.

ה. יהיה הטור $\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$ של פונקציות גזירות המתכנס במידה שווה בקטע

הסגור $[a, b]$ לפונקציה $S(x)$, אזי $S(x)$ גזירה וקיים

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

שאלה 7: נתון קו $L = \{x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

א. אורך הקשת L הוא $\int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + 2} dt$

ב. משוואת המשיק ל- L בנקודה $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ היא $\frac{2x}{\pi} = \frac{2}{\pi}y - 1 = z - \frac{\pi}{2}$

ג. אם $F = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ אזי $\int_L F \cdot dr = 2\sqrt{2}\pi$

ד. קו L נמצא על המשטח $x^2 + y^2 = z$

בחינה 7

שאלה 1: מצא את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ בתחום התכנסותו, תן פתרון מלא.

שאלה 2: מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $u = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ מעל התחום $x^2 + y^2 \leq 2$ ורשום את תשובתך. $u_{\min} =$ $u_{\max} =$

שאלה 3:

א. הגדר דיפרנציאביליות של הפונקציה $f(x, y)$ בנקודה M_0 .

ב. הוכח שאם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב- M_0 אזי היא רציפה ב- M_0 .

ג. האם הטענה ההפוכה ל-ב' נכונה (נמק אם כן, תן דוגמה נגדית אם לא).

שאלה 4: שנה את סדר האינטגרציה באינטגרל

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} dy \int_1^2 f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^2 f(x, y) dx$$

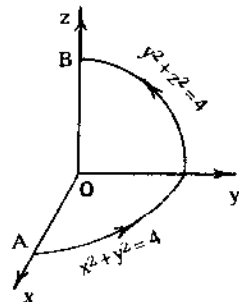
שאלה 5: מצא את נפח הגוף המוגדר באופן הבא:

$$0 \leq z \leq x^2 + y^2, \quad x \leq x^2 + y^2 \leq 2x$$

שאלה 6: חשב אינטגרל קווי $\int_L F \cdot dr$ כאשר

$$F = 2xy^2 \hat{i} + 2x^2y \hat{j} + 3z^2 \hat{k} \quad \text{ו-} \quad L = AB$$

עקום המורכב מרבעי המעגלים (ראה איור), תן פתרון מלא.



שאלה 7: תהיה $F = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$ שדה וקטורי.

חשב שטף של F דרך הצד החיצוני של המשטח $x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1$, תן פתרון מלא.

שאלה 8: לכל אחת השאלות הבאות תן תשובה "כן" או "לא".

א. כלל השרשרת מתקיים כשהפונקציות $f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ דיפרנציאביליות בנקודות המתאימות.

ב. אם לפונקציה $f(x, y)$ קיימות ניגזרות מכוונות בנקודה M_0 בכיוון כלשהו, אזי $f(x, y)$ בהכרח רציפה ב- M_0 .

- ג. אם שדה F משמר בתחום D , אזי הוא משמר ב- D_1 , כאשר $D_1 \subset D$.
- ד. אם $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ אזי בהכרח צירקולציה של השדה הוקטורי $F = P\hat{i} + Q\hat{j}$ שווה לאפס לאורך קו סגור כלשהו.
- ה. המשוואה $3x^2 + 5y^2 = 15$ מגדירה בדיוק שתי פונקציות מפורשות $y = f(x)$ שונות.

בחינה 8

שאלה 1:

- א. מצא את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n+1}} x^n$.
- ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2n^2 + \cos nx}$. מצא את תחום הגדרתה ותחום רציפותה.

שאלה 2:

א. נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)^2}{x^2}, & x \neq 0, -\infty < y < \infty \\ \frac{4}{x^2}, & x = 0, -\infty < y < \infty \end{cases}$

1. האם הפונקציה $f(x, y)$ רציפה בנקודה $(0, 0)$? (נמקד)
2. מצא נקודות על ציר y בהן הפונקציה $f(x, y)$ רציפה.
- ב. נתונה הפונקציה $g(u)$ הגזירה פעמיים. נגדיר את הפונקציה $z(x, y) = (x^2 + y^2)g(x - y)$. חשב:

1. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ 2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

- שאלה 3: מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $z = x^3 + y^3 - 3xy$ בתחום: $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$.

שאלה 4:

- א. חשב $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ כאשר $D: \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$.
- ב. נתון שדה וקטורי $F = (y - z)\hat{i} + (z - x)\hat{j} + (x - y)\hat{k}$. חשב $\int_C F \cdot dr$ כאשר C עקום הנתון על-ידי $x^2 + y^2 = 1, x + z = 1$. נגד כיוון נגד השעון מנקודה $(1, 0, 0)$.

בחינה 9: סמן בעיגול את התשובה הנכונה

שאלה 1: נתונה הפונקציה $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n(x^2-1)}$

- א. הפונקציה $F(x)$ רציפה ב- $|x| < \infty$.
- ב. הפונקציה $F(x)$ גזירה ב- $|x| < 1$.
- ג. $|x| \geq 5, F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} 2x \cdot e^{-n(x^2-1)}$.
- ד. $\int_1^4 F(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \int_1^4 e^{-n(x^2-1)} dx$.
- ה. הטור הנתון מתכנס במידה שווה ב- $[0, 2]$.

שאלה 2: המשוואה $2\sin(x^2yz) - 3x + 5y^2 - 2e^{yz} = 0$

- א. מגדירה בסביבת נקודה $(1, 1, 0)$ פונקציה יחידה $z = f(x, y)$.
- ב. מגדירה בסביבת $(1, 1, 0)$ פונקציה יחידה $x = \varphi(y, z)$.
- ג. אם $y = y(x, z)$ מוגדרת על-ידי המשוואה הנ"ל אזי $y'_x(1, 0) = -0.3$.
- ד. הפונקציה $y = y(x, z)$ דיפרנציאבילית ב- $(1, 0)$.

שאלה 3: אם a הוא הערך הגדול ביותר ו- b הוא הערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x, y) = 2x - y$ מעל התחום $|x| \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ אזי $a - b$ שווה ל-

א. 1. ב. 2. ג. $\sqrt{2}$. ד. $2\sqrt{2}$. ה. $3\sqrt{2}$.

שאלה 4: לפונקציה $u = 3(x+1)^4 + 2(y-3)^4 + 3$

- א. מקסימום מקומי בנקודה $(-1, 3)$.

ב. מינימום מקומי בנקודה $(-1, 3)$.

ג. $(-1, 3)$ נקודת אוכף. ד. אין אקסטרמום.

שאלה 5: המשוואה $yz'_x - xz'_y = 0$ לאחר החלפת משתנים x ו- y ב- s ו- t על-ידי $s = x^2 + y^2$, $t = x^2 + y^2$ הופכת למשוואה:

א. $z'_s = 0$ ב. $z'_t = 0$ ג. $z'_s + z'_t = 0$

ד. $z'_s = s$ ה. $z'_t = t$

שאלה 6: נפח הגוף החסום על-ידי משטחים $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ו- $x^2 + y^2 \geq 3x$ הוא:

א. 18π ב. 27π ג. $27\pi - 9$ ד. $18\pi - 24$ ה. $18\pi + 24$

שאלה 7: הערך של $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F} = (3x^2 + 2xy + x + 3y)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$

ו- C הוא חצי המעגל הימני $x^2 + y^2 = 2$ מנקודה $(-1, -1)$ עד הנקודה $(1, 1)$ הוא:

א. 3π ב. -3π ג. $-\frac{14}{3} + 3\pi$ ד. $\frac{14}{3} - 3\pi$ ה. $\frac{14}{3} + 3\pi$

שאלה 8: העבודה של השדה הוקטורי $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ בהעברת חלקיק

לאורך המסלול $\mathbf{r} = 2\cos^2\varphi\mathbf{i} + \sin 2\varphi\mathbf{j} + 2\sin\varphi\mathbf{k}$ הנתון בצורה וקטורית

כאשר $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ הוא:

א. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\frac{3}{2}$ ג. $\frac{3}{4}$ ד. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ה. $\frac{9}{4}$

שאלה 9: שטף של השדה $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ דרך הפירמידה SOAB

(ללא בסיס (OAB)) כאשר $B(0, 1, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $O(0, 0, 0)$, $S(0, 0, 2)$ הוא:

א. $\frac{1}{12}$ ב. $\frac{1}{2}$ ג. $\frac{1}{3}$ ד. $\frac{1}{6}$ ה. $\frac{1}{12}$

שאלה 10: יהיה $\mathbf{F}$ שדה וקטורי ממחלקה C^1 (רציף ובעל נגזרות חלקיות

רציפות) מעל גוף קשיר V בעל שפה S המורכבת משני משטחים סגורים S_1

ו- S_2 לא נחתכים ($S_1 \cap S_2 = \emptyset$). אם $\text{div } \mathbf{F} = 0$, אז:

א. $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 ds = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 ds$ כאשר $\hat{\mathbf{n}}_1$ ו- $\hat{\mathbf{n}}_2$ נורמל יחידה למשטחים S_1

ו- S_2 בהתאמה כלפי חוץ.

ב. אין קשר ברור בין $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 ds$ ו- $\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 ds$

ג. $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 ds = 0$ ו- $\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 ds = 0$ בהכרח!

ד. שדה $\mathbf{F}$ משמר.

ה. סעיף א' מתקיים אם ורק אם גוף V לא מכיל את הראשית.

בחינה 10

חלק א': תן פתרון מלא.

שאלה 1: נתונה הפונקציה $F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy$, $t \geq 0$ כאשר

$f(x, y)$ רציפה ולא שלילית בכל המישור. הוכח:

א. $F(t)$ לא יורדת. ב. $F'(t) = \int_0^{2\pi} f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) d\varphi$

רמז: עבור לקואורדינטות קוטביות.

שאלה 2: חשב $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F} = (x+y+1, y-x)$ ו- C החלק העליון

של האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ מנקודה $(a, 0)$ עד הנקודה $(-a, 0)$.

שאלה 3: מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה

$u = x^2 + y^2 + z^2$ מעל האליפסואיד $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$.

חלק ב': סמן בעיגול את התשובה הנכונה.

שאלה 1: משוואת המשיק לעקום $x^4 y + x^2 y^3 - 2x^2 y^2 = 2$ בנקודה $(1, 2)$

היא:

א. $x - y = 3$ ב. $3x + 4y = 11$ ג. $8x + 5y = 18$

ד. $7x - 2y = 3$ ה. $y = 2x$

א. $1 - \frac{1}{2}(x+y)$ ב. $1 - \frac{1}{2}(x-y)$ ג. $1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

ד. $1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ה. לא ניתן לפיתוח.

שאלה 7: שטח התחום $(x-2y+3)^2 + (3x+4y-1)^2 \leq 100$ שווה ל:

א. π ב. 5π ג. 10π ד. 100π ה. 1000π

שאלה 8: אם טור פונקציות גזירות מתכנס במידה שווה, אז:

א. $\sum f_n(x) = \int (\sum f_n'(x)) dx$ ב. $\sum f_n'(x) = \int (\sum f_n(x)) dx$

ג. $\sum |f_n(x)|$ מתכנס במידה שווה.

ד. $\sum [f_n(x)]^2$ מתכנס במידה שווה.

שאלה 9: חשב $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy - z^2)\hat{i} + x^2\hat{j} - 2xz\hat{k}$

קו שבור ABC כאשר $A(1,1,0)$, $B(0,0,1)$, $C(2,2,0)$.

א. 7 ב. 6 ג. 4 ד. 3 ה. 2

בחינה 11

חלק א': סמן כן או לא.

שאלה 1: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ מתכנס בקטע $x > 0$.

שאלה 2: הסדרה $f_n(x) = n \cdot (\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x})$ מתכנסת במידה שווה בקטע $0 < x < \infty$.

שאלה 3: את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n}$ ניתן לגזור איבר-איבר בקטע $-\infty < x < \infty$.

שאלה 4: אם $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = L$ אז גם $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)) = L$.

שאלה 2: נפח הגוף החסום על-ידי המשטחים $x^2 + y^2 + 3z - 7 = 0$, $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ הוא:

א. $\frac{\pi}{3}$ ב. $\frac{2\pi}{3}$ ג. π ד. $\frac{4\pi}{3}$ ה. $\frac{5\pi}{3}$

שאלה 3: אם הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ב- $[a, b]$ לאפס, אז:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב- $[a, b]$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ מתכנס במידה שווה ב- $[a, b]$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס לפונקציה רציפה.

ד. אף אחת מהטענות אינן נכונות.

שאלה 4: סכום הטור $1 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ שווה ל:

א. $\frac{1+x^2-x^3}{(1-x)^3}$ ב. $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ ג. $\frac{1-x+3x^2-x^3}{(1-x)^3}$

ד. $\frac{x}{(1-x)^3}$ ה. $\frac{2x+x^2+1}{(1-x)^3}$

שאלה 5: לאחר החלפת המשתנים y, x ל- u, v על-ידי $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$

המשוואה $x^2 z_{xx}'' - y^2 z_{yy}'' = 0$ מקבלת צורה:

א. $z_{uv}'' = \frac{1}{2u} z_u'$ ב. $z_{uv}'' = \frac{1}{2v} z_v'$

ג. $z_{uu}'' = \frac{1}{2v} z_v'$ ד. $z_{uv}'' = \frac{1}{2v} z_u'$

שאלה 6: שני האיברים הראשונים בפיתוח של טיילור של הפונקציה

$f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ סביב $(0, 0)$ הם:

שאלה 5: אם $f(x, y)$ רציפה ב- (x_0, y_0) ו- $f'_x(x_0, y_0) = 0$ ו- $f'_y(x_0, y_0) = 0$, אזי הניגזרת המכוננת $\frac{\partial f}{\partial n}(x_0, y_0)$ גם שווה לאפס.

שאלה 6: אם $f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^3y}{x^2 + y^2}$ עבור $x^2 + y^2 > 0$ ו- $f(0, 0) = 0$, אזי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$.

שאלה 7: אם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) ובנקודה זו קיימות הניגזרות f'_{xy} ו- f'_{yx} , אזי הן שוות זו לזו.

שאלה 8: אם $f(x, y)$ רציפה בתחום חסום, אזי $f(x, y)$ חסומה.

שאלה 9: נפח של גוף תלת-מימדי החסום על-ידי משטח חלק S שווה ל-

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$
כאשר $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

שאלה 10: אם $F(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ שדה וקטורי בתחום D כאשר $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, רציפות ב- D ומתקיים $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ ב- D , אזי בהכרח השדה F משמר ב- D .

שאלה 11: $A(x, y, z)$ שדה משמר בתחום תלת-מימדי פשוט-קשר Ω אם ורק אם $\text{rot } A = 0$.

שאלה 12: השדה $A = (x^2 - 2yz)\mathbf{i} + (y^2 - 2xz)\mathbf{j} + (z^2 - 2xy)\mathbf{k}$ משמר ב- R^3 .

חלק ב': סמן אתה תשובה הנכונה

שאלה 1: תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$ הוא:

א. $-\infty < x < \infty$ ב. $-e < x < e$ ג. $-e < x \leq e$ ד. $-1 < x < 1$

שאלה 2: הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \cdot x^n$ מתכנס בקטע $-1 < x < 1$ ל:

א. $\frac{x}{1-x}$ ב. $\frac{1}{(1-x)^2}$ ג. $\frac{x}{(1-x)^2}$ ד. $\ln(1-x)$

שאלה 3: המשוואה $y + x^y + x^3 + y^4 = 2$.

א. אינה מגדירה פונקציה סתומה $y(x)$ בסביבה של $(1, 0)$.

ב. מגדירה פונקציה סתומה בסביבת $(1, 0)$ ו- $\frac{dy}{dx}(1, 0) = -3$.

ג. מגדירה פונקציה סתומה בסביבה של $(0, 1)$ ו- $\frac{dy}{dx}(0, 1) = 0$.

ד. אין אפשרות לחלץ את y כפונקציה של x מתוך המשוואה הנ"ל ולכן המשוואה אינה מגדירה פונקציה $y(x)$ לא בסביבה של $(1, 0)$ ולא בסביבה של $(0, 1)$.

שאלה 4: לפונקציה $z = x^3 + 3xy^2 - 6xy$ יש:

א. ארבע נקודות קריטיות כאשר בשניים מהן יש מקסימום מקומי ובשניים האחרות מינימום מקומי.

ב. ארבע נקודות קריטיות כאשר בשניים מהן יש מקסימום מקומי ובאחרות אוקף (אין קיצון).

ג. ארבע נקודות קריטיות כאשר באחת מקסימום, באחת מינימום ובכל האחרות יש אוקף (אין קיצון).

ד. ארבע נקודות קריטיות כאשר בשניים מהן יש מינימום מקומי ובכל האחרות יש אוקף (אין קיצון).

שאלה 5: נתונה הפרבולה $y^2 = 16x$ והנקודה $(8, 32)$. אזי המרחק הקצר ביותר מהפרבולה הנ"ל לנקודה הנ"ל שווה ל-

א. $\sqrt{300}$ ב. $\sqrt{280}$ ג. $\sqrt{186}$ ד. $\sqrt{320}$

שאלה 6: העקום L מוגדר בצורה פרמטרית: $x=t, y=t^2, z=t^3$. אם דרך נקודת ההשקה (x_0, y_0, z_0) , כאשר x_0, y_0, z_0 מספרים שלמים, עובר ישר משיק לעקום הנ"ל וישר זה מקביל למישור $x + 2y + z = 4$, אזי:

א. $x_0 + y_0 + z_0 = -1$ ב. $x_0 + y_0 + z_0 = 6$

ג. $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ ד. $x_0 + y_0 + z_0 = 3$

שאלה 7: אחרי שינוי סדר האינטגרציה באינטגרל $\int_1^3 dx \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x, y) dy$

מתקבל:

רשימת מקורות

- [1] בן-ציון קון, סמי זעפרני, חדר"א 1, בק חיפה 2000.
- [2] בן-ציון קון, חדר"א 2, חלק א', בק חיפה 2000.
- [3] ד. מייזלר, חשבון אינפיניטסימלי, בהוצאת אקדמון.
- [4] ש. גירון, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי במספר משתנים (ספר תרגילים), אקדמיה 2000.
- [5] אלכס קופרמן, חדר"א 2, חוברת תרגילים, מכלול, הטכניון.
- [6] בן-ציון קון, וקטורים וגיאומטריה אנליטית, בק חיפה 1998.
- [7] **G.M. Fikhtengolts**, The Fundamentals of Mathematical Analysis, V.I, II, Pergamon Press.
- [8] **Thomas & Finney**, Calculus and Analytic Geometry, Addison-Wesley Publishing Company, 7th Ed., 1998.
- [9] **R. Courant**, Differential and Integral Calculus, Vol. II, Blackie & Son Limited.
- [10] **Marsden & Tromba**, Vector Calculus, Second Edition, W.H. Freeman and Company, New York.
- [11] **Walter Rudin**, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill.

א. $\int_3^7 dy \int_{\frac{9}{y}}^3 f(x,y) dx$ ב. $\int_3^7 dy \int_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x,y) dx$

ג. $\int_3^7 dy \int_{\frac{9}{y}}^3 f(x,y) dx + \int_7^9 dy \int_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x,y) dx$

ד. $\int_3^7 dy \int_{\frac{y}{9}}^y f(x,y) dx + \int_7^9 dy \int_{\frac{y}{9}}^{10-y} f(x,y) dx$

שאלה 8: השטח החסום על-ידי האליפסה $(x+2y+1)^2 + (2x+y-3)^2 = 4$ שווה ל-

א. $\frac{8\pi}{5}$ ב. $\frac{4\pi}{3}$ ג. 4π ד. $\frac{16\pi}{5}$

שאלה 9: האינטגרל המשולש $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$ כאשר V הוא

התחום החסום על-ידי הכדור $x^2+y^2+z^2 = z$ שווה ל-

א. 2π ב. $\frac{\pi}{10}$ ג. $\pi \cdot \sqrt[5]{2}$ ד. $\pi(\sqrt{2})^5$

שאלה 10: האינטגרל הקווי $\int_L (e^{x+\sin x} + y) dx + (y^3 + 2x) dy$ כאשר L

הוא המעגל $x^2 + y^2 = 1$ בכיוון החיובי שווה ל-

א. π ב. 2π ג. $\frac{\pi}{2}$ ד. 0

שאלה 11: נתון שדה וקטורי $\vec{F} = x\vec{j}$, S הוא החלק של הכדור

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ הנמצא מעל המישור $z = -\sqrt{2}$, $\hat{n}$ הוא הנורמל ל- S

היוצר זווית חיובית עם הציר z . אזי האינטגרל המשטחי $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} ds$ שווה ל-

א. 4π ב. 2π ג. 8π ד. 0

חלק ג': תן פתרון מלא.

נסמן ב- D את המלבן $a < x < b$, $c < y < d$.

נניח כי $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ שדה וקטורי ב- D .

נסח והוכח את משפט גרין במקרה זה.

תשובות

לעמוד 6: 3. א. כן. ב. לא.

$$4. \text{ א. } F'(x) = - \int_a^b y^2 e^{-xy^2} dy \quad \text{ב. } F'(x) = \frac{1}{x} \ln \left| \frac{a^2 + x}{a^2} \right|$$

$$5. \text{ א. } \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \quad \text{ב. } \frac{\pi}{2} \ln 2 \quad \text{ג. } \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$10: 1. \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad 2. \frac{1}{2} (e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}})$$

$$3. \arctg \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)} \quad 4. \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2a + 2}$$

$$12: 1. F'(y) = f(2y, 0) + \int_0^y [f'_u(x+y, x-y) - f'_v(x+y, x-y)] dx$$

$$u = x+y, \quad v = x-y$$

$$2. \frac{\pi}{2} - 2y + \ln(2y^2) - (lgy + \frac{y}{\cos^2 y}) \ln \frac{y^2}{\cos^2 y}, \quad |y| < \frac{\pi}{2}$$

$$3. F'(y) = 2t \int_{t^2-t}^{t^2+t} \sin(y^2 + t^4 - t^2) dy + 2 \int_0^{t^2} \sin 2x^2 \cos 2tx \, dx -$$

$$- 2t \int_0^{t^2} dx \int_{x-1}^{x+1} \cos(x^2 + y^2 - t^2) dy$$

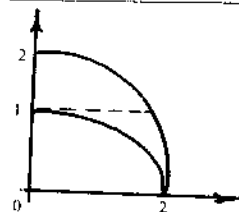
$$4. F'(x) = - \int_x^{x^3} y^2 e^{-xy^2} dy + 3x^2 e^{-x^7} e^{-x^3}$$

$$19: 1. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \quad 2. \frac{5\pi}{32a^3 \sqrt{a}} \quad 3. \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{y^2}{9})$$

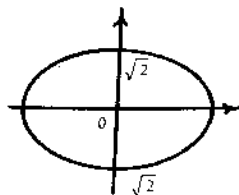
$$4. \frac{1}{2} \ln 2 \quad 5. \pi \ln 2 \quad 6. \pi$$

מפתח מונחים

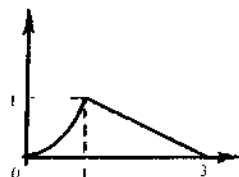
120	משטח חד-צדדי	76	אורך הקשת
119	משטח חלק	1	אינטגרל התלוי בפרמטר
126, 119, 81	נורמל	13	- לא אמיתי
120	נקודה סינגולרית	14	- התכנסות במידה שווה
136	סטוקס (משפט)	22	אינטגרל כפול
22	סכום אינטגרלי	52	- לא אמיתי
23	- דרכו	52	- מתכנס
117	פונקציה הרמונית	54	אינטגרל משולש
118	- עיקרון המקסימום		אינטגרל משטחי
79, 66	פונקציה וקטורית	124	- מסוג ראשון
69	- גבול	127	- מסוג שני
66	- גרף		אינטגרל קווי
71	- נגזרת	87	- מסוג ראשון
143, 110	- פוטנציאל	90	- מסוג שני
70	- רציפות	132	גאוס (משפט)
143	צירקולציה של השדה	98	גרינ (משפט)
77	קרדיואידה	83	דיברנגט (הגדרה)
80	קואורדינטות עקמוניות	132	- (משפט)
88, 77, 67	קו הזבורג	66	הודוגרף
84	רוטור	14	וירשטרס (מבחן)
82	שדה וקטורי	90	כיוון על עקום
143, 110	- משמר	20	כיסוי מלבני
21	שטח עליון ותחתון	3	לייבניץ (כלל)
121	- פני המשטח	117	לפלס (משוואה)
134	שטף של שדה וקטורי	65, 48	מרכז הכובד
21	תחום בעל שטח	64, 48	מומנט סטטי



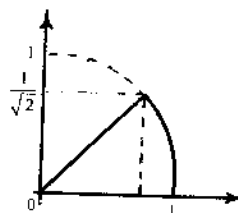
$$\int_0^1 dy \int_{2\sqrt{1-y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx \quad \text{ג.}$$



$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y) dx \quad \text{ד.}$$



$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y) dx \quad \text{ה.}$$



$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx \quad \text{ו.}$$

$$\frac{165}{128} - \ln 2 \quad \text{ז.} \quad \frac{4}{\pi^2} \quad \text{ח.} \quad \frac{4}{3} \quad \text{ט.} \quad \frac{33}{140} \quad \text{י.}$$

$$\frac{\pi}{8} (e^4 - e) \quad \text{יא.} \quad \frac{2}{3} \quad \text{יב.} \quad \frac{1}{3} (e^{-1} - e^{-2}) \quad \text{יג.}$$

$$\frac{1}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right) R^3 \quad \text{יד.} \quad \frac{2}{3} \pi ab \quad \text{יז.} \quad \frac{\pi}{6} - \frac{8\sqrt{2}-10}{9} \quad \text{יח.} \quad \frac{1}{3} \pi R^3 \quad \text{יט.}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{6}} \quad \text{י.} \quad 8\pi \quad \text{יא.}$$

$$e^3 - e \quad \text{יב.} \quad \frac{1}{108} (\sin 2 + \sin 3) \quad \text{יג.} \quad \frac{3}{4} (e - e^{-1}) \quad \text{יד.}$$

$$\frac{27}{8} \quad \text{יז.} \quad \frac{1}{6} \left[1 - \frac{8}{(\pi+2)^3} \right] \quad \text{יח.} \quad \frac{1}{6} (35 - 5\sqrt{5} - 16\sqrt{2}) \quad \text{יט.}$$

$$\frac{4}{27} \quad \text{יא.} \quad \frac{\pi}{4} (e^4 - e) \quad \text{יב.}$$

$$\frac{16}{9} < 1 < 2 \quad \text{2.} \quad 8\pi(5 - \sqrt{2}) \leq 1 \leq 8\pi(5 + \sqrt{2}) \quad \text{1.}$$

$$4 < 1 < 8(5 - 2\sqrt{2}) \quad \text{3.}$$

$$\pi - 2 \quad \text{4.} \quad \frac{25}{24} \quad \text{2.} \quad \frac{\pi}{12} \quad \text{1.}$$

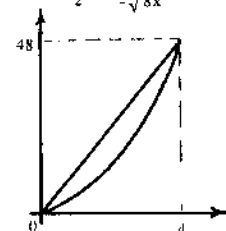
$$\int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x,y) dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y) dy \quad \text{א.}$$

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x,y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y) dx \quad \text{ב.}$$

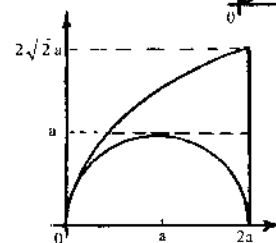
$$\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-2}^2 dx \int_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y) dy + \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y) dy \quad \text{ג.}$$

$$\int_0^4 dx \int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y) dy \quad \text{ד.}$$

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{8x}}^{2x} f(x,y) dy + \int_2^9 dx \int_{-\sqrt{8x}}^{\sqrt{8x}} f(x,y) dy + \int_{\frac{9}{2}}^8 dx \int_{-\sqrt{8x}}^{24-4x} f(x,y) dy \quad \text{ה.}$$



$$\int_0^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y) dx \quad \text{א.}$$



$$\int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx + \int_a^{2\sqrt{2}a} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y) dx + \int_a^{2\sqrt{2}a} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x,y) dx \quad \text{ג.}$$

לעמוד 70: 1. א. $e^i \hat{j} + \frac{\pi}{2} \hat{k}$ ב. $-\hat{i} + \hat{k}$ ג. $-\hat{j} + \hat{k}$

לעמוד 75: 3. א. $\frac{1}{t^2} \hat{k} - \sin 2t \hat{j} + (1+t)e^t \hat{i}$ ב. $t\hat{i} - (\sin t + t \cos t)\hat{j} + e^t \hat{k}$

4. א. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}$ ב. $x+y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 5. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, e^{\frac{\pi}{6}}\right)$

לעמוד 78: 1. א. $8a$ ב. $6a$ ג. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$ ד. $\ln(2+\sqrt{3})$ ה. 2

ו. π^2 ז. $\frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}) + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$ ח. 10π

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$$

לעמוד 82: 1. א. כדור $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ב. פרבולויד היפרבולי

$$4z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{כדור } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ד. חרוט $z^2 = x^2 + y^2, z > 0$ ה. היפרבולויד $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$$2. \quad -3x + y + 2z + 4 = 0, \quad \frac{x-3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$$

$$3. \quad 12x - 9y + 2z = 9, \quad \frac{x-3}{12} = \frac{y-5}{-9} = \frac{z-9}{2}$$

$$4. \quad 17x + 11y + 5z = 60, \quad \frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}$$

לעמוד 85: א. $4\hat{k}$ ב. 3 ג. $-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ ד. $0, 0$

לעמוד 89: 1. R^4 2. 0 3. $2a^2(2-\sqrt{2})$ 4. 32 5. $\frac{16\sqrt{2}}{143}$

6. $10\pi(16+12\pi^2)$ 7. $3(e-1)$ 8. $(\sqrt{8}-1)$ 9. $\frac{5}{3}$

לעמוד 97: 1. $72\pi^3 + 2\pi$ 2. $-4\sqrt{3}\pi$ 3. 0 4. 0

5. א. $\frac{1}{2}$ ב. $-\frac{757}{630}$ 6. 16 7. $\frac{5}{2}$ 8. 0 9. 0 10. $\frac{7}{2}$

$$11. \quad \frac{32}{3} + 4\sqrt{2}\pi$$

לעמוד 50: 1. א. $\frac{64}{3}$ ב. π ג. 4 ד. $\frac{ab}{6}(a^2 + b^2)$ ה. 2π 2. א. 4

ב. 9π ג. $\frac{1}{3}(4-\sqrt{2})$ ד. 12 ה. $\frac{2}{9}R^3(3\pi-4)$ ו. $\frac{\sqrt{2}}{24}\pi$

3. א. $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$ ב. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ג. $(\frac{2}{5}, 0)$

לעמוד 53: 1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{\pi}{4}$ 3. $\int_1^{\infty} dx \int_{x^3}^{\infty} \frac{dy}{x^4 + y^2} = \frac{\pi}{4}$

לעמוד 56: 1. 27 2. $\frac{1}{3}(e-1)^2$ 3. $\frac{3}{2} \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ 4. $\frac{13}{3}$

לעמוד 59: 1. $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$ 2. $\frac{\pi}{5}(18\sqrt{3} - \frac{97}{6})$ 3. $\frac{\pi}{4} a^2 bc$ 4. 2π

5. $\frac{7}{6}$ 6. $\frac{92}{3}\pi$ 7. $\frac{4}{3}\pi$ 8. $(\sqrt{\pi})^3$

לעמוד 63: 1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{4\pi}{5} abc$ 3. 36π

$$4. \quad \int_0^{\frac{3}{4}\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\pi} \sin \theta (\cos \phi + \sin \phi) d\phi = \sqrt{2}\pi$$

$$7. \quad \frac{1}{9} 8. \quad \frac{8\pi}{3}(e^4 - 1) 9. \quad \frac{92}{3}\pi 10. \quad \frac{11}{24}$$

לעמוד 65: 1. 4 2. $(0, 0, 4)$ 3. 2 4. $(\frac{4}{3}, 0, 0)$ 5. $\frac{8}{3}$ 6. $\frac{98}{81}\pi$

לעמוד 69: 1. א. קו חיתוך בין המישור $y=x$ עם גליל פרבולי $z=x^2$

ב. פרבולה $y=3x^2+1$ 2. א. $x\hat{i} + \sin x \hat{j}, |x| < \infty$

ג. $a \cosh t \hat{i} + a \sinh t \hat{j}, |t| < \infty$ או $x\hat{i} + \sqrt{x^2 - a^2} \hat{j}, |x| \geq a$

ד. $\frac{1}{8} \cos t \hat{i} + \frac{1}{3} \sin t \hat{j}, 0 \leq t < 2\pi$ 7. $\cos^4 t \hat{i} + \sin^4 t \hat{j}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

ה. $t^2 \hat{i} + t \hat{j} + t^4 \hat{k}, |t| < \infty$

ו. $a(1+\cos t) \cos t \hat{i} + a(1+\cos t) \sin t \hat{j}, 0 \leq t < 2\pi$

ז. $(1+t)\hat{i} + (2+2t)\hat{j} + (3+2t)\hat{k}, |t| < \infty$

ב. $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y) dy$ ג. לא. 6. א. $3\pi-15$ ב. לא.
ג. דה. - כן. ג. 24π .

לעמוד 152: 1. $-\frac{1}{\sqrt[3]{7}} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ 2. א. מתכנס לכל α , מ.ב.ש. עבור $\alpha < 1$.

ב. כן. 3. $x'_z = 0, x'_z = \frac{7}{3}, y'_u = -\frac{4}{3}$ 4. $z_{\max} = z(0,1) = 8$ 5. $z_{\min} = z(1,0) = 5$ 6. $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx$ 7. א. -2π ב. 2π ג. 0 ד. -16π .

לעמוד 154: 1. א. ו מתברר, 2 מתכנס. ב. $\frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}$ 2. ב. כן.

3. א. $2-3xy^2 \neq 0$ ב. $x'_u = \frac{2(1-uy)}{2-3xy^2}, y'_z = \frac{4z+9x^2}{2-3xy^2}$ 4. א.ב. כן. ג. $\frac{4\sqrt{13}}{13}$ 5. א. $3(e^{16}-e^4)$ ב. $\frac{8\pi(2-\sqrt{3})}{3\sqrt{3}}$

6. ב. $z^3+z^2+\frac{x^2z}{x+y}$ ג. -84.2 ד. לא. 7. לא.

לעמוד 155: 1. א.ד. - לא. ב.ג. - כן. ד. $-2 < x < 2$ 2. א. - לא. ב. - כן. ג. - 6. 3. א.ד. - כן. ב.ה. - לא. ג. - 2. 4. א. $\sqrt{1-s^2} z'_s$ ב. כן. ג. לא. 5. א. כן. ב. 10π ג. לא. 6. א. $-\pi$ ב.ג. - כן. ד.ה. - לא. ה. $\sqrt{x^2+y^2}+xy+c$

לעמוד 157: 1. א.ג.ה. - לא. ב.ד. - כן. 2. א.ה. - לא. ב.ג.ד. - כן. 3. א.ה.ו. - לא. ב.ג.ד. - כן. 4. א.ג.ה. - לא. ב.ד. - כן. 5. א.ג.ה. - כן. ב. - לא. 6. א.ג. - כן. ב.ד.ה. - לא. 7. א.ג. - כן. ב.ד. - לא.

לעמוד 105: 1. א. 0. ב. $\frac{3}{8}\pi$ 2. $-\frac{3}{16}\pi$ 3. 2π 4. 800π 5. 6. $\frac{5}{2}$ 7. 8. א. $6\pi a^2$ ב. $3\pi a^2$ ג. $\frac{1}{60}$ ד. $\frac{1}{2}$ 9. πeab

לעמוד 115: 1. א. $e^{x-y}(x+y)+C$ ב. $\frac{1}{2} \ln(1+x^2+y^2)+C$ 2. $\frac{xy}{x-y}+C$ 3. $I_1=I_2=\frac{26}{35}$ 4. $1+\ln 2$ 5. $\frac{x-y}{x+y}+C$ 6. $\frac{xy}{x-y}+C$ 7. $\frac{xy}{x-y}+C$ 8. $\frac{xy}{x-y}+C$ 9. $\frac{xy}{x-y}+C$

לעמוד 124: 1. א. $-3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ ב. $3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ ג. $\hat{j}$ 2. א. $\sqrt{2}\pi$ 3. $\sqrt{14}$ 4. $2\pi+8(1-\sqrt{2})$ 5. $4a^2$ 6. $2\sqrt{3}a^4$ 7. $\frac{2}{15}\pi$ 8. $\frac{8}{3}\pi$ 9. $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$

לעמוד 126: 1. א. $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$ ב. $\frac{8}{3}\pi$ ג. $\frac{2}{15}\pi$ 2. $\frac{25\sqrt{5}+1}{60}$ 3. $\pi^2 R^3$ רמז: $f(x,y,z) = y^2+z^2$

לעמוד 131: 1. א. $4\pi R^3$ ב. $\frac{1}{2}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $-\frac{\pi}{3}$ ה. 0 ו. $\pi^2 e$ 2. $-\frac{\pi R^4}{2}$

לעמוד 136: 1. א. $\frac{32}{3}\pi$ ב. π ג. 8π ד. 3 ה. π

לעמוד 140: 1. א. -4π ב. -4π ג. $-\sqrt{2}\pi$ ד. $\frac{8}{\sqrt{14}}\pi$ ה. -4π 2. -3

לעמוד 146: 1. א. $|r|$ ב. $xyz+\frac{x}{yz}$ ג. $\frac{1}{3}|r|^3$ ד. $\ln|r|$ 2. $\frac{\pi}{4}$

לעמוד 147: 1. ב.ג.ד.ה. - כן. א.ו. - לא. 2. א.ב.ד. - כן. ג.ה. - לא. 3. א.ג.ה.ו. - לא. ב.ד. - כן. 4. א.ב.ד. - כן. ג.ה. - לא. 5. א.ד. - לא. ב.ג. - כן. 6. א.ב.ד.ה. - לא. ג. - כן. 7. א.ג. - לא. ב.ד. - כן.

לעמוד 150: 1. א.ג. - כן. ב.ד. - לא. ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n)!}$ 2. א.ב. - כן.

ג. $x+y-2z=0$ 3. א.ה. - לא. ב. - כן. ג. $-6\pi^2$ ד. טרפז. 4. א. $4uvz''_{uv}-2vz'_v$ ב. - כן. ג. - לא. 5. א. - כן.

לעמוד 161: 1. $\frac{x}{(1-x)^2}, |x| < 1$ 2. $u_{\max} = 6, u_{\min} = -\frac{9}{8}$ 3. ג - לא.

4. $\int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y) dy$ 5. $\frac{45}{32} \pi$ 6. 8 7. $-\frac{\pi}{2}$

8. א, ג, כן, בד, ה - לא.

לעמוד 162: 1. א. $-1 \leq x, 1$ ב. $|x| < \infty$ 2. א. (i) לא. (ii) ± 2 ב. (i) $2(x+y)g(x-y)$ (ii) $4(x+y)g'(x-y)$

3. $\min z = -1, \max z = 13$ 4. א. $\frac{3\pi}{2}$ ב. -4π

לעמוד 163: 1. ג, ד. 2. ב, ד. 3. ד. 4. ב. 5. א. 6. ה. 7. ה. 8. ג. 9. ד. 10. א.

לעמוד 165: חלק א' 2. $-\pi ab - 2a$ 3. $\min = 0, \max = 9$

חלק ב': 1. ג. 2. ב. 3. ד. 4. ג. 5. א. 6. ג. 7. ג. 8. ב. 9. א.

לעמוד 167: חלק א' 1, 6, 9, 11, 12 - כן.

חלק ב': 1. ד. 2. ב. 3. ב. 4. ג. 5. ד. 6. א. 7. ג. 8. ב. 9. ב. 10. א. 11. ב.