בן-ציון קון

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

חלק א'

תיאוריה ותרגילים

בק הוצאת בק – ספרי לימוד – BAK

הפצה: מכלול - קרית הטכניון חיפה 32000 ☎ 04-8322970
ישו!!! הפצת ספרים בע"מ - רח' קורדובה 91, מושב משמר השבעה 50297 ☎ 03-9601940
הדפסה: מיכאל לחמן בע"מ רח' פבנזר 62 חיפה 33135 ☎ 04-8641706

חדו"א 2

טורים אינסופיים
גיאומטריה אנליטית
פונקציות של מספר משתנים

בן-ציון קון

מהדורה חמישית

הוצאת בק – ספרי לימוד BAK 2000
ת.ד. 7860 חיפה P.O.Box 7860 Haifa

הקדמה

ספר זה מהווה חלק שני מסדרה של שלושה ספרים בנושא **חדו"א (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)**, שהראשון מביניהם חובר בשיתוף עם ד"ר סמי זעפרני.

ספר זה מכיל את הנושאים הבאים: **טורים אינסופיים, אלגברה של וקטורים, גיאומטריה אנליטית במישור ובמרחב וחשבון דיפרנציאלי של פונקציות של מספר משתנים**.

מטרת הספר לעזור לסטודנט להבין טוב יותר את חומר הלימוד, ללמדו לפתור בעיות שונות בנושאים הנדונים.

הספר מכיל 15 פרקים. כל פרק מכיל:
- הגדרות ודוגמאות המסבירות אותן
- משפטים, הוכחת המשפטים ודוגמאות לשימוש בתרצאותיהם

הושם דגש על שימושים גיאומטריים של תוצאות שונות וחישובים מקורבים, נתונות טכניקות שונות לפתירת תרגילים בנושאים הנלמדים, לאחר כל סעיף נתונים תרגילים עם תשובות לעבודה עצמית, מספר נוסחאות בכל סעיף משלו, מיספור משפטים, הגדרות ודוגמאות לכל פרק.

הסימן ■ מסמן סוף הוכחה.

מספר כפול לאחר מילה, משפט או דוגמה, מסמן את הפרק ומיספרו, לדוגמה: משפט 7.3 מסמן משפט 3, מפרק 7.

הספר מכיל כ-280 תרגילים פתורים וכ-530 תרגילים לעבודה עצמית.

תודתי/**ד"ר בומה אברמוביץ, ד"ר שי גירון ולפרופ' בוריס פענח** מהטכניון על ההערות וההצעות הרבות והחשובות, וכמו-כן תודתי לסטודנטית **אושרת אסור** על עבודתה המסורה בהגהת המהדורה החמישית.
המחבר אודה/**רוני מור** ממשרד מיכאל לחמן בע"מ על עבודתה המסורה בהדפסת החומר.

בהצלחה/
בן-ציון קון

תוכן העניינים

פרק 6: טורי חזקות

פרק 7: גיאומטריה אנליטית במישור

פרק 8: אלגברה של וקטורים

פרק 9: גיאומטריה אנליטית במרחב

פרק 10: פונקציות של מספר משתנים. הגדרות

פרק 11: גבולות ורציפות של פונקציות של משתנים אחדים

פרק 12: נגזרות חלקיות. דיפרנציאביליות. כלל השרשרת

פרק 13: נגזרות חלקיות מסדר גבוה. נוסחת טיילור

תוכן עניינים של ספר ההמשך

חדו"א 2, חלק ב'

בן-ציון קון

פרק 1
טורים. מושגים יסודיים

1. הגדרת הטור וסיכומו

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרת מספרים. הביטוי

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots \qquad (1)$$

נקרא **טור אינסופי**, או **טור** ו- a_k הוא **האיבר הכללי** של הטור.

נבנה מאיברי הטור (1) **סכומים חלקיים**:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

קיבלנו סידרה של סכומים חלקיים $\{S_n\}$.

הגדרה 1: נומר שטור (1) **מתכנס** אם קיים גבול סופי S של סידרת הסכומים החלקיים $\{S_n\}$ ו- S הוא **סכום הטור** (1). נכתוב $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

אם הגבול של $\{S_n\}$ לא קיים (או אינסוף) נאמר שהטור **מתבדר**.

דוגמה 1: בדוק את התכנסות הטור הגיאומטרי $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$.

פתרון: נחשב את הסכומים החלקיים של הטור הנתון:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q} & , \quad q \neq 1 \\ n & , \quad q = 1 \end{cases}$$

גבול הסדרה $\{S_n\}$ הוא

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & |q|<1 \\ \infty, & q\ge 1 \\ \text{לא קיים}, & q\le -1 \end{cases}$$

לכן הטור הגיאומטרי מתכנס אם ורק אם $|q|<1$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

דוגמה 2: בדוק את התכנסות הטור $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} = 1-1+1-1+\dots$.

פתרון: נבנה סכומים חלקיים S_n:

$$S_n = 1-1+1-1+\dots+(-1)^{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{כאשר } n \text{ אי-זוגי} \\ 0, & \text{כאשר } n \text{ זוגי} \end{cases}$$

היות ו- $\lim_{n\to\infty} S_n$ לא קיים, הטור הנבדק מתבדר.

דוגמה 3: בדוק את התכנסותו של **טור לייבניץ** ומצא את סכומו:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\dots$$

פתרון: נרשום נוסחת טיילור לפונקציה $\ln(1+x)$, ונקבל:

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^n}$$

נציב $x=1$, נקבל

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^n}$$

מהשיוויון האחרון נקבל

$$|\ln 2 - S_n| = \left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^n}\right| < \frac{1}{n+1}$$

כאשר $S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ סכומים חלקיים של הטור הנתון.

לכן $\lim_{n\to\infty} S_n = \ln 2$. קיבלנו שטור לייבניץ מתכנס וסכומו $\ln 2$.

תרגילים:

1. רשום את ארבעת האיברים הראשונים של הטור בעל האיבר הכללי a_n:

א. $a_n = \cos^n \frac{n\pi}{2}$ ב. $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ ג. $a_n = \ln(n+1)-\ln n$.

2. רשום את האיבר הכללי של הטורים הבאים ובדוק את התבדרותם:

א. $1+4+9+16+25+\dots$ ב. $3+8+15+24+35+\dots$

ג. $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\dots$ ד. $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\dots$

3. חשב S_{2n} סכום של $2n$ איברים ו- S_{2n+1} סכום של $(2n+1)$ איברים ראשונים בטורים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$ ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k-(-1)^k}$ ג. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^k+1}{3^k}$ ד. $\sum_{k=1}^{\infty}(2k)$.

4. עבור אלו ערכים של x הטורים הבאים מתכנסים:

א. $4+2x+4x^2+8x^3+\dots+2^{n-1}x^{n-1}+\dots$

ב. $x^2+4x+5+2x^{-1}+2x^{-2}+\dots+2x^{-n}+\dots$.

2. טור טלסקופי

נתונה סדרת מספרים $\{a_n\}$. הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) \qquad (1)$$

נקרא **טור טלסקופי**.

נחשב סכומים חלקיים S_n של (1).

$$S_n = (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\dots+(a_{n+1}-a_n) = a_{n+1}-a_1$$

נעבור לגבול ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_1$$

מסקנה 1: טור טלסקופי מתכנס אם ורק אם הסידרה $\{a_n\}$ מתכנסת. אם סדרה $\{a_n\}$ מתכנסת ל- a אזי סכום הטור הטלסקופי (1) הוא $S=a-a_1$.

דוגמה 4: בדוק את התכנסות הטור $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}$.

פתרון: היות ו- $\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, הטור הנ״ל הוא טור טלסקופי

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

ובשל התכנסות הסידרה $\left\{\frac{1}{k-1}\right\}_{k=2}^{\infty}$ הטור מתכנס. יתר על כן $S_n=1-\frac{1}{n}$ ו- $\lim_{n\to\infty}S_n=1$, כלומר סכום הטור שווה ל-1.

דוגמה 5: בדוק את התכנסות הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

פתרון: נרשום את האיבר הכללי של הטור באופן הבא:

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{1+k}{k}=\ln(1+k)-\ln k$$

ולכן הטור הוא טור טלסקופי $\sum_{k=1}^{\infty}[\ln(1+k)-\ln k]$.

היות והסידרה $\{\ln k\}_{k=1}^{\infty}$ מתבדרת גם הטור הנבדק מתבדר.

לסיכום הסעיף, נדגיש את הקשר בין סדרות וטורים שבא לידי ביטוי, בכך שלכל טור אינסופי מתאימה סידרה אינסופית (סכומים חלקיים), ולהיפך – לכל סידרת מספרים מתאים טור (טלסקופי).

תרגילים: בדוק את התכנסותם של הטורים ומצא את סכומם:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)(p+n+1)(p+n+2)}$, $(p\neq-1,-2,\dots)$
5. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n\cdot\ln(n+1)}$.

3. קריטריון קושי (Cauchy) להתכנסות טורים

משפט 1: (**קריטריון קושי**). הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס אם ורק אם

$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists N(\varepsilon)\ ,\ \forall n\ ,\ n>N(\varepsilon)\ ,\ \forall p$ - טבעי

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon \qquad (1)$$

הוכחה:

א. נניח שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס, כלומר, סדרה של סכומים חלקיים $\{S_n\}$ מתכנסת, ולכן לפי קריטריון קושי לסדרות לכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon)$, כך שלכל $n>N(\varepsilon)$ ולכל p טבעי $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$ או $|a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon$, הוכחנו בכיוון אחד.

ב. **כיוון שני.** נניח שתנאי המשפט מתקיים. לכן לפי קריטריון קושי לסדרות, הסידרה $\{S_n\}$ מתכנסת ולכן גם הטור מתכנס. ■

דוגמה 6: נוכיח **שהטור ההרמוני** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ מתבדר.

הוכחה: נשתמש בקריטריון קושי. ניקח $p=n$, נחשב

$$S_{2n}-S_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

מכך $S_{2n}-S_n$ לא יכול להיות קטן מ- ε כלשהו. ולכן הטור מתבדר.

דוגמה 7: נבדוק התכנסות של הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2^k}{k^2}=\frac{\cos 2}{1^2}+\frac{\cos 2^2}{2^2}+\dots+\frac{\cos 2^n}{n^2}+\dots$.

פתרון: ל- $\varepsilon>0$ נתון מראש נמצא $N(\varepsilon)$ כך שלכל $n>N(\varepsilon)$ ולכל p-טבעי יתקיים (1), אמנם

$$|S_{n+p}-S_n|=$$

$$=\left|\frac{\cos 2^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\cos 2^{n+2}}{(n+2)^2}+\dots+\frac{\cos 2^{n+p}}{(n+p)^2}\right|\le\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+p)^2}<$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

לכן אם ניקח $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, נקבל, שלכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon)$ כזה שלכל p-טבעי ו- $n>N(\varepsilon)$ מתקיים $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$.

דוגמה 8: הוכח: אם הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת והטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אזי $\lim_{n\to\infty} na_n=0$.

הוכחה: לפי קריטריון קושי:

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\forall n>N(\varepsilon),\forall p-\text{טבעי}\ ,\ |a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

מאי-השיוויון האחרון וממונוטוניות הסידרה, נקבל $pa_{n+p}<\frac{\varepsilon}{2}$ לכן,

$$\begin{cases} 2na_{2n}<\varepsilon & ,\ p=n \quad \text{אם} \\ (2n+1)a_{2n+1}<\varepsilon & ,\ p=n+1 \quad \text{אם} \end{cases}$$ לכל $n>N(\varepsilon)$,

לכן $na_n<\varepsilon$ לכל $n>2N(\varepsilon)$ ומכאן $\lim_{n\to\infty} na_n=0$.

4. תנאי הכרחי להתכנסות הטור

משפט 2: אם טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אזי

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0 \qquad \textbf{(1)}$$

הוכחה: מהתכנסות הטור נובע שסידרת הסכומים החלקיים $\{S_n\}$ מתכנסת. נסמן $\lim_{n\to\infty} S_n=S$. היות ו- $a_n=S_n-S_{n-1}$ נקבל $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$. ■

נציין ש-(1) הוא תנאי הכרחי אך לא מספיק. למשל הטור ההרמוני (מדוגמה 6) מקיים את תנאי (1) כלומר, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, אבל מתבדר.

דוגמה 9: הוכח שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^k k!}{k^k}$ מתבדר.

הוכחה: נבדוק שלא מתקיים התנאי ההכרחי (1), נסמן $\frac{e^n n!}{n^n}=a_n$. נחשב $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e^{n+1}(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}e^n\cdot n!}=\frac{en^n}{(n+1)^n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1$$

לכן $a_{n+1}>a_n>0$, זאת אומרת הסדרה $\{a_n\}$ **מונוטונית עולה**, ומכאן $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$, כלומר, לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות והטור הנבדק מתבדר.

דוגמה 10: הטור $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$ מתבדר, כי אינו מקיים את התנאי ההכרחי (הוכחה נוספת ראה בדוגמה 2).

5. שארית הטור

נתון טור

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \textbf{(1)}$$

הגדרה 2: הטור $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ הוא n-**שארית** (או שארית) **של הטור** (1). את סכומו של טור השארית נסמן ב- r_n.

משפט 3: אם הטור (1) מתכנס, אזי סידרת "השאריות" $\{r_n\}$ מתכנסת לאפס, כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים $N_0(\varepsilon)$ כך שלכל $n>N_0(\varepsilon)$ מתקיים $|r_n|<\varepsilon$.

הוכחה: יהי S – סכומו של הטור (1). נרשום $S=S_n+r_n$ או $r_n=S-S_n$, כאשר הסדרה $\{S_n\}$ מתכנסת ל-S, כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר $N_0(\varepsilon)$ כזה שלכל $n>N_0(\varepsilon)$ מתקיים: $|S-S_n|<\varepsilon$, זאת אומרת $|r_n|<\varepsilon$. ■

בדוגמה הבאה נשתמש במשפט 3 לחישוב מקורב של סכום הטור.

דוגמה 11: חשב בדיוק של 0.001 את סכום הטור $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$.

פתרון: נמצא את n המינימלי שעבורו $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}<0.001$. נרשום:

$$r_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right)$$

מכיוון ש: $\frac{1}{(n+2)(n+3)} < \frac{1}{(n+2)^2}$, נקבל

$$r_n < \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots\right)=\frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}<0.001$$

אי-השוויון האחרון מתקיים עבור כל $n \ge 6$. כלומר, כדי לקבל את סכום הטור עם דיוק 0.001 מספיק לחשב רק את סכומם של שש האיברים הראשונים.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2.718$$

תרגילים:

1. הוכח את התבדרות הטורים על ידי שימוש בקריטריון קושי או בתנאי ההכרחי.

א) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\dots$ (רמז: חשב $(S_{6n}-S_{3n})$);

ב) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ (רמז: קח $p=n$);

ג) $\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx$ ($x \ne m\pi$, m - שלם);

ד) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k}$.

2. בדוק את התכנסות הטורים על ידי שימוש בקריטריון קושי:

א) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{3k-1}\right)^k$ ב) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k-1}\right)^{2k+1}$.

3. חשב בדיוק של 0.01 את סכום הטורים: א) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}$; ב) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{3^k+1}$.

6. משפטים בסיסיים על התכנסות הטורים

משפט 4: הורדת מספר סופי של איברים מהטור (או הוספת מספר סופי של איברים לטור) אינה משפיעה על התכנסותו או התבדרותו של הטור.

את ההוכחה המדוייקת נשאיר לקורא, אך נציין שלאחר הורדת (הוספת) מספר איברים כל הסכומים החלקיים (ממקום מסויים) משתנים באותו ערך קבוע.

משפט 5: אם c מספר קבוע שאינו אפס, אזי הטורים $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}ca_k$ מתכנסים או מתבדרים יחד.

הוכחה: נסמן על-ידי S_n את הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ ועל-ידי S'_n את הסכומים החלקיים של הטור השני. ברור ש- $S'_n=cS_n$. לכן הסדרות $\{S_n\}$ ו- $\{S'_n\}$ מתכנסות או מתבדרות יחד וכך גם הטורים. ■

דוגמה 12: בדוק את התכנסות הטורים: א) $\sum_{k=0}^{\infty}aq^k$, $(a\ne 0)$; ב) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{5}{k}$.

פתרון:

א) הטור הנבדק והטור הגיאומטרי $\sum_{k=1}^{\infty}q^k$ מתכנסים או מתבדרים יחד, לכן הטור הנתון מתכנס כאשר $|q|<1$ ומתבדר עבור $|q|\ge 1$ (ראה דוגמה 1).

ב) הטור הנתון וטור לייבניץ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ מתכנסים יחד (ראה דוגמה 3).

משפט 6: אם הטורים $A=\sum_{k=1}^{\infty}a_k, B=\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ מתכנסים, אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\pm b_k)$ מתכנס ו- $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\pm\sum_{k=1}^{\infty}b_k=A\pm B$.

הוכחה: נסמן על ידי A_n ו- B_n את הסכומים החלקיים של הטורים הנתונים בהתאמה. נחשב את הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\pm b_k)$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k=A_n\pm B_n$$

נעבור לגבול ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(A_n\pm B_n)=\lim_{n\to\infty}A_n\pm\lim_{n\to\infty}B_n=A\pm B$$ ■

דוגמה 13: בדוק את התכנסות הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k+(-3)^k}{6^k}$ וחשב את סכומו.

פתרון: נרשום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k+(-3)^k}{6^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^k+(-1)^k\frac{1}{2^k}\right]$

הטור האחרון הוא סכום של שני טורים גיאומטריים. הראשון $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ מתכנס ל- 2, והשני $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2^k}$ מתכנס ל- $-\frac{1}{3}$ (ראה דוגמה 1) ולכן לפי משפט 6, הטור הנתון מתכנס ל- $2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$.

דוגמה 14: הוכח את התבדרותו של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n(n+1)}$.

הוכחה: נרשום $\frac{3n+2}{n(n+1)}=\frac{3}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$ מתכנס כטור טלסקופי (בדוק!). הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n+1}$ מתבדר כטור הרמוני. לכן הטור הניבדק $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}\right)$ מתבדר.

תרגילים:

1. הוכח: אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנסים, אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס.
2. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס, מה תוכל לומר על התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
3. הוכח את התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{4}{n}\right)^n}$.
4. הוכח בעזרת משפט 1 את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$, (x - קבוע).
5. הוכח: אם $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, $(a_k\ge 0)$ מתכנס, אזי גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ מתכנס.
האם הטענה ההפוכה נכונה? תן דוגמה נגדית אם לא והוכח אם כן.

פרק 2
טורים חיוביים

בפרק הנוכחי נחקור טורים שכל איבריהם, פרט למספר סופי של איברים, אי-שליליים. טור כזה נקרא **טור חיובי**. מה שמאפיין את הטור החיובי הוא העובדה שסידרת הסכומים החלקיים שלו $\{S_n\}$ מונוטונית עולה ולכן מתכנסת אם ורק אם היא חסומה, כלומר טור חיובי מתכנס אם ורק אם סידרת הסכומים החלקיים שלו חסומה.

בפרק זה נקבל מבחנים שונים לבדיקת התכנסות של טורים חיוביים.

1. מבחני השוואה

בסעיף זה נביא מבחני התכנסות (התבדרות) של טורים על ידי השוואה עם טור שהתכנסותו (התבדרותו) ידועה.

נתונים שני טורים חיוביים: (A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

נסמן על ידי A_n ו- B_n את הסכומים החלקיים של הטורים (A) ו-(B) בהתאמה.

משפט 1: **(מבחן השוואה ראשון)**. אם לכל n החל ממספר מסויים

$$a_n\le b_n \qquad (1)$$

אזי:

א) מהתכנסותו של הטור (B) נובעת התכנסותו של הטור (A).

ב) מהתבדרותו של הטור (A) נובעת התבדרותו של הטור (B).

הוכחה: מ-(1) נובע ש- $A_n\le B_n$. סדרות $\{A_n\}$ ו- $\{B_n\}$ מונוטוניות עולות. לכן,

א. אם קיים גבול סופי $B=\lim_{n\to\infty}B_n$, הסדרה $\{A_n\}$ חסומה על ידי B, והגבול $\lim_{n\to\infty}A_n$ קיים והטור (A) מתכנס.

ב. אם הטור (A) מתבדר, אזי $\lim_{n\to\infty}A_n=\infty$, ולכן גם $\lim_{n\to\infty}B_n=\infty$ מה שמצביע על התבדרותו של הטור (B). ■

דוגמה 1: נבדוק התכנסות הטורים:

א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$; ד) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

פתרון:

א) מאי-השוויון $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$ והתכנסותו של הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ (ראה דוגמה 1.4), נובע כי טור א' מתכנס.

ב) קל לראות ש- $\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{n^n}<\frac{1\cdot2\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}{n^n}=\frac{2}{n^2}$.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ מתכנס (סעיף א'), לכן הטור הנתון מתכנס.

ג) מאי-השוויון הידוע $\ln(1+x)<x$, $-1<x<\infty$, $x\neq 0$ מקבלים $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ ו-

$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1}$$

לכן $0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}$ והטור הניבדק מתכנס.

ד) מאי-השוויון $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1}$ ומדוגמה 1.6 נובעת התבדרותו של הטור.

הערה 1: במשפט 1 ניתן לדרוש שאי-השוויון $a_n\le b_n$ יתקיים החל מהמקום $n=k$. זה נובע ישירות ממשפט 1.4.

הערה 2: משפט 1 הוא בעל תוקף גם אם נחליף $a_n\le b_n$ ב- $a_n\le cb_n$ כאשר c קבוע חיובי.

משפט 2: (מבחן השוואה שני). אם קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k \qquad (2)$$

אזי, כאשר:

א) $0<k<\infty$, הטורים (A) ו-(B) מתכנסים או מתבדרים יחד.

ב) $k=0$, מהתכנסות הטור (B) נובעת התכנסות הטור (A).

ג) $k=\infty$, מהתכנסות הטור (A) נובעת התכנסות הטור (B).

הוכחה: נבחר $\varepsilon>0$ כך ש- $k-\varepsilon>0$. מ-(2) נובע שקיים $N_0(\varepsilon)$ כזה שלכל $n>N_0(\varepsilon)$ מתקיים $k-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<k+\varepsilon$ או $b_n(k-\varepsilon)<a_n<b_n(k+\varepsilon)$, על ידי שימוש במשפט 1, הערה 2 ואי-השוויונים $a_n<b_n(k+\varepsilon)$, $a_n>b_n(k-\varepsilon)$, מקבלים את א').

את הוכחת ב) ו-ג) נשאיר לקורא. ■

נציין שגם במקרה הזה יש מקום להערה דומה להערה 1.

דוגמה 2: נבדוק התכנסות (התבדרות) של הטורים:

א) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2}{n}$; ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$; ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

ד) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n+1}}{(1+2n)^5}$; ה) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$.

פתרון:

א) נשווה את הטור הניבדק עם הטור הרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

היות ו- $k=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sin\frac{2}{n}\right):\frac{1}{n}\right]=2$ הטור הנתון מתבדר.

ב) נרשום $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{1}{2n}$. בהשוואה עם הטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מקבלים שהטור הניבדק מתכנס.

ג) היות ו- $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=1$, הטור הניבדק מתבדר יחד עם הטור ההרמוני.

ד) נשווה את הטור הנתון עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. כיוון ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n+1}}{(1+2n)^5}}{\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{32}$,

הטור הניבחן מתכנס יחד עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

ה) כדי למצוא טור להשוואה נשתמש בנוסחת טיילור לפונקציה $\sin x$:

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+R_5(x)$ לכן $\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{3!n^3}-\frac{1}{5!n^5}-R_5\left(\frac{1}{n}\right)$.

עתה יש להשוות את הטור הניבדק עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, נחשב (בשימוש במשפט לופיטל)

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{-\frac{3}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{1}{2n}}{\frac{3}{n^2}}=\frac{1}{6}$$

כלומר, $k=\frac{1}{6}$ והטור מתכנס.

משפט 3: **(מבחן השוואה שלישי).** אם לכל n

$$(a_n\neq 0\ ,\ b_n\neq 0)\ ,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (3)$$

אזי:

א) מהתכנסות הטור (B) נובעת התכנסות הטור (A).

ב) מהתבדרות הטור (A) נובעת התבדרות הטור (B).

הוכחה: נרשום (3) עבור n שווה ל- 1,2,..., נקבל $\frac{a_2}{a_1}\leq\frac{b_2}{b_1};\ \frac{a_3}{a_2}\leq\frac{b_3}{b_2};\ \dots;\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\leq\frac{b_n}{b_{n-1}}$.

נכפיל את כל אי-השיוויונים ונקבל $\frac{a_n}{a_1}\leq\frac{b_n}{b_1}$ או $a_n\leq\frac{a_1}{b_1}b_n$. תוך שימוש במשפט 1, הערה 2 ואי-השיוויון האחרון משלימים את הוכחת המשפט. ■

תרגילים:

1. תוך שימוש במשפט 1 בדוק את התכנסות או התבדרות הטורים:

א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+5}$; ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(2n+1)}$; ד) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{2n}{3^n-n^3}$;

ה) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-n}$; ו) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; ז) $\sum_{n=2}^{\infty}(\ln n)^{-\ln n}$; (רמז $\ln n>e^2$).

2. הוכח: אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ מתכנסים, אזי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ מתכנסים גם הם (רמז $a^2+b^2\geq 2|ab|$).

3. בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{5}-1}{n}$ (רמז: רשום $\sqrt[n]{5}=e^{\frac{1}{n}\ln 5}$, תוך שימוש בנוסחת טיילור ל- e^x מצא טור השוואה).

4. פתור תרגיל ג) מדוגמה 1 ע"י שימוש בשיטה שבה חקרנו תרגיל ה) מדוגמה 2.

5. תרגילים לשימוש במשפט 2: בדוק התכנסות (התבדרות) הטורים:

א) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$; ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}(3n^2-1)}$; ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{2n}}$; ד) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{n+1}{n}}$.

6. יהי טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ חיובי מתכנס. נבנה טור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ כאשר b_n הם איברים כלשהם של הטור הראשון. הוכח: ש- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס (ראה משפט 3.5).

7. בדוק התכנסות או התבדרות הטורים:

א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$; ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{(3n^2+n+4)^{\frac{n+1}{2}}}$; ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$;

ד) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(3n+2)(4\sqrt[3]{n}-1)}$; ה) $\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})-1\right)$

(השתמש בנוסחת טיילור).

8. יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ טור מתבדר ו- $a_n>0$. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ גם מתבדר.

2. מבחני דלמבר (J. d'Alembert) וקושי (Cauchy)

בסעיף זה נקבל מבחני התכנסות של טורים בהשוואה עם הטור הגיאומטרי $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$.

משפט 4: **(דלמבר).** אם החל מהמקום $n=k$ איברי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ ,\ (a_n>0) \qquad (1)$$

מקיימים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1 \qquad (2)$$

אזי טור (1) מתכנס. אם

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \qquad (3)$$

הטור (1) מתבדר.

הוכחה:

א. נרשום (2) באופן הבא: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$. היות וטור גיאומטרי $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ עם $|q|<1$ מתכנס, אזי לפי משפט 3, טור (1) מתכנס.

ב. מאי-השיוויון (3) נובע כי $a_{n+1} \ge a_n$, לכן הסדרה $\{a_n\}$ חיובית ומונוטונית עולה ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$, כלומר לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות הטור (משפט 1.2) ולכן הטור (1) מתבדר. ■

דוגמה 3: בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{4^n}$.

פתרון: נחשב $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2-(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} : \frac{2-(-1)^n}{4^n} = \frac{2-(-1)^{n+1}}{4[2-(-1)^n]} < \frac{3}{4}$.

במקרה זה $q=\frac{3}{4}$, לכן הטור הנחקר מתכנס.

הערה 3: אי-השיוויון (2) לא ניתן להחלפה באי-השיוויון $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

דוגמה 4: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מקיים את אי-השיוויון $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$ אך הוא מתבדר, למרות זאת הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ שגם מקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$ מתכנס.

להלן נביא את מבחן דלמבר בצורה גבולית.

משפט 5: אם קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \qquad (4)$$

אזי, כאשר

א) $L<1$, הטור (1) מתכנס.

ב) $L>1$, הטור (1) מתבדר.

ג) $L=1$, המבחן הנ"ל אינו מספק מידע על התכנסות (התבדרות) של הטור (1).

הוכחה:

א) $L<1$, נבחר $\varepsilon>0$, כך ש- $L=1-2\varepsilon>0$ או $L+\varepsilon=1-\varepsilon$. מהגדרות הגבול (4) נובע כי קיים N_0 כך שלכל $n>N_0$ מתקיים

$$L-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L+\varepsilon = 1-\varepsilon = q < 1$$

לכן לפי משפט 4 הטור (1) מתכנס.

ב) $L>1$, נבחר $\varepsilon>0$, כך ש- $L-\varepsilon>1$. מאי-השיוויון $\frac{a_{n+1}}{a_n} > L-\varepsilon > 1$ וממשפט 4 נובעת התבדרות הטור.

ג) $L=1$. המבחן אינו נותן תשובה על התכנסות הטור. למשל, לשני הטורים בדוגמה 4 מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ אך הראשון מתבדר והשני מתכנס. ■

דוגמה 5: בדוק את התכנסות הטורים: א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a^n}{n^n}$.

פתרון:

א) נחשב $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$. הטור מתכנס.

ב) נחשב $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!a^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}a^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{an^n}{(n+1)^n} = \frac{a}{e}$.

אם $a<e$ הטור מתכנס, אם $a>e$ הטור מתבדר, אם $a=e$ מבחן לא נותן תשובה (ראה דוגמה 10ב').

נעבור למבחן התכנסות נוסף שבמיקרים רבים נוח יותר לשימוש.

משפט 6: (קושי). יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי.

I. אם החל ממקום מסויים איברי הטור מקיימים

$$\sqrt[n]{a_n} \le q < 1 \tag{5}$$

אזי הטור מתכנס. אם $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ הטור מתבדר.

II. אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ אזי כאשר $L<1$ הטור מתכנס ומתבדר כאשר $L>1$. אם $L=1$ המבחן אינו נותן תשובה על התכנסות הטור.

את הוכחת המשפט נשאיר לקורא, רק נציין שהוא דומה למשפט הקודם ומובסס על השוואה עם הטור הגיאומטרי ואי-השיוויון $a_n \le q^n$. ■

דוגמה 6: נבדוק את התכנסות הטורים הבאים, תוך שימוש במבחן קושי:

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$; ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+5}{3^n}$; ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

פתרון:

א) נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$, לכן הטור מתכנס.

ב) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3}$, לכן הטור מתכנס.

ג) היות ו- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n+5}{3^n}} = \frac{1}{3}$, לפי מבחן קושי הטור מתכנס (לחישוב הגבול השתמשנו באי-השיוויון $\frac{4}{3^n} < \frac{(-1)^n+5}{3^n} < \frac{6}{3^n}$ ומשפט הסנדוויץ').

נציין שמבחן דלמבר הגבולי (משפט 5) אינו נותן תשובה להתכנסות הטור ג) זאת מאי-קיום הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(-1)^{n+1}+5]\cdot 3^n}{3^{n+1}[(-1)^n+5]}$, לכן מבחן קושי יותר "חזק" ממבחן דלמבר.

ד) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, לכן מבחן קושי אינו נותן תשובה להתבדרות הטור. הטור מתבדר.

ה) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, לכן מבחן השורש אינו מספק מידע על התכנסות הטור. הטור מתכנס.

תרגילים:

בדוק את התכנסות הטורים:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{3^n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)\cdot 3^n}{\sqrt[3]{n!}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+4}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3n+1}{(n+2)^2(2n-1)^2}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{4n+5}\right)^{\frac{n}{3}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!}$;

9) $\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot \ldots \cdot n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot \ldots \cdot(4n-3)} + \ldots + \frac{1\cdot 4\cdot 9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{1\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5} + 1$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}, (a \ne 0)$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}$; 13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+n}{3^n}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{n+5}\right)^5 \cdot \frac{2^n+1}{3^n-1}$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{7^n+3^n}}{n^2}$; 16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n(n+1)}}{n^{2n}}$.

3. מבחן האינטגרל

כפי שראינו בדוגמאות 4 ו-6ד'/ה' מבחני דלמבר וקושי אינם מתאימים לבדיקת התכנסות טורים מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (α - ממשי). בסעיף זה נביא מבחן התכנסות של טורים חיוביים שייתן אפשרות לחקור גם התכנסות של טורים מסוג זה.

משפט 7: יהי

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{1}$$

טור חיובי ו- $f(n)$ ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=n$. אם הפונקציה $f(x)$ חיובית ולא עולה בתחום $x \ge 1$, אזי הטור (1) והאינטגרל

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \tag{2}$$

מתכנסים או מתבדרים יחד.

הוכחה: נזכיר שהאינטגרל (2) מתכנס אם ורק אם קיים גבול

$$\lim_{a\to\infty}\int_1^a f(x)dx<\infty \qquad (3)$$

תוך שימוש בתכונות האינטגרל וממונוטוניות של הפונקציה $f(x)$ נקבל

$$f(k+1)\le\int_k^{k+1} f(x)dx=f(k+\theta)\le f(k)\ ,\ (0<\theta<1) \qquad (4)$$

מאי-השיוויונים הנ"ל נקבל $\sum_{k=1}^{n} f(k+1)\le\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)dx\le\sum_{k=1}^{n} f(k)=S_n$ או

$$S_n-a_1+a_{n+1}\le\int_1^{n+1} f(x)dx\le S_n \qquad (5)$$

אם הטור (1) מתכנס, כלומר $\lim_{n\to\infty}S_n=S<\infty$, אזי מאי-השיוויון $\int_1^{n+1} f(x)dx\le S_n<S$ נובע שהאינטגרל (2) מתכנס.

אם הטור (1) מתבדר, זאת אומרת $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$, ומכיוון ש- $\int_1^{n+1} f(x)dx\ge S_n-a_1+a_n$ נובע כי האינטגרל (2) מתבדר.

אם האינטגרל (2) מתכנס, אזי הטור (1) מתכנס (החלק השמאלי של (5)).

אם האינטגרל (2) מתבדר, גם הטור (1) מתבדר (החלק הימני של (5)).

כלומר, הוכחנו שהטור (1) והאינטגרל (2) מתכנסים יחד או מתבדרים יחד. ■

הערה 4: אם הפונקציה $f(x)$ חיובית ומונוטונית לא עולה בתחום $x\ge m$, אזי יש לחקור את הטור (1) והאינטגרל $\int_m^\infty f(x)dx$.

דוגמה 7: בדוק את התכנסות הטורים:

א) $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$; ב) $\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n\ln^\alpha n}$; ג) $\sum_{n=1}^\infty\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin^3 t}{t}dt$.

פתרון:

א) נבדוק שמתקיימים תנאי המשפט: הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^s}$ חיובית ומונוטונית יורדת לכל $s>0$. לכן הטור הנתון והאינטגרל $\int_1^\infty\frac{dx}{x^s}=\begin{cases}\infty\ , & 0<s\le1\\ \frac{1}{s-1}\ , & s>1\end{cases}$ יחד מתכנסים עבור $s>1$ ומתבדרים כאשר $s\le1$.

ב) באופן דומה בונים פונקציה $f(x)=\frac{1}{x\ln^\alpha x}$. היא מונוטונית יורדת (בדוק!).
בודקים את התכנסות האינטגרל $\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln^\alpha x}$ ומקבלים שהאינטגרל הנ"ל והטור הניבדק מתכנסים יחד עבור $\alpha>1$ ומתבדרים יחד כאשר $\alpha\le1$.

ג) נתבונן באיבר הכללי של הטור הנתון: $0\le\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin^3 t}{t}dt<\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{t^3}{t}dt=\int_0^{\frac{1}{n}}t^2dt=\frac{1}{3n^3}$.
לפי א' הטור $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{3n^3}$ מתכנס ועל סמך מבחן ההשוואה הראשון הטור הנחקר מתכנס.

מסקנה 1: תהי פונקציה $f(x)$ חיובית ומונוטונית יורדת עבור $x\ge m$ והטור $\sum_{k=m}^\infty f(x)$ מתכנס לסכום S, אזי

$$\int_m^\infty f(x)dx<S<a_m+\int_m^\infty f(x)dx \qquad (6)$$

והשארית r_n מקיימת

$$\int_{n+1}^\infty f(x)dx\le r_n\le a_{n+1}+\int_{n+1}^\infty f(x)dx \qquad (7)$$

הוכחה: מאי-השיוויון (4), נקבל

$$\sum_{k=m}^{n} f(k+1)\le\int_m^{n+1} f(x)dx\le\sum_{k=m}^{n} f(k) \qquad (8)$$

נעבור לגבול ב-(8) כאשר $n\to\infty$ ונקבל $\sum_{k=m}^{\infty} f(k+1)\le\int_m^\infty f(x)dx\le\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ או $S-a_m\le\int_m^\infty f(x)dx\le S$. מאי-השיוויון האחרון נובע (6).

באופן דומה מ-(4) נקבל $\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k+1)\le\int_{n+1}^\infty f(x)dx\le\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ או

$r_n - a_{n+1} \le \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le r_n$ ומכאן מקבלים את (7). ■

דוגמה 8: נחשב את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ עם דיוק של 0.01.

פתרון: הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^4}$ חיובית ומונוטונית יורדת ב- $x \ge 1$, לכן לפי נוסחה (7)

$$r_n < \frac{1}{(n+1)^4} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{(n+1)^4} + \frac{1}{3(n+1)^3}$$

נמצא n הקטן ביותר המקיים: $\frac{1}{(n+1)^4} + \frac{1}{3(n+1)^3} < 0.01$. לאחר חישוב מקבלים $n = 6$.

כדי לחשב את הסכום עם דיוק של 0.01 מספיק לקחת 6 איברים. לכן $S \approx \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n^4} = 1.08$.

דוגמה 9: הערך את סכום הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

פתרון: הטור הנ"ל מתכנס (ראה דוגמה 7ב'). לפי (6) מקבלים

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} < S < \frac{1}{2 \ln^2 2} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

היות ו- $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2}$ מקבלים $\frac{1}{\ln 2} < S < \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}$ או $1.443 < S < 2.483$.

תרגילים:

1. הוכח שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$:

א) מתכנס לכל β כאשר $\alpha > 1$ ועבור $\beta > 1$ כאשר $\alpha = 1$.

ב) מתבדר לכל β כאשר $\alpha < 1$ ועבור $\beta \le 1$ כאשר $\alpha = 1$.

2. תוך שימוש במבחני ההשוואה ומבחן האינטגרל בדוק את התכנסות או התבדרות הטורים:

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}},\ (\alpha > 2)$; ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^3\left(\sin \frac{1}{n}\right)}$;

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^n \sqrt[5]{1 + x^5}\, dx \right)^{-1}$; ד) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln n [\ln(\ln n)]^2}$.

3. עבור אילו ערכים של p מתכנס הטור $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$. הערך את סכומו כאשר הטור מתכנס.

4. חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ עם דיוק של 0.001.

4. מבחן רבה (J.L. Rabbe)

בסעיף 3 התקבלו מבחנים על-ידי השוואה עם הטור הגיאומטרי.

להלן נקבל מבחן על-ידי השוואה עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ שמתכנס יותר "לאט".

משפט 8: יהי הטור החיובי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \tag{1}$$

I. אם החל ממקום מסוים מתקיים

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \ge q > 1 \tag{2}$$

אזי הטור (1) מתכנס. אם

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \le 1 \tag{3}$$

אזי הטור (1) מתבדר.

II. **(משפט גבולי).** אם קיים

$$\lim_{k \to \infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k-1}} - 1\right) = q \tag{4}$$

אזי: כאשר $q > 1$ הטור (1) מתכנס, אם $q < 1$ הטור (1) מתבדר, אם $q = 1$ המבחן אינו נותן תשובה על התכנסות הטור.

הוכחה: נוכיח I ונשאיר את הוכחת II לקורא. מ-(2) מקבלים

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} \ge \frac{q}{k}+1 \qquad (5)$$

קל לבדוק שלכל s כאשר $1<s<q$ מתקיים $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^s-1}{\frac{1}{k}}=s$ לכן, לפי הגדרת הגבול, החל מ-k מספיק גדול מתקיים $\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^s-1}{\frac{1}{k}}<q$ או $\left(1+\frac{1}{k}\right)^s<\frac{q}{k}+1$, מאי-השיווין האחרון ואי-השיווין (5) נקבל $\frac{a_k}{a_{k+1}}>\left(1+\frac{1}{k}\right)^s=\frac{(k+1)^s}{k^s}$ או $\frac{a_{k+1}}{a_k}<\frac{\frac{1}{(k+1)^s}}{\frac{1}{k^s}}$. בשימוש במשפט 4 (מבחן השוואה שלישי) נקבל שהטור (1) מתכנס.

כעת, אם מתקיים (3) אזי $\frac{a_k}{a_{k+1}}\le\frac{1}{k}+1$ או $\frac{a_{k+1}}{a_k}\ge\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}$, היות והטור ההרמוני מתבדר גם הטור (1) מתבדר. ■

דוגמה 10: חקור את התכנסות הטורים.

א) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}3^{-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k-1}\right)}$; ב) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!e^k}$; ג. $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2 k}$.

פתרון:

א) נשתמש במבחן רבה בנוסח גבולי. נחשב $\frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{3^{-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k-1}\right)}}{3^{-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}\right)}}=3^{\frac{1}{k}}$.

נחשב את גבול (4) תוך שימוש בכלל לופיטל

$$\lim_{k\to\infty}k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=\lim_{k\to\infty}k\left(3^{\frac{1}{k}}-1\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{k}}-1}{\frac{1}{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{-\frac{1}{k^2}3^{\frac{1}{k}}\ln 3}{-\frac{1}{k^2}}=\ln 3>1$$

לכן הטור הנתון מתכנס.

ב) נחשב $\lim\limits_{k\to\infty}k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=\lim\limits_{k\to\infty}k\left(\frac{k^k(k+1)!e^{k+1}}{k!e^k(k+1)^{k+1}}-1\right)=\lim\limits_{k\to\infty}k\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}-1\right)$

כדי לחשב את הגבול נסמן $\frac{1}{k}=x$ ונשתמש במשפט לופיטל. נקבל:

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-1\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x^2}$$

הגבול הראשון הוא 1. לחישוב הגבול השני נשתמש בנוסחת טיילור $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+0(x^2)$ ו- $\frac{x}{1+x}=x-x^2+0(x^2)$. לבסוף נקבל שהגבול השני שווה ל- $\frac{1}{2}$ ולכן $\lim\limits_{k\to\infty}k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=\frac{1}{2}$ והטור הנחקר מתבדר.

ג) נחשב $\lim\limits_{k\to\infty}k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=\lim\limits_{k\to\infty}k\left(\frac{(k+1)\ln^2(k+1)}{k\ln^2 k}-1\right)=1$.

כאן מבחן רבה לא נותן תשובה על התכנסות הטור, אבל לפי מבחן האינטגרל הטור מתכנס.

תרגילים:

1. הוכח שלכל $p>\frac{3}{2}$ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ מתכנס.

2. בדוק את התכנסות או התבדרות הטורים:

א. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3+\sqrt{1})(3+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(3+\sqrt{n})}$; ב. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(n+1)}{n^3\cdot n!}$;

ג. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+2)}{n^2\cdot n!}$; ד. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n+1)]^2}{4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+3)}$.

3. הוכח שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}\right)^p\cdot\frac{1}{n^q}$ מתכנס כאשר $p+2q>2$.

5. אי-קיום של טור השוואה אוניברסלי

בסעיפים הקודמים קיבלנו את מבחני קושי ודלמבר על-ידי השוואה עם הטור הגיאומטרי ואת מבחן רבה על-ידי השוואה עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. השאלה הנשאלת בסעיף זה היא האם קיים טור מתכנס לאט מאוד שבעזרתו ניתן להסיק מסקנה על התכנסות כל טור הנתון מראש. התשובה היא שלילית. נראה זאת.

הגדרה 1: אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס יותר לאט מהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$.

משפט 9: לכל טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ קיים טור המתכנס לאט יותר.

הוכחה: נסמן את השארית של הטור הנתון על ידי R_n. נבנה טור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}}$. נוכיח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס לאט יותר. היות ו-$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{R_{n-1}}=0$, נותר לנו להוכיח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס. אמנם

$$b_n=\frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}}=\frac{R_{n-1}-R_n}{\sqrt{R_{n-1}}}=\frac{(\sqrt{R_{n-1}}-\sqrt{R_n})(\sqrt{R_{n-1}}+\sqrt{R_n})}{\sqrt{R_{n-1}}}<2(\sqrt{R_{n-1}}-\sqrt{R_n})$$

אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}2(\sqrt{R_{n-1}}-\sqrt{R_n})$ מתכנס כיוון שהוא טור טלסקופי שבו $\lim_{n\to\infty}\sqrt{R_n}=0$ ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס. ■

כעת נניח שקיים טור אוניברסלי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. לפי משפט 9 קיים טור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ המתכנס לאט יותר ולא ניתן לקבל מידע על התכנסותו של טור זה על-ידי השוואה עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

מסקנה 3: לא קיים טור אוניברסלי מתכנס שבעזרתו ניתן לבדוק התכנסות של טור כלשהו.

פרק 3
טורים כלליים

בפרק הנוכחי נחקור טורים אשר בהם מספר אינסופי של איברים חיוביים ומספר אינסופי של איברים שליליים. במקרה זה נקבל סוג חדש של טורים שלגביהם אין אפשרות להשתמש בשיטות שפותחו בפרק 2.

1. התכנסות בהחלט ובתנאי

הגדרה 1: אומרים שטור

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k \qquad (1)$$

מתכנס בהחלט אם הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k| \qquad (2)$$

מתכנס.

נציין שההגדרה אינה אומרת דבר על התכנסות הטור (1).

משפט 1: טור מתכנס בהחלט מתכנס.

הוכחה: נתון שטור (2) מתכנס, לכן לפי קריטריון קושי (משפט 1.1)

$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\forall p$ טבעי, $|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$

צריך להוכיח כי טור (1) מתכנס.

היות ו- $|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|\le|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$

נקבל שטור (1) מקיים את תנאיו של קריטריון קושי ולכן מתכנס. ■

הגדרה 2: אומרים שטור (1) **מתכנס בתנאי** (לא מתכנס בהחלט), אם הוא מתכנס אך טור (2) מתבדר.

נציין שלגבי טורים חיוביים לא קיים המושג התכנסות בתנאי.

לבדיקת התכנסות בהחלט, נשתמש במבחנים להתכנסות טורים חיוביים.

דוגמה 1: בדוק התכנסות בהחלט, בתנאי או התבדרות של הטורים הכלליים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$; ד. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n}{n\ln^2 n}$.

פתרון:

א. נבדוק התכנסות בהחלט. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס (דוגמה 2.1), לכן הטור הנבדק מתכנס בהחלט.

ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ הוא טור הרמוני שמתבדר, לכן הטור אינו מתכנס בהחלט, אך בדוגמה 1.3 הטור מתכנס וסכומו $\ln 2$. לכן, ההתכנסות היא בתנאי.

ג. נבדוק התכנסות בהחלט $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-(-1)^n}$. נשווה את הטור הזה עם הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, שהינו מתבדר. היות ו- $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n-(-1)^n}}{\frac{1}{n}}=1$, שני הטורים מתבדרים יחד (משפט 2.2), לכן הטור הנתון אינו מתכנס בהחלט. נבדוק התכנסות בתנאי. לשם כך נוכיח שסדרת הסכומים החלקיים שלו מתכנסת. נחשב S_{2n}.

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k-(-1)^k}=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\ldots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

S_{2n} הוא סכום של $2n$ איברים של הטור המתכנס $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (דוגמה ב'), לכן קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2$. נתבונן ב- S_{2n+1}, ברור ש- $S_{2n+1}=S_{2n}-\frac{1}{2n+1}$ ומכאן $\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2$.

מההתכנסות של תת-הסדרות $\{S_{2n}\}$ ו- $\{S_{2n+1}\}$ לאותו גבול, נובעת ההתכנסות של הסדרה $\{S_n\}$. כלומר, הטור הנתון מתכנס בתנאי וסכומו $\ln 2$.

ד. הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n\ln^2 n}\right|$ מתכנס כי $\left|\frac{\cos n}{n\ln^2 n}\right|\le\frac{1}{n\ln^2 n}$ והשוואה עם הטור החיובי המתכנס $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. לכן הטור הנחקר מתכנס בהחלט.

תרגילים:

1. איזה מהטורים הבאים מתכנס בהחלט:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4}}$; ב. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$; ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos n^2}{3^n}$.

2. הוכח שלכל $0\le a<1$ הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin n\alpha$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos n\alpha$ מתכנסים בהחלט לכל α.

3. נתון טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בתנאי. נסמן $P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|+a_i}{2}$; $Q_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|-a_i}{2}$. הוכח ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=1$.

4. הוכח שעבור $\alpha>1$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!-2!+3!-\ldots+(-1)^{n+1}n!}{n!n^{\alpha}}$ מתכנס בהחלט.

2. פעולות עם טורים מתכנסים

בפרק ראשון ראינו שסכום והפרש של טורים מתכנסים הם גם טורים מתכנסים. טור שאיבריו מוכפלים בקבוע מתכנס גם כן. בסעיף זה נחקור באיזה תנאים יש לטורים מתכנסים תכונות דומות לסכומים סופיים.

א. אסוציאטיביות

נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

נקבץ את איבריו לקבוצות

$$\begin{array}{lcllllllll} A_1 & = & a_1 & + & a_2 & + & \dots & + & a_{n_1} \\ A_2 & = & a_{n_1+1} & + & a_{n_1+2} & + & \cdots & + & a_{n_2} \\ A_3 & = & a_{n_2+1} & + & a_{n_2+2} & + & \cdots & + & a_{n_3} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

כאשר סדרת האינדקסים n_k עולה.

משפט 2: אם הטור (1) מתכנס, אזי גם הטור

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = (a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots \tag{2}$$

מתכנס לאותו סכום.

את ההוכחה המדויקת נשאיר לקורא, רק נציין שהסכומים החלקיים של הטור (2) הם תת-סדרות של הסכומים החלקיים של (1). ■

הערה 1: הטענה ההפוכה למשפט 2 אינה נכונה, כלומר אם טור עם סוגריים מתכנס, אזי הטור ללא הסוגרים אינו מתכנס בהכרח.

למשל, הטור $(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+\ldots$ מתכנס, למרות זאת הטור ללא סוגריים $1-1+1-1+\ldots$ מתבדר (דוגמה 1.2).

הערה 2: אם בטור (2) נוריד את הסוגריים ונקבל את הטור המתכנס (1), אזי לשני הטורים יהיה אותו סכום.

בכל זאת קיימים מקרים, שמהתכנסות (2) אפשר ללמוד על התכנסות (1).

משפט 3: אם בכל אחד מהסוגריים בטור (2) מופיעים איברים בעלי אותו סימן (הסימן יכול להשתנות מסוגריים לסוגריים), אזי מהתכנסות הטור (2) נובעת התכנסותו של (1).

הוכחה: נסמן על-ידי S_n ו- $\tilde{S}_n$ את הסכומים החלקיים של הטורים (1) ו-(2) בהתאמה. היות וסימני האיברים בכל סוגריים זהים, נקבל שעבור n בין המספרים n_{k-1} ו- n_k, S_n תהיה מונוטונית ולכן נמצאת בין $S_{n_k-1} = \tilde{S}_{k-1}$ ו- $S_{n_k} = \tilde{S}_k$. כלומר לכל $\varepsilon > 0$, קיים N_0, כך שלכל $k > N_0$: $|\tilde{S}_k - \tilde{S}| < \varepsilon$ ו- $|S_{n_{k-1}} - \tilde{S}| = |S_{k-1} - \tilde{S}| < \varepsilon$, לכן $|S_n - \tilde{S}| < \varepsilon$; מכאן $\lim_{n\to\infty} S_n = \tilde{S}$. ■

ב. **קומוטטיביות**

אחת מהתכונות החשובות של הסכומים הסופיים היא כי החלפת מקומותיהם של האיברים לא תשנה את הסכום. האם תכונה זו נשמרת גם לטורים אינסופיים? כלומר האם ישתנה סכום הטור המתכנס אם נשנה את סדר איבריו? ברור ששינוי מקומותיהם של מספר סופי של איברים אינו משנה את התכנסות הטור. נתבונן בדוגמה הבאה.

דוגמה 2: נסדר את איברי טור ליבניץ (דוגמה 1.3)

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots \tag{3}$$

באופן הבא

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \ldots \tag{4}$$

נוכיח שטור (4) מתכנס ל- $\frac{1}{2}\ln 2$.

נסמן על-ידי S_n ו- $\tilde{S}_n$ את הסכומים החלקיים של הטורים (3) ו-(4) בהתאמה. נחשב

$$\tilde{S}_{3n} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}S_{2n}$$

באופן דומה $\tilde{S}_{3n-1} = \frac{1}{2}S_{2n} + \frac{1}{4n}$; $\tilde{S}_{3n-2} = \frac{1}{2}S_{2n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n-2}$

היות ו- $\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_{3n} = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_{3n-2} = \frac{1}{2}\ln 2$.

אנו מגיעים למסקנה שטור (4) מתכנס ל- $\frac{1}{2}\ln 2$, כלומר טור מסודר מחדש מתכנס לסכום שונה מהסכום של הטור המקורי.

הסבר לתופעה זו ייתן את המשפט הבא.

משפט 4: (רימן, Riemann) אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{5}$$

מתכנס בתנאי, אזי ניתן לסדר את איבריו באופן כזה, שהטור המסודר מחדש יתכנס לכל מספר L הנתון מראש, ואף יתבדר.

הוכחה: נסמן על-ידי $p_1, p_2, \ldots$ את כל האיברים החיוביים של (5) הנימצאים באותו סדר כפי שהם מופיעים בטור הנתון. נסמן על-ידי $q_1, q_2, \ldots$ את הערך המוחלט של האיברים השליליים של (5) הרשומים באותו סדר כפי שהם מופיעים בטור הנתון.

נבנה שני טורים חיוביים: $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ (P) , $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ (Q).

ראשית, נוכיח שהטורים (P) ו-(Q) מתבדרים. יהי S_n סכום חלקי של טור (5). נסמן על-ידי P_n את סכום כל האיברים החיוביים הנימצאים ב-S_n, ועל ידי Q_n את סכום האיברים השליליים בערך המוחלט הנימצאים ב-S_n. מהתכנסות טור (5) נובע

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(P_n - Q_n) = S \qquad (6)$$

ומכיוון שההתכנסות היא רק בתנאי

$$\lim_{n\to\infty}(P_n + Q_n) = \infty \qquad (7)$$

מ-(6) נובע שאף אחד מטורים אלו אינו מתכנס או ששניהם מתכנסים. מ-(7) נובע שהטורים (P) ו-(Q) אינם מתכנסים יחד. לכן, שני טורים אילו מתבדרים, כלומר $\lim_{n\to\infty} P_n = \infty\ ;\ \lim_{n\to\infty} Q_n = \infty$.

יהי L מספר נתון מראש. ניבנה מהאיברים של (5) טור המתכנס ל-L לפי האלגוריתם הבא. היות והטור (P) מתבדר, ניתן לקחת מספר k_1 איברים, כך ש:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} > L \ge p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1-1}$$

נסמן $S_1 = p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1}$. ברור ש-$0 < S_1 - L \le p_{k_1}$.

היות והטור (Q) מתבדר, נוכל לקחת m_1 איברים, כך ש:

$$S_1 - q_1 - q_2 - \ldots - q_{m_1} < L \le S_1 - q_1 - q_2 - \ldots - q_{m_1-1}$$

נסמן $S_2 = S_1 - q_1 - q_2 - \ldots - q_{m_1}$, כמו-כן S_2 מקיים $0 < L - S_2 \le q_{m_1}$, נמצא k_2 כך ש:

$$S_2 + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2} > L \ge S_2 + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2-1}$$

נסמן $S_3 = S_2 + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2}$. ברור ש-$0 < S_3 - L \le p_{k_2}$. נמשיך באופן כזה ונקבל טור

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1}) - (q_1 + \ldots + q_{m_1}) + (p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2}) - \ldots \qquad (8)$$

טור (8) מכיל את כל האיברים של טור (5), נוכיח שהוא מתכנס ל-L, אמנם:

$|L - S_n| \le \begin{cases} p_{k_{\frac{n+1}{2}}} & \text{אי-זוגי } n \\ q_{m_{\frac{n}{2}}} & \text{זוגי } n \end{cases}$, היות וטור (5) מתכנס, הרי $a_n \to 0$ ולכן גם $p_n, q_n \to 0$. מאי-השיוויון האחרון נובע ש-$L = \lim_{n\to\infty} S_n$.

קיבלנו טור מסודר מחדש (8) המתכנס ל-L $(-\infty < L < \infty)$ הנתון מראש.

אם $L = \infty$ נפעיל תהליך דומה. ניקח $S_1 > 2$, אחר-כך $S_2 = S_1 - q_1$ וניבנה S_3 כך ש-$S_3 > 4$, $S_4 = S_3 - q_2$, ניבנה S_5 כך ש-$S_5 > 8$ וכו'. נמשיך באופן כזה ונקבל טור מסודר מחדש שמתבדר. ■

ראינו שבטור, המתכנס בתנאי, ניתן להחליף את מקומותיהם של אינסוף איברים ולשנות את התכנסותו. נראה עתה שטור מתכנס בהחלט מתנהג כמו סכום סופי.

משפט 5: (קושי). אם טור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (9)$$

מתכנס בהחלט לסכום S אזי כל טור המתקבל ממנו על-ידי שינוי סדר כלשהו של איבריו מתכנס בהחלט לאותו סכום.

הוכחה: נסמן על-ידי

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n \qquad (10)$$

את הטור המסודר מחדש.

נוכיח תחילה שהטור (10) מתכנס ל-S. כלומר מספיק להראות שלכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0, כך שלכל $n > N_0$ מתקיים

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a'_k - S\right| < \varepsilon \qquad (11)$$

נקבע $\varepsilon > 0$. מההתכנסות בהחלט של (9) (S הוא סכומו) ניתן למצוא N_0 כך ש:

$$\left|\sum_{k=1}^{N_0} a_k - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ו-} \quad \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (12)$$

נבחר $n > N_0$ כה גדול, שהסכום החלקי S'_n של הטור (10) יכיל את כל N_0 האיברים הראשונים של (9).

נתבונן ב- $\sum_{k=1}^{n} a'_k - S = \left(\sum_{k=1}^{n} a'_k - \sum_{k=1}^{N_0} a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} a_k - S\right)$ או

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a'_k - S\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} a'_k - \sum_{k=1}^{N_0} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N_0} a_k - S\right| < \left|\sum_{k=1}^{n} a'_k - \sum_{k=1}^{N_0} a_k\right| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (13)$$

כדי להשלים את ההוכחה, כלומר לקבל את (11), מספיק להראות ש:

$\left|\sum_{k=1}^{n} a'_k - \sum_{k=1}^{N_0} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ ואמנם

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a'_k - \sum_{k=1}^{N_0} a_k\right| = \left|\sum{}' a_k\right| \le \sum{}' |a_k| \qquad (14)$$

כאשר $\sum'$ הוא הסכום של $n-N_0$ האיברים בעלי האינדקסים k גדולים מ- N_0. אם נבחר עתה p כך שהמספר N_0+p יהיה הגדול ביותר בין האינדקסים של האיברים ב-$\sum'$ נקבל מ-(14) ש- $\sum' a_k \le \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |a_k|$. אי-השיוויון האחרון והשיוויונים (12) ו-(13) משלימים את הוכחת (11), כלומר, טור (10) מתכנס ל- S. ■

באופן דומה מוכיחים שטור $\sum_{k=1}^{\infty}|a'_k|$ מתכנס ולכן הטור המסודר מחדש (1) מתכנס בהחלט.

3. מבחן לייבניץ (Leibniz)

המבחנים שקיבלנו בפרק 2 יעילים לבדיקת התכנסות בהחלט של טורים כלליים אך אינם מאפשרים בדיקת התכנסות בתנאי. בסעיף זה נביא מבחן לבדיקת התכנסות בתנאי של קבוצה גדולה של טורים: טורים מחליפי סימן.

הגדרה 3: טור נקרא **מחליף סימן** אם כל איבריו מחליפים סימן לסירוגין.

נרשום טור זה באופן הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\ ,\ (a_n>0) \qquad (1)$$

משפט 6 (לייבניץ): אם הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, אזי, הטור המחליף סימן (1): א) מתכנס; ב) סכומו S מקיים $0<S<a_1$; ג) השארית $|r_n|<a_{n+1}$.

הוכחה:

א. נתבונן ב-

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n}) \qquad (2)$$

היות והסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת כל האיברים בסוגריים $a_{2k-1}-a_{2k}$ חיוביים. לכן סדרת הסכומים החלקיים $\{S_{2n}\}$ מונוטונית עולה. נוכיח עתה שהיא גם חסומה. נרשום את (2) באופן הבא:

$$S_{2n}=a_1-\underbrace{(a_2-a_3)}_{\text{חיובי}}-\underbrace{(a_4-a_5)}_{\text{חיובי}}-\ldots-\underbrace{(a_{2n-2}-a_{2n-1})}_{\text{חיובי}}-a_{2n}$$

לכן לכל n: $S_{2n}<a_1$, כלומר הסדרה $\{S_{2n}\}$ מונוטונית עולה וחסומה. לכן קיים $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$. מהשיוויון $S_{2n-1}=S_{2n}+a_{2n}$ ו- $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=0$ מקבלים ש- $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=S$ ולכן הסדרה $\{S_n\}$ מתכנסת ל-S, מכאן שהטור (1) מתכנס ל-S.

ב. מ-(2) נובע שלכל $n>2$, $S_{2n}-a_1<-(a_2-a_3)<0$, לכן אם נעבור לגבול כאשר $n\to\infty$ נקבל $S-a_1\le-(a_2-a_3)<0$ או $S<a_1$.

ג. נרשום את השארית ה-n-ית $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, היות ו- r_n הוא טור מחליף סימן, אזי לפי ב' נקבל $|r_n|<a_{n+1}$. ■

דוגמה 3: בדוק את התכנסות הטורים:

א. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$. ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, $(s>0)$. ג. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}$. ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n^7+3n}+\sqrt[3]{n+2}}$.

פתרון:

א. הטור הנבחן אינו מתכנס בהחלט, כי הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתבדר לפי מבחן האינטגרל. קל לבדוק ש- $\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}<\frac{1}{n\ln n}$ (נובע מתכונות הלוגריתם). $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}=0$ והטור הנתון מחליף סימן, לכן לפי מבחן לייבניץ הוא מתכנס.

ב. הסדרה $\left\{\frac{1}{n^s}\right\}$ מונוטונית יורדת לאפס לכל $s>0$ ולכן הטור מתכנס לפי משפט לייבניץ (התכנסות בהחלט היא עבור $s>1$, ראה דוגמה 2.7).

ג. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מתבדר (השוואה עם טור הרמוני ומכיוון ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}=e$). לכן הטור הנבדק לא מתכנס בהחלט. נבדוק התכנסות בתנאי. נראה שהסדרה $\left\{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ מונוטונית יורדת. אמנם $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\overset{?}{<}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ או $\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}<\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ וזה שקול ל:

אי-השיוויון האחרון מתקיים $\frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}$ מכאן, $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$

לכל n טבעי, כלומר הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ מונוטונית יורדת לאפס (בדוק!).

הטור הנבדק מחליף סימן ולפי משפט 6 מתכנס.

ד. נרשום את הטור באופן הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{2\sin^2\frac{1}{2n}} = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{2n}$

ברור שהטור הנ"ל מחליף סימן ואינו מתכנס בהחלט (דוגמה 2.2). הסדרה $\left\{\sin\frac{1}{2n}\right\}$ מונוטונית יורדת לאפס. לכן הטור הנבדק מתכנס.

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n^7+3n}+\sqrt[3]{n+2}}$ מתכנס (השוואה עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$) לכן הטור הנתון מתכנס בהחלט.

הערה 3: במשפט 6, התנאי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ הוא תנאי הכרחי ותנאי המונוטוניות של הסדרה $\{a_n\}$ הוא מספיק בלבד. כלומר, אם $\{a_n\}$ לא מונוטונית, הטור יכול להתכנס.

דוגמה 4: נבדוק התכנסותם או התבדרותם של הטורים מחליפי הסימן הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-(-1)^n} = -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\dots$.

ב. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\dots$. ג. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}$.

פתרון:

א. הטור מחליף סימן, האיבר הכללי שואף לאפס, אך הסדרה $\left\{\frac{1}{n-(-1)^n}\right\}$ אינה מונוטונית לכן משפט 6 לא נותן תשובה להתכנסות הטור. הטור הניבדק מתכנס בתנאי (ראה דוגמה 1ג').

ב. סדרת איברי הטור אינה מונוטונית ומתכנסת לאפס. נוכיח שהטור מתבדר. נתבונן ב- $S_{2n} = \sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}-1}-\frac{1}{\sqrt{k}+1}\right) = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{2}{k-1}$, במילים אחרות S_{2n} שווה לסכום n האיברים הראשונים של הטור המתבדר $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k-1}$ ולכן $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \infty$, כלומר הטור הנתון מתבדר.

ג. הטור מתבדר כי אינו מקיים את התנאי ההכרחי. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$.

דוגמה 5: הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}$ מתכנס וחשב את סכומו עם דיוק של 0.01.

פתרון: נבדוק התכנסות בהחלט. לפי מבחן דלמבר $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{3} < 1$ הטור מתכנס בהחלט. הטור הנ"ל מחליף סימן, הסדרה $\left\{\frac{n}{3^n}\right\}$ מונוטונית יורדת לאפס (בדוק!) לכן לפי משפט 6 השארית $r_n < \frac{n+1}{3^{n+1}} < 0.01$, מאי-השיוויון הזה נמצא את ה-n המינימלי המקיים אותו. לאחר חישוב מקבלים $n = 5$, לכן

$$S \approx \sum_{n=1}^{5}\frac{(-1)^n n}{3^n} = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}-\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}-\frac{5}{3^5} = -0.19$$

דוגמה 6: בדוק את התכנסות או התבדרות הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}-(-1)^n}$.

פתרון: הטור מחליף סימן אך הסדרה $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n}-(-1)^n}\right\}$ אינה מונוטונית.

לכן לא ניתן להשתמש במשפט לייבניץ. נרשום את האיבר הכללי באופן הבא:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}-(-1)^n} = \frac{(-1)^n\left[\sqrt[3]{n}+(-1)^n\right]}{\sqrt[3]{n^2}-1} = \frac{(-1)^n\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2}-1}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}-1}$$

הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2}-1}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}-1}$ מתבדר (בדוק!). לכן, הטור הנבדק מתבדר.

תרגילים:

1. בדוק את התכנסות הטורים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n}{6n-5}$. ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{n(3n+1)}$. ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$. ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left[n-(-1)^n\right]^{\frac{2}{3}}}$ (רמז: חקור את S_{2n} ו- S_{2n+1}).

.2 הוכח שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ מתכנס בהחלט כאשר $p>1$ ומתכנס בתנאי כאשר $\frac{1}{2}<p\le 1$.

.3 הערך את שאריות R_4 ו- R_5 של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$.

.4 כמה איברים דרושים לחישוב סכום הטור:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ עם דיוק של 0.01. ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$ עם דיוק של 10^{-6}.

.5 הוכח שהטור המתקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ על ידי הסידור החדש

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\ldots$$

מתבדר.

.6 בדוק את התכנסות הטור $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots$

(רמז: השתמש במבחן לייבניץ ומשפט 3).

.7 הוכח שלכל $p>0$ הסכום S של הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^p}$ מקיים $\frac{1}{2}<S<1$.

.4 מבחני דיריכלה (Dirichlet) ואבל (Abel)

להלן נביא מבחנים "עדינים" יותר ממבחן לייבניץ.

משפט 7 (דיריכלה): נתון הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \qquad (1)$$

אם: א. הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית. ב. $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. ג. כל הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסומים, כלומר קיים מספר M כך שלכל n, $|S_n|<M$ אזי הטור (1) מתכנס.

משפט 8 (אבל): אם: א. הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית וחסומה. ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אזי הטור (1) מתכנס.

לפני שנעבור להוכחת משפטים 7 ו-8 נתבונן במספר דוגמאות.

דוגמה 7: נוכיח את משפט לייבניץ 6 על-ידי משפט 7.

הוכחה: נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ אשר בו הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת לאפס.

נגדיר טור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, כל הסכומים החלקיים שלו שווים ל-0 או ל-1 ולכן חסומים. לפי משפט 7 הטור הנתון מתכנס.

דוגמה 8: בדוק את התכנסות הטורים:

א. $1+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{2}{11}+\ldots$. ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ (x קבוע, $x\ne 2\pi\ell, \ell=0,\pm1,\ldots$).

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$.

פתרון:

א. נסמן על-ידי $a_n=\frac{1}{2n-1}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=1+1-2+1+1-2+\ldots$. בסימנים אלה הטור הנבדק הוא מהצורה (1). הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת לאפס. הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ הם $S_{3k-2}=1$, $S_{3k-1}=2$, $S_{3k}=0$ $(k=1,2,\ldots)$ ולכן חסומים. לפי משפט 7 הטור מתכנס.

ב. נסמן $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\cos nx$. היות והסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ מונוטונית יורדת לאפס, מספיק להוכיח שהסכומים החלקיים של הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ חסומים על ידי מספר שאינו תלוי ב-n.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sum_{k=1}^{n}\frac{2\cos kx\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]=$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right]$$

והיות ש- $|\sin\alpha| \le 1$, נקבל $|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$, קיבלנו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{\infty}\cos kx$ מקיים את תנאי משפט 7 ולכן הטור הנבדק מתכנס.

ג. הטור הנתון אינו מתכנס בהחלט (בדוק!). נסמן על-ידי $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס לפי משפט לייבניץ. הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית עולה ומתכנסת ל- e^2 (בדוק!) ולכן היא חסומה. לפי משפט 8 הטור הנבדק מתכנס.

להוכחת המשפטים 7 ו-8 נקדים את הטענה הבאה.

טענה 1: יהיו $\{a_k\}$ ו- $\{b_k\}$ שתי סדרות מספרים ו- n,p שני מספרים טבעיים קבועים. **יהי** $S_n = b_1+b_2+\ldots+b_n$ אזי מתקיים

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(a_k - a_{k+1}) + S_{n+p}a_{n+p} - S_{n-1}a_n \qquad (2)$$

הוכחה: נציב באגף השמאלי של (2) את $b_k = S_k - S_{k-1}$, ונקבל

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k a_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1}a_k$$

בסכום השני נקטין את האינדקס ב-1

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k a_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k a_{k+1} = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k a_k + S_{n+p}a_{n+p} - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k a_{k+1} - S_{n-1}a_n =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(a_k - a_{k+1}) + S_{n+p}a_{n+p} - S_{n-1}a_n$$

והוכחנו את זהות (2). ■

הוכחת משפט 7: להוכחת התכנסות הטור (1) מספיק לראות כי

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \forall p$ – טבעי

מתקיים $\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon$ (קריטריון קושי).

נבחר $\varepsilon > 0$ ונסמן על ידי M את החסם של הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

היות והסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת לאפס קיים N כך שלכל $n > N$, מתקיים

$$0 \le a_n < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (3)$$

תוך שימוש בטענה 1 נקבל

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| \le \sum_{k=n}^{n+p-1} |S_k|\cdot|a_k - a_{k+1}| + |S_{n+p}|\cdot a_{n+p} + |S_{n-1}|\cdot a_n \le$$

$$\le M\left\{\sum_{k=n}^{n+p-1}(a_k - a_{k+1}) + a_{n+p}\right\} + M a_n$$

היות ו- $\sum_{k=n}^{n+p-1}(a_k - a_{k+1}) + a_{n+p} = a_n$ תוך שימוש ב-(3), נקבל $\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| \le 2M a_n < \varepsilon$,

כלומר טור (1) מתכנס. ■

הוכחת משפט 8: נראה שהמשפט הנ״ל נובע ישירות מהמשפט הקודם. הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת. נסמן $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. נרשום את הטור (1) בצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + a\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

הטור הראשון מתכנס לפי משפט 7, והשני מתכנס מהנתונים, לכן הטור הנבדק מתכנס גם הוא. ■

תרגילים: בדוק את התכנסות הטורים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(3^n - 1)}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n - 3^{2n}}$.

5. מכפלת הטורים

נסיים את הפרק בעוד פעולה אחד עם הטורים – מכפלה. יהיו

$$\textbf{(A)}\quad A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad\qquad \textbf{(B)}\quad B=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

שני טורים. נסמן על ידי A_n ו-B_n את הסכומים החלקיים של הטורים (A) ו-(B) בהתאמה.

הגדרה 4: הטור המורכב מכל המכפלות a_ib_j כאשר $i,j=1,2,3,\dots$ נקרא **מכפלת הטורים** (A) ו-(B).

כדי לסדר את איברי הטור החדש נתבונן בטבלה המכילה את כל המכפלות a_ib_j

$$\begin{array}{ccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_ib_1 & a_ib_2 & a_ib_3 & a_ib_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

את איברי הטבלה ניתן לסדר באינסוף אפשרויות.

נביא שתי דרכים נפוצות:

א. לפי ריבועים

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & & a_1b_2 & \rightarrow & a_1b_3 & \cdots \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
a_2b_1 & \rightarrow & a_2b_2 & & a_2b_3 & \cdots \\
 & & & & \downarrow & \\
a_3b_1 & \leftarrow & a_3b_2 & \leftarrow & a_3b_3 & \cdots \\
\downarrow & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

$$\textbf{(1)}\quad a_1b_1+\underbrace{a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1}+\underbrace{a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1}+\dots$$

ב. לפי אלכסונים

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1b_1 & \rightarrow & a_1b_2 & & a_1b_3 & \rightarrow & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_2b_1 & & a_2b_2 & & a_2b_3 & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_3b_1 & & a_3b_2 & & a_3b_3 & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

$$\textbf{(2)}\quad a_1b_1+\underbrace{a_1b_2+a_2b_1}+\underbrace{a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3}+\dots=\sum_{k=1}^{\infty}(a_1b_k+a_2b_{k-1}+\dots+a_kb_1)$$

משפט 9 (קושי): אם הטורים (A) ו-(B) מתכנסים בהחלט, אזי מכפלת הטורים האלה מתכנסת בהחלט ל- $A\cdot B$.

הוכחה: נתון שגם הטורים $A^*=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, $B^*=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ מתכנסים.

נסדר את איברי מכפלת הטורים בסדר כלשהו. נקבל

$$\textbf{(3)}\qquad \left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}b_i\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{i_k}b_{j_k}$$

נוכיח שהטור (3) מתכנס בהחלט. נתבונן ב-

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}|a_{i_k}b_{j_k}|=|a_{i_1}a_{j_1}|+|a_{i_2}b_{j_2}|+\dots+|a_{i_n}b_{j_n}|$$

נסמן על ידי α את המקסימום של האינדקסים $i_1,i_2,\dots,i_n$, $j_1,j_2,\dots,j_n$ נקבל

$$S_n\le\left(|a_1|+|a_2|+\dots+|a_\alpha|\right)\left(|b_1|+|b_2|+\dots+|b_\alpha|\right)\le A^*B^*$$

היות והסדרה $\{S_n\}$ מונוטונית עולה וחסומה היא מתכנסת, כלומר הטור (3) מתכנס בהחלט. כדי למצוא את סכומו נסדר איבריו לפי (1) (ריבועים).

נקבל שהסכומים החלקיים שלו מהווים סדרה

$A_1\cdot B_1\ ,\ A_2\cdot B_2\ ,\ A_3\cdot B_3,\dots,A_n\cdot B_n,\dots$ המתכנסת ל- $A\cdot B$. ■

לסיום נביא ללא הוכחה את המשפט הבא:

משפט 10: אם טור (A) מתכנס בהחלט וטור (B) מתכנס, אזי מכפלת הטורים לפי נוסחה (2) מתכנסת ל- $A\cdot B$.

נציין שאם שני הטורים מתכנסים בתנאי אזי מכפלתם ואפילו ריבוע של אחד מהם יכול להתבדר.

דוגמה 9: נחשבאת ריבועו של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ לפי נוסחה (2).

פתרון:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}+\frac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(-1)^{k-2}}{\sqrt{k-1}}+\dots+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{k-1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}\cdot 1}\right)$$

נוכיח שהטור הנ"ל מתבדר. מכיון ש: $\frac{1}{\sqrt{m}\cdot\sqrt{k-m+1}}>\frac{1}{k}$, $(m=1,2,\dots,k)$, האיבר הכללי $\frac{1}{1\cdot\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{k-1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}\cdot 1}>\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\dots+\frac{1}{k}=1$ אינו שואף לאפס ולכן הטור מתבדר.

תרגילים:

1. הכפל את הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$. האם הטור שקיבלת מתכנס?

2. בדוק את התכנסות הטור $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$.

תרגילים נוספים:

1. הוכח:

א. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אזי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\{a_n\}$ סדרה חשבונית $(a_n\neq 0)$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס וחיובי והסדרה $\{b_n\}$ חסומה, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס בהחלט.

ד. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בתנאי והטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס בהחלט, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס בהחלט.

2. בדוק שאם בתרגיל 1ג' הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אך לא חיובי בהכרח הטענה לא נכונה (תן דוגמה נגדית).

בדוק את התכנסות הטורים:

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n^{\alpha}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}\right)$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\sin n}{n}}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

6. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{[n+(-1)^n]^p}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)$ (השווה עם תרגיל 1ד' בעמוד 15).

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}$, $(\alpha>0)$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-\ln n)^{\alpha}}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{1+n^2a^2}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n-n^2}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$, כאשר $\left[\frac{n+2}{4}\right]$ ערך שלם.

14. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1!+2!+\dots+n!}{(2n)!}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{n+7}\right)^{11}\frac{3^n+2}{4^n-25}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$.

18. מצא את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$, תוך פירוק לסכום של שלושה טורים.

פרק 4
סדרות של פונקציות

בפרקים הבאים נחקור סדרות וטורים שאיבריהם יהיו פונקציות המוגדרות בתחום נתון.

1. הגדרת סדרות של פונקציות. התכנסות

הגדרה 1: יהי D תחום ב- R^1. אם לכל n טבעי ניתן להתאים פונקציה $f_n(x)$ המוגדרת ב- D, אזי נאמר שקבוצת הפונקציות $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ היא **סדרה של פונקציות**.

D הוא **תחום ההגדרה** של הסדרה. נסמן את הסדרה ב- $\{f_n(x)\}$.

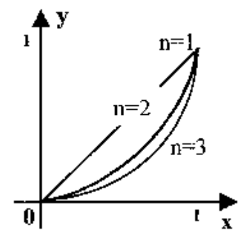
דוגמה 1: נדגים סדרות שונות של פונקציות:

א. סדרת הפונקציות $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ המוגדרת בקטע $[0,1]$

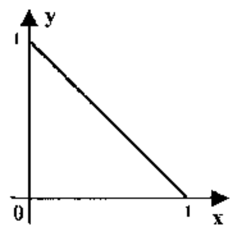
$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x^2$

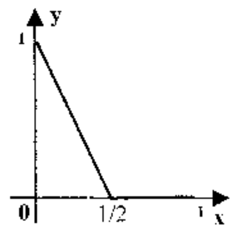
$f_3(x) = x^3$



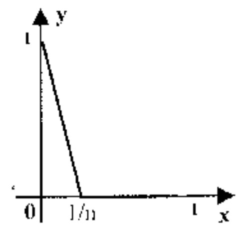
ב. יהיו $f_n(x) = \begin{cases} 1-nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$, $n = 1,2,\dots$ פונקציות המוגדרות בתחום $[0,1]$. להלן תרשימים של $f_1(x), f_2(x), f_n(x)$



$f_1(x)$



$f_2(x)$



$f_n(x)$

בכל נקודה x_0 מהתחום D נקבל סדרת המספרים $\{f_n(x_0)\}$. למשל מסדרת הפונקציות מדוגמה 1 בנקודה $x_0 = 2$ מקבלים סדרת מספרים $\{2^n\} = 2, 2^2, 2^3, \dots$.

נעבור להגדרת הגבול של סדרת הפונקציות.

הגדרה 2: אומרים שסדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת בנקודה x_0, נרשום

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) \qquad (1)$$

אם סדרת המספרים $\{f_n(x_0)\}$ מתכנסת למספר $f(x_0)$.

הגדרה 3: קבוצת כל הנקודות $x_0 \in D$ שבהן סדרת הפונקציות מתכנסת נקראת **תחום ההתכנסות** של הסדרה.

נניח ש- E הוא תחום ההתכנסות של הסדרה $\{f_n(x)\}$. לכל x_0 מ- E מתאים ערך $f(x_0)$ לפי (1). כל הערכים הגבוליים מגדירים **פונקציה** $f(x), x \in E$ הנקראת **פונקציה גבולית**.

דוגמה 2: מצא את הפונקציות הגבוליות של הסדרות:

א. $\{x^n\},\ 0 \le x \le 1$. ב. $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\},\ |x| < \infty$. ג. $\left\{\frac{1}{1+nx}\right\},\ 0 \le x \le 1$.

ד. $\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\},\ 0 \le x \le 1$. ה. $\left\{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\right\},\ |x| < \infty$.

פתרון:

א. נקבע x_0 ונחשב $\lim_{n\to\infty} x_0^n$. ברור שאם $0 \le x_0 < 1$ הגבול הוא אפס, ואם $x_0 = 1$ הגבול שווה לאחד. לכן הפונקציה הגבולית היא $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

ב. לכל x_0 קבוע $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^n = e^{x_0}$, לכן $f(x) = e^x$.

ג. נשים לב שכאשר $x \ne 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$. אם $x = 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$,

כלומר הפונקציה הגבולית היא $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

ד. לאחר חישוב הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$, נקבל $f(x) \equiv 0$.

ה. לכל x קבוע $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} = |x|$, לכן $f(x) = |x|$.

2. התכנסות במידה שווה

בדוגמה 2 ראינו שסדרת פונקציות רציפות מתכנסת לפעמים לפונקציה לא-רציפה (א',ג') ולפעמים לפונקציה רציפה. בסעיף זה נקבל את התנאים שעבורם הפונקציה הגבולית תהיה רציפה. נציין שאם הפונקציה הגבולית $f(x)$ מוגדרת ב- E אזי בכל נקודה x_0 מ- E מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=f(x_0) \qquad (1)$$

במילים אחרות, לכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon,x_0)$, כך שלכל $n>N(\varepsilon,x_0)$ ו- $x_0\in E$ קבוע מתקיים

$$|f(x_0)-f_n(x_0)|<\varepsilon \qquad (2)$$

ברור שלכל ε קבוע $N(\varepsilon,x_0)$ תלוי ב- x_0 ומשתנה מנקודה לנקודה.

השאלה הטבעית כאן היא האם ניתן למצוא N משותף לכל ה-x-ים מתחום E.

נציג מספר דוגמאות.

דוגמה 3: נתבונן בסדרה $|x|<\infty$, $\{f_n(x)\}=\left\{\frac{1}{x^2+n}\right\}$. נחשב פונקציה גבולית

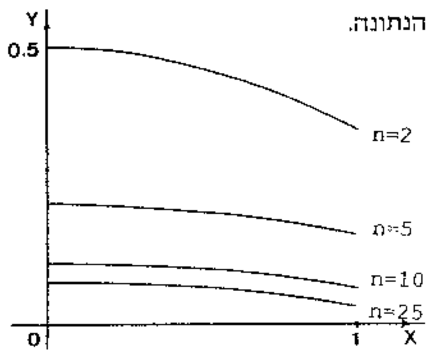
$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^2+n}=0$$

נקבע $\varepsilon>0$ ונמצא N, כך שיתקיים (2)

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{x^2+n}\le\frac{1}{n}<\varepsilon \qquad (3)$$

נבחר $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. קיבלנו שקיים N התלוי ב- ε בלבד, כך שלכל x ($|x|<\infty$) מתקיים (2).

נתאר גרפית מספר פונקציות מהסדרה הנתונה.



$$f_2(x)=\frac{1}{x^2+2}$$

$$f_5(x)=\frac{1}{x^2+5}$$

$$f_{10}(x)=\frac{1}{x^2+10}$$

$$f_{25}(x)=\frac{1}{x^2+25}$$

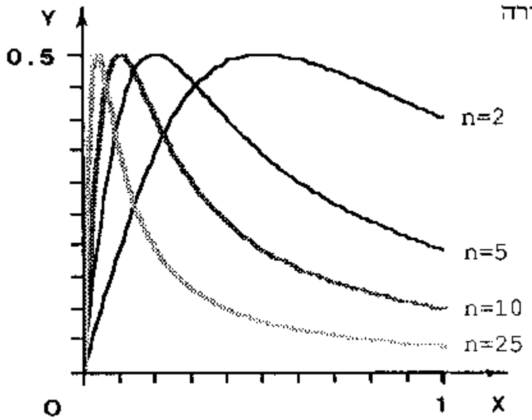
דוגמה 4: נחקור את הסדרה: $0\le x\le 1$, $\{f_n(x)\}=\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$.

הפונקציה הגבולית $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0$, מכאן

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}<\frac{1}{nx}<\varepsilon \qquad (4)$$

נראה שאי-אפשר למצוא N משותף לכל $x\in[0,1]$. אמנם, לכל N ניתן לבחור $x=\frac{1}{n}\in[0,1]$ ולקבל $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$. כלומר מ-(4) נובע $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<\varepsilon$, אבל אם $\varepsilon<\frac{1}{2}$ לא ניתן למצוא N משותף לכל x מהקטע [0,1].

נתאר גרפית ארבע פונקציות מהסדרה



$$f_2(x)=\frac{2x}{1+4x^2}$$

$$f_5(x)=\frac{5x}{1+25x^2}$$

$$f_{10}(x)=\frac{10x}{1+100x^2}$$

$$f_{25}(x)=\frac{25x}{1+625x^2}$$

מהגרפים לומדים שלכל אחד מהפונקציות $f_n(x)$ יש גיבנת (שפיץ) בנקודה $x=\frac{1}{n}$.

כלומר, הסדרה מתכנסת לפונקציה הגבולית $f(x)\equiv 0$ עם גיבנת.

הגדרה 4: אומרים שסדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(x)$ בתחום E, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon)$ **(התלוי ב- ε בלבד)** כך שלכל $n>N(\varepsilon)$ ולכל $x\in E$, מתקיים:

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (5)$$

דוגמה 5: הסדרה מדוגמה 3 מתכנסת במידה שווה בתחום $|x|<\infty$, והסדרה מדוגמה 4 אינה מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$.

הערה 1: מהגדרת 4 נובע: אם הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ל- $f(x)$ בתחום E, אזי היא מתכנסת במידה שווה ל- $f(x)$ בכל חלק של התחום E. ■

נציין: סדרה שאינה מתכנסת במידה שווה ב- E יכולה להתכנס במידה שווה בחלקו של E.

דוגמה 6: בדוק את ההתכנסות במידה שווה של הסדרה (ראה דוגמה 4):

$$\{f_n(x)\}=\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\},\ \frac{1}{2}\le x\le 1$$

פתרון: ראינו (דוגמאות 4, 5) שהסדרה הנ"ל לא מתכנסת במידה שווה בתחום $[0,1]$ לפונקציה $f(x)=0$. בתחום שלנו $\frac{1}{2}\le x\le 1$, מקבלים

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}<\frac{1}{nx}<\frac{2}{n}<\varepsilon$$

לכן $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ והוא לא תלוי ב- x. כלומר, הסדרה מתכנסת במידה שווה ב- $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

3. קריטריונים להתכנסות במידה שווה

בסעיף זה נביא שיטה לבדיקת התכנסות במידה שווה לסדרות של פונקציות.

משפט 1: (**קריטריון קושי**). סדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה בתחום E אם ורק אם

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\ \textbf{(בלבד)},\ \forall n>N(\varepsilon),\ \forall p\text{ - טבעי},\ \forall x\in E$$

מתקיים

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon \qquad (6)$$

הוכחה:

כיוון I. תהי $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ל- $f(x)$ ב- E, כלומר, לכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon)$ כזה שלכל $n>N(\varepsilon)$ מתקיים $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ לכל x מ- E. לכן

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|=|f_{n+p}(x)-f(x)+f(x)-f_n(x)|\le|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<2\varepsilon$$

כלומר מתקיים (6).

כיוון II. משום ש-(6) מתקיים לכל p-טבעי, p ישאף לאינסוף $(p\to\infty)$ באי-שוויון (6), נקבל $|f(x)-f_n(x)|\le\varepsilon$, היות ו- $\varepsilon>0$ כלשהו נקבל את הטענה. ■

משפט 2: סדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ל- $f(x)$ בתחום E אם ורק אם

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=0 \qquad (7)$$

הוכחה:

א. תהי $\{f_n(x)\}$ סדרה מתכנסת במידה שווה ל- $f(x)$ ב- E. לפי הגדרה 4

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\forall n>N(\varepsilon),\forall x\in E:\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

מכאן מקבלים ש: $\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$, כלומר מתקיים (7).

ב. נניח שמתקיים (7). זאת אומרת ש:

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\forall n>N(\varepsilon):\ \sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

כיוון ש- $|f_n(x)-f(x)|\le\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|$ לכל $x\in E$, זוהי הגדרת ההתכנסות במידה שווה. ■

דוגמה 7: בדוק התכנסות או אי-התכנסות במידה שווה של הסדרות הבאות:

א. $\left\{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\right\},\ |x|<\infty$

ב. $\left\{\frac{x}{1+n^2x^2}\right\},\ 0\le x\le 1$

ג. $\{nxe^{-n^2x^2}\},\ 0\le x<\infty$

ד. $\{nxe^{-n^2x^2}\},\ 2\le x<\infty$

ה. $\left\{\frac{\cos nx}{1+x^2+n^2}\right\},\ |x|<\infty$.

פתרון:

א. נמצא פונקציה גבולית. לכל x קבוע $\lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}=|x|$.

נבדוק האם ההתכנסות ל- $|x|$ היא במידה שווה. נתבונן ב-

$$0<\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-|x|\right|=\left|\frac{\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-|x|\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+|x|\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+|x|}\right|=\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+|x|}\le\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

לכן היות ו- $0<\sup_{|x|<\infty}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-|x|\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$.

לפי משפט 2, הסדרה מתכנסת במידה שווה ב- $|x|<\infty$.

ב. בדוגמה 2ד' קיבלנו שהפונקציה הגבולית היא $f(x)\equiv 0$.

נבדוק האם התכנסות היא במידה שווה בקטע $[0,1]$. נתבונן ב-

$$r(x) = |f_n(x)-f(x)| = \frac{x}{1+n^2x^2}-0 = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

נמצא מקסימום של $r(x)$, בקטע $[0,1]$. לשם כך ניגזור $r'(x)=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$.

מכאן הנקודות הקריטיות הן $x=\pm\frac{1}{n}$. קל לבדוק של- $r(x)$ יש מקסימום בנקודה $x=\frac{1}{n}$, כלומר

$$\max r(x) = \max|f_n(x)-f(x)| = \frac{\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2n} \to 0$$

לכן הסדרה הנתונה מתכנסת במידה שווה ל- $f(x)\equiv 0$ ב- $[0,1]$.

ג. לכל $x\ge 0$ פונקציה גבולית היא

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{e^{n^2x^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{2nx^2e^{n^2x^2}} = 0$$

נחשב $r(x)=f_n(x)-f(x)=nxe^{-n^2x^2}$, תוך שימוש בניגזרת של $r(x)$ נקבל של- $r(x)$ יש מקסימום בנקודה $x=\frac{1}{n\sqrt{2}}$, היות ו- $\frac{1}{n\sqrt{2}}\in[0,\infty)$, נקבל ש:

$\max r(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ לא שואף לאפס, ולכן אין התכנסות במידה שווה.

ד. נשתמש בתוצאות התרגיל הקודם ונבדוק את המקסימום של $r(x)$ בתחום $x\ge 2$. היות והניגזרת $r'(x)=(1-2n^2x^2)e^{-n^2x^2}$ שלילית לכל $x\ge 2$ הפונקציה $r(x)$ יורדת בתחום זה ולכן $\max\limits_{x\ge 2} r(x)=r(2)=2ne^{-4n^2}\underset{n\to\infty}{\to}0$.

כלומר, הסדרה מתכנסת במידה שווה ב- $[2,\infty)$.

ה. לאחר חישוב $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos nx}{1+n^2+x^2}$ מקבלים שהפונקציה הגבולית היא $f(x)\equiv 0$.

כיוון ש- $|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{\cos nx}{1+n^2+x^2}\right|<\frac{1}{n^2}\underset{n\to\infty}{\to}0$ הסדרה הנחקרת מתכנסת במידה שווה.

4. רציפות הפונקציה הגבולית

בסעיף זה נביא תנאי מספיק לרציפות של הפונקציה הגבולית.

משפט 3: אם סדרת פונקציות רציפות $\{f_n(x)\}$ בתחום E מתכנסת במידה שווה ב-E לפונקציה $f(x)$, אזי $f(x)$ רציפה ב- E.

הוכחה: נקבע $\varepsilon>0$. משום ש- $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ל- $f(x)$ ב- E, קיים $N(\varepsilon)$ כך שלכל x מ- E ולכל $n>N(\varepsilon)$ מתקיים

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad \textbf{(8)}$$

ניקח $n_0>N$ קבוע. מרציפות $f_n(x)$ בנקודה $x_0\in E$ מקבלים של- $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל ה-x-ים המקיימים $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים

$$|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad \textbf{(9)}$$

נבדוק את הרציפות של $f(x)$ בנקודה x_0 ונקבל

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-f_{n_0}(x)+f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)+f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|\le$$

$$\le|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|$$

תוך שימוש ב-(8) ו-(9) מקבלים שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל x המקיימים $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$, כלומר $f(x)$ רציפה בכל נקודה x_0 השייכת לתחום E. ■

הערה 2: התכנסות במידה שווה היא רק תנאי מספיק לרציפות של הפונקציה הגבולית. בדוגמה 7ג' ראינו סדרה שלא מתכנסת במידה שווה, אך הפונקציה הגבולית שלה $f(x)\equiv 0$ רציפה.

מסקנה 1: אם סדרת הפונקציות הרציפות בתחום E מתכנסת לפונקציה לא רציפה ב- E, אזי ההתכנסות היא לא במידה שווה.

דוגמה 8: הוכח שהסדרות:

א. $\{x^n\}$, $0\le x\le 1$. ב. $\left\{\frac{1}{1+nx}\right\}$, $0\le x\le 1$ לא מתכנסת במידה שווה.

פתרון:

א. הפונקציה הגבולית (דוגמה 2א') $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, 0\le x<1\\ 1, x=1\end{cases}$ לא רציפה ב- $[0,1]$ ולכן ההתכנסות של הסדרה הנתונה היא לא במידה שווה.

ב. נשאיר את ההוכחה לקורא (ראה דוגמה 2ג').

נביא למען השלמות ללא הוכחה, משפט הפוך (במובן מסויים) למשפט 3.

משפט 4: (דיני Dini). תהי $\{f_n(x)\}$ סדרת הפונקציות המקיימת:

א. $\{f_n(x)\}$ לא עולה (או לא יורדת) בכל נקודה של $[a,b]$.

ב. $\{f_n(x)\}$ מתכנסת על $[a,b]$ לפונקציה $f(x)$.

ג. כל הפונקציות $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ ו- $f(x)$ רציפות ב- $[a,b]$.

אזי הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ל- $f(x)$ ב- $[a,b]$. ■

תרגילים:

בתרגילים 1-7 מצא את הגבול של סדרות הפונקציות, ובדוק האם ההתכנסות היא במידה שווה או לא:

1. $\{x^n\}$: א. $0 \le x \le \frac{1}{2}$. ב. $0 \le x \le 1$.
2. $\{x^n - x^{n+1}\}, 0 \le x \le 1$.
3. $\{x^n - x^{2n}\}$: א. $0 \le x \le 1$. ב. $\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}$.
4. $\left\{\frac{nx}{2+n+x}\right\}$ $0 \le x \le 1$.
5. $\{\mathrm{arctg}\, nx\}$, $0 < x < \infty$.
6. $\{x \cdot \mathrm{arctg}\, nx\}$, $0 \le x < \infty$.
7. $\{n(x^{\frac{1}{n}} - 1)\}$, $1 \le x \le 2$.
8. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בהקטע $[a,b]$. הוכח שהסדרה $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{[nf(x)]}{n}\right\}$ (כאן $[f_n(x)]$ ערך שלם) מתכנסת במידה שווה ל- $f(x)$ ב- $[a,b]$ (רמז: רשום $[nf(x)] = nf(x) - g_n(x)$ כאשר $0 \le g_n(x) < 1$ לכל x).
9. עבור אילו ערכים של α הסדרה $\{f_n(x)\} = \{n^\alpha x e^{-nx}\}$ מתכנסת במידה שווה ב- $x \ge 0$.
10. הוכח שסדרה $\{n^2 x^2 e^{-n^2 x^2}\}$ לא מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,\infty)$ אבל כן מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$.

פרק 5
טורי פונקציות

1. הגדרות ותחום התכנסות

הגדרה 1: תהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות המוגדרות ב- E. הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \tag{1}$$

נקרא **טור פונקציות**.

נציין שבנקודה קבועה x_0 הטור (1) הוא טור מספרים $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

הגדרה 2: אוסף כל הנקודות ב- E שבהן הטור (1) מתכנס נקרא **תחום ההתכנסות של הטור.**

בחקירת טורים פונקציונליים יחד עם בעיית מציאת תחום ההתכנסות של הטור, מתעוררות בעיות פונקציונליות של סכום הטור כגון: רציפות, אינטגרביליות וגזירות. נעבור למציאת תחומי ההתכנסות של הטורים. נציין כי ניתן להשתמש בכל המבחנים, שקיבלנו עבור טורים מספריים, גם במקרה של טורי פונקציות.

דוגמה 1: מצא את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$. ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}, (x \ne \pm 1)$. ג. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \sin\frac{x}{2^n}$.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 nx}, (x > 0, x \ne \frac{1}{n})$. ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$. ו. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}(nx-x-n)}{n(n-1)}$.

פתרון:

א. נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n \tag{2}$$

עבור כל x קבוע (2) הוא טור חיובי. תוך שימוש במבחן קושי (משפט 2.7), נקבל שטור (2) מתכנס אם מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n}<1$ או $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ מכאן $x>0$. כלומר, טור (2) מתכנס עבור $x>0$ ומתבדר עבור $x<0$ ולכן הטור הנבדק מתכנס בהחלט עבור $x>0$ ומתבדר כאשר $x<0$. נשאר רק לבדוק מה קורה בנקודה $x=0$ שבה הגבול שווה ל- 1. נציב $x=0$ בטור הנתון ונקבל $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ המתכנס בתנאי לפי מבחן לייבניץ (משפט 3.6).

הטור הנבדק מתכנס עבור $x\ge 0$.

ב. נחקור את הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right|$. נחשב:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}|\cdot|1-x^n|}{|1-x^{n+1}|\cdot|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|\cdot|1-x^n|}{|1-x^{n+1}|}=\begin{cases}|x|, & |x|<1 \text{ כאשר}\\ 1, & |x|>1 \text{ כאשר}\end{cases}$$

לפי מבחן דלמבר (משפט 2.6) הטור הנחקר מתכנס בהחלט עבור $|x|<1$. עבור $|x|>1$ מקבלים $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=-1$ (לא מתקיים התנאי ההכרחי, לכן הטור מתבדר). הטור מתכנס לכל $|x|<1$.

ג. נבנה טור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x^{n-1}|\cdot\sin\frac{|x|}{2^n}$. מכיוון ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n-1}\cdot\sin\frac{|x|}{2^n}}{\frac{|x|^n}{2^n}}=1$ לכל x קבוע השונה מאפס, הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{2^n}$ מתכנס עבור $|x|<2$ (בדוק!) נקבל שהטור הנחקר גם מתכנס בהחלט עבור $|x|<2$. קל לראות שכאשר $x=2$ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot\sin\frac{1}{2^{n-1}}$ מתבדר. באופן דומה בנקודה $x=-2$ הטור הנתון גם מתבדר. **סופית, תחום ההתכנסות הוא** $|x|<2$.

ד. מכיוון שלכל x קבוע $\left(x>0, x\ne\frac{1}{n}\right)$ הסדרה $\frac{1}{n\ln^2 nx}$ מונוטונית יורדה לאפס ניתן להפעיל את מבחן האינטגרל, כלומר היות ו- $\int\limits_1^{\infty}\frac{dt}{t\ln^2 tx}=\frac{x}{\ln x}<\infty$, הטור הנבחן מתכנס לכל $x>0, x\ne\frac{1}{n}$.

ה. תוך שימוש בתוצאות של הדוגמאות 2.7א' ו-3.3ה' נקבל שהטור מתכנס בתנאי עבור $0<x\le 1$, ומתכנס בהחלט כאשר $x>1$ ומתבדר כאשר $x\le 0$ (לא מתקיים התנאי ההכרחי).

ו. נרשום את האיבר הכללי באופן הבא:

$$\frac{x^{n-1}(nx-x-n)}{n(n-1)}=\frac{x^n(n-1)-nx^{n-1}}{n(n-1)}=\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

לכן הטור הנבחן הוא טור טלסקופי $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)$ בעל סכומים חלקיים $S_n=\frac{x^n}{n}-x$. נחשב:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^n}{n}-x\right)=\begin{cases}-x, & |x|\le 1 \text{ כאשר}\\ \infty, & x>1 \text{ כאשר}\\ \text{לא קיים}, & x<-1 \text{ כאשר}\end{cases}$$

לכן הטור הנבחן מתכנס בתחום $|x|\le 1$ לפונקציה $S(x)=-x$.

תרגילים: מצא את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-\frac{1}{\ln x}}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(3n-1)x}{(2n+1)^2}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{x}{4^n}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{nx}\cos nx$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)3^n(x-5)^n}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{x^{n^n}}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{3^n x^n}\right)$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^n$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x^n)}{n}$.
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((n+\frac{x}{2})\ln(1+\frac{x}{n})-x\right)$.

2. התכנסות במידה שווה של טורים

הגדרה 3: יהי טור הפונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (1)$$

מתכנס בתחום E. טור (1) מתכנס **במידה שווה בתחום** E_0, $(E_0 \subset E)$ אם סדרת הסכומים החלקיים שלו $\{S_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ב- E_0.

דוגמה 2: בדוק התכנסות במידה שווה של הטור $|x|\le 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$.

פתרון: הטור הנתון הוא טור טלסקופי ולכן $S_n(x)=x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$. הסדרה $\{S_n(x)\}$ מתכנסת בתחום $|x|\le 1$ ל- $S(x)=x$. נחשב

$$|S_n(x)-S(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right| \le \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ממשפט 4.2 נובע שהסדרה $\{S_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ב- $|x|\le 1$ **ולכן גם הטור** הנתון מתכנס במידה שווה.

נתרגם את קריטריון קושי (משפט 4.1) להתכנסות במידה שווה של סדרות למקרה של טורים.

משפט 1: (**קריטריון קושי**). טור (1) מתכנס במידה שווה בתחום E_0 **אם ורק אם** לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר $N(\varepsilon)$ (התלוי ב- ε בלבד) כך שלכל $n>N(\varepsilon)$ **ולכל p-טבעי** מתקיים $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right|<\varepsilon$ לכל $x\in E_0$.

ההוכחה נובעת ישירות ממשפט 4.1 תוך שימוש בשיוויון

$$S_{n+p}(x)-S_n(x) = f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+p}(x) \qquad \blacksquare$$

הערה 1: הטור $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס במידה שווה **אם ורק אם השארית ה-n-ית שלו** $r_n(x)=\sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)$ מתכנסת במידה שווה באותו תחום, כלומר $\sup_{x\in E_0}|r_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (נובע מהגדרה 3 וממשפט 4.2).

דוגמה 3: בדוק שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x+2n}$ מתכנס במידה שווה ב- $x\ge 0$.

פתרון: לכל x קבוע ולא שלילי הטור הנבדק הוא טור מחליף סימן בעל איבר כללי השואף לאפס והסדרה $\left\{\frac{1}{x+2n}\right\}$ מונוטונית יורדת ולכן הוא מתכנס לפי מבחן לייבניץ. השארית $r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x+2n}$ מקיימת $|r_n(x)|<\frac{1}{x+2(n+1)}$, מכיוון ש:

$$\sup_{x\ge0}|r_n(x)| < \sup_{x\ge0}\frac{1}{x+2(n+1)} \le \frac{1}{2n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

לכן לפי הערה 1 הטור הנבדק מתכנס במידה שווה בתחום $x\ge 0$.

דוגמה 4: הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{1}{4^n x}$, אינו מתכנס במידה שווה בתחום $0<x<\infty$.

פתרון: באופן דומה לדוגמה 1ג' בודקים שהטור הנתון מתכנס עבור $0<x<\infty$. לחקירת ההתכנסות במידה שווה, נשתמש בקריטריון קושי. נחשב

$$|S_{n+p}-S_n| = \left|3^{n+1}\sin\frac{1}{4^{n+1}x}+3^{n+2}\sin\frac{1}{4^{n+2}x}+\ldots+3^{n+p}\sin\frac{1}{4^{n+p}x}\right|$$

נבחר $p=n$ ונציב $x=\frac{1}{4^n}$, נקבל

$$|S_{2n}-S_n| = 3^{n+1}\left|\sin\frac{1}{4}+3\sin\frac{1}{4^2}+\ldots+3^{n-1}\sin\frac{1}{4^n}\right| > 3^{n+1}\sin\frac{1}{4}$$

ברור כי $|S_{2n}-S_n|$ אינו קטן מ- $\varepsilon=1$ לכן הטור אינו מתכנס במידה שווה.

דוגמה 5: הוכח: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ מתכנס במידה שווה ב- E_0, אזי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ מתכנס במידה שווה באותו תחום E_0.

הוכחה: היות והטור בערך מוחלט מתכנס במידה שווה, אזי

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n>(\varepsilon),\ \forall p\ \text{טבעי},\ \forall x\in E_0:\ \sum_{k=n+1}^{n+p}|f_k(x)|<\varepsilon$$

מאי-השוויון $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p}|f_k(x)|<\varepsilon$ ומשפט 1 נובע שגם טור בלי ערך מוחלט מתכנס במידה שווה.

הטענה ההפוכה אינה נכונה. למשל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x+2n}$ מדוגמה 3, מתכנס במידה שווה ב- $x\ge 0$ ולמרות זאת הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+2n}$ מתבדר.

תרגילים:

1. בדוק על-ידי שימוש בקריטריון קושי ש:

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{1}{4^n x}$ מתכנס במידה שווה ב- $1\le x<\infty$.

ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ אינו מתכנס במידה שווה ב- $0\le x\le 2\pi$.

ג. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}[ne^{-nx}-(n-1)e^{-(n-1)x}]$ אינו מתכנס במידה שווה בקטע $[0,2]$, אבל כן מתכנס במידה שווה בטקע $[1,5]$.

2. הוכח: אם הפונקציה $f_n(x)$ מונוטונית בקטע $[a,b]$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט בקצוות הקטע, אזי הוא מתכנס במידה שווה ב- $[a,b]$.

3. המשך: מבחן ווירשטרס (Weierstrass)

נביא עתה תנאים מספיקים להתכנסות במידה שווה של טורים.

משפט 2: (ווירשטרס). יהי טור פונקציונלי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מוגדר בתחום E. אם קיים טור חיובי מתכנס $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ולכל x מ- E מתקיים

$$|f_k(x)| \le a_k \qquad (5)$$

החל מ- k מסויים, אזי הטור הנתון מתכנס במידה שווה ב-E.

הוכחה: לפי קריטריון קושי לטורים מספריים (משפט 1.1)

$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists N(\varepsilon)\ ,\ \forall n>N(\varepsilon)\ ,\ \forall p$ – טבעי

מתקיים

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k<\varepsilon \qquad (6)$$

מ-(5) ו-(6) מקבלים: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p}|f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k<\varepsilon\ ,\ (\forall x\in E)$

לכן לפי משפט 1, הטור הנתון מתכנס במידה שווה ב- E. ■

דוגמה 6: בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}(x^n+x^{-n})\ ,\ (-\frac{1}{3}\le x\le 3)$. ב. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^4}{n\ln^2 n}\right)\ ,\ (|x|\le\alpha)$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x}{1+n^7x^2}\ ,\ (|x|<\infty)$.

פתרון:

א. היות ו- $\sup_{-\frac{1}{3}\le x\le 3} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}(x^n+x^{-n}) < \frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}(3^n+3^n) = \frac{2(n+1)}{\sqrt[3]{n!}}\cdot 3^n$

והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n+1)3^n}{\sqrt[3]{n!}}$ מתכנס (בדוק!) לכן לפי משפט 2 הטור הנבדק מתכנס במידה שווה בתחום הנתון.

ב. מאי-השוויון הידוע $\ln(1+x)\le x$, מקבלים

$$\ln\left(1+\frac{x^4}{n\ln^2 n}\right) \le \frac{x^4}{n\ln^2 n} \le \frac{\alpha^4}{n\ln^2 n}$$

היות והטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha^4}{n\ln^2 n}$ מתכנס (מבחן האינטגרל) אזי גם הטור הנתון מתכנס במידה שווה בתחום $-\alpha\le x\le\alpha$.

ג. נמצא את הערך המקסימלי של האיבר הכללי $f_n(x)=\frac{n^2x}{1+n^7x^2}$, ניגזור ונקבל $f'_n(x)=\frac{n^2-n^9x^2}{(1-n^7x^2)^2}$. נקודות האקסטרמום הן $x=\pm n^{-\frac{7}{2}}$ ו-

$$\max_{|x|<\infty} f_n(x) = f_n(n^{-\frac{7}{2}}) = \frac{n^2\cdot n^{-\frac{7}{2}}}{1+1} = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

היות והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ מתכנס (בדוק!) ו- $\frac{n^2x^2}{1+n^7x^2} \le \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ לכל x, הטור הנבדק מתכנס במידה שווה (משפט 2).

הערה 2: משפט ויירשטרס הוא רק תנאי מספיק להתכנסות טורים במידה שווה, אך לא תנאי הכרחי. נביא לכך דוגמה.

דוגמה 7: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x+2n}$ מתכנס במידה שווה ב- $x\ge 0$ (דוגמה 3). אבל בתחום זה $\sup_{x\ge 0}\frac{(-1)^{n+1}}{x+2n}=\frac{1}{2n}$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ מתבדר. כלומר, משפט 2 אינו נותן תשובה להתכנסות במידה שווה של הטור.

4. מבחני דיריכלה ואבל

בסעיף זה נביא מבחנים יותר "עדינים" לבדיקת התכנסות במידה שווה של הטורים מהצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cdot b_n(x) \qquad (7)$$

משפט 3: (דיריכלה). אם כל הסכומים החלקיים $B_n(x)$ של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ חסומים במשותף, כלומר $|B_n(x)|<M$ לכל $x\in E$ ולכל n, ובנוסף הסדרה $\{a_n(x)\}$ מונוטונית ומתכנסת במידה שווה לאפס ב- E, אזי הטור (7) מתכנס במידה שווה ב- E.

משפט 4: (אבל). אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב- E והסדרה $\{a_n(x)\}$ מונוטונית וחסומה במשותף, כלומר $|a_n(x)|<M$ לכל $x\in E$ ולכל n, אזי הטור (7) מתכנס במידה שווה ב- E.

הוכחות משפטים 3 ו-4 דומות להוכחות משפטים 3.7 ו-3.8 ולכן נשאיר אותם לקורא.

דוגמה 8: בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ בכל קטע סגור שאינו מכיל $x=2\pi m$ (m-טבעי).

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$, $-a\le x\le a$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)n^x}$, $x\ge 0$.

פתרון:

א. נשתמש בתוצאות של תרגיל 3.6ב'. הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ חסומים ו- $S_n=\sum_{k=1}^{n} \cos kx \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ והפונקציה $\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ חסומה בכל קטע סגור שאינו מכיל $x=2\pi m$ (m-טבעי). הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ מונוטונית יורדת לאפס ולכן לפי משפט דיריכלה הטור הנבדק מתכנס במידה שווה.

ב. נרשום את הטור באופן הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^2+n^2}\left(\frac{x}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad (8)$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ מתכנס במידה שווה ב- $|x|\le a$ לפי משפט ויירשטרס, לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס במידה שווה באותו תחום. הסדרה $\left\{\frac{n^2}{x^2+n^2}\right\}$ מונוטונית עולה לכל x קבוע (בדוק!) וחסומה ב- $0<\frac{n^2}{x^2+n^2}\le 1$. לפי משפט אבל טור (8) מתכנס במידה שווה.

ג. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ מתכנס והסדרה $\left\{\frac{1}{n^x}\right\}$ מונוטונית יורדת $\left(\frac{1}{n^x}\ge\frac{1}{(n+1)^x}\right)$ לכל x קבוע וחיובי, לכן לפי משפט אבל, הטור הנבדק מתכנס במידה שווה.

תרגילים:

הוכח התכנסות במידה שווה של הטורים:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x|<\infty$.

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^3 n}\right)$, $|x|<3$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^2x}{n^3}$, $|x|<\infty$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}$, $0\le x<\infty$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2x+3n}$, $0<x<\infty$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$, $x\ge 0$, כאשר $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

7. הוכח: אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}$ מתכנס, אזי טור הפונקציות $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_n}$ מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור שאינו מכיל את a_n.

8. הוכח שהטורים הבאים אינם מתכנסים במידה שווה ב- $[0,1]$:

א. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)$.

ב. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2x\left(n^2e^{-n^2x^2}-(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}\right)$.

ג. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$.

5. תכונות פונקציונליות של סכום הטור: רציפות

בסעיף זה נחקור תכונות של סכום הטור כגון: רציפות, אינטגרביליות, גזירות.

משפט 5: אם הפונקציות $f_n(x)$, $(n=1,2,\ldots)$ רציפות בתחום E והטור

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x) \qquad (1)$$

מתכנס במידה שווה ל- $S(x)$ ב- E, אזי הפונקציה $S(x)$ **רציפה ב- E**.

הוכחה: נוכיח שהפונקציה $S(x)$ רציפה בנקודה x_0 מ- E. כלומר, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $x\in E$ המקיים $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים

$$|S(x)-S(x_0)|<\varepsilon \qquad (2)$$

נקבע $\varepsilon>0$. מהתכנסות במידה שווה של (1), קיים $N(\varepsilon)$, כך שלכל $n>N(\varepsilon)$ ולכל $x\in E$. נקבל

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (3)$$

הפונקציה $S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ רציפה ב- x_0 כסכום של n פונקציות רציפות, לכן קיים $\delta>0$, כך שלכל x המקיימים $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים

$$|S_n(x)-S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4)$$

נרשום

$$|S(x)-S(x_0)| = |S_n(x)+r_n(x)-[S_n(x_0)+r_n(x_0)]| \le$$
$$\le |S_n(x)-S_n(x_0)|+|r_n(x)|+|r_n(x_0)|$$

מאי-השיוויון האחרון ומ-(3) ו-(4) נקבל $|S(x)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$, לכל x-ים המקיימים $0<|x-x_0|<\delta$. כלומר, הוכחנו את (2). ■

מסקנה 1: אם סכום של טור הפונקציות הרציפות מתכנס לפונקציה לא רציפה באותו תחום, אזי התכנסות היא לא במידה שווה.

דוגמה 9: בדוק את רציפות הפונקציות $S(x)$ בתחום הגדרתן:

א. $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x}{1+n^7x^2}$, $|x|<\infty$.   ב. $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$, $\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{2\pi}{3}$.

ג. $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)$, $0\le x\le 1$.

פתרון:

א. כל הפונקציות $\frac{n^2x}{1+n^7x^2}$, $n=1,2,\ldots$ רציפות והטור הנתון מתכנס במידה שווה ב- $|x|<\infty$ (דוגמה 6ג'), לכן לפי משפט 5 $S(x)$ רציפה ב- $|x|<\infty$.

ב. הפונקציות $\frac{\cos nx}{n}$, $n=1,2,\ldots$ רציפות לכל x. הטור הנתון מתכנס במידה שווה בקטע $\left(\frac{\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right)$ (דוגמה 8א') לכן סכום הטור הוא פונקציה רציפה.

ג. הפונקציות $\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}$, $n=1,2,\ldots$ רציפות לכל x (כהפרש של שתי פונקציות רציפות). נבדוק התכנסות במידה שווה של הטור. נשים לב כי

הטור הנתון הוא טור טלסקופי ולכן הסכומים החלקיים שלו $S_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$.
הסדרה $\{S_n(x)\}$ לא מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$ (דוגמה 4.5) ולכן גם הטור לא מתכנס במידה שווה. כלומר, לא ניתן להשתמש במשפט 5. נחשב את סכום הטור $S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)\equiv 0$, קיבלנו ש- $S(x)$ רציפה ב- $[0,1]$.

הערה 3: תנאי ההתכנסות במידה שווה במשפט 5 הוא מספיק בלבד. בדוגמה 9ג' סכום הטור הוא פונקציה רציפה למרות שהטור אינו מתכנס במידה שווה.

דוגמה 10: הוכח שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ מתכנס בקטע $0\le x\le 1$, אך לא במידה שווה.

פתרון: נרשום $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
הטור $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ הוא טור גיאומטרי המתכנס ל- $\frac{1}{1-x}$ עבור $|x|<1$, לכן סכום הטור הנתון הוא $S(x)=\begin{cases}1, & \text{כאשר } -1<x<1\\ 0, & \text{כאשר } x=1\end{cases}$.
קיבלנו שהטור הנתון מתכנס בקטע $-1<x\le 1$ והפונקציה $S(x)$ לא רציפה בקטע $[0,1]$, לכן לפי מסקנה 1 הטור אינו מתכנס במידה שווה.

באופן דומה לסדרות של פונקציות, נביא ללא הוכחה משפט הפוך למשפט 5.

משפט 6: (**דיני**). אם הפונקציות $f_n(x),\ n=1,2,\ldots$ חיוביות ורציפות בקטע $[a,b]$ ובנוסף, הסכום $S(x)$ של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ הוא פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל- $S(x)$ ב- $[a,b]$.

תרגילים:

1. בדוק את רציפות הפונקציה $f(x)$ בתחום הגדרתה:

א. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n^2}\right)^n$. ב. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$.

ג. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. ד. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$.

ה. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-(n-1)^2x^2}-e^{-n^2x^2}\right)$ ב- $[0,1]$.

ו. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)$ ב- $[0,1]$.

2. הוכח שאם טור של פונקציות רציפות מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור, שכולו נמצא בתחום התכנסותו, אזי סכום הטור הוא פונקציה רציפה בתחום הגדרתה.

3. הוכח שהפונקציה $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-x^2}$ רציפה בתחום הגדרתה.

6. המשך: אינטגרביליות וגזירות

כפי שידוע מחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות במשתנה אחד, נגזרת (או אינטגרל) של סכום של מספר סופי של פונקציות גזירות (אינטגרביליות) שווה לסכום הניגזרות (האינטגרלים). בסעיף זה נוכיח כי תכונה זו נשמרת גם לסכום אינסופי (כלומר לטורים).

משפט 7: תהיה $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות רציפות ב- $[a,b]$ וטור הפונקציות

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

מתכנס במידה שווה ל- $S(x)$ ב- $[a,b]$, אזי

$$\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx \tag{2}$$

הוכחה: היות ו- $f_n(x),\ n=1,2,\ldots$ רציפות אזי לפי משפט 5 גם $S(x)$ רציפה, לכן הן אינטגרביליות. כדי להשלים את ההוכחה מספיק להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon)$, כך שלכל $n>N(\varepsilon)$ מתקיים

$$\left|\int_a^b S(x)\,dx-\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)\,dx\right|<\varepsilon \tag{3}$$

נרשום $S(x)$ בצורה הבאה:

$$S(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+r_n(x) \tag{4}$$

נקבע $\varepsilon>0$ ונבחר n, כך ש: $|r_n(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ לכל $x\in[a,b]$, נבצע אינטגרציה ב-(4),

ונקבל $\int_a^b S(x)dx=\sum_{k=1}^n\int_a^b f_k(x)dx+\int_a^b r_n(x)dx$ ומכאן

$$\left|\int_a^b S(x)dx-\sum_{k=1}^n\int_a^b f_k(x)dx\right| = \left|\int_a^b r_n(x)dx\right| \le \int_a^b|r_n(x)|dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon$$

כלומר, הוכחנו את (3), לכן אינטגרל של "סכום" אינסופי שווה, במקרה זה, לסכום האינטגרלים. ■

ניתן להוכיח משפט יותר כללי.

משפט 7*: אם טור (1) מתכנס ל-$S(x)$ במידה שווה ב-$[a,b]$ ואם בנוסף, כל הפונקציות $f_n(x)$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$, אזי גם $S(x)$ אינטגרבילית ומקיימת את (2).

נעבור לניגזרות.

משפט 8: אם הפונקציות $f_n(x)\,,\ (n=1,2,\dots)$ גזירות ובעלות ניגזרות רציפות בקטע $[a,b]$ והטור $S(x)=\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ מתכנס ב- $[a,b]$ וטור הניגזרות

$$\sum_{n=1}^\infty f'_n(x) \qquad (5)$$

מתכנס במידה שווה ב- $[a,b]$, אזי

$$S'(x)=\left(\sum_{k=1}^\infty f_k(x)\right)'=\sum_{k=1}^\infty f'_k(x) \qquad (6)$$

כלומר, נגזרת של "סכום" שווה לסכום הנגזרות.

הוכחה: נסמן על ידי $\bar S(x)$ סכום הטור (5). לפי המשפט הקודם $\bar S(x)$ אינטגרבילית. נוכיח ש- $\bar S(x)=S'(x)$. נבנה פונקציה $g(x)=\int_a^x \bar S(t)dt$, ונגזור אותה

$$g'(x)=\bar S(x) \qquad (7)$$

נחשב $g(x)$

$$g(x)=\int_a^x\left(\sum_{k=1}^\infty f'_k(t)\right)dt=\sum_{k=1}^\infty\int_a^x f'_k(t)dt=\sum_{k=1}^\infty f_k(x)-\sum_{k=1}^\infty f_k(a)=S(x)-S(a)$$

כלומר $g(x)=S(x)-S(a)$. מכיוון ש- $g(x)$ גזירה, מקבלים שגם $S(x)$ גזירה ו- $g'(x)=S'(x)$, לכן מ-(7) מקבלים $\bar S=S'(x)$ וזה מוכיח את (6). ■

ניתן להוכיח את משפט 8 בתנאים יותר חלשים. נרכז אותם במשפט הבא (ללא הוכחה).

משפט 8*: יהיו הפונקציות $f_n(x)\,,\ (n=1,2,\dots)$ גזירות בקטע $[a,b]$. אם טור הנגזרות (5) מתכנס במידה שווה ב- $[a,b]$ והטור המקורי (1) מתכנס לפחות בנקודה אחת בקטע $[a,b]$ אזי הטור (1) מתכנס במידה שווה באותו קטע ומתקיים (6).

דוגמה 11: האם ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר בטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{x^n}{n^2}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$ ב- $[-1,1]$.

ב. $\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{x+2n}$ ב- $[0,2]$.

ג. $\sum_{n=1}^\infty \left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ ב- $[0,1]$.

פתרון:

א. הטור הנבדק מתכנס במידה שווה ב- $[-1,1]$ (דוגמה 2).

הפונקציות $\frac{x^n}{n^2}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ רציפות לכל n. מכאן ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר וסכום האינטגרלים שווה לאינטגרל הסכום.

ב. הפונקציות $\frac{1}{x+2n}$ רציפות ב- $x\ge0$, והטור מתכנס במידה שווה ב- $[0,2]$ (דוגמה 3), לכן התשובה חיובית, כלומר, ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר.

ג. הפונקציות $x^{\frac{1}{2n-1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}$ רציפות ב- $[0,1]$, נבדוק את ההתכנסות במידה שווה של הטור הנתון. הטור הנבדק הוא טור טלסקופי ולכן $S_n(x)=-x+x^{\frac{1}{2n+1}}$, נחשב את סכומו.

$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x\le1\\ 0, & x=0\end{cases}$, היות ו- $S(x)$ אינה רציפה ב- $[0,1]$, הטור הנבדק אינו מתכנס במידה שווה ב- $[0,1]$, לכן לא ניתן להשתמש במשפט 8.

בכל אופן, נחשב $\int_0^1 S(x)dx=\frac12$, מצד שני

$$\sum_{n=1}^\infty\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)dx=\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{2n-1}{2n}\right)=\frac12\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n(n+1)}-\frac12$$

(לחישוב הסכום השתמשנו בדוגמה 1.4 ובשיוויון $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n(n-1)}=1$), לכן

$$\int_0^1 S(x)\,dx = \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)dx$$

בלומר, אינטגרל של סכום שווה לסכום האינטגרלים.

הערה 4: התכנסות במידה שווה של הטור במשפט 7 (טור הנגזרות במשפט 8) היא רק תנאי מספיק לאינטגרציה (גזירה) איבר-איבר (לא הכרחי, ראה דוגמה 11ג' ותרגיל 4).

דוגמה 12: האם ניתן לבצע גזירה איבר-איבר של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\ ,\ |x|<\infty$.   ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x+2n}\ ,\ x\ge 0$.   ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n^2}\ ,\ |x|<\infty$.

פתרון:

א. נבדוק את התכנסות הטור. קל לראות ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right|}{\frac{|x|}{n^2}}=1$, לכן הטור הנבדק מתכנס יחד עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2}$ לכל x.

נבנה את טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^2+n^4}$. היות ו- $\frac{1}{x^2+n^2}\le\frac{1}{n^2}$ נקבל שטור הניגזרות מתכנס במידה שווה לפי משפט ווירשטרס, נשתמש במשפט 7, ונקבל $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^2+n^4}$, כלומר סכום הנגזרות שוות לנגזרת הסכום.

ב. הטור הנתון מתכנס במידה שווה (דוגמה 3), נבנה את טור הניגזרות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{(x+2n)^2}$. טור הניגזרות מתכנס במידה שווה ב- $x\ge 0$ (בדוק!) לכן ניתן לגזור איבר-איבר.

ג. הטור הנתון מתכנס במידה שווה ב- $|x|<\infty$ (בדוק!), אבל טור הניגזרות $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n^2x}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n^2x)$ מתבדר ולכן התשובה היא לא.

תרגילים:

האם ניתן לבצע גזירה איבר-איבר של הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}\ ,\ |x|<\infty$.   2. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x}\ ,\ x\ge 2$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-(n-1)^2x^2}-e^{-n^2x^2}\right),\ 0\le x\le 1$.

4. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)-\frac{1}{2(n-1)}\ln[1+(n-1)^2x^2]\right\},\ 0\le x\le 1$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n^2}\ ,\ |x|<\infty$.

פרק 6
טורי חזקות

בפרק זה נחקור מקרה פרטי וחשוב של טורים פונקציונליים.

1. הגדרות, רדיוס התכנסות, תחום ההתכנסות

הגדרה 1: טור פונקציונלי מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots \qquad (2)$$

נקרא **טור חזקות**.

אם נציב בטור (2) $x - x_0 = t$ נקבל את טור (1), לכן ללא הגבלת הכלליות נשתמש רק בצורה (1) של טור החזקות.

קל לראות שטור החזקות (1) מתכנס לפחות בנקודה אחת $x = 0$ (טור (2) ב- $x = x_0$).

קיימים טורים המתכנסים ב- $x = 0$ בלבד, למשל $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

משפט 1: אם טור החזקות (1) מתכנס בנקודה $x = \alpha$, $(\alpha \neq 0)$, אזי הוא מתכנס בהחלט לכל x המקיים $|x| < |\alpha|$.

הוכחה: מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha^n$ מתכנס, הוא מקיים את התנאי ההכרחי להתכנסות, כלומר $\lim_{n\to\infty} a_n \alpha^n = 0$, ולכן הסדרה $\{a_n \alpha^n\}$ חסומה, זאת אומרת קיים מספר חיובי M כזה ש- $|a_n \alpha^n| < M$ מתקיים לכל n. נוכיח שהטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots \qquad (3)$$

מתכנס. היות ו-

$|a_n x^n| = |a_n \alpha^n| \cdot \left|\frac{x^n}{\alpha^n}\right| < M \left|\frac{x}{\alpha}\right|^n$ ו- $\left|\frac{x}{\alpha}\right| < 1$, והטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{\alpha}\right|^n$ מתכנס כטור גיאומטרי, הטור (3) מתכנס. כלומר, טור החזקות (1) מתכנס בהחלט לכל $|x| < |\alpha|$. ■

מסקנה 1: תחום ההתכנסות של טור חזקות (1) יהווה תמיד קטע סימטרי לגבי $x = 0$.

משפט 2: לכל טור חזקות (1) קיים מספר **לא שלילי** R, $(0 \le R < \infty)$ כזה שלכל x המקיים $|x| < R$ הטור מתכנס ועבור $|x| > R$ הטור מתבדר. אם $R = 0$ הטור מתכנס בנקודה $x = 0$ בלבד. אם $R = \infty$ הטור מתכנס לכל $-\infty < x < \infty$.
ל- R קוראים **רדיוס ההתכנסות** של הטור.

הוכחה: נסמן על-ידי E קבוצת כל הנקודות שעבורן הטור (1) מתכנס, כלומר $E = (x : \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n < \infty)$. הקבוצה E לא ריקה $(0 \in E)$ לכן קיים חסם עליון של E. נסמן אותו $\sup E = R$. לפי הגדרת הסופרמום אם $|x| < R$, אזי $x \in E$, כלומר הטור מתכנס, אם $|x| > R$, אזי $x \notin E$ והטור מתבדר.
כעת אם $R \in E$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ מתכנס, ואם $R \notin E$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ מתבדר.
באופן דומה מראים עבור $x = -R$. ■

משפט 3: (קושי-אדמר). רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (4)$$

הוכחה: נשתמש במבחן קושי לטור (3). נקבל

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

הטור הנתון (1) מתכנס בהחלט לכל x אשר מקיים $|x| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ומתבדר עבור x המקיים $|x| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ ולכן לפי המשפט הקודם $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ הוא רדיוס ההתכנסות של הטור (1). ■

הערה 1: אם קיים $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, אזי על ידי שימוש במשפט דלמבר לבדיקת התכנסות טור (3) נקבל נוסחה נוספת לרדיוס ההתכנסות

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (5)$$

הערה 2: תחום ההתכנסות של הטור מורכב מהקטע $(-R,R)$ ומהקצוות בתנאי שבהם הטור מתכנס.

דוגמה 1: מצא את תחום ההתכנסות של הטורים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}x^{n-1}$.   ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n\cdot\sin^2\frac{1}{n}$.

ג. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$.   ד. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

פתרון:

א. בטור הנתון $a_n=\frac{e^n n!}{n^n}$, לכן לפי (5) נקבל

$R=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{e^n n!(n+1)^{n+1}}{n^n e^{n+1}(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$, בלומר רדיוס ההתכנסות של הטור הוא 1. נבדוק את ההתכנסות בקצוות הקטע $(-1,1)$.

בנקודה $x=1$ מקבלים את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$. **כפי שראינו בדוגמה 1.9 הטור לא** מקיים את התנאי ההכרחי ולכן מתבדר. באופן דומה בקצה $x=-1$ הטור מתבדר. ולכן, תחום ההתכנסות של הטור הנבדק הוא $-1<x<1$.

ב. נסמן $t=x-2$ ונקבל טור עזר $\sum_{n=1}^{\infty}t^n\sin^2\frac{1}{n}$. נחשב את רדיוס התכנסותו

$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{\sin^2\frac{1}{n+1}}=1$, כלומר טור העזר מתכנס עבור $-1<t<1$ ולכן הטור המקורי מתכנס כאשר $-1<x-2<1$ או $1<x<3$. נבדוק את התכנסותו בקצוות: כאשר $x=3$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n}$ תוך שימוש במבחן ההשוואה עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מקבלים את התכנסותו. אם $x=1$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^2\frac{1}{n}$ המתכנס בהחלט. כלומר, תחום ההתכנסות הוא $1\le x\le 3$.

ג. היות ו- $a_n=(-1)^n\frac{1}{n!}$ נקבל מ-(5) $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty$, לכן הטור מתכנס לכל x, כלומר $-\infty<x<\infty$.

ד. נרשום את הטור הנתון בצורה מפורשת

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1x^3+\left(1+\frac{1}{2}\right)^4\frac{x^6}{2}+\left(1+\frac{1}{3}\right)^9\frac{x^9}{3}+\dots$$

נשווה את מקדמי הטור עם מקדמי הטור (1), נקבל $a_1=a_2=0$, $a_3=2$, $a_4=a_5=0$, $a_6=\frac{81}{32}$ וכדומה.

באופן כללי $a_{3k+1}=a_{3k+2}=0$, $a_{3k}=\frac{1}{3k}\left(1+\frac{1}{3k}\right)^{9k^2}$ לכן לא ניתן להשתמש בנוסחאות (4) ו-(5).

נסמן $x^3=t$ ונקבל טור עזר $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{t^n}{n}$ שהוא טור מהצורה (1).

נשתמש בנוסחה (4) לחישוב רדיוס התכנסותו.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$$

קיבלנו שטור העזר מתכנס כאשר $-\frac{1}{e}<t<\frac{1}{e}$. נבדוק את ההתכנסות בקצוות:

עבור $t=\frac{1}{e}$ נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{ne^n}$, שהינו מתבדר (בדוק!).

כאשר $t=-\frac{1}{e}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{(-1)^n}{ne^n}$ מתכנס (בדוק!).

ולכן נקבל שתחום ההתכנסות של טור העזר הוא $-\frac{1}{e}\le t<\frac{1}{e}$.

מכאן שתחום ההתכנסות של הטור הנתון הוא $-\frac{1}{e}\le x^3<\frac{1}{e}$ או $-\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\le x<\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

נסיים את הסעיף הזה בהערה.

הערה 3: יהיו שני טורי חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, אזי בתחום ההתכנסות המשותף שלהם מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \qquad (6)$$

תרגילים:

מצא את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (7^{3n}+5^{3n})x^{3n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n}x^n$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^{2n+1}}(x+5)^{2n+1}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+2)^n$.

2. התכנסות במידה שווה, פעולות עם טורי חזקות

מטרתינו, למצוא תחום מקסימלי שבו טור חזקות מתכנס במידה שווה. טבעי ביותר שזה יהיה תחום התכנסותו. בדרך כלל זה לא כך, נראה דוגמה לכך.

דוגמה 2: נראה שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ לא מתכנס במידה שווה בתחום התכנסותו $|x|<1$.

הוכחה: נתבונן בשארית של הטור $r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$, נחשב $r_n(x)$ כסכום של הטור הגיאומטרי האינסופי $r_n(x)=x^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\frac{x^{n+1}}{1-x}$, היות ו- $\lim_{x\to1^-} r_n(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^{n+1}}{1-x}=\infty$, אזי $\sup_{-1<x<1}|r_n(x)|=\infty$, תוך שימוש בהערה 5.1 מקבלים שטור החזקות הנתון אינו מתכנס במידה שווה בתחום התכנסותו $-1<x<1$.

כעת יש מקום לטענה הבאה.

טענה 1: יהיה $R>0$ רדיוס ההתכנסות של טור החזקות

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

טור (1) מתכנס במידה שווה בקטע הסגור $[-r,r]$ לכל r המקיים $0<r<R$.

טענה זו נובעת ישירות מאי-השיוויון $|a_n x^n|\le|a_n|r^n$ וממשפט ויירשטרס.

נוכיח עתה משפט כללי יותר.

משפט 4: יהיה $R>0$ רדיוס התכנסות של הטור (1).

1. אם הטור (1) מתבדר בקצה $x=R$, $(x=-R)$, אזי ההתכנסות בתחום $(-R,R)$ אינה במידה שווה.
2. אם הטור (1) מתכנס בקצה $x=R$, $(x=-R)$ אפילו בתנאי, אזי ההתכנסות היא במידה שווה בתחום $[0,R]$, $([-R,0])$.
3. הטור (1) מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור $[\alpha,\beta]$ שכולו נמצא בתחום $(-R,R)$.

הוכחה:

1. נוכיח בשלילה, נניח שהטור

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k \qquad (2)$$

מתבדר ולמרות זאת הטור (1) מתכנס במידה שווה ב- $(-R,R)$. לפי קריטריון קושי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך שלכל $n>N$ ולכל p-טבעי מתקיים $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k x^k\right|<\varepsilon$ לכל $x\in(-R,R)$. מאי-השיוויון האחרון נעבור לגבול, כאשר $x\to R^-$ ונקבל $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k R^k\right|\le\varepsilon$. כלומר, הטור (2) מתכנס לפי קריטריון קושי. קיבלנו סתירה המוכיחה שטור (1) לא מתכנס במידה שווה ב- $(-R,R)$.

2. נרשום את טור (1) בצורה הבאה:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k\left(\frac{x}{R}\right)^k \qquad (3)$$

ונשתמש במשפט אבל 5. הסדרה $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^k\right\}$ מונוטונית וחסומה $\left|\frac{x}{R}\right|^k \le 1$,

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k$ מתכנס ולכן (3) מתכנס במידה שווה ב- $[0, R]$.

3. נסמן ב- $r = \max(|\alpha|, |\beta|)$, לפי טענה 1 הטור (1) מתכנס במידה שווה ב- $[-r, r]$ ולכן גם ב- $[\alpha, \beta]$ (באופן דומה מוכיחים את המשפט עבור $x = -R$). ■

נשתמש בתוצאות הסעיפים 5.5 ו-5.6 לחקירת טורי חזקות. למען השלמות נביא את המשפטים המתאימים.

משפט 5: הסכום $f(x)$ של טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$ הוא פונקציה רציפה בכל $x \in (-R, R)$. אם בנוסף הטור מתכנס בנקודה $x = R$, $(x = -R)$, אזי $f(x)$ רציפה משמאל (מימין) בקצה $x = R$, $(x = -R)$. ■

משפט 6: יהי $R > 0$ רדיוס ההתכנסות של הטור

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{4}$$

אזי לכל $|x| < R$ מתקיים

1. $$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \tag{5}$$

2. הטורים (4) ו-(5) בעלי אותו רדיוס התכנסות R.

3. אם טור (4) מתכנס ב- $x = R$, $(x = -R)$, אזי גם טור (5) מתכנס בנקודה $x = R$, $(x = -R)$.

משפט 7: יהי $R > 0$ רדיוס התכנסות של (4), אזי לכל $|x| < R$ מתקיים:

1. $$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \tag{6}$$

2. הטורים (4) ו-(6) הם בעלי אותו רדיוס התכנסות R.

3. אם הטור (6) מתכנס בקצה $x = R$, $(x = -R)$ אזי גם טור (4) מתכנס באותו קצה.

משפטים 5, 6, 7 הינם תוצאות ישירות של המשפטים 5.5, 5.7, 5.8 ומשפט 4.

דוגמה 3: מצא את סכום הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$. ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1}$.

פתרון:

א. נמצא את תחום ההתכנסות של הטור $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$. היות ובקצוות הקטע $(-1,1)$ הטור הנבדק מתבדר, מקבלים ש- $-1 < x < 1$ הוא תחום התכנסותו.

לפי משפט 5 סכומו הוא פונקציה רציפה ב- $(-1,1)$ ולכן אינטגרבילית. על-ידי שימוש במשפט 6 נחשב

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \tag{7}$$

ברור ש- $g(x)$ (סכום של טור חזקות) רציפה ואינטגרבילית ב- $(-1,1)$, ולכן גם הפונקציה $\frac{g(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ כזאת. נחשב

$$\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \tag{8}$$

הטור האחרון הוא טור גיאומטרי $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ ולכן מ- (8) על-ידי גזירת שני האגפים נקבל $\frac{g(x)}{x} = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, מכאן $g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

מ-(7) נובע כי $g'(x) = f(x)$, כלומר

$$f(x) = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

לכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \tag{9}$$

נשתמש בתוצאת התרגיל לחישוב סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$.

נציב ב-(9) $x = \frac{1}{2}$ ונקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 12$.

ב. הטור הנבדק מתכנס ל- $f(x)$ ב- $-1\le x\le 1$, לכן לפי משפט 7:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2} = 1-x^2+x^4-\dots = \frac{1}{1+x^2}$$

וטור הניגזרות מתכנס בתחום $-1<x<1$ (בדוק!), מכאן

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x$$

כלומר, הטור הנבדק $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1} = \operatorname{arctg} x$.

במקרה ש- $x=1$ מקבלים: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. טור זה יכול לשמש לחישוב של מספר π, אך הוא מתכנס לאט למדי, ולכן לחישוב מספר π משתמשים בטור הבא המתכנס מהר יותר. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\sqrt{3})^{2n-1}\cdot(2n-1)} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

נסיים את הסעיף במסקנה:

מסקנה 2: כל טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ ניתן לגזירה אינסוף פעמים בתחום התכנסותו. טור הנגזרות הוא בעל אותו רדיוס התכנסות כמו הטור המקורי.

תרגילים: מצא את סכום הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n-2}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+n)x^{n-1}$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

(**רמז:** בתרגילים 4, 5 התבונן בטורי החזקות המתאימים).

3. פיתוח פונקציות לטור חזקות

הגדרה 2: נאמר שהפונקציה $f(x)$ המוגדרת בקטע $(-R,R)$ מפותחת **לטור (טיילור)** חזקות אם קיים טור חזקות המתכנס ל- $f(x)$ ב- $(-R,R)$.

מסקנה 3: **(תנאי הכרחי לפיתוח לטור)** אם $f(x)$ הוא סכום הטור

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots \tag{1}$$

בקטע $(-R,R)$, אזי $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים וכל נגזרותיה הן פונקציות רציפות ב- $(-R,R)$.

אמנם: לפי מסקנה 2 הטור (1), גזיר אינסוף פעמים ולפי משפט 5 טור הנגזרות מתכנס לפונקציה רציפה ב- $(-R,R)$. ■

משפט 8: **(יחידות הטור).** אם ניתן לפתח את $f(x)$ לטור חזקות (1) ב- $(-R,R)$, אזי הפיתוח הוא יחיד.

הוכחה: נתון ש- $f(x)$ ניתנת להצגה בצורה (1), נחשב $f^{(n)}(x)$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n+(n+1)!x+(n+2)(n+1)\dots 3x^2+\dots$$

לכן בנקודה $x=0$, $f^{(n)}(0)=n!a_n$ מכאן לכל n ניתן לקבל את מקדמי טור (1)

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{2}$$

באופן יחיד על ידי הפונקציה $f(x)$ ונגזרותיה בנקודה $x=0$, לכן הפיתוח הוא יחיד. ■

הערה 4: תנאי הגזירות אינסוף פעמים איננו מספיק. קיימות פונקציות גזירות אינסוף פעמים בקטע $(-R,R)$ שאי-אפשר לפתחן לטור חזקות סביב הנקודה $x=0$.

דוגמה של פונקציה כזו היא פונקציית קושי

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0 \quad \text{כאשר} \\ 0, & x=0 \quad \text{כאשר} \end{cases}$$

כל נגזרותיה בנקודה $x=0$ הן פונקציות רציפות ושוות לאפס, לכן אילו היה קיים טור חזקות המתאר אותה, הרי לפי (2) הוא $f(x)=0+0\cdot x+\dots$ דבר שלא ייתכן.

נחזור לנוסחה למקדמים a_n. נציב (2) ב-(1), נקבל

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots \tag{3}$$

n האיברים הראשונים ב-(3) הם חלק של נוסחת טיילור (ראה חדו"א 1, פרק 7, סעיף 3)

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x) \tag{4}$$

כאשר $R_n(x)$ היא שארית, למשל בצורת לגרנז'

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (5)$$

משפט 9: תהי פונקציה $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים בקטע $(-R,R)$. $f(x)$ מפותחת לטור חזקות (1) המתכנס ב- $(-R,R)$, אם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ לכל $|x|<R$.

הוכחה: נסמן על-ידי $S_n(x)$ את הסכומים החלקיים של טור (3)

$$S_n(x)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

מ-(4) נקבל $|f(x)-S_n(x)|=|R_n(x)|$.

אם $R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ לכל $x\in(-R,R)$ נקבל $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ ולהיפך, אם מתקיים השוויון האחרון, אזי $R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ לכל x. ■

נביא תנאי מספיק ונוח לשימוש.

מסקנה 4: אם הפונקציה $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים ב- $(-R,R)$ וכל נגזרותיה חסומות במשותף בקטע $[-r,r]$ כאשר $0<r<R$, כלומר קיים מספר M כך שלכל n ולכל $x\in(-r,r)$, $|f^{(n)}(x)|<M$, אזי ניתן לפתח את $f(x)$ לטור טיילור (1), בעל רדיוס התכנסות של לפחות r.

הוכחה: מנוסחת השארית (5) מקבלים $|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}r^{n+1}$ היות ו- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M}{(n+1)!}r^{n+1}=0$, אזי לפי המשפט הקודם ל- $f(x)$ קיים טור חזקות (1) המתכנס אליה ב- $(-r,r)$. ■

הערה 5: באופן דומה מפתחים את הפונקציה $f(x)$ לטור חזקות סביב הנקודה x_0, כלומר טור מהצורה

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots$$

המתכנס ב- $(x_0-R\,,\,x_0+R)$.

נביא עתה שיטות שונות לפיתוח של פונקציות לטור.

דוגמה 4: פתח לטור חזקות את $f(x)=e^x$.

פתרון: כל הנגזרות הן $f^{(n)}(x)=e^x$ ולכן $f^{(n)}(0)=1$, כלומר לכל n בקטע $(-R,R)$ $|f^{(n)}(x)|<e^R$, לכן לפי מסקנה 4 קיים טור חזקות המתכנס ל- e^x ותוך שימוש בנוסחה (3) נקבל:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad,\ |x|<\infty \qquad (6)$$

באופן דומה מקבלים פיתוח של פונקציות אלמנטריות

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad,\ |x|<\infty \qquad (7)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\quad,\ |x|<\infty \qquad (8)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\quad,\ -1<x\le 1 \qquad (9)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\quad,\ |x|<1 \qquad (10)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad,\ |x|<1 \qquad (10')$$

נתבונן בפונקציה $f(x)=(1+x)^\alpha\ ,\ -1<x<1$.

תוך שימוש בנגזרת ה-n-ית $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1-x)^{\alpha-n}$ ניתן לקבל נוסחה לפיתוח לטור חזקות הדומה לנוסחת הבינום.

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k\ ,\ |x|<1 \qquad (11)$$

נעזר בנוסחאות (11) - (6) לפיתוח פונקציות לטור.

דוגמה 5: פתח לטור חזקות את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\dfrac{1}{2+3x}$. ב. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$.

ג. $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$. ד. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x^3-1}{x^6} & ,\ x\ne 0\\ -\frac{1}{2} & ,\ x=0\end{cases}$.

פתרון:

א. נרשום את $f(x)$ בצורה $f(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3}{2}x}$ ונשתמש ב-(10). במקום x נרשום $\frac{3}{2}x$, נקבל $f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n$. הטור הנ"ל מתכנס עבור $\left|\frac{3}{2}x\right|<1$ או $|x|<\frac{2}{3}$.

ב. נפרק את $f(x)$ לשברים אלמנטריים

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{(x+3)(x-1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}}-\frac{1}{1-x}\right)$$

על-ידי שימוש ב-(10) ו-(10') וגם בהערה 2 נקבל

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=-\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(-\frac{x}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}+1\right)x^n$$

הטור שקיבלנו מתכנס ל- $f(x)$ בקטע $-1<x<1$.

ג. על-ידי שימוש בנוסחה (6) נקבל $e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$, נציב באינטגרל ונבצע אינטגרציה איבר-איבר, נקבל

$$\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}\quad,\quad |x|<\infty$$

ד. מנוסחה (8) נקבל $\cos x^3-1=-\frac{x^6}{2!}+\frac{x^{12}}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!}+\ldots$

נחלק ב- x^6 ונקבל $\frac{\cos x^3-1}{x^6}=-\frac{1}{2!}+\frac{x^6}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{6(n-1)}}{(2n)!}+\ldots$

(שים לב שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x).

בתרגילים הבאים נשתמש במשפטים 6 ו-7.

דוגמה 6: פתח לטור חזקות את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.   ב. $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$.

פתרון:

א. נתבונן בנגזרת של הפונקציה $f(x)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1+x^2)}$$

נפתח את $f'(x)$ לטור לפי (10), נקבל

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad,\quad |x|<1$$

נבצע אינטגרציה איבר-איבר בנוסחה האחרונה: $\int_0^x f'(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

היות ו- $\int_0^x f'(t)\,dt=\operatorname{arctg}\frac{1+t}{1-t}\Big|_0^x=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}-\frac{\pi}{4}$.

נקבל לבסוף

$$\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

המתכנס עבור $-1\le x\le 1$ (בדוק התכנסותו ב- $x=\pm 1$).

ב. נתבונן בפונקציה $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\frac{dt}{(1+t)^2}=-\frac{1}{1+t}\Big|_0^x=\frac{x}{1+x}$.

נשתמש ב-(10) ונקבל עבור

$$g(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}\quad,|x|<1$$

נגזור את הטור האחרון ונקבל

$$g'(x)=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n\quad,\quad |x|<1$$

בדוגמאות הבאות נשתמש בנוסחת מכפלת הטורים מסעיף 3.5

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)x^n \tag{12}$$

וגמה 7: פתח לטור את הפונקציה $f(x)=\ln^2(1-x)$.

פתרון: מנוסחה (9) נקבל $-1\le x<1$, $\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, נחשב $f(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)$. נשתמש ב-(12), נקבל:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1\cdot\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k-2}+\dots+\frac{1}{k}\cdot 1\right)x^{k+1}$$

מכיוון ש:

$$1\cdot\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k-1}+\dots+\frac{1}{k}\cdot 1 = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(k+1-i)i} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{k+1-i}+\frac{1}{i}\right)=$$

$$=\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k}\right)$$

אזי, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k}\right)x^{k+1}$.

סיים את הסעיף בפיתוח לטור של פונקציות מורכבות.

ביא ללא הוכחה את הטענה הבאה.

משפט 10: תהיה הפונקציה $f(x)$ בעלת פיתוח בתחום $(-R,R)$ לטור חזקות $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ו- $\varphi(t)$ בעלת פיתוח בקטע $(-r,r)$ לטור $\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, אם $|a_0|=|f(0)|<r$, אזי בסביבה די קטנה של $x=0$ ניתן לפתח את הפונקציה המורכבת $\varphi(f(x))$ לטור

$$\varphi(f(x)) = b_0+\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot b_1+\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^2\cdot b_2+\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^3\cdot b_3+\dots \qquad (13)$$

כאשר את חזקות הטורים מבינים לפי מכפלת הטורים (12) ולאחר המכפלה מכנסים איברים. ■

וגמה 8: מצא ארבעה איברים ראשונים בפיתוח $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}} & , x\ne 0\\ e & , x=0\end{cases}$ לטור.

פתרון: נרשום את $f(x)$ בצורה הבאה: $f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$, לאחר פיתוח של לוגריתם נקבל

$$\frac{1}{x}\ln(1+x)=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots\right)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots$$

נשתמש בנוסחאות (6) ו-(13), נקבל

$$f(x) = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots} = e\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots} =$$

$$=e\left\{1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots\right)^3\right\}=$$

$$= e\left\{1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{1}{16}x^3+\dots\right\}$$

תרגילים:

פתח לטור טיילור לפי חזקות של x את הפונקציות הבאות:

1. $f(x)=\frac{3}{1+x-2x^2}$. 2. $f(x)=\frac{2x-3}{(x-1)^2}$. 3. $f(x)=\sin 3x+x\cos 3x$.

4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. 5. $f(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+t)}{t}dt$. 6. $f(x)=\text{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

7. פתח לטור טיילור לפי חזקות של $x+4$, את הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$.

8. פתח לטור טיילור לפי חזקות של $x-\frac{\pi}{2}$ את הפונקציה $f(x)=\cos x$.

9. פתח לטור טיילור לפי חזקות של $x+2$, את הפונקציה $f(x)=e^x$.

10. מהו הדיוק בחישוב של $\frac{\pi}{4}$ אם ניקח בפיתוח של $\text{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\dots$ חמישה איברים ראשונים בנקודה $x=1$.

11. חשב $\int_0^{0.5}\frac{\sin x}{x}dx$ עם דיוק 0.0001.

12. חשב $\int_0^{\frac{1}{9}}e^x\sqrt{x}\,dx$ עם דיוק 0.001.

13. עבור אילו x-ים הטעות בחישוב $\cos x$ לפי $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$ לא עולה על 0.01.

14. מצא ארבעה איברים ראשונים בפיתוח לטור טיילור סביב הנקודה $x=0$ של הפונקציה $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$.

תרגילים נוספים:

1. נתונה הסדרה $\{f_n(x)\}$ באופן הבא

$$f_0(x) = \sin x\ ,\ f_1(x) = \int_0^x f_0(t)\,dt,\dots,f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt,\dots$$

הוכח שהסדרה הנ"ל מתכנסת במידה שווה ב- $0<x\le a$.

2. יהי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס ו- $\{f_n(x)\}$ סדרת הפונקציות המוגדרות בתחום D, כך ש- $|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\le a_n$ עבור כל x מ- D וכל n.

הוכח שהסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ב- D.

3. הוכח:

א. טור $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{x}{n^2}$ מתכנס לכל x שעבורו $\operatorname{tg}\frac{x}{n^2}$ מוגדר לכל n.

ב. טור הנתון ב-א' מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור הנמצא בתחום התכנסותו, אך אינו מתכנס במידה שווה בכל תחום התכנסותו.

4. נתונה פונקציה רציפה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to\infty} f(x)=0\ ,\ f(0)=0\ ,\ f(x)\neq 0$.

נגדיר את סדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $f_n(x)=f(nx)$.

הוכח כי הסדרה $\{f_n(x)\}$ לא מתכנסת במידה שווה ב- $[0,\infty)$ וכן מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$.

5. ידוע כי $|x|<\infty$, $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. האם ההתכנסות היא במידה שווה?

6. חשב $\int_0^{0.5}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ עם דיוק 0.05.

7. נתונה הפונקציה $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{n(x^2-3x+2)}$.

מצא תחום: א. הגדרתה. ב. רציפותה. ג. גזירותה.

פרק 7
גיאומטריה אנליטית במישור

פרקים 7, 8, 9 הם פרקי עזר. רוב החומר מוכר לקורא מבית-הספר ובאופן יותר מפורט מופיע בספר [2].

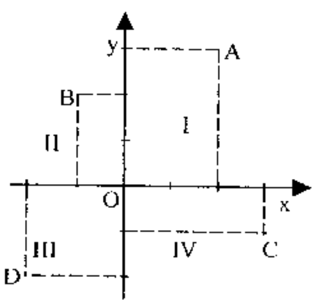
1. מערכת קואורדינטות. קטעים מכוונים. מרחק בין שתי נקודות

הגדרה 1: מערכת קואורדינטות קרטזית היא שני צירי מספרים כאשר האופקי x והמאונך y, המאונכים זה לזה ונחתכים בנקודה שהיא **ראשית הצירים**. הצירים מחלקים את המישור לארבעה רבעים (ראה איור 1). לכל נקודה M במישור מתאים זוג סדור של מספרים (a,b): כאשר a הוא מרחק מ-M עד ציר ה-y עם סימן + (פלוס) אם M נמצאת מימין לציר y ועם סימן – (מינוס) אם M נמצאת משמאל לציר ה-y. המספר השני b הוא המרחק מהנקודה עד ציר ה-x עם סימן + אם הנקודה נמצאת מעל ציר ה-x ועם סימן – אם הנקודה נמצאת מתחת לציר ה- x. הזוג (a,b) מהווה **קואורדינטות** של הנקודה, M.

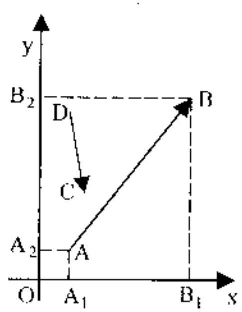
דוגמה 1: צייר את הנקודות $A(2,3)\ ,\ B(-1,2)\ ,\ C(3,-1)\ ,\ D(-2,-2)$ (ראה איור 1).

הגדרה 2: **קטע מכוון** הוא קטע שאחד מקצוותיו הוא ההתחלה והשני הוא הסוף, כלומר קטע שבו נתון כיוון.

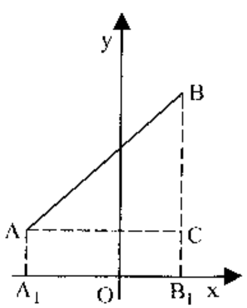
באיור 2 $\vec{AB}$ ו- $\vec{DC}$ הם קטעים מכוונים.



איור 1



איור 2



איור 3

הגדרה 3: יהיו A_1 ו- B_1 היטלים של הנקודות A ו- B על ציר x. **היטל** של קטע מכוון $\vec{AB}$ על ציר x הוא מספר השווה לאורך הקטע A_1B_1, עם סימן + (פלוס) כאשר הקטע המכוון $\vec{A_1B_1}$ הוא בכיוון ציר ה-x ועם סימן − (מינוס) אם $\vec{A_1B_1}$ הוא נגד הכיוון של ציר ה-x. נסמן AB_x.

יהיו $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$. היטלי הקטע המכוון $\vec{AB}$ על צירי הקואורדינטות הם

$$AB_x = x_2 - x_1\ ,\ AB_y = y_2 - y_1 \qquad (1)$$

דוגמה 2: מצא את ההיטלים על צירי הקואורדינטות של הקטעים המכוונים $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{CB}$ כאשר $A(2,3)$, $B(-1,3)$, $C(-3,-2)$.

פתרון:

א. לקטע $\vec{AB}$: $AB_x=-1-2=-3$, $AB_y=3-3=0$.

ב. לקטע $\vec{AC}$: $AC_x=-3-2=-5$, $AC_y=-2-2=-4$.

ג. לקטע $\vec{CB}$: $CB_x=-1-(-3)=2$, $CB_y=3-(-2)=5$.

נוסחה לחישוב **המרחק d בין שתי הנקודות** $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יתקבל מהמשולש ABC (ראה איור 3) תוך שימוש במשפט פיתגורס ונקבל $d=\sqrt{AC^2+BC^2}$.

היות ו- $AC=A_1B_1=x_2-x_1$ ו- $B_1C=y_2-y_1$, נקבל סופית

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (2)$$

תרגילים:

1. צייר את הנקודות הבאות במערכת צירים:

$A(3,2)$, $B(-1,5)$, $C(-3,3)$, $D(0,2)$, $E(3,0)$, $F(\frac{1}{2},-1)$, $G(a,b)$

2. מצא את הקואורדינטות של הנקודות הסימטריות לנקודות מתרגיל 1 ביחס ל-

א. ציר ה-x. ב. ציר ה-y. ג. ראשית.

3. נתונות הנקודות $A(1,-2)$, $B(2,1)$, $C(5,0)$, $D(-1,4)$, $E(0,-3)$.

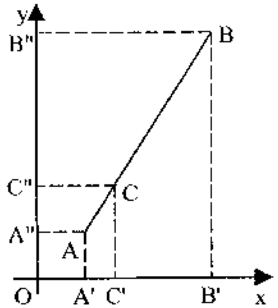
חשב את ההיטלים על צירי הקואורדינטות של הקטעים המכוונים:

א. $\vec{AB}$. ב. $\vec{CA}$. ג. $\vec{DE}$. ד. $\vec{EC}$.

4. חשב את ערכי הקטעים מדוגמה 3.

5. חשב שטח הריבוע ABCD אם קודקודיו הנגדיים הם $A(3,5)$ ו- $C(1,-3)$.
6. חשב שטח המשולש שווה-הצלעות ABC בעל קודקדים $A(-3,2)$, $B(1,6)$.
7. מצא על ציר ה-x נקודה הנמצאת במרחק של 5 מהנקודה $A(2,-3)$.

2. חלוקת קטע ביחס נתון



יהי $\vec{AB}$ קטע הנתון על ידי $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$.

נמצא נקודה $C(x,y)$ על $\vec{AB}$ המחלקת את $\vec{AB}$ ביחס λ, כלומר $\frac{AC}{CB}=\lambda$.

נסמן על ידי A',B',C' את ההיטלים של הנקודות A,B,C על ציר ה-x ועל ידי $A",B",C"$ את ההיטלים של אותן נקודות על ציר ה-y (ראה איור).

היות ו- $A"A \parallel C"C \parallel B"B$, $A'A \parallel C'C \parallel B'B$, נקבל

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{x_1-x}{x_2-x} = \lambda \quad , \quad \frac{AC}{CB} = \frac{A"C"}{B"C"} = \frac{y_1-y}{y_2-y} = \lambda$$

מכאן נמצא את x ו- y שהם קואורדינטות של הנקודה C

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (1)$$

אם M היא **אמצע קטע** AB, כלומר $\lambda=1$, נקבל $M\left(\frac{x_1+x_2}{2} , \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

תרגילים:

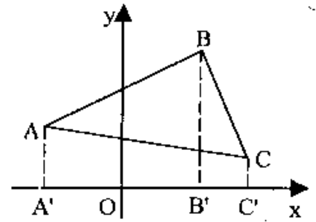
1. במקבילית ABCD שני הקודקודים סמוכים הם $A(-3,5)$, $B(1,7)$ ונקודת החיתוך של האלכסונים היא $M(1,1)$, מצא את הקודקודים C ו- D.
2. הקטע AB בעל הנקודות $A(1,-3)$, $B(4,3)$ מחולק לשלושה חלקים שווים. מצא את נקודות החלוקה.
3. נתונים הקודקודים $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ של המשולש ABC.

חשב את הקואורדינטות של נקודת החיתוך של התיכונים.

3. שטח המשולש

בסעיף זה נחשב שטח משולש הנתון על ידי קודקודיו, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$.

קל לבדוק ששטח המשולש ABC יהיה (ראה איור 1):



איור 1

$$S_{ABC}=S_{ABB'A'}+S_{BCC'B'}-S_{ACC'A'} \qquad (1)$$

כיוון ששטח הטרפז הוא

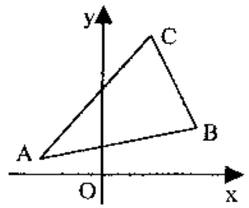
$$S_{ABB'A'}=\frac{1}{2}A'B'(AA'+BB')=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(y_1+y_2)$$

באופן דומה $S_{ACC'A'}=\frac{1}{2}(x_3-x_1)(y_3+y_1)$, $S_{ACC'A'}=\frac{1}{2}(x_3-x_4)(y_3+y_2)$

לכן מ-(1), נקבל

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_1+y_2)+(x_3-x_2)(y_3+y_2)-(x_3-x_1)(y_3+y_1)] \qquad (2)$$

נציין שנוסחה (2) נותנת את שטח המשולש במקרה של איור 1 ושטח עם סימן מינוס במקרה שבו הנקודות A,B,C מסודרות כמו באיור 2.



איור 2

לכן הנוסחה הסופית לשטח היא

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|(x_2-x_1(y_1+y_2)+ +(x_3-x_2)(y_3+y_2)-(x_3-x_1)(y_3+y_1)| \qquad (3)$$

נשאיר לקורא לבדוק ש-(3) ניתן לכתיבה בצורה קומפקטית

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix} \qquad (4)$$

או בצורה

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix} \qquad (5)$$

תרגילים:

1. חשב את שטח המשולש $A(2,-3)$, $B(3,2)$, $C(-2,5)$.
2. חשב את שטח המקבילית בעלת הקודקודים $(-2,3)$, $(4,-5)$, $(-3,1)$.
3. שטח המשולש ABC הוא $S=4$ וקודקודיו הם $A(2,1)$, $B(3,-2)$. מצא את קודקוד C אם ידוע כי הוא נמצא על ציר ה- x.

4. משוואת העקומים. קו ישר

לכל פונקציה $y=f(x)$ מתאים גרף במערכת הצירים הנתונה (ראה [1], פרקים 2, 8). לפונקציה הנ"ל ניתן להתייחס כלמשוואה $y-f(x)=0$ או באופן כללי יותר $F(x,y)=0$, כאשר $F(x,y)$ היא פונקציה שמשתניהם x ו- y (ראה המשך בפרק 10).

הגדרה 4: השיוויון $F(x,y)=0$ נקרא משוואה בשני נעלמים x ו-y אם הוא לא מתקיים לכל זוגות המספרים x ו-y. זוג המספרים (x_0,y_0) הוא פתרון של המשוואה

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

אם לאחר הצבתם ב-(1) נקבל זהות.

הגדרה 5: משוואה בשני משתנים (1) נקראת משוואת **העקום** אם ורק אם הקואורדינטות של כל הנקודות על העקום מקיימות את (1) (כלומר, נקודות שאינם נמצאות על העקום לא מקיימות את המשוואה הנ"ל).

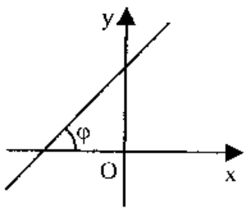
אחת המטרות העיקריות של הנדסה אנליטית היא חקירת עקומים על ידי משוואותיהם.

נתחיל ממשוואה מסדר ראשון:

$$ax+by+c=0 \qquad (2)$$

(2) היא משוואת **קו ישר**.

הגדרה 6: טנגנס הזווית שיוצר קו (2) עם הכיוון החיובי של ציר ה- x ונמדדת מציר ה-x נקראת **שיפוע** הישר.



כידוע, השיפוע של הישר (2) הוא $k=\mathrm{tg}\,\varphi=-\frac{a}{b}$.

1. $y=kx+b$ משוואת **הישר עם שיפוע** k.
2. $y=b$ **ישר המקביל לציר** ה- x.
3. $x=a$ **ישר המקביל לציר** ה- y.
4. $y=kx$ **ישר העובר דרך ראשית הצירים**.
5. משוואת **הישר העובר דרך שתי נקודות** (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2) הינה: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$.
6. מרחק מהנקודה (x_0,y_0) לישר $ax+by+c=0$ הוא $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
7. נתונים שני ישרים $y=k_1x+b_1$ ו- $y=k_2x+b_2$:
   א. אם $k_1=k_2$ **הישרים מקבילים**.
   ב. אם $k_1\cdot k_2=-1$ **הישרים מאונכים**.
   ג. **הזווית** α **בין הישרים** היא $\mathrm{tg}\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

תרגילים:

1. יהיו $8x+3y+1=0$ ו- $2x+y-1=0$ שתי צלעות של המקבילית ו- $3x+2y+3=0$ האלכסון שלו. מצא את קודקודיו.
2. מצא את היטל של הנקודה $A(-6,4)$ על הישר $4x-5y+3=0$.
3. מצא נקודה A אשר סימטרית לנקודה $B(8,-9)$ ביחס לישר העובר דרך הנקודות $(-1,-2)$ ו- $(3,-4)$.
4. הוכח ששני הקווים $a_1x+b_1y+c_1=0$ ו- $a_2x+b_2y+c_2=0$ מאונכים זה לזה אם ורק אם $a_1a_2+b_1b_2=0$.
5. יהיו $A(-10,2)$, $B(6,4)$ קודקודיו של המשולש ABC שבו $M(5,2)$ היא נקודת החיתוך של הגבהים. מצא את הקואורדינטות של הקודקוד C.
6. עבור אילו ערכים של m ו- n הישר $(m+n-3)x+(2m-n+1)y+6m+9=0$ מקביל לציר ה- x וחותך מחצי הציר השלילי של y קטע השווה ל- 3.
7. עבור אילו ערכים של a ו- b הקווים $6x-4y-b=0$, $ax-2y-1=0$:
א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. מתלכדים.
8. כתוב את משוואת חוצה הזווית בין הישרים:
א. $3x-y-2=0$, $x-3y+5=0$.
ב. $2x+4y+7=0$, $x-2y-3=0$.
9. יהיו $2x-y+5=0$, $3x+6y-1=0$ שתי צלעות של משולש שווה-שוקיים. מצא את משוואת הבסיס אם ידוע שהוא עובר דרך הנקודה $(2,-1)$.

5. מקום גיאומטרי של נקודות. מעגל

בסעיפים הבאים נבנה את משוואת הקווים הנתונים בצורה גיאומטרית.

הגדרה 7: קבוצת נקודות בעלות תכונה משותפת נקראת **המקום הגיאומטרי של הנקודות.**

דוגמה 3: מצא את משוואת המקום הגיאומטרי של נקודות הנמצאות במרחקים שווים מהנקודות $A(1,2)$, $B(5,6)$.

פתרון: נסמן על ידי $M(x,y)$ נקודה כלשהי מהמקום הגיאומטרי הנ"ל. זאת אומרת, $MA=MB$, לכן

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}$$

לאחר פתיחת הסוגריים נקבל $x+y=7$, וזהי משוואת המקום הגיאומטרי המבוקש.

לדוגמאות נוספות ותרגילים, ראה [2].

הגדרה 8: מקום גיאומטרי של נקודות הנמצאות במרחק קבוע R מנקודה נתונה $A(a,b)$ נקראת **מעגל**. R הוא **רדיוס** המעגל ו- A **מרכז המעגל.**

לכל נקודה $M(x,y)$ על המעגל, המרחק הוא $MA=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$, ולכן

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

היא **משוואת המעגל.**

דוגמה 4: רשום את משוואת המעגל בעל רדיוס 5 שמרכזו ב- $A(2,-4)$.

פתרון: לפי (1) נקבל $(x-2)^2+(y+4)^2=25$ או $x^2-4x+y^2+8y-5=0$.

דוגמה 5: רשום משוואת המעגל העובר דרך הנקודות $A(-1,5), B(-2,-2), C(5,5)$.

פתרון: נקודות C,B,A נמצאות על המעגל ולכן מקיימות את (1). נציב את הקואורדינטות של A,B,C ב-(1) ונקבל שלוש משוואות עם שלושה נעלמים b,a ו-R.

$$\begin{cases}(-1-a)^2+(5-b)^2=R^2\\(-2-a)^2+(-2-b)^2=R^2\\(5-a)^2+(5-b)^2=R^2\end{cases} \to \begin{cases}(-1-a)^2+(5-b)^2=(-2-a)^2+(-2-b)^2\\(-1-a)^2+(5-b)^2=(5-a)^2+(5-b)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+7b=9\\12a=24\end{cases} \to a=2 \quad , \quad b=1 \quad ; \quad R^2=(-1-2)^2+(5-1)^2=25$$

סופית, משוואת המעגל היא: $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

דוגמה 6: מצא את מרכז ורדיוס המעגל $x^2+3x+y^2-7y+1=0$.

פתרון: נרשום את משוואת המעגל הנתון בצורה (1). לצורך זה נשתמש בזהויות $x^2+3x=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$, $y^2-7y=\left(y-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$. נציב במשוואת המעגל, נקבל

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}-\frac{9}{4}+1=0 \quad , \text{או} \quad \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{27}{2}$$

לכן $A\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$ היא מרכז המעגל ו- $R=\frac{\sqrt{54}}{2}$ רדיוסו.

נסיים את סעיף זה בנוסחה של משוואות המשיק למעגל (1) בנקודה $M_0(x_0,y_0)$ הנמצאת עליו. נשתמש בנגזרת של פונקציה סתומה (סעיף 3, פרק 6, [1]), נקבל ששיפוע המשיק שווה ל- $y'(x_0)=-\frac{x_0-a}{y_0-b}$ ולכן משוואת המשיק היא:

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b) = R^2 \qquad (2)$$

את ההוכחה של (2) נשאיר לקורא.

תרגילים:

1. מצא את משוואת המעגל:

א. אם מרכזו בראשית והוא משיק לישר $3x-4y+20=0$.

ב. העובר דרך הנקודות $(1,1)$, $(1,-1)$, $(2,0)$.

ג. העובר דרך הנקודה $(2,1)$ ומשיק לישרים $2x+y-5=0$, $2x+y+15=0$.

ד. העובר דרך הנקודה $(-1,5)$ ומשיק ישרים $4x+3y+14=0, 3x+4y=35$.

2. מצא את משוואת הקוטר למעגל $x^2+y^2+4x-6y-17=0$ המאונך לישר $5x+2y=13$.

3. הוכח אם ישר $y=kx+b$ משיק למעגל $x^2+y^2=R^2$, אזי $b^2=R^2(1+k^2)$.

4. מצא את משוואת המיתר המשותף למעגלים $x^2+y^2+3x-y=0$ ו- $3x^2+3y^2+2x+y=0$.

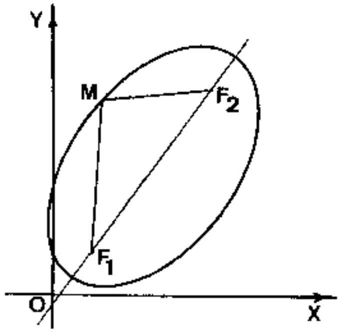
5. הוכח שמשוואת המיתר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(x_1,y_1)$ למעגל $x^2+y^2=R^2$ היא $xx_1+yy_1=R^2$.

6. אליפסה

הגדרה 9: מקום גיאומטרי של נקודות שעבורם סכום המרחקים לשתי נקודות נתונות F_1,F_2 (**מוקדים**) הוא מספר קבוע הנתון מראש (המספר הנ"ל גדול מהמרחק בין המוקדים) נקרא **אליפסה**.

דוגמה 7: מצא את משוואת האליפסה שמוקדיה הם $F_1=(1,1)$, $F_2(4,5)$ ומספרה הקבוע הוא 7.

פתרון: תהי $M(x,y)$ נקודה על אליפסה. מהגדרת האליפסה נקבל $MF_1+F_2M=7$ או $\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}+\sqrt{(4-x)^2+(5-y)^2}=7$



נעביר שורש אחד לאגף השני ונעלה בריבוע. נפשט ונקבל

$$1-2x+x^2+1-2y+y^2 =$$
$$=49-14\sqrt{(4-x)^2+(5-y)^2}+$$
$$+16-8x+x^2+25-10y+y^2$$

או $7\sqrt{(4-x)^2+(5-y)^2}=-3x-4y+44$

נעלה את שני האגפים בריבוע ולאחר פישוט, נקבל

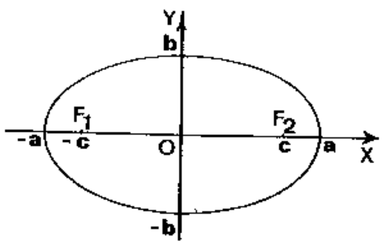
$$40x^2-33y^2-128x-138y-24xy+73 = 0$$

משוואה שקיבלנו היא משוואת האליפסה.

הגדרה 10: אליפסה היא **קנונית** אם מוקדיה נמצאים על ציר ה- x וסימטריים ביחס לציר ה- y.

נבנה משוואה של אליפסה קנונית. יהיו $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $c>0$ מוקדים ומספר קבוע $2a$, $a>0$. לפי הגדרת האליפסה לכל נקודה $M(x,y)$ עליה מתקיים $MF_1+MF_2=2a$, נקבל

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$



כמו בדוגמה הקודמת, נעביר אגף ונעלה בריבוע

$$(x-c)^2+y^2 =$$
$$=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2+xc$$

$$a^2(x^2+2xc+c^2+y^2) = a^4+2a^2xc+x^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

נסמן $a^2-c^2=b^2$, נקבל

$$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (1*)$$

נחלק את שני האגפים ב- a^2b^2 ונקבל את המשוואה הקנונית של האליפסה

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

נציין שאם $a=b$ נקבל מ-(1) משוואת מעגל בעל רדיוס a.

להוכחת הטענות הבאות ראה [2].

טענה 1: משוואת המשיק לאליפסה (1) בנקודה (x_0,y_0) עליה היא

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

טענה 2: הישר $y=mx+n$ הוא משיק לאליפסה הקנונית (1) אם ורק אם $n^2=a^2m^2+b^2$.

תרגילים:

1. כתוב את משוואת האליפסה הקנונית העוברת דרך הנקודות $(2,-2)$, $(4,1)$.
2. מצא את אורך מיתר האליפסה $x^2+2y^2=6$ המונח על הישר $y+2x=5$.
3. דרך מרכז האליפסה $x^2+9y^2=45$ העבר מיתר שאורכו $2\sqrt{5}$.
4. דרך הנקודה $(1,1)$ הנמצאת בתוך האליפסה $5x^2+6y^2=30$, העבר מיתר שייחצה על ידי הנקודה הזו.
5. כתוב את משוואת הישר המשיק לאליפסה $4x^2+5y^2=120$ במקביל לישר $y+2x=5$.
6. כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(4,-1)$ ומשיק לאליפסה $3x^2+6y^2=18$.
7. תהי נקודה M על האליפסה בעלת המוקדים F_1 ו- F_2. הוכח שהנורמל לאליפסה בנקודה M חוצה את הזווית F_1MF_2.

7. ההיפרבולה

הגדרה 11: **המקום** הגיאומטרי של נקודות שעבורם הפרש המרחקים לשתי הנקודות הקבועות F_1, F_2 **(מוקדים)** הוא מספר קבוע הנתון מראש נקרא **היפרבולה.**

באופן דומה לאליפסה נגדיר היפרבולה קנונית.

הגדרה 12: היפרבולה היא **קנונית** אם מוקדיה נמצאים על ציר ה- x וסימטריים לציר ה- y.

נקבל משוואה קנונית של ההיפרבולה בעלת מוקדים $c>0$, $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$. המספר הקבוע $a>0$, $2a$.

לפי הגדרת ההיפרבולה לכל נקודה $M(x,y)$ אשר עליה מתקיים $|MF_1-MF_2|=2a$, או

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$$

נפשט את הביטוי הנ"ל (באופן דומה לסעיף הקודם), נקבל

$$a^2y^2-(c^2-a^2)x^2 = a^2(a^2-c^2)$$

נסמן $b^2=c^2-a^2$ ונחלק ב- a^2b^2, נקבל סופית (ראה איור 1)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

להיפרבולה (1) יש שתי אסימפטוטות (הוכח!)

$$y=\frac{b}{a}x \quad , \quad y=-\frac{b}{a}x \qquad (2)$$

הגדרה 13: היפרבולה

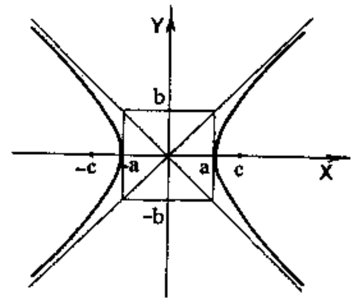
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (3)$$

נקראת **היפרבולה צמודה** להיפרבולה (1) (ראה איור 2).

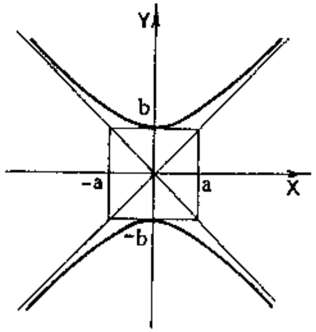
אם $a=b$, אזי ההיפרבולה (1) היא **שוות שוקיים**.

קל לראות שלהיפרבולות צמודות קיימות אסימפטוטות משותפות.

משוואת **המשיק להיפרבולה** בנקודה (x_0,y_0) עליה היא $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.



איור 1



איור 2

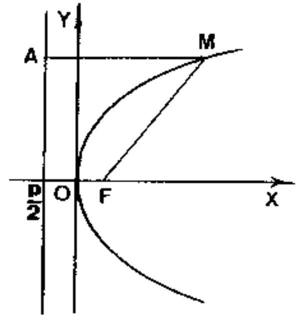
טענה 3: $y=mx+n$ משיק להיפרבולה (1) **אם ורק אם** $n^2=a^2m^2-b^2$ (הוכח!).

טענה 4: בהיפרבולה שוות שוקיים האסימפטוטות מאונכות.

תרגילים:

1. רשום את משוואת ההיפרבולה שוות השוקיים בעלת המוקדים $(6,0),(-6,0)$.
2. תהיה M נקודה כלשהי על ההיפרבולה בעלת המוקדים F_1 ו-F_2. הוכח שהמשיק בנקודה M חוצה את הזווית $\angle F_1MF_2$.
3. מצא את משוואת המשיק להיפרבולה $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{36}=1$ אשר מקביל לישר $10x-12y+5=0$.
4. מצא את משוואת המשיק להיפרבולה $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0$ מהנקודה $\left(\frac{7}{3},\frac{4}{9}\right)$.

8. פרבולה



הגדרה 14: מקומם הגיאומטרי של נקודות הנמצאות במרחקים שווים מהנקודה הקבועה F **(מוקד)** ומקו ישר נתון **(מדריך)** נקראת **פרבולה.**

פרבולה נקראת **קנונית** אם המוקד F נמצא על ציר ה-x, המדריך ניצב לציר ה- x והמוקד והמדריך נמצאים באותו מרחק מהראשית.

נקבל את משוואת הפרבולה הקנונית.

יהיו $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, המדריך $x=\frac{p}{2}$, $M(x,y)$ נקודה על הפרבולה, לכן $MA=MF$, $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$. נפשט את הביטוי, נקבל

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

משוואת המשיק לפרבולה בנקודה $M_0(x_0,y_0)$ עליה היא

$$yy_0 = p(x+x_0) \tag{2}$$

טענה 5: הישר $y=mx+n$ משיק לפרבולה **אם ורק אם** $p=2mn$.

המשוואות הכלליות של אליפסה, פרבולה והיפרבולה ניתנות על ידי טרנספורמציות של מערכת צירים העוברות לצורה קנונית (ראה פרק VII, [2]).

תרגילים:

1. מצא את המוקד והמדריך של הפרבולות:
   א. $y^2=5x$. ב. $y^2=-2x$. ג. $x^2=-3y$.
2. מצא את משוואת המשיק לפרבולה:
   א. $y^2=2x$ בנקודה $(18,-6)$.
   ב. $y^2=3x$ המקביל ל- $2x-3y+3=0$.

9. קואורדינטות קוטביות

בסעיף זה נחקור מערכת קואורדינטות חדשה (קוטביות), נקבע את הקשר שלה עם מערכת קואורדינטות קרטזיות.

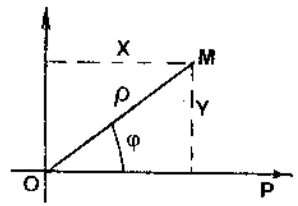
נקבע במישור נקודה O **(קוטב)** **וציר** מכוון $\vec{OP}$. תהיה M נקודה במישור, את מיקומה של הנקודה M במישור מוגדר חד-משמעית על-ידי מרחקה ρ, $\rho\ge 0$ עד הקוטב O והזווית החיובית φ בין OM והציר $\vec{OP}$.

נזכיר שזווית φ חיובית אם מחשבים אותה מהציר $\vec{OP}$ עד הקטע OM נגד כיוון השעון.

הגדרה 8: זוג מספרים ρ,φ נקראים **קואורדינטות קוטביות** של הנקודה M.

נציין שלכל נקודה במישור מתאים זוג מספרים יחיד (ρ,φ) במערכת קואורדינטות קוטביות, ולהיפך, לכל זוג (ρ,φ) מתאימה נקודה יחידה במישור.

נשים הקוטב O בראשית של מערכת הצירים הקרטזית וציר $\vec{OP}$ על ציר ה- x, ונקבל קשר בין שתי המערכות האלו.



$$x=\rho\cos\varphi\ ,\ y=\rho\sin\varphi \qquad (1)$$

ולהיפך, אם ידועים x ו- y נקבל

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (2)$$

דוגמה 9:

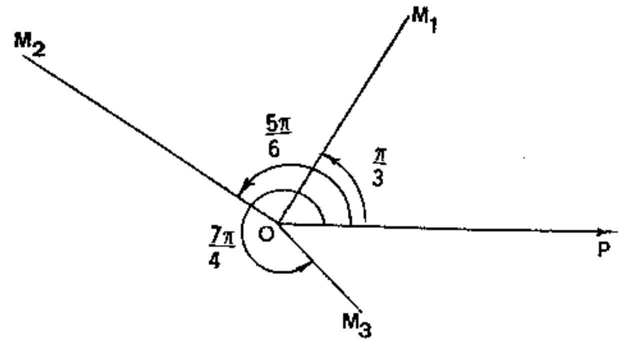
א. צייר במערכת קואורדינטות קוטביות את הנקודות הבאות:

$$M_1=\left(2,\frac{\pi}{3}\right)\ ,\ M_2=\left(3,\frac{5\pi}{6}\right)\ ,\ M_3=\left(1,\frac{7\pi}{4}\right)$$

ב. מצא את הקואורדינטות הקרטזיות של הנקודות מ-א'.

פתרון:

א.



ב. נשתמש בנוסחה (1) ולנקודה M_1 נקבל: $x_1=2\cos\frac{\pi}{3}=1\ ,\ y_1=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

באופן דומה: $M_2\left(\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\ ,\ M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

דוגמה 10: רשום בקואורדינטות קוטביות את משוואת הקווים אשר נתונים על ידי קואורדינטות קרטזיות:

א. קו ישר $ax+by=c$. ב. מעגל $x^2+y^2=R^2$. ג. מעגל $x^2+y^2=Rx$.

ד. למניסקטה של ברנולי $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (פרק 14, איור בסעיף 4).

פתרון: בכל אחד מהתרגילים נשתמש בנוסחה (1), נציב $x=\rho\cos\varphi\ ,\ y=\rho\sin\varphi$ ונקבל:

א. $\rho=\frac{c}{a\cos\varphi+b\sin\varphi}$. ב. $\rho=R$.

ג. $\rho=R\cos\varphi$. ד. $\rho^4=2a^2\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$ או $\rho^2=2a^2\cos2\varphi$.

נציין שעקום שמשוואתו מסובכת בקואורדינטות קרטזיות, יכול להיות בעל משוואה פשוטה יותר בקואורדינטות קוטביות, ולהיפך.

לעיתים נוח יותר להשתמש **בקואורדינטות קוטביות מוכללות**

$$x=a\rho\cos\varphi\quad ,\quad y=b\rho\sin\varphi$$

דוגמה 11: רשום בקואורדינטות קוטביות מוכללות את משוואות:

א. האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. ב. ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

פתרון: נציב בכל אחד מהמקרים האלו (2), נקבל

א. משוואת האליפסה $\rho=1$. ב. משוואת ההיפרבולה $\rho^2\cos2\varphi=1$.

דוגמה 12: צייר גרף של העקום $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$.

פתרון: נשים לב שמשוואת העקום אינה משתנה עם החלפת x ב- -x ו- y ב- -y ואם נחליף את שניהם יחד ולכן המשמעות היא שהעקום הנתון סימטרי יחסית לציר ה-x, לציר ה-y וגם יחסית לראשית. לכן מספיק לשרטט את הגרף ברביע הראשון ולהמשיכו בצורה סימטרית לרביע השני, השלישי והרביעי.

נרשום את משוואת העקום הנתון בקואורדינטות קוטביות.

נציב את (1) במשוואת העקום ונקבל $[(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2]^3 = 4\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$

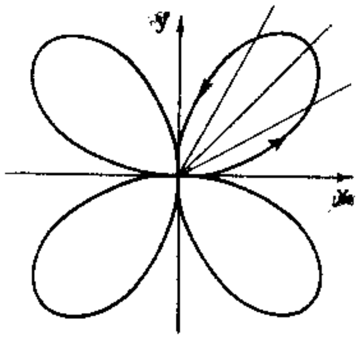
$\rho^6=\rho^4\sin^2 2\varphi$ ולכן $\rho=\sin2\varphi$

בתנאי ש- $\rho\ge0$ נקבל $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ (הרביע הראשון).

ניתן ל- φ ערכים מ- 0 עד $\frac{\pi}{2}$ ונחשב את ρ.

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

לפי הנקודות (ρ,φ) נבנה קו (ראה איור).



תרגילים: צייר את הגרפים של הקווים הבאים:

א. $(x^2+y^2)^3=a^2(x^2-y^2)^2$. ב. $x^6=4(x^4-y^4)$.

ג. $\rho=a\varphi$. ד. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

ה. $x^2[(x+a)^2+y^2]=a^2y^2$. ו. $(x^2+y^2-2ax)^2=b^2(x^2+y^2)$, $2a>b>0$.

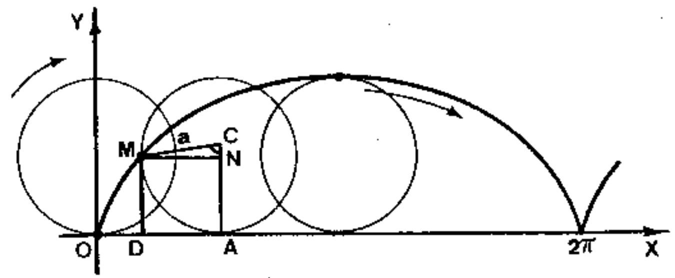
10. משוואת עקומים בצורה פרמטרית

בבעיות של מכניקה מתייחסים לעקומים כמסלול של תנועת הנקודות ולכן נוח יותר להתייחס לקואורדינטות של הנקודה כאל פונקציות משתנה עזר. למשתנה הנ"ל קוראים פרמטר.

דוגמה 13: מעגל בעל רדיוס a נע לאורך ציר ה- x ללא החלקה.

מצא מסלול של נקודה נתונה מעל המעגל.

פתרון:



ניקח את ראשית הצירים בנקודה הנתונה ונניח ש- $M(x,y)$ היא נקודה שרירותית על מסלולה. נסמן $\sphericalangle MCA=t$. נתון $OA=|MA|=at$, $OD=x$, $DA=MN=a\sin t$, לכן $OD=OA-DA$ או $x=at-a\sin t$. מכיוון ש- $DM=y$, $CN=a\cos t$, $CA=a$, נקבל $y=a-a\cos t$. כלומר, קיבלנו $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ וזוהי משוואה פרמטרית של העקום הנדרש (**צוקלוידה**).

דוגמה 14: רשום בצורה פרמטרית את הקווים הבאים:

א. מעגל $x^2+y^2=R^2$. ב. מעגל $x^2+y^2=Rx$.

ג. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (אסטרואידה). ד. $y=f(x)$.

פתרון:

א. $x=R\cos t$, $y=R\sin t$. אם נחלץ את t משתי המשוואות הנ"ל, נקבל את המשוואה הנתונה.

ב. נשתמש בקואורדינטות קוטביות $y=\rho\sin t$, $x=\rho\cos t$ (*). נציב (*) במשוואה הנתונה ונקבל $\rho^2=R\rho\cos t \to \rho=R\cos t$. סופית, נציב את ρ ב-(*), נקבל את הצורה הפרמטרית הנדרשת $y=R\cos t\sin t$, $x=R\cos^2 t$.

בדיקה: אם נציב את x ו- y במשוואת המעגל $x^2+y^2=Rx$ נקבל זהות

$$(R\cos^2 t)^2+(R\cos t\cdot\sin t)^2 = R\cdot R\cos^2 t$$

ג. הצורה הפרמטרית של העקום היא $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

ד. ניקח את x כפרמטר, כלומר $x=t$, לכן $y=f(t)$, $x=t$.

תרגילים:

1. רשום את הקווים הבאים בצורה פרמטרית:

א. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. ב. $(x^2+y^2)^2=ax^3$.

ג. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$. ד. $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$.

ה. $y^3=x^2$. ו. $y^2=x^3$.

2. רשום את הקווים הנתונים בצורה פרמטרית על-ידי המשוואה $F(x,y)=0$.

א. $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$. ב. $x=\frac{at^2}{1+t^2}$, $y=\frac{at^3}{1+t^2}$.

ג. $x=a\,ch\,t$, $y=b\,sh\,t$. ד. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

פרק 8
אלגברה של וקטורים

1. וקטורים. חיבור, חיסור ומכפלה בסקלר

בטבע מבדילים בין שתי קטגוריות של מושגים: סקלרים ווקטורים.

מושג המוגדר חד-משמעית על ידי מספר נקרא מושג סקלרי. למשל: מסה, עבודה, צפיפות, טמפרטורה – הם מושגים סקלריים.

אם להגדרת המושג, פרט לערכו המספרי יש צורך לדעת גם את כיוונו, אזי המושג הוא וקטורי. לדוגמה: מהירות, תאוצה, כוח.

הגדרה 1: הערך המספרי והכיוון נקרא **וקטור**.

לערך המספרי בערך בהוחלט קוראים **אורך (מודול)** של הוקטור.

בציור וקטור יתואר על ידי **קטע מכוון**. את הוקטור נסמן באות לטינית קטנה **בולטת**. **לדוגמה:** וקטור **a** ואורכו יסומן ב- $|\mathbf{a}|$.

וקטור שהתחלתו בנקודה A וסופו ב- B נסמן ב- $\vec{AB}$ את אורכו נסמן על ידי AB.

הגדרה 2: וקטור בעל אורך אפס נקרא **וקטור האפס**, ונסמן **0**.

הגדרה 3: וקטור בעל אורך יחידה נקרא **וקטור היחידה**.

הגדרה 4: שני **וקטורים שווים** אם אורכם שווה וכיוונם זהה, כלומר הם נמצאים על קווים מקבילים ומכוונים באותו כיוון.

מהגדרת השיווין של הוקטורים נקבל את ההערה הבאה.

הערה 1: אם נתונה נקודה A אזי לכל וקטור **a** ניתן למצוא וקטור השווה לו, שהתחלתו בנקודה A.

הגדרה 5: **הזווית בין הוקטורים** α היא זווית בין הכיוונים החיוביים שלהם. נדגיש ש- $0\le\alpha\le\pi$.

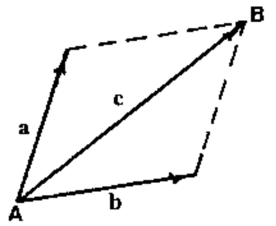
נעבור להגדרת סכום והפרש של וקטורים.

הגדרה 6: וקטור **c** הוא **הסכום** של הוקטורים **a** ו- **b** וניכתב על ידי $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, אם הוא מוגדר באופן הבא. מעבירים את הוקטורים **a** ו- **b** לנקודה משותפת A.

וקטור **c** הוא האלכסון $\vec{AB}$ של המקבילית הבנויה על הוקטורים **a** ו- **b** אשר כיוונם מ- A ל- B.

את הוקטור $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ניתן לבנות באופן אחר: מקצה **a** מעבירים וקטור **b**. מחברים את התחלתו של **a** עם סופו של **b** ומקבלים וקטור שהוא $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

יהי α הזווית בין הוקטורים **a** ו- **b**, נשתמש במשפט הקוסינוס ונקבל נוסחה לחישוב אורך הוקטור $\mathbf{a}+\mathbf{b}$:



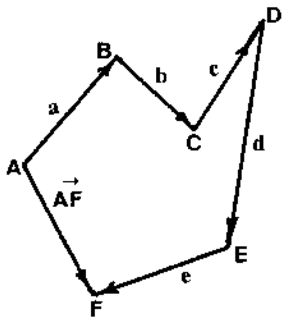
איור 1

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\alpha}$$

נרחיב את פעולת החיבור ליותר משני וקטורים.

נדגים את בניית הוקטור $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}$. מנקודה כלשהי A נעביר וקטור $\vec{AB}$ השווה ל-**a**. מקצה B נעביר וקטור $\vec{BC}$ השווה לוקטור **b**, מהנקודה C מעבירים וקטור $\vec{CD}$ השווה ל-**c**, מהנקודה D בונים וקטור $\vec{DE}$ השווה לוקטור **d** ובסוף באופן דומה בונים $\mathbf{e}=\vec{EF}$. נחבר את הנקודות A ו- F ונקבל וקטור $\vec{AF}$ שהוא הוקטור הנדרש. כלומר,

$$\vec{AF} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}$$



איור 2

הגדרה 7: וקטור **b** הוא **נגדי** ל- **a**, אם:

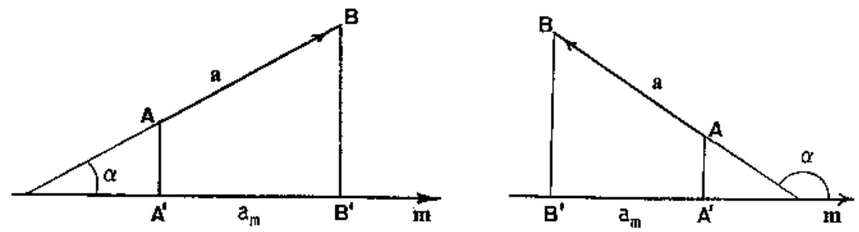
א. $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$. ב. **a** ו- **b** נמצאים על ישרים מקבילים.

ג. הכיוונים של **a** ו- **b** הפוכים. נסמן $\mathbf{b}=-\mathbf{a}$.

הגדרה 8: הפרש הוקטורים **a** ו- **b** הוא וקטור $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ כזה ש- $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$.

הגדרה 9*: יהיו A' ו- B' היטלי הקצוות של הוקטור $\mathbf{a}=\vec{AB}$ על ציר **m**. **ההיטל של וקטור a** על ציר **m** הוא סקלר a_m אשר שווה לאורך הקטע המכוון $\vec{A'B'}$, עם סימן פלוס, כאשר $\vec{A'B'}$ הוא בכיוון של **m** ועם סימן מינוס כאשר A'B' נגד הכיוון של **m**.

תהיה α הזווית בין הוקטורים **a** ו- **m**. קל לראות שההיטל $a_m=|\mathbf{a}|\cdot\cos\alpha$.



משפט 1: ההיטל של סכום שני וקטורים שווה לסכום ההיטלים שלהם על אותו הציר.

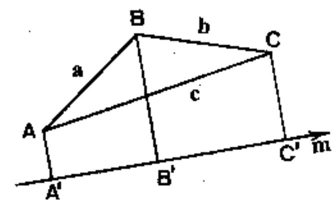
הוכחה: יהי $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

נסדר את הוקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ כך שיצרו משולש ABC, כלומר $\mathbf{a}=\vec{AB}$, $\mathbf{b}=\vec{BC}$, $\mathbf{c}=\vec{AC}$.

נסמן על ידי A',B',C' את ההיטלים של הנקודות A,B,C על $\mathbf{m}$ בהתאמה.

קל לראות ש- $a_m=A'B'$, $b_m=B'C'$ ו- $c_m=A'C'$

ולכן $a_m+b_m=c_m$. ■



הגדרה 10: (**כפל בסקלר**). יהיו וקטור $\mathbf{a}$ וסקלר α:

א. אם $\alpha=0$, אזי $\alpha\mathbf{a}$ הוא וקטור אפס $(\alpha\mathbf{a}=\mathbf{0})$.

ב. אם $\alpha>0$, אזי $\alpha\mathbf{a}$ הוא וקטור בכיוון של $\mathbf{a}$ ובעל אורך $\alpha|\mathbf{a}|$.

ג. אם $\alpha<0$, אזי הוקטור $\alpha\mathbf{a}$ הוא בכיוון הנגדי ל- $\mathbf{a}$ ובעל אורך $|\alpha|\cdot|\mathbf{a}|$.

במילים אחרות, להכפיל וקטור בסקלר α, זאת אומרת לשנות את אורכו פי $|\alpha|$ ולהשאיר את כיוונו אם $\alpha>0$ או לשנות את הכיוון לנגדי במקרה ש- $\alpha<0$.

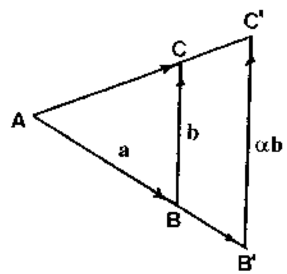
הערה 2: הוקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\alpha\mathbf{a}$ נמצאים על ישרים מקבילים.

משפט 2: יהיו $\mathbf{a}$ ו-$\mathbf{b}$ וקטורים ו- α,β סקלרים. אזי:

א. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$. ב. $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$.

ג. $\alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a}$. ד. $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$.

ה. $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$.



הוכחה: נוכיח את ד'. נניח כי $\alpha>0$. נעזר בציור שבו $\vec{AB}=\mathbf{a}$, $\vec{BC}=\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\vec{AC}$.

נבנה וקטורים $\vec{AB'}=\alpha\mathbf{a}$ ו- $\vec{B'C'}=\alpha\mathbf{b}$.

קל לראות שהמשולש ABC דומה למשולש A'B'C' ולכן $AC'=\alpha AC$.

כלומר, $\vec{AC'}=\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. כיוון ש- $\vec{AC'}=\vec{AB'}+\vec{B'C'}$, נקבל $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$.

באופן דומה מוכיחים את ד' במקרה ש- $\alpha<0$.

את יתר הטענות נשאיר כתרגיל לקורא. ■

תרגילים:

1. הוכח את א', ב', ג', ה' - במשפט 2.
2. ABCDEF משושה משוכלל ו- 0 מרכזו.
איזה מהוקטורים הבאים $\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC},\vec{OD},\vec{OE},\vec{OF},\vec{AB},\vec{BC},\vec{CD},\vec{DE},\vec{EF},\vec{FA}$
שווים זה לזה?
3. הוכח כי $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}+\vec{OE}+\vec{OF}=\mathbf{0}$ כאשר הוקטורים הם מהשאלה 2.
4. הוקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ יוצרים זוית בת $60°$. חשב $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ ו- $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ אם ידוע כי $|\mathbf{a}|=5$, $|\mathbf{b}|=12$.
5. מצא את התנאי על הוקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ כך שיתקיים:
א. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$. ב. $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$. ג. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$.
ד. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|>|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$. ה. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|<|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

2. צירוף ליניארי של וקטורים

בסעיף זה נביא מספר מושגים מאלגברה ליניארית, ראה [3].

הגדרה 11: הוקטור

$$\mathbf{u}=\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{a}_n \qquad (1)$$

נקרא **צירוף ליניארי** של n הוקטורים $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$.

הגדרה 12: הוקטורים $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ תלויים ליניארית אם קיימים מספרים ממשיים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ שלא כולם אפס כאלו שהצירוף הליניארי שלהם, הוא אפס, כלומר

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{a}_n = 0 \qquad (2)$$

נביא תנאים לתלות ליניארית של וקטורים במישור ובמרחב.

משפט 2: שני וקטורים תלויים ליניארית אם ורק אם הם נמצאים על ישרים מקבילים.

הוכחה:

א. נניח כי וקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ תלויים ליניארית. כלומר $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=0$, כאשר $\alpha\neq0$ ו- $\beta\neq0$. נרשום את השוויון באופן הבא $\alpha\mathbf{a}=-\beta\mathbf{b}$ או $\mathbf{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{b}$
ולכן לפי הערה 2, הוקטורים $\mathbf{b}$ ו- $\mathbf{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{b}$ נמצאים על ישרים מקבילים.

ב. נניח כי $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ נמצאים על הישרים המקבילים. זאת אומרת $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{b}$ או $\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b}=0$. כלומר, $\mathbf{a},\mathbf{b}$ תלויים ליניארית. ■

הגדרה 13: שני הוקטורים $\mathbf{b}$ ו-$\mathbf{a}$ **קוליניאריים** אם הם נמצאים על ישרים מקבילים.

ולכן את משפט 2 ניתן לנסח באופן הבא:

משפט 2*: שני וקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ קוליניאריים אם ורק אם קיים מספר $\alpha\neq0$ כזה ש- $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{b}$.

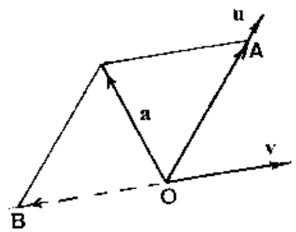
נניח עתה שהוקטורים $\mathbf{u}$ ו- $\mathbf{v}$ לא קוליניאריים, לכן הוקטור

$$\mathbf{a}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v} \tag{3}$$

שונה מאפס לכל α ו- β ממשיים השונים מאפס. ללא הגבלת הכלליות, נניח כי הוקטורים $\mathbf{u}$ ו- $\mathbf{v}$ יוצאים מנקודה אחת ולכן הם נמצאים במישור אחד (נובע ממשפט ידוע בסטריאומטריה: דרך שני ישרים נחתכים עובר מישור יחיד). ברור שגם הוקטור $\mathbf{a}$ נמצא באותו מישור כיוון שלפי הגדרת הסכום $\mathbf{a}$ הוא האלכסון של המקבילית הבנוי מהוקטורים $\alpha\mathbf{u}$ ו- $\beta\mathbf{v}$.

משפט 3: יהיו $\mathbf{u}$ ו- $\mathbf{v}$ שני וקטורים לא קוליניאריים, אזי כל וקטור $\mathbf{a}$ הנמצא במישור הנוצר על ידם ניתן להציג באופן יחיד על ידי צורה (3).

הוכחה: נעביר את הוקטורים $\mathbf{v},\mathbf{u}$ ו- $\mathbf{a}$ מנקודה משותפת O. דרך הקצה של $\mathbf{a}$ נעביר ישרים מקבילים ל- $\mathbf{u}$ ו- $\mathbf{v}$ ונסמן על ידי A ו- B את נקודות החיתוך עם הישרים שעליהם מונחים הוקטורים $\mathbf{u}$ ו- $\mathbf{v}$ בהתאמה.



מהבניה נובע ש- $\mathbf{a}=\vec{OA}+\vec{OB}$, תוך שימוש בהערה 2 מציגים $\vec{OA}=\alpha\mathbf{u}$ ו- $\vec{OB}=\beta\mathbf{v}$ ולכן $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}$.
נוכיח יחידות: נניח כי לוקטור $\mathbf{a}$ יש הצגה נוספת $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{u}+\beta_1\mathbf{v}$, כלומר, $\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{u}+\beta_1\mathbf{v}$ או $(\alpha-\alpha_1)\mathbf{u}+(\beta-\beta_1)\mathbf{v}=0$.

היות ו- $\mathbf{v},\mathbf{u}$ לא קוליניאריים השוויון האחרון יכול להתקיים אך ורק כאשר $\alpha-\alpha_1=0$ ו- $\beta-\beta_1=0$. מכאן $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$. ■

מהמשפט האחרון נובעת המסקנה הבאה:

מסקנה 1: שלושה וקטורים מונחים על מישור אחד אם ורק אם הם תלויים ליניארית.

הגדרה 14: שלושה וקטורים נקראים **קופלנריים** אם קיימים שלושה וקטורים השווים להם והמונחים על מישור אחד.

מסקנה 2: שלושה וקטורים אינם קופלנריים אם ורק אם הם לא תלויים ליניארית.
באופן דומה למשפט 2 ניתן להוכיח את המשפט הבא.

משפט 4: יהיו $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ שלושה וקטורים לא קופלנריים, אזי כל וקטור $\mathbf{a}\neq0$. ניתן להציג באופן יחיד כצירוף ליניארי שלהם

$$\mathbf{a}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}+\gamma\mathbf{w} \tag{4}$$

כאשר α,β,γ לא מתאפסים יחד.

את הוכחת המשפט נשאיר כתרגיל.

המסקנה העיקרית ממשפטים 3 ו-4 היא, בבעיות הקשורות עם וקטורים רבים, ניתן לבחור שלושה וקטורים לא קופלנריים כוקטורים בסיסיים. כל יתר הוקטורים יתקבלו כצירוף ליניארי של שלושת הוקטורים הבסיסיים.

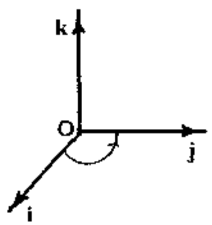
3. קואורדינטות קרטזיות במרחב

בסעיף הקודם ראינו שאם נבחר שלושה וקטורים (בסיסיים) לא קופלנריים אזי כל וקטור במרחב ניתן להציג כצירוף ליניארי שלהם. נבחר את הוקטורים הבסיסיים $\mathbf{k},\mathbf{j},\mathbf{i}$ באופן הבא:

א. $|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$. ב. $\mathbf{i}\perp\mathbf{j},\ \mathbf{j}\perp\mathbf{k},\ \mathbf{k}\perp\mathbf{i}$

ג. הוקטורים $\mathbf{k},\mathbf{j},\mathbf{i}$ יוצאים מנקודה אחת ומהווים מערכת ימנית. זאת אומרת, מסופו של הוקטור $\mathbf{k}$ רואים את התנועה מהוקטור $\mathbf{i}$ לוקטור $\mathbf{j}$ נגד כיוון השעון (ראה איור 1).

נעביר ציר x בכיוון $\mathbf{i}$, ציר y בכיוון $\mathbf{j}$ וציר z בכיוון $\mathbf{k}$ ונקבל מערכת צירים xyz.



איור 1

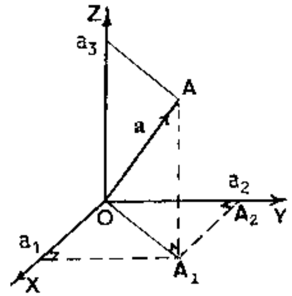
מערכת הצירים הנ"ל נקראת **מערכת קרטזית במרחב**.

כל וקטור $\mathbf{a}$ ניתן להציג כצירוף ליניארי של הוקטורים $\mathbf{k},\mathbf{j},\mathbf{i}$, כלומר $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$.

לשלישיה (a_1,a_2,a_3) קוראים **הקואורדינטות הקרטזיות של הוקטור a**.

קל לראות ש- a_1,a_2,a_3 הם היטלים של הוקטור **a** על הצירים z,y,x בהתאמה. המספרים a_3,a_2,a_1 יכולים לקבל את כל הערכים הממשיים.

נסכם: לכל וקטור מתאימה שלישיה יחידה שהיא הקואורדינטה שלו ולהיפך, לכל שלישיה מתאים וקטור יחיד.



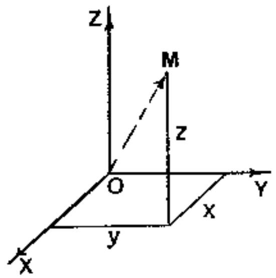
איור 2

מסקנה 3: שני וקטורים **a** ו- **b** שווים אם ורק אם הקואורדינטות שלהם שוות בהתאמה.

נגדיר עתה **קואורדינטות של נקודה M במרחב**.

נעביר וקטור $\vec{OM}$ היוצא מראשית הצירים O.

נגדיר את הקואורדינטות של הנקודה M כקואורדינטות של הוקטור $\vec{OM}$. כלומר, לכל נקודה M במרחב מתאימה שלישיה סדורה של מספרים ממשיים ולכל שלישיה סדורה של מספרים ממשיים מתאימה נקודה במרחב.



איור 3

באיור 3 (x,y,z) הם הקואורדינטות הקרטזיות של הנקודה M.

נתרגם את התוצאות מהסעיפים הקודמים לשפת הקואורדינטות.

משפט 5: האורך של הוקטור $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ שווה ל- $|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

הוכחה: נתבונן באיור 2. ברור ש- $|\mathbf{a}|=OA$. במשולש ישר הזווית OAA_1, $OA^2=OA_1^2+AA_1^2$. מהמשולש ישר הזווית OA_1A_2 מקבלים כי $OA_1^2=OA_2^2+A_1A_2^2$ ולכן $OA^2=OA_2^2+A_1A_2^2+AA_1^2$. היות ו- $OA_2=|a_1|,\ A_1A_2=|a_2|,\ AA_1=|a_3|$ נקבל $|\mathbf{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$. ■

משפט 6: יהיו $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ ו- $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, אזי:

א. $\alpha\mathbf{a}=a_1\alpha\mathbf{i}+a_2\alpha\mathbf{j}+a_3\alpha\mathbf{k}$.

ב. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1)\mathbf{i}+(a_2+b_2)\mathbf{j}+(a_3+b_3)\mathbf{k}$.

ג. הוקטורים **a** ו- **b** קוליניאריים אם ורק אם $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

הוכחה: נוכיח את ג'.

הוקטורים **a** ו- **b** קוליניאריים אם ורק אם $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{b}$ (משפט 2*).

לכן $a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}=\alpha b_1\mathbf{i}+\alpha b_2\mathbf{j}+\alpha b_3\mathbf{k}$ או

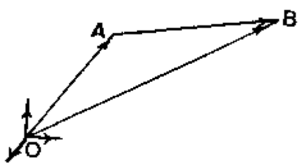
$$a_1=\alpha b_1\ ,\ a_2=\alpha b_2\ ,\ a_3=\alpha b_3$$

אם נחלץ את α משלושת השיוונים האחרונים, נקבל $\alpha=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

את הוכחת א' ו-ב' נשאיר כתרגיל. ■

דוגמה 1: מצא את הקואורדינטות של הוקטור שהתחלתו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה $B(x_2,y_2,z_2)$, וחשב את אורכו.

פתרון: נבנה את הוקטורים $\vec{OA}$ ו- $\vec{OB}$ (O - ראשית הצירים).



$\vec{OA}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$,

$\vec{OB}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$

קל לראות ש- $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$ ולכן לפי משפטים 5 ו-6 נקבל

$$\vec{AB}=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}$$

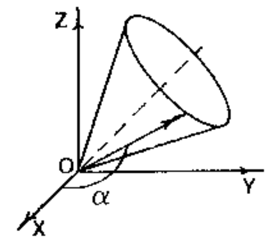
$$|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

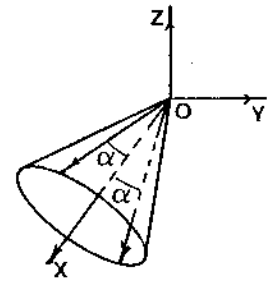
4. כיוון הוקטור במרחב

יהי **a** וקטור המונח במישור xy. הכיוון שלו מוגדר חד-משמעית על ידי הזווית בינו ובין הכיוון החיובי של ציר ה- x.

נעבור למרחב. יהי **a** וקטור במרחב היוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה- x. יחד עם **a** קיימים אינסוף וקטורים כאלו וכולם מרוכזים על פני החרוט המעגלי שהיוצר שלו **a** וצירו x (ראה איורים).

את המקרים $\alpha=0\ ,\ \alpha=\frac{\pi}{2}\ ,\ \alpha=\pi$ נשאיר לטיפולו של הקורא.



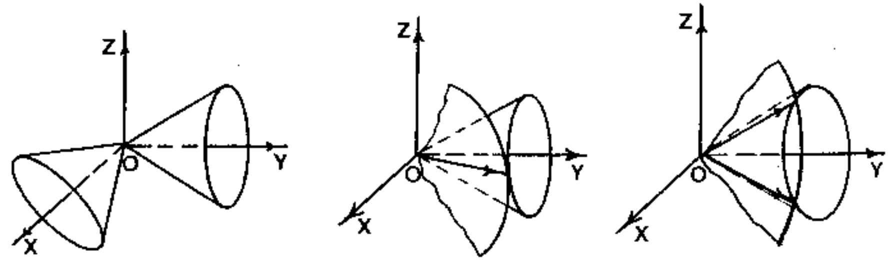


מכאן נובע שהזווית α אינה מספיקה להגדרת הכיוון של הוקטור. לכן, נכניס זווית נוספת β שהיא הזווית בין הוקטור $\mathbf{a}$ וציר y.

נמצא וקטור היוצא מהראשית ויוצר זווית α עם ציר x וזווית β עם ציר y.

ברור שהוקטור הנ"ל צריך להימצא בעת ובעונה אחת על שני חרוטים שציריהם יוצרים זווית α ו- β עם הצירים x ו- y בהתאמה.

נתבונן באיורים כאשר α ו- β זוויות חדות.



ג ב א

א. $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. החרוטים לא נחתכים, כלומר לא קיים וקטור שיוצר זוויות α ו- β עם הצירים x ו- y בהתאמה.

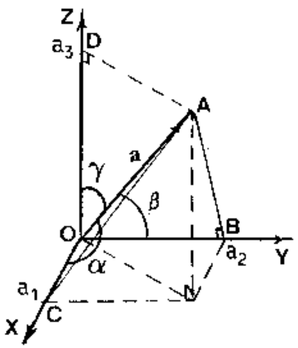
ב. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. החרוטים משיקים זה לזה ולכן קיים וקטור יחיד העונה על דרישותינו.

ג. $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$. החרוטים נחתכים ולכן קיימים שני וקטורים היוצרים זווית α ו- β עם הצירים x ו- y בהתאמה. אחד מהם יוצר זווית חדה עם ציר z והשני זווית כהה עם ציר z.

נמליץ לקורא לחקור את המקרים כש- α זווית כהה ו- β - חדה, או שתיהן זוויות כהות.

סיכום: כדי להגדיר את הכיוון של הוקטור $\mathbf{a}$ במרחב צריכים לתת את שלוש הזוויות α,β,γ שיוצר הוקטור $\mathbf{a}$ עם הצירים x,y ו- z בהתאמה.

נשים לב שהזוויות α ו- β מגדירות את כיוון הוקטור ולכן מגדירות גם את הזווית γ, כלומר קיימת נוסחה המקשרת בין הזוויות α,β,γ. נקבל אותה.



יהיה וקטור $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, נחשב את הזוויות α,β,γ.

מהמשולשים OAB , OAC , OAD נקבל

$$a_1=|\mathbf{a}|\cos\alpha\ ,\ a_2=|\mathbf{a}|\cos\beta\ ,\ a_3=|\mathbf{a}|\cos\gamma \qquad (1)$$

נעלה בריבוע כל אחד מהשיוויונים ונחברם

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\mathbf{a}|^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$

היות ו: $|\mathbf{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$, נקבל

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (2)$$

ל- $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ קוראים **קוסינוסי הכיוון** של $\mathbf{a}$.

הערה 3: אם $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ הם קוסינוסי הכיוון של $\mathbf{a}$ אזי הוקטור

$$\cos\alpha\mathbf{i}+\cos\beta\mathbf{j}+\cos\gamma\mathbf{k}$$

הוא וקטור היחידה בכיוון $\mathbf{a}$.

דוגמה 2: חשב את קוסינוסי הכיוון של $\mathbf{a}=(2,-1,1)$.

פתרון: נחשב את האורך של $\mathbf{a}$ ונשתמש ב-(1), נקבל $|\mathbf{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$,

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{6}}\quad,\quad\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}}\quad,\quad\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

דוגמה 3: וקטור $\mathbf{a}$ יוצר זווית בת 60° עם ציר ה- y וזווית בת 120° עם ציר ה- z.

מהי הזווית ש- $\mathbf{a}$ יוצר עם ציר ה- x ?

פתרון: נתון $\cos\beta=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos\gamma=\cos120^\circ=-\frac{1}{2}$, לכן

$$\cos^2\alpha=1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

או $\alpha=315^\circ$, $\alpha=225^\circ$, $\alpha=135^\circ$, $\alpha=45^\circ$. כלומר, ישנם ארבעה וקטורים הנמצאים על שני ישרים.

תרגילים:

1. מצא את y אם $AB=11$, $A(4,y,1)$, $B(6,2,-5)$.
2. מצא נקודה M הנמצאת במרחק $\sqrt{3}$ מהראשית אם:
   א. הקואורדינטות של הוקטור $\vec{OM}$ שוות זו לזו.
   ב. ההיטלים של הוקטור $\vec{OM}$ על המישורים yz, xz, xy שווים.
3. יהיו $A(11,-5,9)$, $B=(-8,-1,1)$. מצא וקטור יחידה שכיוונו מ- A ל- B.
4. יהי $A(2,-1,7)$. מצא נקודה B כזאת ש- $AB=34$ והוקטור $\vec{AB}$ מקביל לוקטור $8\mathbf{i}+9\mathbf{j}-12\mathbf{k}$.
5. עבור אילו ערכים של α ו- β הוקטורים $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\beta\mathbf{k}$ ו- $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ קוליניאריים.
6. הוכח כי הנקודות $A(-1,5,-10)$, $B(5,-7,8)$, $C(2,2,-7)$, $D(5,-4,2)$ הן קודקודים של טרפז.
7. יהיה $\vec{AB}=4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ כאשר $B(2,-1,7)$. מצא:
   א. את הקואורדינטות של A. ב. את המודול $|\vec{AB}|$.
8. הוקטור $\mathbf{a}$ יוצר זוויות שוות עם הצירים. מהן הזוויות?
9. וקטור יוצר עם הצירים זוויות α,β,γ. נתונות שתיים מהן, מצא את השלישית.
   א. $\alpha=60°, \beta=45°$. ב. $\alpha=45°, \gamma=30°$. ג. $\beta=26°31', \gamma=63°29'$.
10. תהי הנקודה $M(2,x,y)$. חשב את x,y וקוסינוסי הכיוון של הוקטור $\vec{OM}$ אם ידוע כי $|\vec{OM}|=15$ ו- $\cos\beta=\frac{2}{3}$.

5. מכפלה סקלרית

בסעיפים הקודמים הגדרנו את סכום הוקטורים ומכפלתם בסקלר. בהמשך נגדיר פעולות נוספות עם וקטורים. הראשונה מהן היא מכפלה סקלרית.

הגדרה 15: לכל שני וקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ הביטוי

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\alpha \qquad (1)$$

כאשר α היא הזווית ביניהם, נאמר שזוהי **מכפלה סקלרית** שלהם ונקרא $\mathbf{a}$ דות $\mathbf{b}$.
מההגדרה נובעת המסקנה הבאה:

מסקנה 4: שני וקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ מאונכים אם ורק אם $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$.

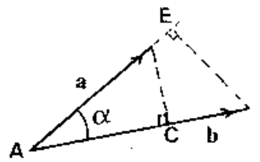
ההגדרה 15 שקולה להגדרה הבאה של המכפלה הסקלרית.

הגדרה 15*: מכפלה סקלרית של $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ היא מכפלת אורך אחד הוקטורים בהיטל הוקטור השני עליו $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_b\cdot|\mathbf{b}|=b_a\cdot|\mathbf{a}|$.

נראה שההגדרות 15 ו-*15 שקולות. נעזר באיור 1.

לפי הגדרה 15 מקבלים $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\alpha$.

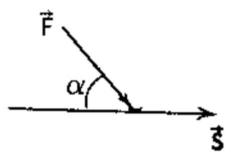
מהציור ברור כי $|\mathbf{a}|\cdot\cos\alpha=AC=a_b$ הוא היטל הוקטור $\mathbf{a}$ על $\mathbf{b}$ ולכן $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\cdot a_b$. או באופן דומה $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot b_a$.



איור 1

דוגמה 4: חלקיק נע לאורך ישר בהשפעת הכוח $\vec{F}$ ויוצר זווית α עם כיוון התנועה $\vec{S}$ (איור 2), עובר מרחק $|\vec{S}|$. מצא את עבודתו של הכוח $\vec{F}$.

פתרון: מפיסיקה ידוע כי את העבודה בהזזת החלקיק לאורך ציר ה- $\vec{S}$ עושה המרכיב האופקי של $\vec{F}$ השווה ל- $|\vec{F}|\cdot\cos\alpha$. לכן, העבודה היא $A=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\alpha$.
כלומר, המכפלה הסקלרית $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$ היא העבודה של הכוח $\vec{F}$.



איור 2

הערה 4: מכפלה סקלרית איננה תלויה בבחירת מערכת הצירים.
נעבור לחישוב $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ באמצעות הקואורדינטות של $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$.

משפט 7: יהיו

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k} \qquad (2)$$

אזי

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \qquad (3)$$

הוכחה: נבנה וקטור

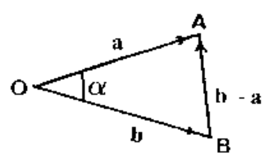
$$\mathbf{b}-\mathbf{a}=(b_1-a_1)\mathbf{i}+(b_2-a_2)\mathbf{j}+(b_3-a_3)\mathbf{k}$$

ונשתמש במשפט הקוסינוסים (ראה ציור 3).

$$|\vec{BA}|^2=|\vec{OA}|^2+|\vec{OB}|^2-2|\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|\cdot\cos\alpha$$

או $|\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\alpha$

או לפי הקואורדינטות:



איור 3

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

$$b_1^2-2a_1b_1+a_1^2+b_2^2-2a_2b_2+a_2^2+b_3^2-2a_3b_3+a_3^2 =$$

$$=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

$$-2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)=-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \quad ■$$

שילוב הנוסחאות (1) ו-(3) מאפשר לקבל נוסחה לחישוב הזווית בין שני הוקטורים.

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \qquad (4)$$

דוגמה 5: יהי l_1 הישר העובר דרך הנקודות $(-1,1,2)$ ו- $(-3,-2,6)$ ו- l_2 הישר העובר דרך הנקודות $(5,-1,4)$ ו- $(4,3,-5)$. חשב את קוסינוס הזווית ביניהם.

פתרון: נבנה וקטור $\mathbf{a}$ בכיוון של הישר l_1:

$$\mathbf{a}=[-1-(-3)]\mathbf{i}+[1-(-2)]\mathbf{j}+[2-6]\mathbf{k}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$$

באופן דומה $\mathbf{b}=\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k}$ הוא וקטור הכיוון של הישר l_2. נשתמש בנוסחה (4), נקבל

$$\cos\alpha = \frac{4\cdot1+3\cdot(-4)+(-4)\cdot1}{\sqrt{16+9+16}\cdot\sqrt{1+16+1}} = -\frac{4}{\sqrt{82}}$$

את התכונות של המכפלה הסקלרית נרכז במשפט הבא.

משפט 8: יהיו $\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}$ וקטורים ו- α סקלר, אזי:

1. $\mathbf{a}^2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$.
2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.
3. $\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.
4. $\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$.

את הוכחת המשפט הקורא יכול לשחזר תוך שימוש בהגדרה 15 ומשפט 7. ■

תרגילים:

1. יהיו $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=4$ ו- $\alpha=120^\circ$ הזווית ביניהם. חשב:

א. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. ב. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$.

ג. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$. ד. $(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$.

2. הוכח שהוקטור $\mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{\mathbf{a}^2}$ מאונך לוקטור $\mathbf{a}$.

3. הזווית בין הוקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ היא בת 30°. חשב את הזווית בין הוקטורים $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ו- $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ אם ידוע כי $|\mathbf{a}|=\sqrt{3}$, $|\mathbf{b}|=1$.

4. במשולש ABC, $AB=2$, $AC=5$ ו- $\angle A=60^\circ$.

חשב את קוסינוס הזווית בין התיכונים היוצאים מהקודקודים A ו- B.

(**רמז:** הוקטורים בכיוון התיכונים הם $\frac{1}{2}(\vec{AC}+\vec{AB})$ ו- $\frac{1}{2}\vec{AC}-\vec{AB}$).

5. הוכח: שני הוקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ מאונכים אם ורק אם $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2$.

6. מכפלה וקטורית

הגדרה 16: יהיו $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ ו- $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$. הוקטור

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k} \qquad (1)$$

נקרא **המכפלה הוקטורית** של $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ ומסמנים $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ($\mathbf{a}$ קרוס $\mathbf{b}$).

נדגיש שבניגוד ל- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ (סקלר) המכפלה $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ היא וקטור.

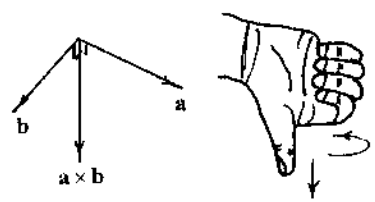
לעיתים קרובות נוח להשתמש בהגדרה גיאומטרית של המכפלה הוקטורית.

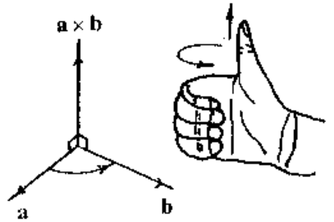
הגדרה 16*: המכפלה $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ היא וקטור $\mathbf{c}$ המקיים:

א. $|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin\alpha$ כאשר α היא הזווית בין הוקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$.

במילים אחרות: האורך של הוקטור $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ שווה לשטח המקבילית הבנוייה מהוקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$.

ב. הוקטור $\mathbf{c}$ מאונך למישור הוקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ בכיוון כזה שמסופו של $\mathbf{c}$ רואים את התנועה מ- $\mathbf{a}$ ל- $\mathbf{b}$ נגד כיוון השעון, או חוק היד הימנית (ראה איור).





משפט 9: ההגדרות 16 ו-16* שקולות.

הוכחה: נוכיח את המשפט בשני שלבים, בשלב הראשון נשווה את האורך של $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ובשלב השני נטפל בכיוון.

א. נוכיח כי

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2\cdot\sin^2\varphi \qquad (2)$$

נשתמש בנוסחה (4) מהסעיף הקודם לחישוב של $\sin^2\phi$.

$$\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi=1-\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}\right)^2=\frac{|\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2}$$

נציב ב-(2). להשלמת ההוכחה נראה כי $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$, או בקואורדינטות

$$(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2=$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

לאחר פתיחת הסוגריים וקיבוץ איברים, מקבלים זהות וזה מוכיח את (2).

ב. תחילה נוכיח כי הוקטור $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ המוגדר על ידי (1) מאונך לוקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$. אמנם נחשב $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ ונקבל

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=a_1(a_2b_3-a_3b_2)-a_2(a_1b_3-a_3b_1)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)=$$
$$=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2-a_2a_1b_3+a_2a_3b_1+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1=0$$

באופן דומה מקבלים $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$ ולכן לפי מסקנה 5 הוקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ מאונכים ל- $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

כדי למצוא את הכיוון של $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ נפנה למקרה שבו $\mathbf{a}=\mathbf{i}$ ו- $\mathbf{b}=\mathbf{j}$. תוך שימוש בנוסחה (1) נקבל $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, כלומר הוקטורים $\mathbf{j},\mathbf{i}$ ו- $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ יוצרים מערכת ימנית ולכן קל לראות שגם במקרה הכללי של $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$ המערכת $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ היא מערכת ימנית. זאת אומרת, ל- $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ יש את הכיוון של הוקטור $\mathbf{c}$ מהגדרה 16*. ■

מהגדרה 16* נובעת הערה חשובה והיא:

הערה 5: המכפלה הוקטורית איננה תלויה בבחירת מערכת הצירים.

דוגמה 6: $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$ כאשר $\mathbf{k},\mathbf{j},\mathbf{i}$ הם וקטורי כיוון הצירים z,y,x בהתאמה (ראה סעיף 3).

דוגמה 7: חשב את שטח המשולש ABC כאשר $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$.

פתרון: שטח המשולש שווה למחצית שטח המקבילית הבנויה על הוקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ ולכן $S=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$. קל לראות ש- $\vec{AB}=(-1,-1,6)$ ו- $\vec{AC}=(-2,0,-2)$.

נחשב $\vec{AB}\times\vec{AC}$.

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-1&-1&6\\-2&0&-2\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}-1&6\\0&-2\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}-1&6\\-2&-2\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}-1&-1\\-2&0\end{vmatrix}=2\mathbf{i}+14\mathbf{j}-2\mathbf{k}$$

$$S=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4+196+4}=\sqrt{51}$$

המשפט הבא מתאר את התכונות של המכפלה הוקטורית.

משפט 10: יהיו $\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}$ וקטורים ו- α סקלר, אזי:

א. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$.
ב. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$.
ג. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.
ד. $\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\alpha\mathbf{b})$.

את הוכחת המשפט נשאיר לקורא כתרגיל.

דוגמה 8: הוכח:

א. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$.
ב. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$.

פתרון: היות והמכפלה הוקטורית אינה תלויה בבחירת מערכת הצירים (הערה 6) נבחר את ציר x בכיוון של $\mathbf{a}$ ואת מישור xy כמישור הוקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\mathbf{b}$.

לכן נקבל $\mathbf{a}=(a_1,0,0)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,0)$, $\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)$.

א. נחשב $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ בשני שלבים.

הראשון
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&0&0\\b_1&b_2&0\end{vmatrix}=0\cdot\mathbf{i}-0\cdot\mathbf{j}+a_1b_2\mathbf{k}$$

והשני
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\0&0&a_1b_2\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=-a_1b_2c_2\mathbf{i}+a_1b_2c_1\mathbf{j}$$

כלומר
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=a_1b_2c_2\mathbf{i}+a_1b_2c_1\mathbf{j} \qquad (*)$$

נעבור לחישוב $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}=[a_1c_1+0+0]\cdot(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j})-(b_1c_1+b_2c_2+0)a_1\mathbf{i}= \qquad (**)$$

$$=a_1c_1b_1\mathbf{i}+a_1c_1b_2\mathbf{j}-b_1c_1a_1\mathbf{i}-a_1b_2c_2\mathbf{j}=a_1c_1b_2\mathbf{j}-a_1b_2c_2\mathbf{i}$$

מ-(*) ו-(**) נובע א'. באופן דומה מוכיחים את ב'.

מהדוגמה הזאת נובעת ההערה הבאה:

הערה 6: המכפלה הוקטורית אינה אסוציאטיבית. זאת אומרת

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\neq\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

תרגילים:

1. חשב את שטח המשולש בעל הקודקודים $A(8,2,3)$, $B(4,-1,2)$, $C(-8,0,4)$.
2. חשב את שטח המקבילית הבנויה מהוקטורים $\mathbf{a}=(1,2,-1)$, $\mathbf{b}=(3,-1,-2)$.
3. הוכח: אם $\mathbf{a}\times\mathbf{c}=0$ ו- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ אזי $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=0$.
4. נתון משולש שקודקודיו $A(1,1,1)$, $B(1,2,2)$, $C(1,4,-1)$. מצא וקטור בכיוון הגובה של המשולש היוצא מקודקוד A (רמז: חקור את $(\vec{BC}\times(\vec{BC}\times\vec{AC})$).
5. יהיו $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ ו- $|\mathbf{a}|=1$, $|\mathbf{b}|=2$. חשב:

   א. $|(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})|$.   ב. $|(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+3\mathbf{b})|$.

7. מכפלה מעורבת

הגדרה 17: המכפלה $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ נקראת **מכפלה מעורבת** של הקודקודים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$. את תכונות המכפלה המעורבת נתאר במשפט הבא:

משפט 11: יהיו $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ שלושה וקטורים, אזי

א. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$.   ב. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$.

ג. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ הוא סקלר שערכו המוחלט שווה לנפח המקבילון הבנוי על $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$.

ד. הוקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ קופלנריים אם ורק אם $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0$.

הוכחה:

א. $$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot\left(\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}\mathbf{k}\right)=$$

$$=a_1\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

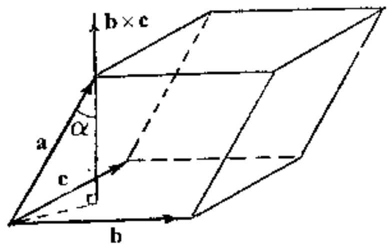
ב. נחשב $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$. לפי א' נקבל

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix}c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

(השתמשנו בתכונות של דטרמיננטה).

ג. נזכיר שנפח מקבילון שווה לשטח הבסיס כפול הגובה. שטח הבסיס שווה ל-$|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$.

גובה המקבילון שווה ל- $|\mathbf{a}|\cdot|\cos\alpha|$ כאשר α היא הזווית בין $\mathbf{a}$ ו-$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ שהוא מאונך לבסיס. לכן הנפח שווה ל- $v=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\cdot|\cos\alpha|$



מצד שני $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|=\big||\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\cdot\cos\alpha\big|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\cdot|\cos\alpha|=v$

ד. נובע ישירות מ-ג' ו-א'. ■

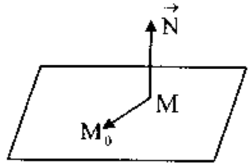
תרגילים:

1. הוכח: אם $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=0$, אזי $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ קופלנריים.
2. הוכח כי הנקודות $A(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C(2,1,2)$, $D(2,2,2)$ נמצאות על מישור אחד.
3. הוכח כי הוקטורים $\mathbf{a}=(2,-1,2)$, $\mathbf{b}=(3,-4,7)$, $\mathbf{c}=(1,2,-3)$ קופלנריים.

פרק 9
גיאומטריה אנליטית במרחב

1. המישור במרחב

בסעיף זה נקבל את משוואת המישור. נגדיר את השאלה באופן הבא: מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות $M(x,y,z)$ הנמצאות על המישור העובר דרך הנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ומאונך לוקטור הנתון $\vec{N}(A,B,C)$. זאת אומרת, למצוא נוסחה המקשרת בין הקואורדינטות של הנקודות M במישור.



למטרה זו נבנה וקטור

$$\vec{M_0M} = (x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}$$

לכל נקודה M במישור הוקטור $\vec{M_0M}$ מאונך לוקטור הנתון $\vec{N}$, לכן $\vec{N}\cdot\vec{M_0M}=0$, ומכאן לפי קואורדינטות

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0 \qquad (1)$$

אם נסמן $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, נקבל

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

(1) ו-(2) הם צורות שונות של משוואת המישור.

לוקטור $\vec{N}=(A,B,C)$ קוראים **וקטור נורמל** למישור.

דוגמה 1: מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות

$A(1,2,3)$, $B(1,1,1)$, $C(-1,2,0)$

פתרון: נבנה וקטורים $\vec{AC}=(-2,0,-3)$, $\vec{AB}=(0,-1,-2)$, הוקטור

$$\vec{N} = \vec{AC}\times\vec{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

נורמל למישור ABC.

נשתמש בנוסחה (1) ונקבל את משוואת המישור הנדרש

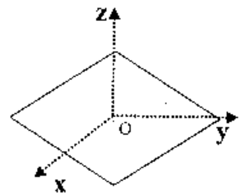
$$(x-1)(-3)+(y-2)(-4)+(z-3)2=0$$

או $3x+4y-2z=5$

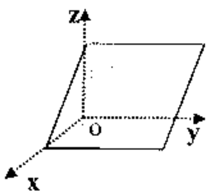
מקרים מיוחדים של משוואות המישור

בתת-סעיף זה נתאר את כל המקרים האפשריים המתקבלים ממשוואת הישר (2). למשל, המשוואה $Ax+By+D=0$ מתארת מישור המקביל לציר z כי הנורמל שלו $\vec{N}=(A,B,0)$ מאונך לוקטור $\mathbf{k}=(0,0,1)$.

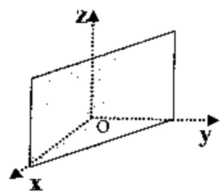
המקרים האפשריים מתוארים באיורים הבאים:



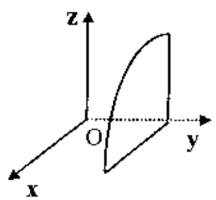
$By+Cz+D=0$



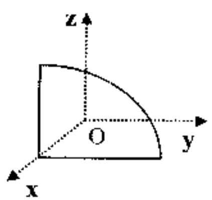
$Ax+Cz+D=0$



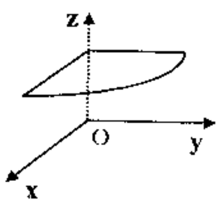
$Ax+By+D=0$



$By+D=0$



$Ax+D=0$

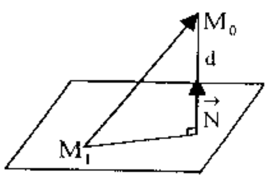


$Cz+D=0$

מרחק מנקודה למישור

משפט 1: המרחק מהנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ שווה ל-

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (3)$$



הוכחה: נבחר נקודה $M_1(x_1,y_1,z_1)$ כלשהי על המישור. זאת אומרת, $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ (*).

נבנה את הוקטור $\vec{M_1M_0}$.

המרחק המבוקש d הוא ההיטל של הוקטור $\overrightarrow{M_1M_0}$ על הנורמל $\vec{N}$ למישור הנתון, לכן

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{N}|}{|\vec{N}|}$$

נרשום את הנוסחה הנ"ל בקואורדינטות. כיוון ש-

$$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1) \quad \text{ו-} \quad \vec{N}=(A,B,C)$$

נקבל

$$d = \frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-Ax_1-By_1-Cz_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

אם נציב $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$, מ-(*) נקבל (3). ■

מישורים מקבילים

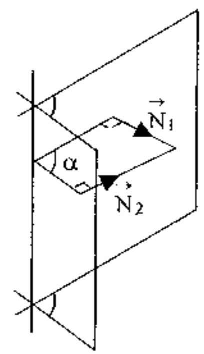
המישורים

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \ \text{ו-}\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (4)$$

מקבילים אם ורק אם הוקטורים הנורמליים מקבילים. כלומר, $\vec{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ ו- $\vec{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$ מקבילים.

לכן המישורים בנוסחה (4) מקבילים אם ורק אם $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

זווית בין מישורים



הזווית בין המישורים הלא מקבילים (4) שווה לזווית בין הנורמלים $\vec{N}_1$ ו- $\vec{N}_2$, או לזווית המשלימה עד $180°$ לזווית בין הנורמלים, לכן קוסינוס של הזווית החדה בין המישורים שווה ל-

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2|}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|} \qquad (4)$$

או בקואורדינטות

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

תרגילים:

1. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $(1,-1,2)$ ומקביל למישור המשולש בעל הקודקודים $A(1,0,0)$, $B(-1,2,3)$, $C(3,0,1)$.
2. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $(1,0,-1)$, $(2,3,1)$, $(4,1,1)$.
3. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $(1,2,-1)$ ו- $(-5,2,7)$ ומקביל ל-

   א. ציר x. ב. ציר y. ג. הוקטור $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$.
4. על הציר x מצא נקודה הנמצאת במרחק שווה מן המישורים $2x+2y-z=1$ ו- $12x-16y+15z+1=0$.
5. חשב נפח הפירמידה החסומה על ידי המישורים $3x-6y+2z=12$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
6. מצא משוואת המישור המקביל למישור $3x+6y-2z=7$ שמרחקו מהנקודה $(1,-1,2)$ שווה ל- 3.
7. מצא קוסינוס הזווית החדה בין המישורים $15x+12y-16z-1=0$ ו- $x+2y+2z+1=0$.

2. משוואת הישר במרחב

בסעיף זה נקבל את משוואת הישר במרחב. כלומר, נוסחה המקשר בין הקואורדינטות של הנקודה הנמצאת על הישר העובר דרך נקודה נתונה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ מקביל לוקטור נתון $\mathbf{a}=(k,m,n)$.

תהיה נקודה $M(x,y,z)$ כלשהי על הישר. M נמצאת על הישר אם ורק אם הוקטור $\overrightarrow{M_0M}$ מקביל לוקטור **a**. לכן לפי משפט z* מהפרק הקודם $\overrightarrow{M_0M}=t\mathbf{a}$.

היות ו- $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}$, נקבל

$$x-x_0=tk,\ y-y_0=tm,\ z-z_0=tn$$

או

$$\begin{cases} x=x_0+tk \\ y=y_0+tm \\ z=z_0+tn \end{cases}, \quad -\infty<t<\infty \qquad (1)$$

נוסחה (1) היא **משוואה פרמטרית** של הישר, כאשר t הוא **פרמטר**. כלומר, עבור כל ערך של t נקבל שלישיה (x,y,z) שהיא קואורדינטות של הנקודה על הישר. אם t עובר את כל המספרים הממשיים נקבל כל הנקודות על הישר.

אם נחלץ את הפרמטר t מ-(1), נקבל

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\quad,\quad (k\neq 0\,,\ n\neq 0\,,\ m\neq 0)\qquad (2)$$

ל-(2) קוראים **משוואה קנונית** של הישר העובר דרך הנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ומקביל לוקטור $\mathbf{a}=(k,m,n)$.

אם אחד מהמספרים n,m,k שווה לאפס, למשל $m=0$, נקבל מ-(1)

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{z-z_0}{n}\ ,\ y=y_0$$

באופן דומה מקבלים משוואות קנוניות במקרה ש- $k=0$ או $n=0$.

ישר כחיתוך של שני מישורים

שני מישורים שאינם מקבילים, נחתכים לאורך קו ישר, לכן מערכת המשוואות

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\qquad (3)$$

היא גם משוואה של קו ישר.

נראה כיצד מ-(3) מקבלים את (1).

יהיו $\vec{N}_1$ ו- $\vec{N}_2$ וקטורים נורמליים למישורים הנתונים בהתאמה.

קו החיתוך של המישורים נמצא בכל אחד מהם ולכן מאונך ל- $\vec{N}_1$ ול- $\vec{N}_2$ מכך וקטור הכיוון $\mathbf{a}$ של הישר הוא $\mathbf{a}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ (ראה איור בעמ' 126).

פתרון כלשהוא של המערכת (3) מתאר נקודה על קו החיתוך של המישורים. כלומר, מצאנו $\mathbf{a}$ ונקודה על הישר ולכן ניתן להשתמש ב-(2).

דוגמה 2: כתוב את המשוואה הקנונית של הישר הנתון על ידי שני המישורים:

$$x-y+3z-3=0\quad,\quad 3x+2y-z-2=0$$

פתרון: הנורמלים למישורים הם $\vec{N}_1=(3,2,-1)$, $\vec{N}_2(1,-1,3)$.

נחשב את הוקטור $\mathbf{a}$ בכיוון הישר

$$\mathbf{a}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\3&2&-1\\1&-1&3\end{vmatrix}=5\mathbf{i}-10\mathbf{j}-5\mathbf{k}$$

נמצא נקודה על הישר הנדרש. לשם כך נציב $z=0$ במשוואת המישורים ונקבל

$$\begin{cases}x-y-3=0\\3x+2y-2=0\end{cases}\to\ x=\frac{8}{5}\quad,\quad y=-\frac{7}{5}$$

קיבלנו שהנקודה $M_0\left(\frac{8}{5},-\frac{7}{5},0\right)$ נמצאת על קו החיתוך של המישורים.

נשתמש ב-(2) ונקבל את המשוואה הנדרשת: $\dfrac{x-\frac{8}{5}}{5}=\dfrac{y+\frac{7}{5}}{-10}=\dfrac{z}{-5}$.

ישר העובר דרך שתי נקודות

נרשום את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ו- $M_1(x_1,y_1,z_1)$.

הוקטור $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0\,,y_1-y_0\,,z_1-z_0)$ הוא בכיוון הישר ולכן

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\qquad (4)$$

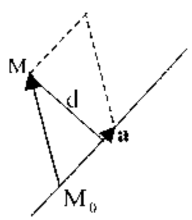
היא משוואת הישר או בצורה פרמטרית

$$x=x_0+t(x_1-x_0)\quad,\quad y=y_0+t(y_1-y_0)\quad,\quad z=z_0+t(z_1-z_0)\qquad (4^*)$$

דוגמה 3: מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $M_0(1,2,3)$ ו- $M_1(-1,2,1)$.

פתרון: נמצא את וקטור הכיוון $\mathbf{a}=\overrightarrow{M_0M_1}=(-2,0,-2)$, לכן המשוואה הנדרשת היא $x=1-2t$, $y=2$, $z=3-2t$ או בצורה קנונית $\frac{x-1}{-2}=\frac{z-3}{-2}$, $y=2$.

מרחק נקודה מהישר



תהי M נקודה מחוץ לישר העוברת דרך M_0 ומקבילה ל- $\mathbf{a}(k,m,n)$. מהנקודה M_0 נעביר וקטורים $\mathbf{a}$ ו- $\overrightarrow{M_0M}$. קל לראות (ראה איור) שהמרחק d הוא גובה של מקבילית הבנויה על הוקטורים האלו ולכן שווה לשטח המקבילית חלקי אורך הבסיס. שטח המקבילית שווה ל- $|\overrightarrow{M_0M}\times\mathbf{a}|$ ואורך הבסיס שווה ל- $|\mathbf{a}|$, נקבל

$$d = \frac{|\vec{M_0M} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} \qquad (5)$$

דוגמה 4: חשב את המרחק של הנקודה $M(1,-1,3)$ מהישר $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$.

פתרון: ממשוואת הישר מקבלים את $M_0(-1,2,1)$ ואת הוקטור $\vec{M_0M} = (2,-3,2)$.

נחשב $\vec{M_0M} \times \mathbf{a}$, נקבל $\vec{M_0M} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ולכן

$$|\vec{M_0M} \times \mathbf{a}| = \sqrt{49+4+16} = \sqrt{69} \quad , \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

המרחק הנדרש הוא $d = \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{4+1+9}} = \sqrt{\frac{69}{14}}$.

זווית בין הישרים

יהיו הישרים

$$\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad , \quad \frac{x-x_1}{k_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \qquad (6)$$

הזווית בין הישרים היא הזווית בין וקטורי-הכיוון $\mathbf{a} = (k,m,n)$ ו- $\mathbf{a}_1 = (k_1,m_1,n_1)$.

נשתמש בנוסחה (4) מסעיף 5, נקבל

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}_1|} = \frac{kk_1 + mm_1 + nn_1}{\sqrt{k^2+m^2+n^2} \cdot \sqrt{k_1^2+m_1^2+n_1^2}} \qquad (7)$$

מכאן באות מסקנות:

שני ישרים הם **מאונכים** זה לזה אם ורק אם $\cos\alpha = 0$, או

$$kk_1 + mm_1 + nn_1 = 0 \qquad (8)$$

שני ישרים הם **מקבילים** זה לזה אם ורק אם

$$\frac{k}{k_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} \qquad (9)$$

לחקירה מעמיקה יותר של המצב ההדדי בין הישרים, ראה [2].

נזכיר כאן שהתנאי ששני ישרים לא מקבילים יחתכו, הוא

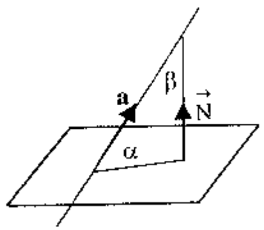
$$\vec{M_1M_2} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{a}_1) = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ k & m & n \\ k_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

כאשר M_1, M_2 הן נקודות על הישר הראשון והשני בהתאמה.

מצב הדדי בין ישר ומישור

נתונים הישר $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ והמישור $Ax+By+Cz+D=0$.

$\mathbf{a} = (k,m,n)$ וקטור הכיוון של הישר ו- $\vec{N} = (A,B,C)$ הנורמל למישור.



הישר **מקביל** למישור אם ורק אם $\vec{N} \perp \mathbf{a}$, או

$$\vec{N} \cdot \mathbf{a} = Ak + Bm + Cn = 0 \qquad (11)$$

הישר **מאונך** למישור אם ורק אם $\vec{N} \parallel \mathbf{a}$, זאת אומרת

$$\frac{A}{k} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \qquad (11^*)$$

הזווית בין הישר והמישור היא זווית α בין הישר והיטלו על המישור (ראה איור).

נחשב $\cos\beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \vec{N}}{|\mathbf{a}| \cdot |\vec{N}|}$ היות ו- $\alpha + \beta = 90$, נקבל

$$\sin\alpha = \frac{Ak+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{k^2+m^2+n^2}} \qquad (12)$$

נקודת החיתוך של הישר והמישור

למציאת נקודות החיתוך נרשום את משוואת הישר בצורה פרמטרית

$$x = x_0 + tk \quad , \quad y = y_0 + mt \quad , \quad z = z_0 + nt$$

נציב במשוואת המישור ונקבל משוואה יחסית ל- t

$$(Ak+Bm+Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0$$

דוגמה 5: הוכח כי הישרים

$x = 2t-3 \ , \ y = 3t-2 \ , \ z = 4t+6$ ו- $x = t+5 \ , \ y = -4t-1 \ , \ z = t-4$

נחתכים. מצא את נקודת החיתוך והזווית ביניהם.

פתרון: נרשום את וקטורי הכיוון $\mathbf{a}=(2,3,-4)$, $\mathbf{a}_1=(1,-4,1)$.

נבחר נקודה כלשהי על הישר הראשון.

למטרה זו נציב למשל $t=0$ ונקבל $M_1(-3,-2,6)$ והנקודה $M_2(5,-1,-4)$ על הישר השני. לפי (10), נחשב

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2) = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -10 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 24-4+80+30-128-2 = 0$$

לכן הישרים נחתכים. כדי לחשב את הזווית ביניהם נשתמש ב-(7), נקבל

$$\cos\alpha = \frac{2-12-4}{\sqrt{1+16+1}\cdot\sqrt{4+9+16}} = -\frac{14}{3\sqrt{58}}$$

נמצא את נקודת החיתוך בין הישרים.

נשווה את הקואורדינטות z,y,x משני הישרים בהתאמה, רק נציין שהן מתאימות ל-t_1 ו- t_2 בהתאמה: $-4t_1+6=t_2-4$, $3t_1-2=-4t_2-1$, $2t_1-3=t_2+5$. קיבלנו שלוש משוואות עם שני נעלמים, שפתרונן הוא $t_1=3$, $t_2=-2$. לכן נקודת החיתוך היא $(3,7,-6)$.

דוגמה 6: מצא את נקודת החיתוך של הישר $\frac{x+4}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ והמישור $2x+3y-z-5=0$.

פתרון: נרשום את משוואת הישר בצורה פרמטרית. כלומר,

$$z=-1-t \ , \ y=1+2t \ , \ x=-4+t$$

נציב z,y,x במשוואת המישור ונקבל $2(-4+t)+3(1+2t)-(-1-t)-5=0$, מכאן $t=1$. לכן נקודת החיתוך היא $(-3,3,-2)$.

תרגילים:

1. מצא את משוואת הישר העובר דרך:
   - א. הנקודות $A(1,2,-3)$, $B(-2,1,0)$.
   - ב. הנקודה $M(1,2,-4)$ מקבילה לוקטור $\mathbf{a}=(2,5,0)$.
   - ג. הנקודה $(3,1,-2)$ המאונכת למישור $x+y-2z=2$.
   - ד. הנקודה $(0,1,-1)$ המקבילה לקו החיתוך של המישורים $2x-y+3z+7=0$ ו- $3x+y-2z-2=0$.

2. חשב את מרחק הנקודה $(3,2,-1)$ לישר $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$.
3. מצא את משוואת המישור העובר דרך שני הישרים המקבילים

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{-2} \quad , \quad \frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$$

4. מצא נקודה שסימטרית לנקודה $(2,-3,4)$ ביחס למישור $3x+4y+5z+36=0$.

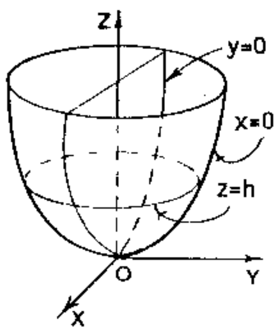
3. משטחים במרחב

בסעיף זה נחקור את צורת המשטחים השונים במרחב. לבנות משטח לפי נקודות (כמו שבנינו קווים במישור) כמעט בלתי-אפשרי. לכן, נביא שיטה יעילה יותר – **שיטת החתכים**.

תהי $F(x,y,z)$ משוואת המשטח במרחב. נחתוך אותו על ידי מישור $z=h$ המקביל למישור x,y ונקבל את קו החיתוך בינידם שמשוואתו $F(x,y,h)=0$. בעת אם נשנה את h נקבל חתכים שונים של המשטח. חתכים אלו מאפשרים לקבל תמונה חלקית של צורת המשטח. כדי לקבל תמונה מדוייקת יותר של המשטח מוצאים חיתוך של המשטח עם המישורים yz ו- xz.

דוגמה 7: חקור את המשטח $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

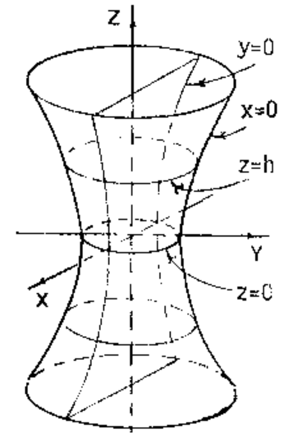
פתרון: נמצא את קווי החיתוך של המשטח הנתון עם המישורים $z=h$ על ידי הצבת h במשוואת המשטח ונקבל $h=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.



אם $h=0$ נקבל נקודה אחת $x=y=0$. לכל $h>0$ קבוע החתך הוא אליפסה. כלומר, המשטח שלנו נוצר משכבות של אליפסות הנמצאות אחת על השניה. נמצא חיתוך עם המישור xz. לשם כך נציב $y=0$ במשוואת המשטח ונקבל $z=\frac{x^2}{a^2}$. לכן, קו החיתוך הוא פרבולה. באופן דומה קו חיתוך של המשטח עם המישור yz הוא הפרבולה $z=\frac{y^2}{b^2}$.

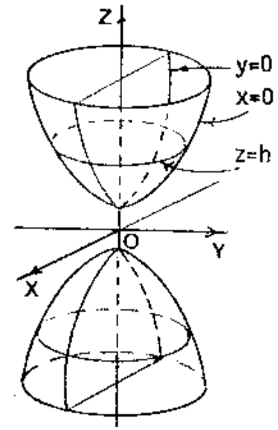
הציור מתאר משטח הנקרא **פרבולואיד אליפטי**.

באופן דומה נקבל את המשטחים הבאים:



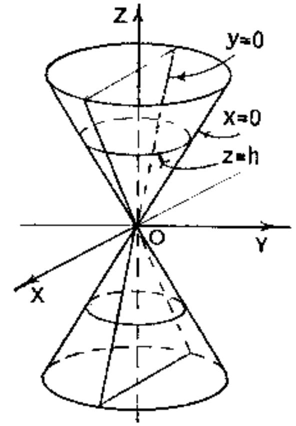
היפרפולויד חד-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



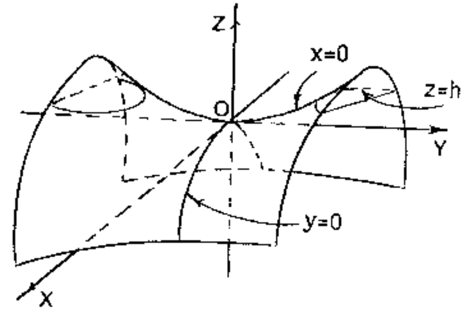
היפרבולויד דו-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



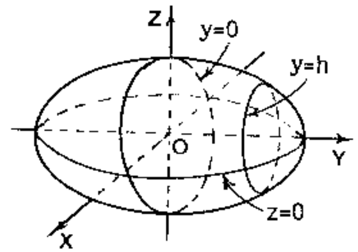
חרוט אליפטי

$$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



פרבולויד היפרבולי

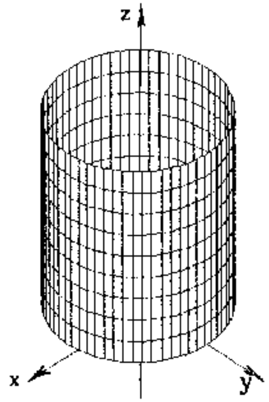
$$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



אליפסויד

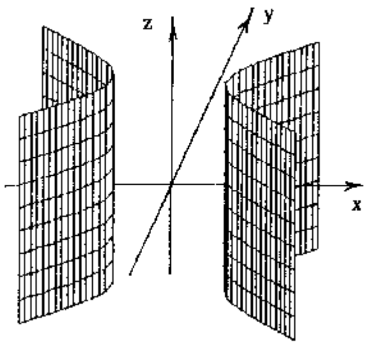
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

משטח גלילי הוא משטח הנוצר על ידי קו ישר הנע במקביל לישר אשר נתון לאורך עקום מסויים. כל משטח במרחב המתואר על ידי אחת מהמשוואות הבאות $F(x,z)=0$ (מקביל לציר ה- y), $F(y,z)=0$ (מקביל לציר ה- x), $F(x,y)=0$ (מקביל לציר ה- z) הוא גליל. להלן דוגמאות של משטחים גליליים:



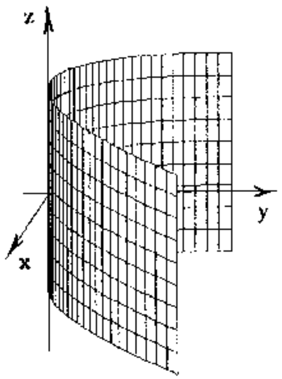
גליל אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



גליל היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



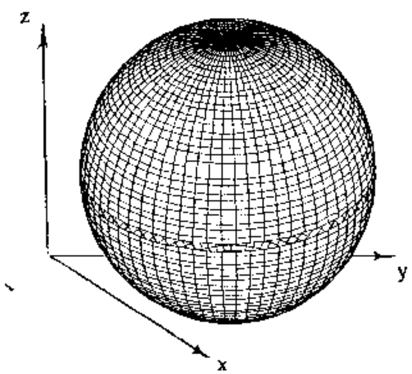
גליל פרבולי

$$x^2=2py,(p>0)$$

כדור: המקום הגיאומטרי של הנקודות במרחב שמרחקן מהנקודה (a,b,c) (**מרכז**) הוא קבוע R (**רדיוס**) נקרא כדור.

נשתמש בנוסחת המרחק בין שתי נקודות ונקבל את משוואת הכדור

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$



דוגמה 11: מצא מרכז הכדור הנתון על ידי המשוואה $x^2+y^2+z^2+3x-4y+5z=0$.

פתרון: נרשום את המשוואה הנתונה בצורה הבאה

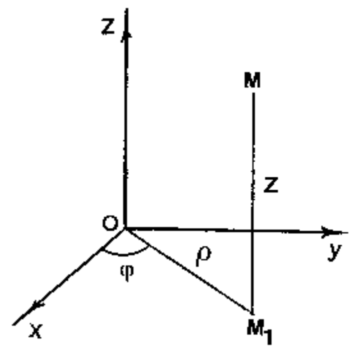
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2+\left(z+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{24}{2}$$

לכן הנקודה $\left(-\frac{3}{2},2,-\frac{5}{2}\right)$ היא מרכז הכדור ו- $R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ רדיוס.

4. קואורדינטות גליליות וכדוריות

א. קואורדינטות גליליות

מערכת קואורדינטות גליליות מאחדת את הקואורדינטות הקוטביות במישור (ראה סעיף 7.11) עם קואורדינטה מאונכת z במרחב. **הקואורדינטות הגליליות** של הנקודה M במרחב הן שלישיה סדורה (ρ,φ,z), כאשר (ρ,φ) (ראה איור 1) הן הקואורדינטות הקוטביות של ההיטל M_1 של הנקודה M על המישור xy.



איור 1

נזכיר ש-ρ הוא המרחק ולכן הוא חיובי או אפס והזווית φ משתנה מאפס עד 2π (סעיף 7.11). נקבל את נוסחאות המעבר מקואורדינטות גליליות (ρ,φ,z) לקואורדינטות קרטזיות (x,y,z).

קל לראות ש-

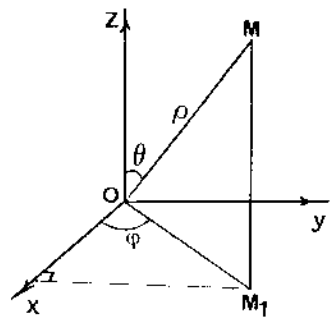
$$x=\rho\cos\varphi \quad , \quad y=\rho\sin\varphi \quad , \quad z=z \tag{1}$$

ולהיפך, אם נתונים (x,y,z) אזי מחשבים (ρ,ϕ,z) לפי הנוסחאות הבאות:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x} \quad , \quad z=z \tag{2}$$

נציין שבקואורדינטות גליליות משוואת המשטח הגלילי מקבלת צורה פשוטה יותר. לדוגמה, הגליל $x^2+y^2=a^2$ בקואורדינטות גליליות יהיה $(a>0)$, $\rho=a$, כלומר זוהי משוואתו של המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק a מציר ה-z.

קואורדינטות כדוריות



איור 2

הנקודה M במרחב הנתונה על ידי השלישיה (ρ,φ,θ), כאשר ρ הוא אורך הוקטור $\vec{OM}$ (O ראשית), φ הזווית שיוצר ההיטל של הוקטור $\vec{OM}$ עם המישור xy בכיוון החיובי של ציר ה-x, θ היא הזווית שיוצר הוקטור $\vec{OM}$ עם הכיוון החיובי של ציר z (איור 2).

ל- (ρ,φ,θ) קוראים **הקואורדינטות הכדוריות** של M. נקבל קשר בין קואורדינטות כדוריות וקרטזיות.

תהי M נקודה בעלת קואורדינטות כדוריות (ρ,φ,θ).

נמצא את הקואורדינטות הקרטזיות שלה (x,y,z).

מהציור רואים כי $x=OM_1\cos\varphi$, $y=OM_1\sin\varphi$, אבל $OM_1=\rho\sin\theta$ ו- $MM_1=\rho\cos\theta$, ולכן סופית, נקבל

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\cdot\sin\theta \\ y=\rho\sin\varphi\cdot\sin\theta \\ z=\rho\cos\theta \end{cases} \tag{3}$$

להיפך, אם $M(x,y,z)$ נמצא את ρ,φ,θ.

ברור ש- $OM^2=OM_1^2+M_1M^2$ ולכן $\rho^2=x^2+y^2+z^2$. נשתמש בנוסחה (3) ונקבל

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad , \quad \cos\varphi=\frac{x}{OM_1}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \cos\theta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{4}$$

נציין ש- ρ מקבל רק ערכים חיוביים, φ משתנה מאפס עד 2π והזווית θ משתנה מאפס עד π.

דוגמה 8: רשום את הקואורדינטות הכדוריות של הנקודה $(2,1,2)$.

פתרון: לפי נוסחה (4), נקבל $\rho=\sqrt{2^2+1+2^2}=3$

$$\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad , \quad \varphi\approx 26.6^\circ \quad , \quad \cos\theta=\frac{2}{3} \quad , \quad \theta\approx 48^\circ$$

נציין שמשוואת הכדור $x^2+y^2+z^2=R^2$ בקואורדינטות כדוריות מקבלת צורה פשוטה. נציב נוסחה (3) במשוואת הכדור ונקבל

$$(\rho\cos\varphi\cdot\sin\theta)^2+(\rho\sin\varphi\cdot\sin\theta)^2+(\rho\cos\theta)^2 = R^2$$

או לאחר פתיחת הסוגריים נקבל $\rho=R$. כלומר, $\rho=R$ היא משוואת הכדור וכמובן $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi$.

נציין שלפעמים נוח במקום θ לקחת זווית MOM_1. במקרה זה נוסחה (3) מקבלת את הצורה

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\cdot\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\cdot\cos\theta \\ z=\rho\sin\theta \end{cases} \tag{3*}$$

בקואורדינטות אלה משוואת הכדור היא $\rho=R$ ו- $0\le\varphi\le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

פרק 10
פונקציות של מספר משתנים.
הגדרות

בפרקים הבאים נחקור פונקציות התלויות ביותר ממשתנה אחד. לדוגמה, נפח חרוט קטום בעל גובה z ורדיוסי הבסיסים הם x ו- y

$$V = \frac{\pi}{3} z(x^2+xy+y^2)$$

הוא פונקציה של שלושה משתנים בלתי תלויים z,y,x.

דוגמה נוספת מתורת החשמל: היחס בין הזרם I, המתח V וההתנגדות R: $I=\frac{V}{R}$.

לכן, הזרם I הוא פונקציה של שני משתנים V,R.

כלומר, לכל שלישיה סדורה (x,y,z) קיים ערך של V אחד ויחיד, במקרה השני, הזרם I תלוי בזוג סדור של מספרים (V,R).

טבעי להתחיל בלימוד פונקציות של מספר משתנים בחקירת תחומי הגדרתם, כגון אוסף "שלשות" בדוגמה הראשונה, או אוסף זוגות בדוגמה השניה. במקרים אלה נוח להשתמש במושגים גיאומטריים כמו נקודה. בדוגמאות שלנו הפונקציה V מוגדרת מעל קבוצת השלשות I מוגדרת מעל קבוצת הזוגות. במקרה של פונקציות מ- k משתנים נשתמש באוסף של k מספרים סדורים בעלי תכונות דומות לנקודות במישור ומרחב תלת-מימדי.

1. מרחב אוקלידי E_k

יהי $(x_1,x_2,\dots,x_k)$, k-יה קבוצה סדורה אשר בה $x_i,(1\le i\le k)$ מספרים ממשיים. בהמשך ל-k-יה נקרא **נקודה** בעלת **קואורדינטות** $x_i,(i=1,2,\dots,k)$.

נגדיר מרחק בין שתי נקודות $M_1(x_1',x_2',\dots,x_k')$, $M_2(x_1'',x_2'',\dots,x_k'')$ במספר

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1''-x_1')^2+(x_2''-x_2')^2+\dots+(x_k''-x_k')^2} \tag{1}$$

נציין שבמקרים בהם $k=1,2,3$ נקבל את הנוסחאות הידועות למרחק בין שתי נקודות על הישר, במישור ובמרחב בהתאמה:

אם $k=1$, כלומר M_1 ו- M_2 נמצאים על הישר נקבל $d(M_1,M_2)=|x_1-x_2|$.

אם $k=2$ המרחק בין הנקודות $M_1(x_1',x_2')$, $M_2(x_1'',x_2'')$ הוא

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1''-x_1')^2+(x_2''-x_2')^2}$$

אם $k=3$ המרחק הוא $d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1''-x_1')^2+(x_2''-x_2')^2+(x_3''-x_3')^2}$.

משפט 1: המרחק $d(M_1,M_2)$ הוא מספר לא שלילי בעל התכונות הבאות:

1. $d(M_1,M_2)=d(M_2,M_1)$.
2. $d(M_1,M_2)=0$ אם ורק אם $M_1=M_2$, $(x_i''=x_i',\ i=1,2,\dots,k)$.
3. מתקיים אי-שיוויון המשולש: לכל שלוש נקודות M_3,M_2,M_1

$$d(M_1,M_2)+d(M_2,M_3)\ge d(M_1,M_3) \tag{2}$$

הוכחה: טענות 1 ו-2 נובעות ישרות מהגדרת המרחק (1). נעבור להוכחת אי-שיוויון המשולש. במקרה שבו $k=2,3$ אי-שיוויון (2) נובע ממשפט גיאומטרי ידוע האומר שסכום שתי צלעות במשולש $M_1M_2M_3$ גדול יותר מהצלע השלישית:

$$M_1M_2+M_2M_3>M_1M_3$$

נעבור למקרה הכללי. נרשום $d(M_1,M_3)$ באופן הבא:

$$[d(M_1,M_3)]^2=\sum_{i=1}^{k}(x_i'''-x_i')^2=\sum_{i=1}^{k}[(x_i'''-x_i'')+(x_i''-x_i')]^2= \tag{3}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(x_i'''-x_i'')^2+2\sum_{i=1}^{k}(x_i'''-x_i'')\cdot(x_i''-x_i')+\sum_{i=1}^{k}(x_i''-x_i')^2=$$

$$=[d(M_2,M_3)]^2+[d(M_1,M_2)]^2+2\sum_{i=1}^{k}(x_i'''-x_i'')\cdot(x_i''-x_i')$$

להערכת האיבר האחרון נשתמש באי-שיוויון קושי-שוורץ. ראה [3], פרק 9.

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i'''-x_i'')\cdot(x_i''-x_i')\le\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i'''-x_i'')^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i''-x_i')^2}= \tag{4}$$

$$=d(M_2,M_3)\cdot d(M_1,M_2)$$

נציב (4) ב-(3), נקבל

$$[d(M_1,M_3)]^2 \le [d(M_2,M_3)]^2 + 2d(M_2,M_3)\cdot d(M_1,M_2) + [d(M_1,M_2)]^2 =$$
$$= [d(M_1,M_2)+d(M_2,M_3)]^2$$

ולכן מתקיים (2). ■

הגדרה 1: מרחב אוקלידי (Euclidian Space) E_k הוא אוסף כל ה-k-יות אם בין כל שתי נקודות מוגדר מרחק.

כדור k-ממדי

אוסף כל הנקודות M מ- E_k בעלי הקואורדינטות $x_1,x_2,\dots,x_k$ המקיים את אי-השיוויון

$$[d(M,M_0)]^2 = (x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\dots+(x_k-x_k^0)^2 \le R^2 \qquad (5)$$

נקרא **כדור k-ממדי** בעל רדיוס R שמרכזו בנקודה $M_0(x_1^0,\dots,x_k^0)$.

אם ב-(5) אי-השיוויון הוא חריף, כלומר $d(M,M_0)<R$ אזי אומרים ש**הכדור פתוח**.

נציין שבמקרה שבו $k=1$ מקבלים "כדור" חד-ממדי – קטע:

$$x_0-R\le x\le x_0+R \quad \text{או} \quad |x-x_0|\le R$$

והקטע $x_0-R<x<x_0+R$ הוא כדור פתוח חד-ממדי.

במישור $(k=2)$ "כדור" דו-ממדי הוא עיגול בעל רדיוס R,

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2 \le R^2$$

אם $k=3$ נוסחה (5) מהווה כדור במרחב שמרכזו ב- (x_1^0,x_2^0,x_3^0),

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3-x_3^0)^2 \le R^2$$

תיבה k-ממדית

נתונות שתי סדרות של מספרים $\{a_i\},\{b_i\}$ כאשר $b_i\ge a_i$, $(i=1,2,\dots,k)$.

אוסף כל הנקודות M בעלי קואורדינטות $x_1,\dots,x_k$ המקיימות

$$a_i \le i \le b_i \ , \ (i=1,2,\dots,k) \qquad (6)$$

נקרא **תיבה k-ממדית**. אם אי-שיוויון (7) הוא חריף $a_i<x_i<b_i$, $(i=1,2,\dots,k)$, אזי אומרים ש**התיבה פתוחה**.

ובפרט אם $k=1$ מקבלים קטע סגור $[a,b]$.

אם $k=2$ מקבלים שהתיבה הדו-ממדית היא מלבן (ראה ציור).

אם $k=3$ **זוהי תיבה במרחב**.

ε-סביבה של נקודה $M_0(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0)$

כדור פתוח בעל רדיוס ε, שמרכזו בנקודה M_0 נקרא **ε-סביבה כדורית** של M_0, כלומר כל הנקודות $M(x_1,\dots,x_k)$ המקיימות

$$d(M,M_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_i^0)^2} < \varepsilon$$

הן יוצרות ε-סביבה של M_0.

אוסף כל הנקודות M בעלי הקואורדינטות $x_1,x_2,\dots,x_k$ המקיימות

$$|x_i-x_i^0| < \varepsilon \ , \ (i=1,2,\dots,k)$$

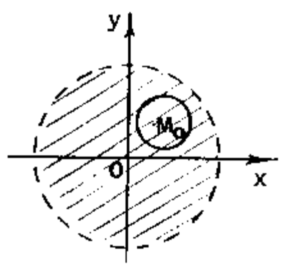
נקרא **ε-סביבה תיבתית** של נקודה M_0.

במקרה של E_1 שתי ההגדרות מהוות קטע $|x-x_0|<\varepsilon$.

קל לראות שכל ε-סביבה כדורית מכילה איזושהי ε_1-סביבה תיבתית ולהיפך, כל ε-סביבה תיבתית מכילה איזושהי ε_2-סביבה כדורית.

נקודות פנימיות, קבוצה פתוחה

הנקודה M_0 היא **נקודה פנימית** של הקבוצה $\{M\}$ מ- E_k אם קיים ε-סביבה של M_0 שכולו נמצא ב- $\{M\}$.



איור 1

הקבוצה $\{M\}$ מ- E_k, שכל נקודותיה הן נקודות פנימיות נקראת **קבוצה פתוחה**.

דוגמה 1: הקבוצה $x^2+y^2<1$ פתוחה ב- E_2.

הנקודה M היא **נקודה גבולית** של הקבוצה $\{M\}$

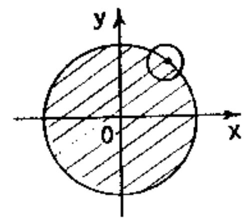
אם בכל ε-סביבה של הנקודה M יש נקודות השייכות לקבוצה $\{M\}$ וגם נקודות שאינן בקבוצה.

דוגמה 2:

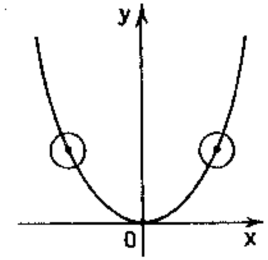
א. כל הנקודות המקיימות $x^2+y^2=1$ הן נקודות גבוליות של הקבוצה $\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$ (איור 2).

ב. הקבוצה $\{(x,y): y=x^2\}$ מורכבת רק מנקודות גבוליות (איור 3).

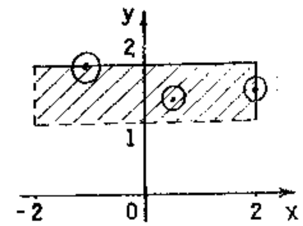
ג. הנקודות הגבוליות של הקבוצה $\{(x,y): -2<x\le 2 \ , \ 1<y\le 2\}$ הם $(2,y)$ $(x,2)$ (איור 4).



איור 2



איור 3



איור 4

אם כל הנקודות הגבוליות של הקבוצה {M} שייכות לקבוצה, אזי אומרים שהקבוצה היא **סגורה**.

אם לקבוצה הפתוחה נצרף את כל הנקודות הגבוליות שלה, אזי נקבל **קבוצה סגורה** ונסמנה ב- $\bar{D}$.

דוגמה 3: הקבוצות:

א. $\{(x,y):y=x^2\}$ (איור 3).

ב. $\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ הן קבוצות המורכבות רק מנקודות גבוליות.

דוגמה 4: הקבוצה $\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$ היא קבוצה סגורה המורכבת מנקודות פנימיות וגבוליות (איור 2).

נציין שקיימות קבוצות שהן לא פתוחות ולא סגורות.

דוגמה 5:

א. קבוצה ג' מדוגמה 2 לא פתוחה ולא סגורה (ראה איור 4). הנקודות הגבוליות $(x,2)$ ו- $(2,y)$ שייכות לקבוצה ואילו הנקודות הגבוליות $(x,1),(-2,y)$ אינן שייכות לקבוצה.

ב. הקבוצה $\{(x,y):1<x^2+y^2<4\}$ לא סגורה ולא פתוחה (בדוק!).

נדגיש שאוסף של נקודות בודדות היא קבוצה סגורה המכילה רק נקודות גבוליות.

קבוצה חסומה

הקבוצה {M} **חסומה** אם קיים כדור בעל רדיוס סופי המכיל אותה.

דוגמה 6: הקבוצה $\{(x,y):2<x\le 3\ ,\ -1<y\le 5\}$ חסומה, כי היא נמצאת למשל בתוך הכדור $x^2+y^2\le 100$, הקבוצה $\{(x,y):y=x^2\}$ אינה חסומה.

קו רציף ב-E_k

אוסף הנקודות {M} בעלות הקואורדינטות $(x_1,...,x_k)$ שהן פונקציות רציפות של הפרמטר t

$$x_i=\varphi_i(t)\ ,\ \alpha<t<\beta\ ,\ (i=1,2,...,k) \qquad (8)$$

נקרא **קו רציף** ב- E_k.

דוגמה 7:

א. הקבוצה $\{(x,y):x=\cos t\ ,\ y=\sin t\ ,0\le t\le 2\pi\}$ היא **קו רציף** ב- E_2 וזה מעגל $x^2+y^2=1$.

ב. הקבוצה $\{(x,y):x=t\ ,\ y=f(t)\ ,\ a\le t\le b\}$ כאשר $f(t)$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, היא קו רציף במישור (ראה הצגה פרמטרית של פונקציות, [1], פרק 2, סעיף 10).

קבוצה קשירה, תחום

נאמר ששתי הנקודות $M_1(x'_1,x'_2,...,x'_k)$ ו- $M_2(x''_1,x''_2,...,x''_k)$ ניתנות **לחיבור** על ידי קו רציף L אם קיים קו (8) כזה ש- $x'_1=\varphi_1(\alpha)\ ,\ x'_2=\varphi_2(\alpha)\ ,\ ...\ ,\ x'_k=\varphi_k(\alpha)$

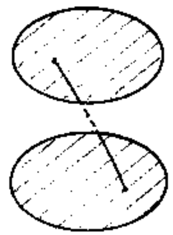
$x''_1=\varphi_1(\beta)\ ,\ x''_2=\varphi_2(\beta)\ ,\ ...\ ,\ x''_k=\varphi_k(\beta)$

הקבוצה D נקראת **קשירה** אם ניתן לחבר כל שתי נקודות בה על ידי קו רציף שנמצא כולו בתוך הקבוצה.

דוגמה 8:

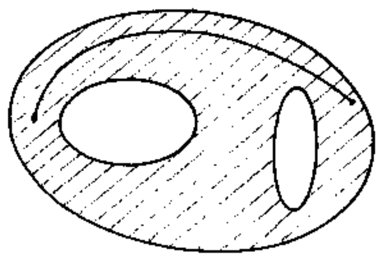
א. באיורים 5 ו-6 התחומים הקשירים, באיור 7 התחום לא-קשיר.

ב. הקבוצה $D:\{(x,y),x^2+y^2<1\ ,\ (x-5)^2+(y+3)^2<4\}$ אינה קשירה.



איור 7

איור 6



איור 5

קבוצה פתוחה וקשירה נקראת **תחום**.

הקבוצה בדוגמה 1 היא תחום, בדוגמה 3 הקבוצות אינן תחום, בדוגמה 4 הקבוצה היא תחום סגור, זאת אומרת תחום שצורפו אליו כל הנקודות הגבוליות שלו.

תרגילים:

1. צייר את הקבוצות הבאות:

א. $\{(x,y): x^2+y^2\le 4, x\ge y^2\}$. ב. $\{(x,y): y>x^2, x<1\}$.

ג. $\{(x,y): x^2+y^2\le 25, x^2-y^2>1\}$. ד. $\{(x,y): x>0, y<0, x+y>-1\}$.

2. אילו קבוצות ב-1 הן פתוחות ואילו סגורות.
3. אילו קבוצות ב-1 חסומות.
4. אילו קבוצות ב-1 קשירות.

2. סדרות של נקודות

נתבונן בסדרת נקודות $\{M_n\}$ בעלי הקואורדינטות $\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)},\dots,x_k^{(n)}\right)$.

דוגמה 9: $\{M_n\}=\left\{\frac{1}{n},\frac{n-1}{n+1}\right\}$ היא סדרת נקודות במישור שבה

$$M_1=(1,0)\quad,\quad M_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\quad,\quad M_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{4}\right)$$

הגדרה 2: הנקודה $A(a_1,a_2,\dots,a_k)$ היא גבול של סדרת הנקודות $\{M_n\}$ אם לכל $\varepsilon>0$, קיים מספר $N(\varepsilon)$ כך שלכל $n>N(\varepsilon)$ מתקיים $d(M_n,A)<\varepsilon$.

מסמנים $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ או $A=\lim\limits_{n\to\infty} M_n$.

המשפט הבא מהווה את הקשר בין התכנסות נקודתית להתכנסות k סדרות הקואורדינטות $\{x_i^{(n)}\}$, $(i=1,2,\dots,k)$.

משפט 2: סדרת הנקודות $\{M_n\}$ מתכנסת לנקודה A אם ורק אם k סדרות הקואורדינטות $\{x_1^{(n)}\},\{x_2^{(n)}\},\dots,\{x_k^{(n)}\}$ שלה מתכנסות לקואורדינטות $a_1,a_2,\dots,a_k$ של הנקודה A בהתאמה.

הוכחה:

א. נניח ש- $A=\lim\limits_{n\to\infty} M_n$, לכן לכל $\varepsilon>0$, קיים $N(\varepsilon)$ כך שלכל $n>N(\varepsilon)$ מתקיים:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^{(n)}-a_i\right)^2}<\varepsilon \qquad (1)$$

לכן לכל $n>N(\varepsilon)$

$$|x_1^{(n)}-a_1|<\varepsilon\quad,\quad|x_2^{(n)}-a_2|<\varepsilon,\dots,|x_k^{(n)}-a_k|<\varepsilon$$

במילים אחרות

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}=a_i\ ,\ (i=1,2,\dots,k) \qquad (2)$$

או הסדרה $\{x_i^{(n)}\}$ מתכנסת ל- a_i לכל $i=1,2,\dots,k$.

ב. נניח שכל הסדרות $\{x_i^{(n)}\}$, $(i=1,2,\dots,k)$ מקיימות את (2) ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיימים המספרים $N_1,N_2,\dots,N_k$ כך ש:

$$\begin{array}{lll} n>N_1 & \text{כאשר} & |x_1^{(n)}-a_1|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \\ n>N_2 & \text{כאשר} & |x_2^{(n)}-a_2|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \\ \vdots & & \vdots \\ n>N_k & \text{כאשר} & |x_k^{(n)}-a_k|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \end{array}$$

נסמן $N=\max(N_1,N_2,\dots,N_k)$, לכן לכל $n>N$ מתקיים

$$d(A,M_n)=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^{(n)}-a_i\right)^2}<\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{\varepsilon^2}{k}+\dots+\frac{\varepsilon^2}{k}}=\varepsilon$$

כלומר $\{M_n\}$ מתכנסת לנקודה A. ■

דוגמה 10: תהי $\{M_n\}=\left\{\frac{1}{n},\frac{n-1}{n+1}\right\}$. חשב $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$.

פתרון: לפי משפט 2 נקודת הגבול A היא בעלת קואורדינטות $a_1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $a_2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$, לכן $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=(0,1)$.

תוך שימוש במשפט 2 ומשפט בולצנו-ויירשטרס לסדרות (ראה [1] פרק 3.8) מקבלים:

משפט 3: (**בולצנו-ויירשטרס**). כל סדרה חסומה ואינסופית של נקודות ב- E_k מכילה תת-סדרה המתכנסת לגבול.

הוכחה: נוכיח את המשפט לסדרת נקודות במישור. תהי $\{M_n\}=\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה במישור. זאת אומרת, קיים $R>0$ כזה ש- $x_n^2+y_n^2\le R$ לכל n-טבעי.

לכן, הסדרה $\{x_n\}$ חסומה ואינסופית. לפי משפט בולצנו-ויירשטרס לסדרות קיימת תת-סדרה $\{x_{n_k}\}$ המתכנסת לגבול x_0. מכל הנקודות של הקבוצה $\{M_n\}$ נוציא סדרת נקודות $\{M_{n_k}\}$ בעלת אינדקסים n_k.

נתבונן בסדרה אינסופית $\{y_{n_k}\}$ שהיא גם חסומה ולכן לפי אותו משפט קיימת תת-סדרה $\{y_{n_{k_m}}\}$ המתכנסת לגבול y_0. מהסדרה $\{x_{n_k}\}$ נוציא תת-סדרה $\{x_{n_{k_m}}\}$ שגם מתכנסת ל- x_0 כי היא תת-סדרה של הסדרה המתכנסת. לכן, סופית מצאנו תת-סדרה של נקודות $\{M_{n_{k_m}}\}=\{(x_{n_{k_m}},y_{n_{k_m}})\}$ המתכנסת ל- (x_0,y_0). ■

תרגילים: חשב את גבול הסדרות:

1. $\left\{\sin\frac{1}{n},\frac{n^2}{2^n}\right\}$. 2. $\left\{\cos n,\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right\}$. 3. $\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n,\sqrt{\frac{n+1}{4n-1}}\right\}$.

3. הגדרת פונקציות של משתנים אחדים

תהי $\{D\}$ קבוצת נקודות ב- E_k.

הגדרה 3: אומרים שעל הקבוצה $\{D\}$ מוגדרת פונקציה, אם לכל נקודה $M\in\{D\}$ מתאים מספר ממשי יחיד לפי חוק הנתון מראש, ומסמנים $u=f(M)$ או $u=f(x_1,\dots,x_k)$ או $f:\{D\}\to R^1$ הקבוצה $\{D\}$ נקראת **תחום ההגדרה** של הפונקציה.

הגדרה 4: אוסף כל הערכים u של הפונקציה נקרא **טווח**.

נציין שיש דימיון מלא בין פונקציות של מספר משתנים לבין פונקציות ממשתנה יחיד.

דוגמה 11: מצא את תחום ההגדרה והטווח של הפונקציה

$$u=\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\dots-x_k^2}}$$

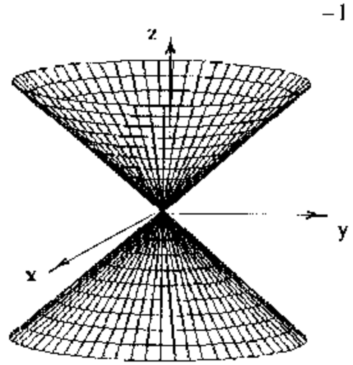
פתרון: תחום הגדרתה הוא כל הנקודות המקיימות $1-x_1^2-x_2^2-\dots-x_k^2>0$ או כדור k-ממדי פתוח בעל רדיוס 1 שמרכזו בראשית. טווח הפונקציה הוא הקטע $[1,\infty)$.

דוגמה 12: מצא תחום הגדרה, טווח וערך בנקודה $(3,4,5)$ של הפונקציה

$$u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (1)$$

פתרון: מהגדרת הפונקציה $\arccos\theta$ נובע שטווח הפונקציה הנ"ל הוא קטע $[0,\pi]$ ותחום הגדרתה הוא כל הנקודות (x,y,z) המקיימות

$$-1\le\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 1$$



או
$$-\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$$

תחום ההגדרה הוא כל הנקודות הנמצאות מחוץ לחרוט (ראה איור).

כדי למצוא את ערך הפונקציה בנקודה $(3,4,5)$ נציב ב-(1) $x=3, y=4, z=5$, נקבל

$$u=\arccos\frac{5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\arccos 1=0$$

נגדיר פונקציה מורכבת.

הגדרה 5: תהי $u=f(x_1,\dots,x_k)$ מוגדרת מעל הקבוצה $\{x\}\in E_k$. נניח שנתונות k פונקציות $x_i=\varphi_i(t_1,t_2,\dots,t_m)$, $(t_1,\dots,t_m)\in\{N\}$ בעלי טווח המוכל בקבוצה $\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$. נגדיר **פונקציה מורכבת** Φ התלויה ב- $(t_1,\dots,t_m)$ המוגדרת מעל $\{N\}\in E_m$ לפי הכלל

$$\Phi(t_1,\dots,t_m)=f(\varphi_1(t_1,\dots,t_m),\varphi_2(t_1,\dots,t_m),\dots,\varphi_k(t_1,\dots,t_m))$$

דוגמה 13: בנה פונקציה מורכבת $u=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ כאשר $x=t+v$, $y=t-v$.

פתרון: $\Phi(t,v)=\frac{(t-v)(t+v)}{\sqrt{(t+v)^2+(t-v)^2}}=\frac{t^2-v^2}{\sqrt{2(t^2+v^2)}}$.

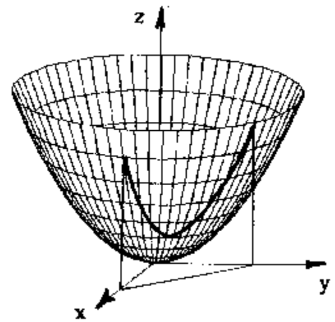
דוגמה 14: מצא את ערך הפונקציה $z=\sqrt{4x^2-y^2}+xy$ מעל הקו $y=2x$.

פתרון: נבנה פונקציה מורכבת כאשר $x=x$, $y=2x$, נקבל

$$\Phi(x) = \sqrt{4x^2-(2x)^2} + x\cdot 2x = 2x^2$$

התיאור הגיאומטרי הוא מישור $y=2x$ החותך מהמשטח z קו שהוא פרבולה $z=2x^2$.

דוגמה 15: מצא את ערכה של הפונקציה $z=x^2+y^2$ מעל הישר $x+y=1$.



פתרון: נציב $y=1-x$ ב- $z=x^2+y^2$, נקבל $z=2x^2-2x+1$. כלומר, המישור $x+y=1$ חותך מהפרבולויד $z=x^2+y^2$ את הפרבולה $z=2x^2-2x+1$ (ראה איור).

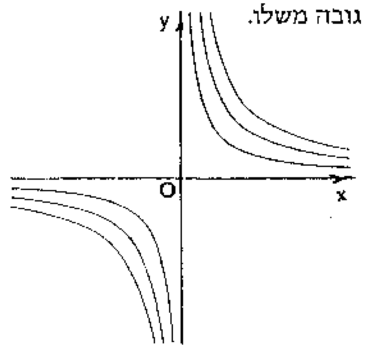
נדגיש **שהתיאור הגיאומטרי** של **פונקציה** משני משתנים $z=f(x,y)$ הוא משטח במרחב E_3.

הגדרה 6: העקום L במישור x,y נקרא **קו גובה (קו רמה)** של הפונקציה $z=f(x,y)$, המתאים לקבוע c, אם ערך הפונקציה על L שווה ל-c.

זאת אומרת, $z=f(x,y)=c$ (מישור $z=c$ – (c קבוע) חותך מהמשטח $f(x,y)$ עקום L).

מההגדרה ברור שלכל ערך קבוע של c מתאים קו גובה משלו.

דוגמה 16: מצא קווי גובה של הפונקציה $z=xy$.



פתרון: משוואת קווי הגובה $xy=c$,

אם $c=1$ נקבל $xy=1$

אם $c=2$ נקבל $xy=2$

אם $c=3$ נקבל $xy=3$ (ראה איור).

נציין שבמיפוי שטח משתמשים בקווי גובה.

הגדרה 7: משטח S נקרא **משטח גובה (רמה)**, המתאים לקבוע c, של הפונקציה $u=f(x,y,z)$ אם הוא מוגדר על ידי המשוואה $f(x,y,z)=c$. כלומר, ערך הפונקציה u של S שווה לקבוע c.

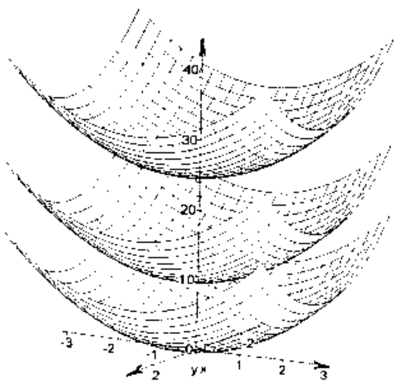
דוגמה 17: מצא את משטח הגובה לפונקציה $u=x^2+y^2+z^2$ העובר דרך הנקודה $M_0(1,2,3)$.

פתרון: משטחי גובה המתאימים לקבוע c הם כדורים $x^2+y^2+z^2=c$, היות והמשטח עובר דרך הנקודה M_0 נמצא את c: $c=1^2+2^2+3^2=14$, לכן המשטח הנדרש הוא $x^2+y^2+z^2=14$.

הערה 1: לכל פונקציה $u=f(x,y,z)$ קיים משטח גובה יחיד העובר דרך הנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ (נובע ישירות מהגדרה 3).

דוגמה 18: מצא משטחי גובה של הפונקציה $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$.

פתרון: משפחה של פרבולוידים $x^2+y^2-z=c$ הם משטחי גובה (ראה איור).



$x^2+y^2=z-25 \quad (c=-25)$

$x^2+y^2=z-10 \quad (c=-10)$

$x^2+y^2=z \quad (c=0)$

תרגילים:

1. נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2y+\frac{y^2}{x}$. חשב:

א. $f(1,-1)$. ב. $f\left(\frac{1}{3},2\right)$. ג. $f(y,x)$.

ד. $f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$. ה. $f(-x,-y)$.

2. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות:

א. $z=\sqrt{x+2y}+\sqrt{x-2y}$. ב. $z=\frac{1}{\sqrt{x+2y}}+\frac{1}{\sqrt{x-2y}}$.

ג. $z=\sqrt{x-\sqrt{y+1}}$.

ד. $z=x^2y\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$.

ה. $z=\ln[x\ln(y-2x)]$.

ו. $u=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{y-2}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$.

3. פרק את הפונקציה המורכבת לשרשרת של פונקציות יותר פשוטות:

א. $z=\left(\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{2(x^2+y^2)}\right)^{(x+y)^2}+x^2+2xy+y^2$.

ב. $z=\left(\frac{x^2+y^2+xy}{xy}\right)^3+\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$.

4. רשום את f כפונקציה של x ו- y (או של x,y,z):

א. $f=\frac{u+v}{uv}$, $u=w^t$, $v=w^{-t}$, $w=\sqrt{x+y}$, $t=2(x-y)$.

ב. $f=(u+v)^2-u^3-v^3$ כאשר $u=\frac{1}{2}(e^t+e^w)$, $v=\frac{1}{2}(e^t-e^w)$,
$w=\ln(x+y+z)^2$ וכאשר $t=\ln(x^2+y^2+z^2)$.

5. מצא את קווי הגובה של הפונקציות:

א. $z=x^2-y^2$. ב. $z=1-|x|-|y|$.

ג. $z=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

6. מצא את משטחי הגובה של הפונקציות:

א. $u=7^{2x+3y-z}$. ב. $u=tg(x^2+y^2-2z^2)$.

פרק 11
גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

1. גבולות של פונקציות

תהי פונקציה $u=f(M)$ מוגדרת בסביבת הנקודה $M_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_k^0)$ פרט אולי, לנקודה M_0 עצמה.

הגדרה 1: נאמר שהמספר L הוא גבול הפונקציה $f(M)$ כאשר $M\to M_0$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל נקודה M המקיימת $0<d(M,M_0)<\delta$, מתקיים

$$|f(M)-L|<\varepsilon \tag{1}$$

נציין שהגבול L אינו תלוי במסלול שדרכו הנקודה M שואפת לנקודה M_0, מאותו רגע ש- M נכנסת ל-δ-סביבה של M_0.

נדגיש שבהגדרה 1 ניתן להחליף את תנאי הקיום של סביבה כדורית של M_0 בתנאי קיום של סביבה תיבתית, כלומר:

הגדרה 1*: אם לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$, כך שלכל $M(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ המקיים $|x_1-x_1^0|<\delta$, $|x_2-x_2^0|<\delta$, … , $|x_k-x_k^0|<\delta$ מתקיים (1), אזי L הוא הגבול של $f(M)$ כאשר $M\to M_0$, ונרשום זאת באופן הבא: $L=\lim\limits_{M\to M_0}f(M)$ או

$$L=\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ \vdots\\ x_k\to x_k^0}}f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

באופן דומה לגבולות של פונקציות ממשתנה אחד נביא את הגדרת הגבול של הפונקציה $u=f(M)$ לפי **היינה (Heine)**.

הגדרה 2: L הוא **הגבול של הפונקציה** $u=f(M)$ כאשר $M\to M_0$ אם לכל סדרת נקודות $\{P_n\}$ המתכנסת ל- M_0 ו- $P_n\neq M_0$ שבהם פונקציה מוגדרת, סדרת המספרים $f(P_1),f(P_2),\ldots,f(P_n),\ldots$ מתכנסת ל- L.

טענה 1: הגדרות 1 ו-2 שקולות.

הוכחת הטענה דומה להוכחה המתאימה לפונקציות של משתנה אחד, ([1] 2,4).

הערה 1: מההגדרות 1 ו-2 נובע שגבול של פונקציה, אם הוא קיים, הוא יחיד ואינו תלוי במסלול שדרכו הנקודה M מתקרבת לנקודה M_0.

מההערה הנ"ל נובעת המסקנה הבאה:

מסקנה 1: אם לפונקציה $f(M)$ גבולות שונים לפי מסלולים שונים של התקרבות M ל- M_0, אזי ל- $f(M)$ אין גבול, כאשר $M \to M_0$.

דוגמה 1: הוכח שלא קיים גבול

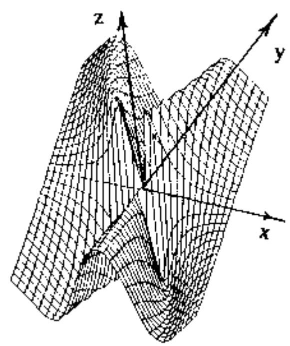
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2-xy}{x^2+2y^2}$$

פתרון: נחשב את הגבול הנ"ל לפי כל קו ישר העובר דרך הראשית, כלומר $y=kx$, $x\to 0$, נציב ונקבל

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}} f(x,y) = \lim_{\substack{y=kx\\x\to0}} \frac{x^3+k^2x^2-kx^2}{x^2+2k^2x^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2(x+k^2-k)}{x^2(1+2k^2)} = \frac{k^2-k}{1+2k^2}$$

אנו רואים שהגבול תלוי ב- k. למשל אם $k=1$ הגבול הוא 0. אם $k=-1$ הגבול הוא $\frac{2}{3}$. הגבול של $f(x,y)$ לא קיים בנקודה $(0,0)$.

דוגמה 2: הוכח שלא קיים הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.



פתרון: ראשית נחשב את הגבול לפי ישרים העוברים דרך הראשית, $x\to 0, y=kx$, נקבל

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}} f(x,y) = \lim_{x\to0}\frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4} = \lim_{x\to0}\frac{k^2x}{1+k^4x^2} = 0$$

לכן לפי כל קו ישר העובר דרך $(0,0)$ הגבול הוא אפס. נציין שזה עדיין אינו מצביע על קיום הגבול.

נבחר מסלול $x=y^2$ ונקבל

$$\lim_{\substack{x=y^2\\x\to0}} f(x,y) = \lim_{x\to0}\frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

כלומר, לפי מסלולים שונים מקבלים גבולות שונים לכן הגבול אינו קיים (ראה איור).

לחישוב גבולות, נשתמש במשפט הבא.

משפט 1: יהיו $f(M)$ ו- $g(M)$ שתי פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה M_0.

נניח שקיימים הגבולות $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$, $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)$, אזי:

א. $\lim\limits_{M\to M_0}[f(M)\pm g(M)] = \lim\limits_{M\to M_0} f(M) \pm \lim\limits_{M\to M_0} g(M)$.

ב. $\lim\limits_{M\to M_0}[f(M)\cdot g(M)] = \lim\limits_{M\to M_0} f(M) \cdot \lim\limits_{M\to M_0} g(M)$.

ג. אם בנוסף $g(M)\neq 0$ ו- $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)\neq 0$ אזי $\lim\limits_{M\to M_0}\frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim\limits_{M\to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0} g(M)}$.

הוכחה ההוכחה היא תוצאה ישירה של הגדרה 2 ותכונות הגבולות של סדרת מספרים.

את ההוכחה המדוייקת נשאיר לקורא.

דוגמה 3: יהיו הפונקציות $\varphi(x)$ ו- $g(y)$ רציפות בנקודות $x=x_0$, $y=y_0$ בהתאמה.

חשב $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[\varphi(x)\cdot g(y)]$.

פתרון: ממשפט 1 ורציפות של פונקציות נובע

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[\varphi(x)\cdot g(y)] = \lim_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\lim_{y\to y_0} g(y) = \varphi(x_0)\cdot g(y_0)$$

דוגמה 4: חשב: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x^2+y^2}{3x+4y-xy}$.

פתרון: לפי משפט 1 והדוגמה הקודמת

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = \frac{\lim\limits_{x\to1}x^2+\lim\limits_{y\to2}y^2}{3\lim\limits_{x\to1}x+4\lim\limits_{y\to2}y-\lim\limits_{x\to1}x\cdot\lim\limits_{y\to2}y} = \frac{1+4}{3+8-2} = \frac{5}{9}$$

ב. טכניקות חישוב גבולות

בסעיף זה נביא מספר שיטות לחישוב גבולות:

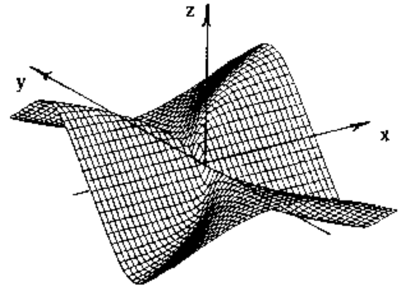
משפט הסנדביץ': אם $h(M)\le f(M)\le g(M)$ ו- $\lim\limits_{M\to M_0} h(M) = \lim\limits_{M\to M_0} g(M)$, אזי גם $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=L$.

דוגמה 5: חשב:

א. $L=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^4}$. ב. $L=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$.

ג. $L=\lim_{(x,y)\to(1,0)}y\sin\frac{1}{x-1}$.

פתרון:



א. נדגיש שבמקרה הזה לא ניתן להשתמש במשפט 1 כיוון שגבול המכנה הוא אפס. מאי-השיוויון

$$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right|\le\frac{x^2|y|}{x^2}=|y|$$

היות ו- $\lim_{y\to0}|y|=0$ ותוך שימוש במשפט הסנדביץ' מקבלים שהגבול הוא אפס, $L=0$ (ראה איור).

ב. ממשפט 1 נובע שאם קיימים הגבולות

$$L_1=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}}\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\quad,\quad L_2=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}}\frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}\quad,\quad L_3=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}}\frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}$$

אזי $L=L_1+L_2+L_3$. נחשב L_1 תוך שימוש במשפט הסנדוויץ באי-השיוויון

$$0\le\left|\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\right|\le\frac{|x^3|}{x^2}=|x|\xrightarrow[x\to0]{}0$$

נקבל $L_1=0$. באופן דומה מקבלים ש- $L_2=L_3=0$ לכן $L=0$.

ג. לכל x $(x\ne1)$, $-y\le y\sin\frac{1}{x-1}\le y$ ו- $\lim_{y\to0}y=0$ לכן $L=0$.

הבאת הפונקציה $f(M)$ לפונקציה של משתנה אחד או לפונקציה שגבולה ידוע.

דוגמה 6: חשב את גבולות הפונקציות:

א. $L=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. ב. $L=\lim_{\substack{x\to0\\y\to1\\z\to2}}\frac{\sin[x(y^2+z^2)]}{xy^2}$.

ג. $L=\lim_{\substack{x\to0\\y\to\frac{\pi}{2}}}[1-\cos(x+y)]^{tg(x+y)}$.

פתרון:

א. נסמן $x^2+y^2=t$. היות ו- $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0$, לכן $t\to0$, כאשר $(x,y)\to(0,0)$. נציב t ונקבל $L=\lim_{t\to0}t\sin\frac{1}{\sqrt t}=0$.

ב. נרשום את הפונקציה באופן הבא:

$$\frac{\sin[x(y^2+z^2)]}{xy^2}=\frac{\sin[x(y^2+z^2)]}{x(y^2+z^2)}\cdot\frac{y^2+z^2}{y^2}$$

נחשב כל אחד מהגבולות $\lim_{\substack{y\to1\\z\to2}}\frac{y^2+z^2}{y^2}$ ו- $\lim_{\substack{x\to0\\y\to1\\z\to2}}\frac{\sin[x(y^2+z^2)]}{x(y^2+z^2)}$.

הגבול הימני שווה ל-5. נחשב את הגבול השמאלי.

נסמן $t=x(y^2+z^2)$ היות ו- $t\to0$ כאשר $(x,y,z)\to(0,1,2)$, נקבל

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to1\\z\to2}}\frac{\sin[x(y^2+z^2)]}{x(y^2+z^2)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

לאחר שימוש במשפט 1 ונקבל $L=1\cdot5=5$.

ג. נסמן $t=\cos(x+y)$, ברור ש- $t\to0$ כאשר $(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})$. נרשום

$$L=\lim_{\substack{x\to0\\y\to\frac{\pi}{2}}}[1-\cos(x+y)]^{tg(x+y)}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to\frac{\pi}{2}}}\left([1-\cos(x+y)]^{-\frac{1}{\cos(x+y)}}\right)^{-\sin(x+y)}$$

היות ו- $\lim_{\substack{x\to0\\y\to\frac{\pi}{2}}}\sin(x+y)=1$ נקבל $L=\lim_{t\to0}(1-t)^{\frac{1}{t}}=e^{-1}$.

תרגילים:

חשב את גבולות הפונקציות במקרה שהם קיימים:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.
5. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^6+y^6}$.
6. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to1}} \frac{x^3+3y^3}{x^2-2y^2}$.
7. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ y\to1}} \frac{\arcsin(xy-2)}{\operatorname{arctg}(3xy-6)}$.

3. גבולות חוזרים

בסעיפים הקודמים ראינו שגבול הפונקציה אינו תלוי במסלול השאיפה של הנקודה M ל- M_0. בסעיף זה נתבונן בגבול חוזר, כלומר גבול לפי כל משתנה לפי הסדר. לשם פשטות נטפל בפונקציות בשני משתנים.

נתונה הפונקציה $u=f(x,y)$ המוגדרת בסביבת הנקודה $M_0(x_0,y_0)$ פרט, אולי, לנקודה עצמה.

לכל y קבוע נחשב $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ ונעבור לגבול כאשר $y\to y_0$ ונקבל:

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \qquad (1)$$

באופן דומה נבנה $\psi(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ ו-

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \qquad (2)$$

לגבול (1) ו-(2) קוראים גבולות חוזרים (בניגוד לגבול המוגדר לסעיף 1 שהוא גבול כפול).

נתבונן במספר דוגמאות.

דוגמה 7: חשב את הגבולות החוזרים ואת הגבול הכפול של הפונקציות הבאות:

א. $f(x,y)=y\sin\frac{1}{x-1},\ (x,y)\to(1,0)$. ב. $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2},\ (x,y)\to(0,0)$.

ג. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\ (x,y)\to(0,0)$. ד. $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2},\ (x,y)\to(0,0)$.

פתרון:

א. נחשב גבולות חוזרים: הראשון: $\lim\limits_{x\to1}\lim\limits_{y\to0} y\sin\frac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}0=0$, השני: היות ו- $\lim\limits_{x\to1} y\sin\frac{1}{x-1}$ אינו קיים, לא קיים גם הגבול החוזר $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to1} y\sin\frac{1}{x-1}$.

כפי שראינו בדוגמה 5ג' הגבול הכפול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{x-1}=0$ קיים ושווה לאפס. למרות זאת, הגבול החוזר הראשון לא קיים והגבול החוזר השני קיים ושווה לגבול הכפול.

ב. נחשב גבולות חוזרים

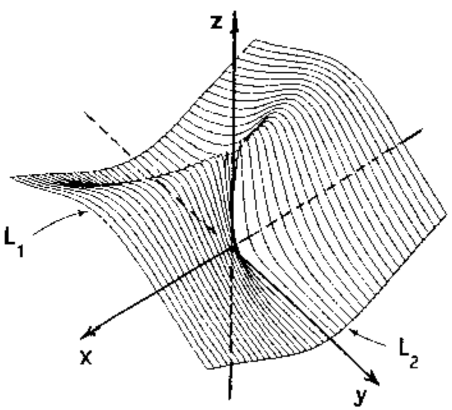
$$L_1=\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1 \quad , \quad L_2=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}0=0$$

נוכיח כי הגבול הכפול אינו קיים.

נבחר מסלול $y=kx$ ונקבל

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to0}}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1}{1+k^2}$$

כלומר, הגבול תלוי ב- k, ולכן לא קיים (ראה ציור של הפונקציה הנ"ל בסביבת הנקודה (0,0)).



בדוגמה הזאת הגבולות החוזרים קיימים ושונים אך הגבול הכפול אינו קיים.

ג. נחשב גבולות חוזרים

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}0=0 \quad , \quad \lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}0=0$$

נוכיח שהגבול הכפול אינו קיים. נחשב $\lim\limits_{\substack{y=kx\\ x\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{k}{1+k^2}$.

קיבלנו שהגבולות החוזרים קיימים ושווים, אך הגבול הכפול לא קיים.

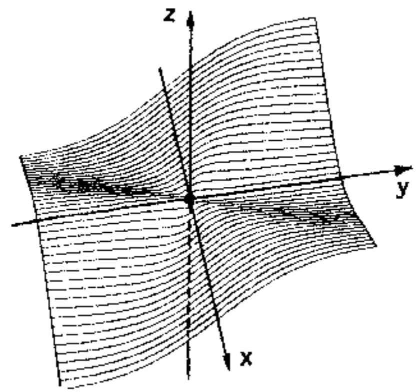
ד. קל לראות שהגבולות החוזרים שווים לאפס

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

מאי-השיוויון

$$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x^2y|}{x^2}=|y|$$

מקבלים שהגבול הכפול קיים ושווה לאפס (ראה איור).



לפונקציה הנתונה שלושת הגבולות קיימים ושווים.

הקשר בין גבול כפול וגבולות חוזרים ניתן במשפט הבא.

משפט 2: אם מתקיימים שני התנאים

א. קיים הגבול הכפול $L=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

ב. לכל y מסביבת הנקודה $M_0(x_0,y_0)$ קיים הגבול $\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)$, אזי קיים הגבול החוזר $\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)$ והוא שווה ל- L.

הוכחה: מ-א' לפי הגדרה 1 לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x,y המקיימים $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ מתקיים

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon \qquad (3)$$

באי-שיוויון (3) נקבע y המקיים $|y-y_0|<\delta$ ונעבור לגבול כאשר $x\to x_0$, נקבל $|\varphi(y)-L|\le\varepsilon$, היות ו- ε שרירותי מקבלים ש- $\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=L$. ■

הערה 1: אם בנוסף לתנאי 1 במשפט 2 מתקיים:

ג. לכל x קבוע קיים $\psi(x)=\lim_{y\to y_0}f(x,y)$ אזי קיים הגבול החוזר $\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)$ ושווה ל- L.

מסקנה 1: אם הגבולות החוזרים קיימים ושונים אזי הגבול הכפול אינו קיים.

אבל אם הגבולות החוזרים שווים קיום הגבול הכפול לא מובטח (דוגמה 7ג').

4. פונקציות רציפות, הגדרה ודוגמאות

תהי הפונקציה $u=f(M)=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ מוגדרת בתחום D.

הגדרה 3: הפונקציה $u=f(M)$ **רציפה בנקודה** $M_0\in D$, אם

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0) \qquad (1)$$

או בשפת $\varepsilon-\delta$.

הגדרה 3*: הפונקציה $u=f(M)$ רציפה בנקודה M_0 אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל M המקיימים $d(M,M_0)<\delta$ מתקיים $|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$.

דוגמה 8: בדוק רציפות ב- $(0,0,0)$ של הפונקציה

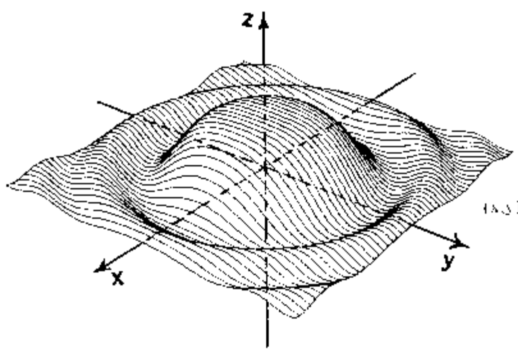
$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\ne(0,0,0)\ \text{כאשר}\\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0)\ \text{כאשר}\end{cases}$$

פתרון: הפונקציה $f(x,y,z)$ מוגדרת בנקודה $(0,0,0)$ ו- $f(0,0,0)=0$ כמו-כן $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0$ (דוגמה 5ב') ולכן היא רציפה ב- $(0,0,0)$.

דוגמה 9: בדוק את רציפות הפונקציה ב- R^2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\ \text{כאשר}\\ 1, & (x,y)=(0,0)\ \text{כאשר}\end{cases}$$

פתרון: הפונקציה הנתונה מוגדרת בכל המישור.



נבדוק את רציפותה בנקודה (x_0,y_0) ($x_0\ne0$ או $y_0\ne0$)

קל לראות ש-

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\frac{\sin(x_0^2+y_0^2)}{x_0^2+y_0^2}$$

ולכן היא רציפה ב- (x_0,y_0).

נבדוק עתה רציפות ב- $(0,0)$,

נסמן $x^2+y^2=t$ ונחשב

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 = f(0,0)$$

כלומר, הפונקציה רציפה גם בנקודה $(0,0)$.

צורת המשטח $z=f(y,x)$ רואים מהאיור.

דוגמה 10: בדוק בנקודה $(0,0)$ את רציפות הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{כאשר } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{כאשר } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון: הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת בנקודה $(0,0)$ ושווה לאפס. נראה שלא קיים הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. נחשב את הגבול הנ"ל לפי המסלול $y=kx$ ונקבל

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to0}} f(x,y) = \lim_{x\to0}\frac{x^2+x^3+k^3x^3}{x^2+k^2x^2} = \frac{1}{1+k^2}$$

הגבול תלוי ב- k ולכן גבול הכפול לא קיים.

מכאן הפונקציה הנבדקת אינה רציפה בנקודה $(0,0)$.

נציין שהפונקציה הנ"ל היא פוקציה רציפה כפונקציה של x לכל y קבוע, כלומר הפונקציה $f(x,y_0)=\dfrac{x^2+x^3+y_0^3}{x^2+y_0^2}$ רציפה לכל x.

באופן דומה לכל x קבוע הפונקציה $f(x_0,y)=\dfrac{x_0^2+x_0^3+y^3}{x_0^2+y^2}$ רציפה כפונקציה של y.

מסקנה 2: פונקציה של שני משתנים יכולה להיות לא רציפה, אך רציפה לפי כל אחד מהמשתנים לחוד.

דוגמה 11: האם ניתן להגדיר את הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$ כך שהן תהיינה רציפות באותה נקודה:

א. $f(x,y)=\dfrac{y^2}{y^2+x^4}$, $(x,y)\neq(0,0)$. ב. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$, $(x,y)\neq(0,0)$.

פתרון:

א. נוכיח שאינו קיים הגבול הכפול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2}{y^2+x^4}$.

נחשב גבולות לפי שני מסלולים שונים $y=x$ ו- $y=x^2$, נקבל:

$$\lim_{\substack{y=x\\ x\to0}}\frac{y^2}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^4+x^2}=1 \quad,\quad \lim_{\substack{y=x^2\\ x\to0}}\frac{y^2}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$$

כלומר, לא ניתן להגדיר $f(x,y)$ בנקודה $(0,0)$ כך שיתקיים

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

כלומר, כך ש- $f(x,y)$ תהיה רציפה ב- $(0,0)$.

ב. נחשב $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\sin t}=1$.

כלומר, ניתן להגדיר פונקציה $F(x,y)$ ב- $(0,0)$ באופן הבא:

$$F(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

תרגילים:

1. בדוק את רציפות הפונקציות בנקודות $(0,0)$ ו- $(1,2)$:

א. $F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

ב. $F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-2)^2}{(x-1)^2+\sin^2(y-2)}, & (x,y)\neq(1,2)\\ 0, & (x,y)=(1,2)\end{cases}$.

ג. $F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+\sin^2(y-2)}, & (x,y)\neq(1,2)\\ 0, & (x,y)=(1,2)\end{cases}$.

2. האם ניתן להגדיר את הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$ כרציפות:

א. $f(x,y)=x\ln(x^2+3y^2)$. ב. $f(x,y)=y\sin\frac{1}{x}$.

ג. $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$. ד. $f(x,y)=\frac{x}{y}e^{-y^2}$.

5. תכונות של פונקציות רציפות

בסעיף זה נקבל תכונות של פונקציות של משתנים אחדים הדומות לתכונות של פונקציות רציפות במשתנה אחד. מהגדרה 3* נובעת יציבות הסימן של פונקציה בסביבת נקודת רציפותה.

משפט 3: אם הפונקציה $u=f(M)$ רציפה בנקודה $M_0\in D\subset E_k$ ו- $f(M_0)>0$ ($f(M_0)<0$), אזי קיימת סביבה לנקודה M_0 כזאת שבכל נקודה M מהסביבה הנ"ל $f(M)>0$ ($f(M)<0$).

תוך שימוש בהגדרת הרציפות ומשפט 1, נקבל:

משפט 4: אם הפונקציות $f(M)$ ו- $g(M)$ רציפות בנקודה $M_0\in D\subset E_k$, אזי

א. הפונקציות $f(M)\pm g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$ רציפות ב- M_0.

ב. אם בנוסף $g(M_0)\neq 0$, אזי גם הפונקציה $\frac{f(M)}{g(M)}$ רציפה ב- M_0.

נעבור עתה לחקירת רציפות של פונקציה מורכבת. נתבונן בפונקציה

$$u=f(x_1,x_2,\dots,x_k) \qquad (1)$$

המוגדרת בתחום $D\subset E_k$ והפונקציות

$$x_1=\varphi_1(t_1,\dots,t_m)\ ,\ x_2=\varphi_2(t_1,\dots,t_m)\ ,\ \dots\ ,\ x_k=\varphi_k(t_1,\dots,t_m) \qquad (2)$$

המוגדרות ב- $\Delta\subset E_m$.

תהיינה $M(x_1,x_2,\dots,x_k)$ נקודה ב-D ו- $P(t_1,t_2,\dots,t_m)$ נקודה ב- Δ כשהקואורדינטות שלהן קשורות על ידי (2).

משפט 5: אם הפונקציות $\varphi_i(P)$, $(i=1,2,\dots,k)$ רציפות בנקודה $P_0(t_1^0,\dots,t_m^0)\in\Delta$ והפונקציה $f(M)$ רציפה בנקודה $M_0(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0)\in D$ בעלת קואורדינטות

$$x_i^0=\varphi_i(t_1^0,t_2^0,\dots,t_m^0)\ ,\ i=1,2,\dots,k$$

ו- $x_i^0=\varphi_i(P_0)$, $i=1,2,\dots,k$ אזי הפונקציה המורכבת $u=f(\varphi_1(P),\varphi_2(P),\dots,\varphi_k(P))$ רציפה בנקודה P_0.

הוכחה: נקבע $\varepsilon>0$. מהרציפות של $f(M)$ ב- M_0 נובע שקיים $\delta>0$ (נחשב אותו) כך שלכל M המקיימים

$$|x_1-x_1^0|<\delta\ ,\ |x_2-x_2^0|<\delta\ ,\ \dots\ ,\ |x_k-x_k^0|<\delta \qquad (3)$$

מתקיים

$$|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon \qquad (4)$$

כעת, לפי $\delta>0$ (שמצאנו) קיים $\eta>0$, כך שלכל P המקיים

$$|t_1-t_1^0|<\eta\ ,\ |t_2-t_2^0|<\eta\ ,\ \dots\ ,\ |t_m-t_m^0|<\eta \qquad (5)$$

מתקיים

$$\begin{aligned}|x_1-x_1^0| &= |\varphi_1(P)-\varphi_1(P_0)|<\delta\\ |x_2-x_2^0| &= |\varphi_2(P)-\varphi_2(P_0)|<\delta\\ &\ \ \vdots\\ |x_k-x_k^0| &= |\varphi_k(P)-\varphi_k(P_0)|<\delta\end{aligned} \qquad (6)$$

לכן, מ-(4) ו-(5) תוך שימוש ב-(6), מקבלים

$$|f(x_1,x_2,\dots,x_k)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0)|=|f(\varphi_1(t_1,\dots,t_m)\ ,\ \dots\ ,\ \varphi_k(t_1,\dots,t_m))-$$
$$-f(\varphi_1(t_1^0,\dots,t_m^0)\ ,\ \dots\ ,\ \varphi_k(t_1^0,\dots,t_m^0))|<\varepsilon$$

וזה מסיים את ההוכחה. ■

דוגמה 12: בדוק את רציפות הפונקציה

$$f(u,v,t)=\begin{cases}\dfrac{t^2\sin\dfrac{(u-1)^2v^2+u^2(v+1)^2}{t^2}}{(u-1)^2v^2+u^2(v+1)^2} & ,\ (u,v,t)\neq(1,-1,1)\\ 1 & ,\ (u,v,t)=(1,-1,1)\end{cases}$$

בנקודה $(1,-1,1)$.

פתרון: נגדיר פונקציות עזר $y=y(u,v,t)=\frac{u^2(v+1)^2}{t^2}$, $x=x(u,v,t)=\frac{(u-1)^2v^2}{t^2}$.

הפונקציות $x(u,v,t)$ ו- $y(u,v,t)$ רציפות בנקודה $(1,-1,1)$ (לפי משפט 4) ו- $x(1,-1,1)=0$, $y(1,-1,1)=0$. הפונקציה

$$f(u,v,t)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x+y)}{x+y} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

רציפה בנקודה $(0,0)$ (דוגמה 9) ולכן הפונקציה הנחקרת רציפה ב- $(1,-1,1)$ כפונקציה מורכבת (משפט 5).

דוגמה 13: בדוק שהפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

רציפה בכל נקודה (x_0,y_0) השונה מ- $(0,0)$ **ולא רציפה ב-** $(0,0)$.

פתרון: בכל נקודה (x_0,y_0) השונה מ- $(0,0)$ ניתן להשתמש במשפט 4. היות ו- xy ו- x^2+y^2 רציפות ו- $x_0^2+y_0^2\neq 0$ הפונקציה $f(x,y)$ רציפה ב- (x_0,y_0).

את הוכחת אי-רציפותה בנקודה $(0,0)$ נשאיר לקורא.

6. המשך

בסעיף זה נחקור פונקציות רציפות בתחום.

הגדרה 4: אומרים שהפונקציה $u=f(M)$ **רציפה בתחום** אם היא רציפה בכל נקודה של התחום.

משפט 6: (**ערך ביניים**). תהי הפונקציה $u=f(M)$ רציפה בתחום קשיר $D\subset E_k$, יהיו A,B שתי נקודות ב-D. לכל מספר ממשי m הנמצא בין $f(A)$ ו- $f(B)$ קיימת נקודה C ב- D כך ש- $f(C)=m$.

הוכחה: נחבר את הנקודות A ו- B על ידי קו רציף L

$$x_1=\varphi_1(t)\ ,\ x_2=\varphi_2(t)\ ,\ \dots\ ,\ x_k=\varphi_k(t)\ ,\ \alpha\le t\le\beta$$

שכולו נמצא ב- D (ראה סעיף 7.2).

בקטע $[\alpha,\beta]$ מוגדרת הפונקציה המורכבת $\Phi(t)=f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_k(t))$ המתלכדת עם הפונקציה $f(M)$ על הקו L. תוך שימוש במשפט 5 נקבל שהפונקציה $\Phi(t)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו-

$$\Phi(\alpha)=f(\varphi_1(\alpha),\varphi_2(\alpha),\dots,\varphi_k(\alpha))=f(A)$$
$$\Phi(\beta)=f(\varphi_1(\beta),\varphi_2(\beta),\dots,\varphi_k(\beta))=f(B)$$

ולכן לפי משפט ערך הביניים לפונקציה במשתנה אחד $\Phi(t)$ לכל m הנמצא בין $\Phi(\alpha)=f(A)$ ו- $\Phi(\beta)=f(B)$ קיימת נקודה t_0, כך ש:

$$\Phi(t_0)=f(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0),\dots,\varphi_k(t_0))=m$$

לכן בנקודה C בעלת קואורדינטות $(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0),\dots,\varphi_k(t_0))$, $f(C)=m$. ∎

משפט 7: (**ווירשטרס**). אם הפונקציה $u=f(M)$ רציפה בתחום חסום וסגור D, אזי היא חסומה שם.

הוכחה: נוכיח בשלילה. נניח ש- $f(M)$ רציפה ב- D, אך לא חסומה. לכן

קיימת נקודה $M_1\in D$ ש- $f(M_1)>1$

קיימת נקודה $M_2\in D$ כך ש- $f(M_2)>2$. נמשיך באופן דומה

קיימת נקודה $M_n\in D$ כך ש- $f(M_n)>n$ וכדומה.

קיבלנו סידרה אינסופית של נקודות $\{M_n\}$ ב- D שעבורם $f(M_n)>n$.

לפי משפט בולצנו-ווירשטרס (7.2) קיימת תת-סדרה $\{M_{n_m}\}$ המתכנסת ל- M_0.

היות והתחום D סגור $M_0\in D$ ולכן $\lim_{m\to\infty} f(M_{n_m})=f(M_0)$, מצד שני $f(M_{n_m})>n_m$ ולכן $\lim_{m\to\infty} f(M_{n_m})=\infty$. קיבלנו סתירה המצביעה על כך שההנחה לא נכונה. לכן $f(M)$ חסומה ב- D. ∎

משפט 8: (**ווירשטרס**). אם הפונקציה $u=f(M)$ רציפה בתחום חסום וסגור D, אזי היא מקבלת את הערך המקסימלי והמינימלי שלה מעל D, כלומר קיימות נקודות A ו- B ב- D, כך ש:

$$\max_{M\in D} f(M)=f(A)\quad,\quad \min_{M\in D} f(M)=f(B)$$

ההוכחה של המשפט דומה להוכחת המשפט הדומה לפונקציות במשתנה אחד ([1], 5.3) ולכן נשאיר את ההוכחה לקורא.

7. רציפות במידה שווה

נביא עתה תכונה גלובלית נוספת של פונקציות רציפות בתחום D.

הגדרה 5: הפונקציה $u=f(M)$ נקראת **רציפה במידה שווה** בתחום D אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ התלוי ב- ε בלבד, כך שלכל שתי נקודות M',M'' המקיימות $d(M',M'')<\delta$ מתקיים $|f(M'')-f(M')|<\varepsilon$.

דוגמה 14: בדוק שהפונקציה $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ רציפה במידה שווה בכל המרחב.

פתרון: נקבע $\varepsilon>0$ ונוכיח שקיים $\delta>0$ כך שלכל $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ו- $M_2(x_2,y_2,z_2)$ המקיימים $d(M_1,M_2)<\delta$ מתקיים $|u(M_1)-u(M_2)|<\varepsilon$, אמנם:

$$|u(M_1)-u(M_2)| = \left|\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\right| \le$$

לפי אי-שיוויון המשולש (טענה 7.1)

$$\le \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} = d(M_1,M_2) < \varepsilon$$

לכן קיים δ והוא שווה ל- ε. כלומר, הפונקציה u רציפה במידה שווה בכל המישור.

משפט 9: (קנטור **G. Cantor**). אם הפונקציה $u=f(M)$ רציפה בתחום חסום וסגור D, אזי היא רציפה במידה שווה שם.

הוכחה: נוכיח בשלילה. נניח שהפונקציה u רציפה בתחום חסום וסגור D אך אינה רציפה במידה שווה שם, כלומר קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל n-טבעי קיימות שתי סדרות $\{M_n\}$ ו- $\{P_n\}$ מהתחום D המקיימות

$$d(M_n,P_n) < \frac{1}{n} \qquad (1)$$

שמתקיים

$$|f(M_n)-f(P_n)| \ge \varepsilon \qquad (2)$$

לפי משפט בולצנו-ויירשטרס (7.2), מהסדרה $\{M_n\}$ ניתן להוציא תת-סדרה $\{M_{n_m}\}$ המתכנסת ל- $M_0\in D$.

תוך שימוש ב-(1) מקבלים שתת-הסדרה $\{P_{n_m}\}$ מתכנסת גם ל- M_0.

מרציפות הפונקציה $f(M)$ מקבלים $|f(M_{n_m})-f(P_{n_m})|\xrightarrow[n_m\to\infty]{}0$ וזה בניגוד להנחתנו (2), לכן ההנחה אינה נכונה, כלומר $f(M)$ רציפה במידה שווה ב- D. ■

תרגילים: הוכח:

1. אם $f(x,y)$ רציפה ב- D, אזי היא רציפה לפי x ולפי y. תן דוגמה של פונקציה $f(x,y)$ אשר רציפה לפי x ולפי y אך אינה רציפה.

2. הפונקציה $u=\arcsin\frac{x}{y}$ רציפה בתחום $D=\{(x,y):|x|\le|y|, y\ne0\}$ אך לא רציפה במידה שווה ב- D.

3. אם הפונקציה $u=f(x,y)$ המוגדרת בתחום D, רציפה לפי x ומקיימת את תנאי ליפשיץ לפי y, כלומר $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le A|y_1-y_2|$ כאשר $(x,y_2),(x,y_1)$ נקודות ב- D ו- A קבוע אינו תלוי ב- x, אזי $f(x,y)$ רציפה ב- D.

4. אם הפונקציה $u=f(x,y)$ המוגדרת בתחום D, רציפה לפי x ורציפה במידה שווה לפי y (יחסית ל- x) אזי הפונקציה $f(x,y)$ רציפה ב- D.

5. הפונקציה $u=\cos\frac{1}{1-x^2-y^2}$ אינה רציפה במידה שווה ב- $D=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ וכן רציפה במידה שווה בתחום $D_1=\{(x,y):3\le x^2+y^2\le 4\}$.

פרק 12
ניגזרות חלקיות. דיפרנציאביליות. כלל השרשרת

בפרק זה נבנה חשבון דיפרנציאלי של פונקציות ממספר משתנים.

1. ניגזרות חלקיות

תהי הפונקציה $u=f(x_1,x_2,\ldots x_k)$ המוגדרת בתחום D ו- $M_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_k^0)$ נקודה ב- D.

נקבע משתנים $x_2,x_3,\ldots,x_k$ ונבנה פונקציה במשתנה אחד x_1

$$u = f(x_1,x_2^0,\ldots,x_k^0)$$

ניתן ל- x_1 תוספת Δx_1 במקרה x_1^0 ונקבל תוספת $\Delta_1 u$

$$\Delta_1 u = f(x_1^0+\Delta x_1\,,\, x_2^0,\cdots,x_k^0)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_k^0) \tag{1}$$

הגדרה 1: אם קיים הגבול

$$\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta_1 u}{\Delta x_1} \tag{2}$$

אזי הוא נקרא **הנגזרת החלקית** של הפונקציה $u=f(M)$ לפי x_1 בנקודה M_0 ומסמנים:

$f_1'(M_0)$ או $f_{x_1}'(M_0)$ או $u_{x_1}'(M_0)$ או $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)$ או $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$

באופן דומה מגדירים ניגזרות חלקיות לפי $x_2,x_3,\ldots,x_k$.

נציין שניגזרת חלקית לפי x_i היא ניגזרת רגילה כאשר כל המשתנים האחרים נחשבים בקבועים.

דוגמה 1: חשב את הניגזרות החלקיות של הפונקציה

$$u = xe^{yz}+\ln(xyz)$$

פתרון: נקבע y ו- z ונגזור לפי x, נקבל $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{yz}+\frac{yz}{xyz}=e^{yz}+\frac{1}{x}$

באופן דומה $\frac{\partial u}{\partial z}=xye^{yz}+\frac{1}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xze^{yz}+\frac{1}{y}$

דוגמה 2: חשב את הניגזרות החלקיות של

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ כאשר} \\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ כאשר} \end{cases}$$

פתרון: נפריד את התרגיל לשניים.

ראשית נחשב ניגזרות חלקיות בכל נקודה ששונה מ- $(0,0)$. נקבל

$$f_x'(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)-x^3\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y'(x,y) = -\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

נעבור לחישוב ניגזרות חלקיות בראשית. נחשב $f_x'(0,0)$ לפי הגדרה 1.

נבנה $\Delta_1 f$ לפי (1)

$$\Delta_1 f = f(0+\Delta x_1,0)-f(0,0) = \frac{(\Delta x+0)^3}{(0+\Delta x)^2+0}-0 = \Delta x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_1 f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

באופן דומה, על מנת לחשב $f_y'(0,0)$ נשתמש בהגדרה 1, נקבל

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

תשובה סופית

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2+3y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad,\quad f_y'(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

דוגמה 3: חשב $f'_x(0,0)$ ו- $f'_y(0,0)$ של הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\ , & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון: באופן דומה לתרגיל הקודם נשתמש בהגדרה לחישוב הנגזרות הדרושות ונקבל $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$.

נדגיש שהפונקציה $f(x,y)$ אינה רציפה ב- $(0,0)$ (דוגמה 11.7ג') ולמרות זאת היא גזירה חלקית באותה נקודה. הדבר מאפשר לנו להעיר את ההערה הבאה.

הערה 1: מקיום הנגזרות החלקיות בנקודה לא נובעת בדרך כלל, רציפות הפונקציה במספר משתנים באותה נקודה.

תרגילים:

1. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציות:

א. $z=x^3+3y^2-\dfrac{x}{y}$. ב. $z=e^{\cos(xy)}$. ג. $z=\arccos\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

ד. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. ה. $z=\sqrt[3]{x^2y^5}$. ו. $u=\ln(x^3+y^3-z^3)$.

2. חשב את הנגזרות החלקיות של $u=\ln(xy+z)$ בנקודה $M(1,2,0)$.

3. תהי $z=\ln(x^2+xy+y^2)$. הוכח ש- $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$.

4. הוכח שאם $u=\dfrac{x-y+x(y-z)}{y-z}$, אזי $u'_x+u'_y+u'_z=1$.

5. חשב את הנגזרות החלקיות ב- $(0,0)$ של הפונקציות:

א. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2+y)^2}{x^4+y^2}\ , & (x,y)\neq(0,0)\\ 1\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

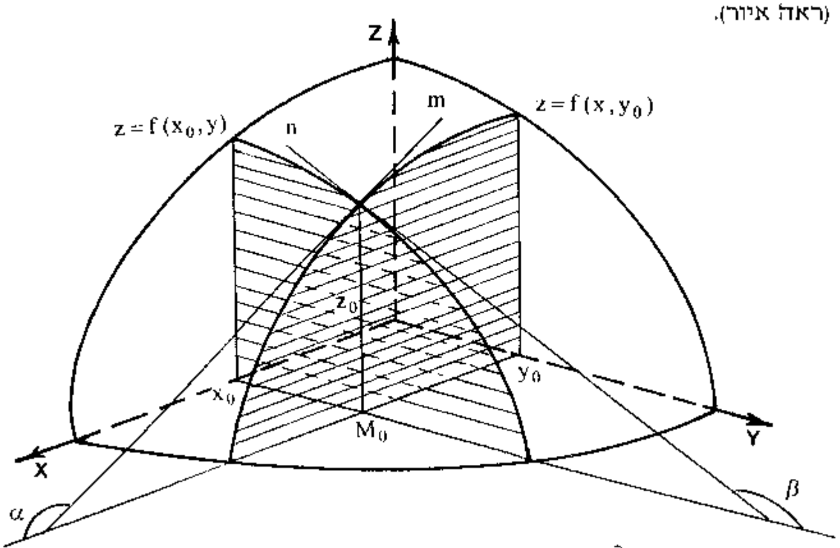
ב. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin y}{x^2+y^2}\ , & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

2. תיאור גיאומטרי של נגזרות חלקיות

בסעיף זה נתאר גיאומטרית נגזרות חלקיות של פונקציה בשני משתנים $z=f(x,y)$.

הפונקציה z מגדירה משטח S במרחב E_3. יהיו הנגזרות החלקיות $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ בנקודה $M_0(x_0,y_0)$. נסמן $z_0=f(x_0,y_0)$.

ברור שהנקודה (x_0,y_0,z_0) נמצאת על המשטח S. נקבע $y=y_0$ ונקבל $z=f(x,y_0)$, פונקציה זו מגדירה את קו החיתוך של המישור $y=y_0$ עם המשטח S (ראה איור).



לכן $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x_0,y_0)$ מגדירה את שיפוע המשיק m בנקודה (x_0,y_0,z_0) לעקום $z=f(x,y_0)$ ו- $f'_x(x_0,y_0)=tg\alpha$ (ראה איור).

כלומר $f'_x(x_0,y_0)$ מתארת את קצב הישתנות הפונקציה $z=f(x,y)$ בכיוון ציר ה-x.

באופן דומה $f'_y(x_0,y_0)$ מתארת את קצב הישתנות הפונקציה $z=f(x,y)$ בכיוון ציר ה- y ושווה ל- $tg\beta$. נרשום את משוואת המשיק m

$$z-z_0 = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) \tag{1}$$

באופן דומה משוואת המשיק n לעקום $z=f(x_0,y)$ בנקודה (x_0,y_0,z_0) היא

$$z-z_0 = f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \tag{2}$$

נעביר מישור דרך הישרים (1) ו-(2) ונקבל את משוואתו

$$z-z_0 = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \qquad (3)$$

מישור (3) נקרא **מישור משיק** למשטח $z=f(x,y)$ (אם הוא קיים). את ההגדרה המדוייקת של מישור משיק ותנאי לקיומו ניתן בסעיף 4.

נציין שהוקטור $(f'_x(M_0)\,,\,f'_y(M_0)\,,\,-1)$ הוא נורמל (מאונך) למישור משיק.

לוקטור זה קוראים וקטור הנורמל למשטח בנקודה (x_0,y_0,z_0).

דוגמה 4: מצא את משוואת המישור המשיק ואת נורמל לחרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ בנקודה $(3,4)$.

פתרון: נמצא z_0 , $z_0=\sqrt{3^2+4^2}=5$, נחשב נגזרות חלקיות בנקודה $(3,4)$

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(3,4)=\frac{3}{5} \quad , \quad z'_y=\frac{4}{5}$$

ן המישור המשיק הוא $z-5=\frac{3}{5}(x-3)+\frac{4}{5}(y-4)$, או $3x+4y-5z=0$.

אן וקטור הנורמל הוא $(3,4,-5)$.

יין שלחרות בנקודה $(0,0)$ לא קיים מישור משיק.

ריגילים:

:א את משוואת המישור המשיק למשטחים הבאים:

$z=-\sqrt{25-x^2-y^2}$ בנקודות: א. $(2,3)$. ב. $(0,0)$.

$z=xe^{x(y-1)}$ בנקודות $(1,2)$.

3. דיפרנציאביליות של פונקציות במספר משתנים

בסעיף 1 ראינו שהנגזרות החלקיות אינן משקפות את כל התכונות החשובות של הפונקציות במספר משתנים. למשל פונקציה גזירה חלקית לא בהכרח רציפה.

בסעיף זה נחקור תכונה כללית יותר של פונקציות הלוקחת בחשבון את כל המשתנים. לשם פשטות, נטפל בפונקציות של שני משתנים $z=f(x,y)$.

ראשית, נגדיר תוספת כללית של הפונקציה.

בנקודה $M_0(x_0,y_0)$ ניתן ל- x תוספת Δx ול- y תוספת Δy. נקבל **תוספת לפונקציה** Δz באותה נקודה.

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) \qquad (1)$$

הגדרה 2: הפונקציה $z=f(x,y)$ נקראת **דיפרנציאבילית** בנקודה (x_0,y_0) את Δz מ-(1) ניתן להציג בצורה הבאה:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y \qquad (2)$$

כאשר A ו- B מספרים קבועים ו-

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\alpha(\Delta x,\Delta y)=0 \quad , \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\beta(\Delta x,\Delta y)=0$$

את ביטוי (2) ניתן לרשום בצורה אחרת. נסמן $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, ברור ש- $\rho\to0$ כאשר $\Delta x\to0$, $\Delta y\to0$ ולהיפך.

נרשום $\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\rho\left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho}+\beta\frac{\Delta y}{\rho}\right)$, נסמן $\varepsilon=\alpha\frac{\Delta x}{\rho}+\beta\frac{\Delta y}{\rho}$. קל לראות ש-

$$0\le|\varepsilon|\le|\alpha|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+|\beta|\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}<|\alpha|+|\beta|\xrightarrow[\rho\to0]{}0$$

לכן הגדרה 2 שקולה להגדרה הבאה.

הגדרה 2*: הפונקציה $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם את התוספת הכללית שלה Δz ניתן להציג באופן הבא:

$$\Delta z = A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon\rho \qquad (3)$$

כאשר A ו- B מספרים קבועים ו- $\lim_{\rho\to0}\varepsilon=0$, $(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$.

משפט 1: אם פונקציה $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $M_0(x_0,y_0)$, אזי קיימות הנגזרות החלקיות ו- $A=f'_x(x_0,y_0)$, $B=f'_y(x_0,y_0)$.

הוכחה: מהדיפרנציאביליות נובע שאת Δz ניתן לרשום בצורה (2). ניקח $\Delta y=0$ ומ-(2), נקבל

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0) = A\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

נחלק את שני האגפים ב- Δx ונעבור לגבול כאשר $\Delta x\to0$, נקבל

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = A+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha = A$$

ולכן $A=f'_x(x_0,y_0)$. באופן דומה מ-(2) על ידי הצבת $\Delta x=0$ נקבל $B=f'_y(x_0,y_0)$. ■

מסקנה 1: את (3) ניתן לרשום באופן הבא:

$$\Delta z = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon\rho \qquad (4)$$

כאשר $\lim_{\rho\to 0}\varepsilon=0$.

משפט 2: אם הפונקציה $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה M_0 אזי היא רציפה באותה נקודה.

הוכחה: נעבור לגבול ב-(4) כאשר $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ ונקבל

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)] = \lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}[f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y+\varepsilon\rho]=0$$

לכן $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)$

כלומר $z=f(x,y)$ רציפה ב- (x_0,y_0). ■

מסקנה 2: אם פונקציה לא רציפה בנקודה, אזי היא לא דיפרנציאבילית באותה נקודה.

דוגמה 5: בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה ב- $(0,0)$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון: הפונקציה הנתונה לא רציפה ב- $(0,0)$ (דוגמה 12.13) ולכן לא דיפרנציאבילית.

דוגמה 6: בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון: את בדיקת הרציפות של הפונקציה הנחקרת נשאיר לקורא. על מנת לבדוק דיפרנציאביליות נשתמש ב-(4) נחשב Δf בנקודה $(0,0)$

$$\Delta f = f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\frac{\Delta x^3+\Delta y^3}{2\Delta x^2+\Delta y^2}$$

נעבור לחישוב הנגזרות החלקיות בנקודה $(0,0)$, לפי הגדרת הנגזרת, נקבל

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^3}{2\Delta x^3}=\frac12$$

באופן דומה מקבלים $f'_y(0,0)=1$.

נציב ב-(4), נקבל

$$\frac{\Delta x^3+\Delta y^3}{2\Delta x^2+\Delta y^2}=\frac12\Delta x+\Delta y+\varepsilon\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

ומכאן

$$\varepsilon = -\frac{\Delta x\Delta y^2+4\Delta x^2\Delta y}{2(2\Delta x^2+\Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

לכן אם $\lim_{\rho\to0}\varepsilon$ שווה לאפס אזי הפונקציה דיפרנציאבילית.

אם הגבול אינו אפס או שאינו קיים הפונקציה לא דיפרנציאבילית.

נחשב $\lim\varepsilon$ לפי המסלול $\Delta x=\Delta y$ ו- $\Delta x\to0$, נקבל

$$\lim_{\Delta x=\Delta y\to0}\varepsilon = -\lim_{\Delta x\to0}\frac{5\Delta x^3}{6\Delta x^2\sqrt{2\Delta x^2}} = -\frac{5}{6\sqrt2}\operatorname{sign}\Delta x\neq 0$$

לכן הפונקציה הניבדקת אינה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

דוגמה 7: בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה בראשית

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון: נשאיר לקורא לבדוק ש- $f(x,y)$ רציפה בכל המישור ו- $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$ והתוספת

$$\Delta f = (\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

נשתמש ב-(4) לחישוב ε, נקבל

$$\varepsilon = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

היות ו-

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\cdot \sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$

הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

בדוגמאות 5-7 ראינו שבדיקת דיפרנציאביליות של פונקציה בנקודה הוא תהליך ארוך ודורש בדיקה בכל נקודה ונקודה.

נביא עתה תנאי מספיק לדיפרנציאביליות שקל יחסית לבדיקה.

משפט 3: אם הפונקציה $z=f(x,y)$ מוגדרת בסביבת נקודה $M_0(x_0,y_0)$ ובעלת נגזרות חלקיות $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ רציפות בסביבת אותה נקודה, אזי היא דיפרנציאבילית ב- M_0.

הוכחה: נחשב תוספת של הפונקציה z בנקודה (x_0,y_0) ונקבל

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \tag{5}$$

$$= [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] + [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)]$$

נשתמש במשפט לגרנז' למשתנה אחד ונקבל

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) &= f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x \\ f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) &= f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y \end{aligned} \tag{6}$$

כאשר $0<\theta_1 , \theta_2<1$.

היות והנגזרות f'_y, f'_x רציפות בסביבת M_0 ניתן לרשמן בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) &= f'_x(x_0,y_0)+\alpha \\ f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) &= f'_y(x_0,y_0)+\beta \end{aligned} \tag{7}$$

כאשר $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}} \alpha = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}} \beta = 0$

מ-(5) נקבל תוך שימוש ב-(6) ו-(7) ש:

$$\Delta z = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

כלומר, הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- (x_0,y_0). ■

דוגמה 8: בדוק את הדיפרנציאביליות של הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

בתחום הגדרתה.

פתרון: נחשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \ , (x,y)\neq(0,0) \quad ; \quad f'_x(0,0)=0$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \ , (x,y)\neq(0,0) \quad ; \quad f'_y(0,0)=0$$

הנגזרות f'_x ו- f'_y הן פונקציות רציפות בכל נקודה השונה מ- $(0,0)$ לכן הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור פרט לראשית.

נבדוק את הדיפרנציאביליות של $f(x,y)$ ב- $(0,0)$ לפי ההגדרה. נחשב Δf

$$\Delta f = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + \varepsilon\rho$$

ומכאן $e^{-\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \varepsilon\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ לכן $\varepsilon = \frac{1}{\rho}e^{-\frac{1}{\rho^2}}$,

מכיוון ש- $\lim\limits_{\rho\to0}\varepsilon = \lim\limits_{\rho\to0}\frac{1}{\rho}e^{-\frac{1}{\rho^2}} = 0$ הפונקציה הנחקרת דיפרנציאבילית גם בראשית (בדוק שבמקרה זה הנגזרות החלקיות רציפות בראשית).

הערה 2: רציפות הנגזרות החלקיות בנקודה היא תנאי מספיק לדיפרנציאביליות.

נביא דוגמה של פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה ובעלת נגזרות חלקיות לא רציפות באותה נקודה. כפי שראינו בדוגמה 7, הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

נחשב $f'_x(x,y)$, נקבל

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

היות ולא קיים $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$ הפונקציה $f'_x(x,y)$ לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

באופן דומה נגדיר את הדיפרנציאביליות של הפונקציה $u=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$.

ניתן ל- x_i תוספת Δx_i, $(i=1,2,\dots,k)$.

נסמן על ידי Δu תוספת של הפונקציה בנקודה $M_0(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0)$.
אם התוספת $\Delta u=f(M)-f(M_0)$ ניתן להציג באופן הבא

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{k} A_i\Delta x_i + \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\Delta x_i$$

כאשר A_i מספרים קבועים, ו- $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \vdots \\ \Delta x_k\to 0}}\alpha_i=0$, $(i=1,2,\dots,k)$, אזי אומרים שהפונקציה u **דיפרנציאבילית** בנקודה M_0 ו- $A_i=f'_{x_i}(M_0)$, $(i=1,2,\dots,k)$.

משפט 3*: אם פונקציה $f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ רציפה בנקודה M_0 ובעלת נגזרות חלקיות רציפות בסביבת אותה נקודה, אזי היא דיפרנציאבילית ב- M_0.

תרגילים:

בדוק דיפרנציאביליות של הפונקציות בנקודות הבאות: א. $(0,0)$. ב. $(1,2)$.

1. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y)^2}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

2. $f(x,y)=\sqrt[5]{x^7y^3}$.

3. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

4. $f(x,y)=(x+y)\sqrt{x^2+y^2}$.

5. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin x}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

4. דיפרנציאביליות ומישור משיק

יהי S משטח הנתון על ידי $z=f(x,y)$ ועובר דרך נקודה $N_0(x_0,y_0,z_0)$, כלומר $z_0=f(x_0,y_0)$.

בסעיף 2 קיבלנו את משוואת המישור המשיק למשטח S, אבל את המישור המשיק עצמו הגדרנו בצורה אינטואיטיבית יותר. נביא את ההגדרה המדוייקת.

הגדרה 3: Π הוא **מישור משיק** למשטח S בנקודה N_0 אם:

א. המישור Π עובר דרך הנקודה N_0.

ב. לכל נקודה N על המשטח S הזווית בין המיתר NN_0 והמישור Π שואפת לאפס כאשר N שואף ל- N_0.

נוכיח את המשפט הבא.

משפט 4: למשטח $z=f(x,y)$ קיים מישור משיק בנקודה $N_0(x_0,y_0,z_0)$, שאינו מקביל לציר z, אם ורק אם הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0).

הוכחה: דרך הנקודה N_0 נעביר מישור Π

$$\Pi:\ z-z_0 = A(x-x_0)+B(y-y_0) \qquad (1)$$

כאשר A ו- B מספרים קבועים.

ניקח נקודה N בעלת הקואורדינטות $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$ כאשר

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

נחשב $\cos\theta$, כאשר θ היא הזווית החדה בין הוקטור $\vec{NN_0}=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ והנורמל למישור Π, כלומר בין הוקטורים $\vec{NN_0}$ ו- $\mathbf{n}(A,B,-1)$ (הנורמל למישור).

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}\cdot\vec{NN_0}}{|\mathbf{n}|\cdot|\vec{NN_0}|}$$ או

$$\cos\theta = \frac{|A\Delta x+B\Delta y-\Delta z|}{\sqrt{A^2+B^2+1}\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} \qquad (2)$$

נשלים את הוכחת המשפט בשני שלבים.

א. נניח כי $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- $M_0(x_0,y_0)$ ונוכיח כי קיים מישור המשיק למשטח z בנקודה N_0. נרשום

(3) $$\Delta z = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

(4) $$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon = 0$$

נבחר $A=f'_x(M_0)$, $B=f'_y(M_0)$ ונציב (3) ב-(2), נקבל

$$0 < \cos\theta = \frac{|\varepsilon|\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} < \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}}$$

כיוון ש- $\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}$ מספר קבוע מקבלים $\lim_{N\to N_0}\cos\theta=0$. כלומר, הוכחנו שאם הפונקציה $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $M_0(x_0,y_0)$ אזי המישור המשיק למשטח z באותה נקודה הוא

(5) $$z-z_0 = f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(M_0)(y-y_0)$$

(ראה סעיף 2).

ב. נניח עתה שבנקודה N_0 קיים מישור משיק למשטח $z=f(x,y)$, כלומר $\lim_{N\to N_0}\cos\theta=0$. נראה שהפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- $M_0(x_0,y_0)$.

נוכיח ראשית קיום הנגזרות החלקיות ב- M_0. מכיוון שהגבול של $\cos\theta$ הוא אפס, ניתן לרשום את (2) באופן הבא: $\frac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}=\varepsilon$ כאשר $\varepsilon\to 0$ אם $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, או מכאן

(6) $$\Delta z - A\Delta x - B\Delta y = \varepsilon\sqrt{\rho^2+\Delta z^2}\ ,\ (\rho^2=\Delta x^2+\Delta y^2)$$

$$(\Delta z - A\Delta x - B\Delta y)^2 - \varepsilon^2(\rho^2+\Delta z^2)=0$$

קיבלנו משוואה ריבועית יחסית ל- Δz בעלת הפתרונות

(7) $$\Delta z = \frac{A\Delta x+B\Delta y}{1-\varepsilon^2} \pm \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\sqrt{(1-\varepsilon^2)\rho^2+(A\Delta x+B\Delta y)^2}$$

נבחר $\Delta y=0$ ו- $\Delta x\neq 0$, נקבל מ-(7)

$$\Delta z = \frac{A\Delta x}{1-\varepsilon^2} \pm \frac{\varepsilon|\Delta x|\sqrt{1-\varepsilon^2+A^2}}{1-\varepsilon^2}$$

נחלק ב- Δx ונעבור לגבול כאשר $\Delta x\to 0$, נקבל

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\left(\frac{A}{1-\varepsilon^2} \pm \frac{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2+A^2}}{1-\varepsilon^2}\right) = A$$

באופן דומה מוכיחים ש- $f'_y(x_0,y_0)=B$.

כעת נוכיח ש- $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- M_0. למען זה מספיק להוכיח כי

(8) $$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

לביטוי $\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)$ נציב את Δz מ-(7) ונקבל

$$\Delta z - A\Delta x - B\Delta y = \frac{\varepsilon^2(A\Delta x+B\Delta y)}{1-\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\sqrt{(1-\varepsilon^2)\rho^2+(A\Delta x+B\Delta y)^2}$$

נסמן על ידי $M=\max(A,B)$ ונחלק את שני האגפים ב- ρ

$$\frac{|\Delta x - A\Delta x - B\Delta y|}{\rho} \le \frac{\varepsilon^2 M|\Delta x+\Delta y|}{\rho(1-\varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\sqrt{(1-\varepsilon^2)+\frac{M^2(\Delta x+\Delta y)^2}{\rho^2}}$$

כיוון ש- $\frac{|\Delta x+\Delta y|}{\rho}<2$ נקבל בסוף

$$\frac{|\Delta z - A\Delta x - B\Delta y|}{\rho} \le \frac{2M\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\sqrt{1-\varepsilon^2+4M^2}$$

היות ו- $\lim_{\rho\to0}\varepsilon=0$ מקבלים את (8). ■

5. נגזרות חלקיות של פונקציה מורכבת, כלל השרשרת

בסעיף זה נקבל נוסחאות לגזירת פונקציות מורכבות.

תהי הפונקציה $u=f(x,y,z)$ המוגדרת בתחום D ונניח תחילה ש-

(1) $$x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ z=z(t)\ ,\ t\in\Lambda$$

לכל t מתאימה נקודה $(x(t),y(t),z(t))$ מ- D.

מטרתנו למצוא את הנגזרת של הפונקציה המורכבת u לפי t, כלומר $\frac{du}{dt}$

הדרך הטבעית היא להציב את (1) ב- $f(x,y,z)$, לקבל $u(t)=f(x(t),y(t),z(t))$ ולגזור לפי החוקים של פונקציה ממשתנה אחד.

דוגמה 9: חשב $\frac{du}{dt}$ בנקודה $t=0$ לפונקציה
$$u=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
כאשר $x=2t$, $y=t$.

פתרון: נציב $x=2t$, $y=t$ ונקבל $u=\frac{4t^3}{5t^2}=\frac{4}{5}t$, לכן $\frac{du}{dt}=\frac{4}{5}$.

דוגמה 10: חשב $\frac{du}{dt}$ של הפונקציה $u=x^y$ כאשר $x=t^2+2t+5$, $y=\sin t$.

פתרון: נציב את x ו- y ב- u. נקבל $u=(t^2+2t+5)^{\sin t}$.
מכאן $\ln u=\sin t\cdot\ln(t^2+2t+5)$, נגזור
$$\frac{u'}{u}=\cos t\cdot\ln(t^2+2t+5)+\frac{2(t+1)\sin t}{t^2+2t+5}$$
או
$$\frac{du}{dt}=(t^2+2t+5)^{\sin t}\cdot\cos t\cdot\ln(t^2+2t+5)+2(t+1)\sin t\cdot(t^2+2t+5)^{-1+\sin t}$$

כמו שראינו בדוגמה האחרונה שיטת הצבה לא נוחה.

נביא דרך אחרת לגזירת פונקציות מורכבות.

משפט 5: **(כלל השרשרת).** תהי הפונקציה $u=f(x,y,z)$ בעלת נגזרות חלקיות f'_x,f'_y,f'_z רציפות, ויהיו הפונקציות $x(t),y(t),z(t)$ גזירות, אזי קיימת הנגזרת $\frac{du}{dt}$ ומתקיים:

$$\frac{du}{dt}=f'_x\cdot\frac{dx}{dt}+f'_y\cdot\frac{dy}{dt}+f'_z\cdot\frac{dz}{dt}\qquad(2)$$

הוכחה: היות והנגזרות החלקיות של הפונקציה u רציפות, היא דיפרנציאבילית ולכן

$$\Delta u=f'_x\Delta x+f'_y\Delta y+f'_z\Delta z+\varepsilon\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\qquad(3)$$

כאשר $\varepsilon\to0$ אם $(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)$.

בנוסף, הפונקציות $x(t),y(t),z(t)$ רציפות, כלומר $\Delta x\to0$, $\Delta y\to0$, $\Delta z\to0$ כאשר $\Delta t\to0$ ולהיפך.

נחלק את שני האגפים של (3) ב- Δt

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=f'_x\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+f'_z\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t}+\varepsilon\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}$$

בשיוויון האחרון נעבור לגבול כאשר $\Delta t\to0$ ונקבל את (2) (שים לב שהביטוי בתוך השורש חסום). ■

דוגמה 11: חשב $\frac{du}{dt}$ של הפונקציה $u=x^y$, כאשר $x=f(t)$, $y=g(t)$ והפונקציות $f(t),g(t)$ גזירות.

פתרון: לפי כלל השרשרת (2)

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=y\cdot x^{y-1}\cdot f'(t)+x^y\cdot\ln x\cdot g'(t)$$

הערה 4: אם הפונקציה u אינה דיפרנציאבילית, אזי לא ניתן להשתמש בנוסחה (2).

למשל פונקציה מדוגמה 9 לא דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$. נחשב $\frac{du}{dt}(0)$ לפי נוסחה (2).

היות ו- $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$ מקבלים $u'(0)=0$ למרות שהנגזרת היא $\frac{4}{5}$.

נעבור בעת למקרה כללי יותר.

משפט 6: תהי הפונקציה $u=f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית ובנוסף לזה הפונקציות $x=x(t,v)$, $y=y(t,v)$, $z=z(t,v)$ דיפרנציאביליות, אזי הפונקציה המורכבת $u=u(t,v)$ גזירה חלקית לפי t ו- v ומתקיימות הנוסחאות:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\qquad(4)$$

הוכחת המשפט דומה להוכחת המשפט הקודם אם נקבע משתנה אחד.

למען השלמות ננסח את כלל השרשרת במקרה כללי.

משפט 7: יהיו הפונקציות $x_i=\varphi_i(t_1,t_2,\dots,t_m)$, $(i=1,2,\dots,k)$ דיפרנציאביליות בסביבת הנקודה $N_0=(t_1^0,t_2^0,\dots t_m^0)$ והפונקציות $u=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ דיפרנציאבילית בנקודה $M_0(x_1^0,x_2^0,\dots x_k^0)$ כאשר $x_i^0=\varphi_i(N_0)$, $(i=1,2,\dots,k)$, אזי הפונקציה המורכבת $u=f(\varphi_1(t_1,\dots,t_m),\varphi_2(t_1,\dots,t_m),\dots,\varphi_k(t_1,\dots,t_m))$ דיפרנציאבילית בנקודה N_0 ו-

$$\frac{\partial u}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}(N_0)\ ,\quad j=1,2,\dots,m\qquad(5)$$

דוגמה 12: תהי הפונקציה $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בכל המישור ו- $f'_x(-3,6)=-2$, $f'_y(-3,6)=1$. יהיו $x=u^2-v^2$, $y=u^2vw$.

נגדיר פונקציה מורכבת $\varphi(u,v,w)=f(u^2-v^2,u^2vw)$.

חשב $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial w}$ בנקודה $(1,2,3)$.

פתרון: נשתמש בכלל השרשרת (5)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(1,2,3) = \frac{\partial f}{\partial x}(-3,6)\frac{\partial x}{\partial u}(1,2,3) + \frac{\partial f}{\partial y}(-3,6)\frac{\partial y}{\partial u}(1,2,3)$$

נחשב
$$\frac{\partial x}{\partial u}(1,2,3) = \frac{\partial}{\partial u}(u^2-v^2)\Big|_{(1,2,3)} = (2u)(1,2,3) = 2$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(1,2,3) = \frac{\partial}{\partial u}(u^2vw)\Big|_{(1,2,3)} = (2uvw)(1,2,3) = 12$$

לכן
$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(1,2,3) = -2\cdot 2+1\cdot 12 = 8$$

באופן דומה מקבלים $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(1,2,3)=11$, $\frac{\partial\varphi}{\partial w}(1,2,3)=2$.

דוגמה 13: הוכח שהפונקציה $z=\varphi(x^2-y^2)$ כאשר $\varphi(t)$ גזירה, מקיימת את המשוואה: $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

פתרון: נסמן $t=x^2-y^2$ ונחשב φ'_x ו- φ'_y ונקבל

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 2x\frac{d\varphi}{dt} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = -2y\frac{d\varphi}{dt}$$

נציב את הנגזרות במשוואה, נקבל $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\frac{\partial\varphi}{\partial t} - 2xy\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$.

תרגילים:

1. חשב $\frac{du}{dt}$ אם $u=\frac{x}{y}$, כאשר $x=e^{2t}$, $y=\ln t^2$.
2. חשב $\frac{du}{dt}$ אם $u=x^2+y^2+xz$, כאשר $x=\sin t$, $y=e^t$, $z=t^3$.

3. חשב $\frac{du}{dx}$ אם $u=\arcsin\frac{x}{y}$, כאשר $y=\sqrt{x^2+1}$.
4. חשב φ'_v,φ'_u אם $\varphi(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, כאשר $x=u\sin v$, $y=u\cos v$.
5. תהי פונקציה $f(t)$ גזירה.

א. נגדיר $\varphi(x,y)=e^y f(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$. הוכח כי $(x^2-y^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+xy\frac{\partial\varphi}{\partial y}=xy\varphi(x,y)$.

ב. נגדיר $\varphi(x,y,z)=f(x^2z-yz)$. הוכח כי $x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+2y\frac{\partial\varphi}{\partial y}-2z\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$.

6. חשב את הנגזרת של הפונקציה
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
כאשר $x=t^2$, $y=3t^2$ בנקודה $t=0$.

7. תהי
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^3+y^2)^2}{x^6+y^4} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & , (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$
נסמן $g(s,t)=f(s^2,s^3t)$, $(s\neq 0)$. הוכח כי

א. $\frac{\partial g}{\partial s}=0$, ב. $2x\frac{\partial f}{\partial x}+3y\frac{\partial f}{\partial y}=0$, $x\neq 0$.

6. דיפרנציאל

בתורת הפונקציות של משתנה אחד הגדרנו מושג חשוב: **דיפרנציאל**. זהו החלק העיקרי (לינארי) של תוספת הפונקציה, כלומר אם $y=\varphi(x)$ גזירה בנקודה x_0 אזי $dy=\varphi'(x_0)dx$. הפונקציה $\varphi(x)$ דיפרנציאבילית בנקודה x_0 אם ורק אם היא גזירה באותה נקודה. נעבור לפונקציות של k משתנים.

תהי פונקציה $u=f(x_1,\dots,x_k)$ דיפרנציאבילית (סעיף 3) בנקודה $M_0(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0)$, כלומר את התוספת של u בנקודה M_0 ניתן להציג בצורה הבאה

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)\Delta x_k+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\Delta x_i$$

כאשר $\alpha_i\to 0$ אם $(\Delta x_1,\dots,\Delta x_k)\to(0,\dots,0)$.

הגדרה 4: יהי Δu תוספת של הפונקציה $u=f(M)$ בנקודה M_0. החלק הליניארי של Δu יחסית ל- Δx_i נקרא **הדיפרנציאל** של הפונקציה u ומסמנים du, כלומר

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)\Delta x_k \qquad (1)$$

נגדיר כעת דיפרנציאל של משתנה בלתי תלוי x_i.

הגדרה 5: דיפרנציאל dx_i **של המשתנה הבלתי תלוי** x_i הוא מספר כלשהו שאינו תלוי ב- $x_1,x_2,\dots,x_k$. נקבע $\Delta x_i = dx_i$.

נרשום (1) בצורה

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)dx_k \qquad (2)$$

נציין שנוסחה (2) היא בעלת תוקף כאשר כל x_i הם משתנים בלתי תלויים.

דוגמה 14: חשב את הדיפרנציאל של הפונקציה $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ בנקודה $(2,1)$.

פתרון: נחשב $u'_x(2,1)$ ו- $u'_y(2,1)$.

$$u'_x(2,1) = \left(\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\right)(2,1) = \frac{1}{5} \quad , \quad u'_y(2,1) = -\frac{2}{5}$$

לכן $du=\frac{1}{5}dx-\frac{2}{5}dy$.

מהגדרת הדיפרנציאל נובע שעבור Δx_i מספיק קטנים תוספת של הפונקציה Δu קרובה לדיפרנציאל du, כלומר

$$\Delta u = f(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2,\dots,x_k^0+\Delta x_k) - f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0) \approx \qquad (3)$$
$$\approx \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)\Delta x_k$$

בנוסחה (3) ניתן להשתמש לחישוב מקורב של פונקציות.

דוגמה 15: חשב (בערך) $\operatorname{arctg}\frac{1.01}{0.98}$.

פתרון: נגדיר $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. נסמן $M_0(1,1)$, $\Delta x=0.01$, $\Delta y=-0.02$.

מ-(3) נובע $f(1+0.01,1-0.02)-f(1,1) = du(1,1)$

היות ו- $f'_x(1,1)=\frac{1}{2}$, $f'_y(1,1)=-\frac{1}{2}$, $f(1,1)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, נקבל

$\operatorname{arctg}\frac{1.01}{0.98}\approx\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot0.01+\frac{1}{2}\cdot0.02$ לכן $\operatorname{arctg}\frac{1.01}{0.98}=3.1566$.

נציין שבדיפרנציאל ניתן להשתמש להערכת שגיאה. כלומר, למציאת הטעות בחישוב ערך הפונקציה $u=f(x,y,z)$ בידיעה ששיעורי הנקודה (x,y,z) מחושבים עם דיוק $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ בהתאמה.

נשתמש בנוסחה (3), נקבל

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z \qquad (4)$$

לכן הדיוק Δu בערך מוחלט הוא

$$|\Delta u| \le \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y| + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\cdot|\Delta z| \qquad (5)$$

דוגמה 16: לאחר מדידת חדר התקבלו הנתונים של אורך, רוחב וגובה

$$x=5\pm0.5 \quad , \quad y=3\pm0.3 \quad , \quad z=4\pm0.4$$

מצא את השגיאה בחישוב הנפח.

פתרון: הנפח $u=xyz$. נסמן $M_0(5,3,4)$ ו- $\Delta x=\pm0.5$, $\Delta y=\pm0.3$, $\Delta z=\pm0.4$. ברור ש-

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)=12 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)=20 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)=15$$

לפי נוסחה (5)

$$\Delta u = 12\cdot0.5+20\cdot0.3+15\cdot0.4 = 18$$

הנפח האמיתי הוא $u=5\cdot3\cdot4=60$, והטעות היא $\frac{\Delta u}{u}=\frac{18}{60}\cdot100\%=30\%$.

נסיים את הסעיף במקרה של יותר משני משתנים. יהיו

$$u=f(x,y,z) \quad , \quad x=x(t,v) \quad , \quad y=y(t,v) \quad , \quad z=z(t,v)$$

פונקציות דיפרנציאביליות. כלומר u היא פונקציה מורכבת התלויה ב- t ו- v, לכן

$$du = u'_t dt + u'_v dv \qquad (6)$$

לפי כלל השרשרת $u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t$, $u'_v = u'_x x'_v + u'_y y'_v + u'_z z'_v$
נציב ב-(6) נקבל

$$du = (u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t)dt + (u'_x x'_v + u'_y y'_v + u'_z z'_v)dv = \qquad (7)$$
$$= u'_x(x'_t dt + x'_v dv) + u'_y(y'_t dt + y'_v dv) + u'_z(z'_t dt + z'_v dv)$$

וכיוון ש- $x'_t dt + x'_v dv = dx$, $y'_t dt + y'_v dv = dy$, $z'_t dt + z'_v dv = dz$ לכן מ-(7) נקבל

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz \qquad (8)$$

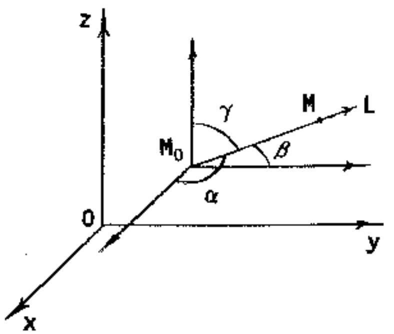
כלומר, גם במקרה של פונקציה מורכבת צורת הדיפרנציאל (2) נשמרת (אלא שבעת dz, dy, dx הם בעלי משמעות אחרת מאשר ב-(2)). התכונה הנ"ל נקראת **אינבריאנטיות** של דיפרנציאל.

תרגילים:

1. מצא du של $u=\sqrt{x^2+y^2}$ בנקודה $(3,4)$, כאשר $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.02$.
2. מצא du של $u=\frac{xy}{x^2-y^2}$ בנקודה $(2,1)$, כאשר $\Delta x = 0.01$, $\Delta y = 0.03$.
3. מצא $du(3,4,5)$, כאשר $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
4. תוך שימוש בנוסחה (3) חשב:
א. $\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98\cdot\sqrt[4]{1.05^3}}}$. ב. $\sin 29^\circ \cdot tg 46^\circ$.
5. לאחר מדידת החרוט התקבלו רדיוס הבסיס 10.2 ± 0.1 ס"מ והיוצר 44.6 ± 0.1 ס"מ. מצא את נפח החרוט. מהי השגיאה בחישוב הנפח?
6. לאחר מדידת המשולש ABC התקבלו $a=100\pm2m$, $b=200\pm3m$ וזווית $\angle C = 60^\circ \pm 1^\circ$. מהי השגיאה בחישוב צלע c ?

7. נגזרת מכוונת

משמעותן של נגזרות חלקיות (כפי שראינו בסעיף 2), היא קצב ההשתנות של פונקציה בכיוון הצירים. בבעיות שונות יש צורך להגדיר את קצב ההשתנות של פונקציה בכיוון מסויים או בכל הכיוונים.



תהי $u=f(x,y,z)$ פונקציה המוגדרת בתחום D. תהי $M_0(x_0,y_0,z_0)$ נקודה ב-D, יהי L ישר מכוון העובר דרך M_0. תהי M נקודה כלשהי על הישר L. נסמן על ידי $|\overrightarrow{M_0M}|$ את אורך הקטע MM_0 עם סימן + כאשר כיוון $\overrightarrow{M_0M}$ מתלכד עם הכיוון ב- L ואם סימן − במקרה ההפוך.

הגדרה 6: אם M שואפת ל- M_0 לאורך הציר L וקיים הגבול

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{|\overrightarrow{M_0M}|} \qquad (1)$$

אזי אומרים שהוא **הנגזרת המכוונת** של הפונקציה $f(M)$ בכיוון L בנקודה M_0, ומסמנים $D_L f(M_0)$ או $\frac{\partial f(M_0)}{\partial L}$.

נציין שהנגזרת $D_L f$ מראה את קצב ההשתנות של הפונקציה f בכיוון L.

נמצא נוסחה לחישוב $D_L f$. נסמן

$$\mathbf{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma) \qquad (2)$$

וקטור יחידה בכיוון ציר L (γ,β,α הן זוויות שיוצר הציר L עם צירי הקואורדינטות z,y,x בהתאמה, ראה סעיף 8.4).

נרשום את משוואת הישר L העובר דרך M_0 בכיוון הוקטור **a** בצורה פרמטרית (ראה סעיף 9.2)

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \quad , \quad t>0 \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases} \qquad (3)$$

נציין שכאשר $t=0$ נקבל מ-(3) את שיעורי הנקודה M_0. נחשב

$$|\overrightarrow{MM_0}| = \sqrt{(x_0 + t\cos\alpha - x_0)^2 + (y_0 + t\cos\beta - y_0)^2 + (z_0 + t\cos\gamma - z_0)^2} =$$
$$= \sqrt{t^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)} = t$$

לאורך הציר L הפונקציה $f(x,y,z)$ היא פונקציה מורכבת, נסמן

$$\Phi(t) = f(M) = f(x_0 + t\cos\alpha\ , y_0 + t\cos\beta\ , z_0 + t\cos\gamma) \qquad (4)$$

ברור ש- $\Phi(0) = f(M_0)$.

לכן מ-(1) תוך שימוש ב-(4) נקבל

$$D_a f(M_0) = \lim_{M\to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|\overrightarrow{M_0M}|} = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t} = \Phi'(0) \qquad (5)$$

דוגמה 17: חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

בנקודה $(0,0)$ בכיוון $\mathbf{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

פתרון: נרשום את משוואת הישר L (לפי (3)) העובר דרך נקודה $M_0(0,0)$ בכיוון $\mathbf{a}$, נקבל $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$.

נבנה פונקציה $\Phi(t)$ לפי (4)

$$\Phi(t) = \frac{t^3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha + t^2\sin^2\alpha} = \frac{t\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha}$$

הנגזרת המכוונת שווה ל- $\Phi'(0)$, לכן

$$\Phi'(0) = \left(\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha} + t\left(\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha}\right)'\right)_{t=0} = \frac{\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

כלומר כאשר $\sin\alpha \neq 0$, $D_a f = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$. אם $\sin\alpha = 0$ מקבלים $\Phi(t) \equiv 0$ ולכן $D_a f = 0$.

לחישוב הנגזרת המכוונת ניתן להשתמש במקרים רבים במשפט הבא.

משפט 8: אם הפונקציה $u = f(M)$ דיפרנציאבילית בסביבת הנקודה M_0, אזי הנגזרת המכוונת של $f(M)$ בנקודה M_0 לפי הכיוון $\mathbf{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ שווה ל-

$$D_a f(M_0) = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma \qquad (6)$$

הוכחה: נפעיל על הפונקציה $\Phi(t)$ מ-(4) את כלל השרשרת, נקבל

$$\Phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \qquad (7)$$

מ-(3) נחשב

$$\frac{dx}{dt} = \cos\alpha \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \cos\beta \quad , \quad \frac{dz}{dt} = \cos\gamma \qquad (8)$$

נציב (8) ב-(7) ונקבל את הנוסחה הדרושה (6). ∎

דוגמה 18: חשב את נגזרת הפונקציה $u = x^2 + 3xyz$ בכיוון $L = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ בנקודה $(1,-1,2)$.

פתרון: נחשב וקטור יחידה $\mathbf{a}$ בכיוון L , $|L| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, לכן

$$\mathbf{a} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}} , \frac{3}{\sqrt{14}} , -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

נחשב $u'_x(1,-1,2) = (2x + 3yz)(1,-1,2) = -4$, באופן דומה

$$u'_z(1,-1,2) = -3 \quad , \quad u'_y(1,-1,2) = 6$$

נציב ב-(6), נקבל

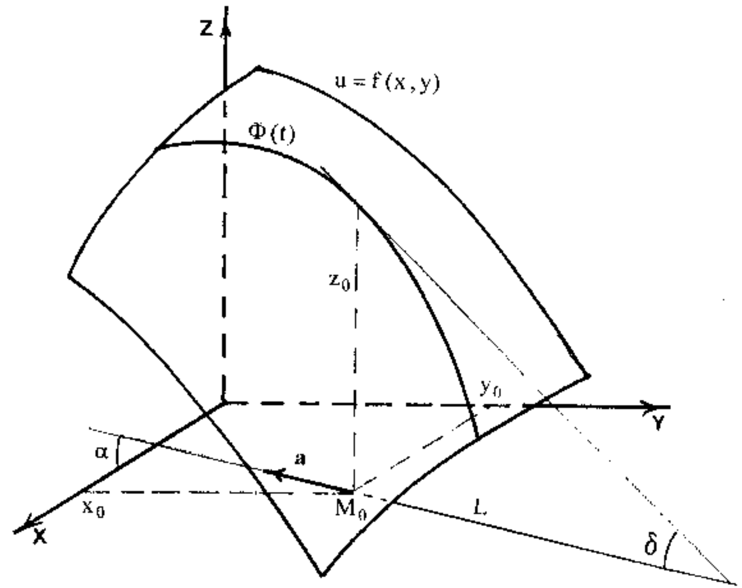
$$D_a u(1,-1,2) = -4\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + 6\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} + (-3)\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = \frac{13}{\sqrt{14}}$$

נביא תיאור גיאומטרי של הנגזרת המכוונת של הפונקציה $u = f(x,y)$ משני משתנים בנקודה $M_0(x_0, y_0)$ בכיוון $\mathbf{a} = (\cos\alpha, \cos\beta)$. נניח ש- $f(x,y)$ דיפרנציאבילית באותה נקודה ו- $x = x_0 + t\cos\alpha$, $y = y_0 + t\cos\beta$, $t \geq 0$ משוואתו של הישר L העובר דרך M_0 ומקביל לוקטור $\mathbf{a}$. הפונקציה

$$u = \Phi(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$$

היא הערך של u מעל הישר L (ראה איור).

קל לראות שהנגזרת המכוונת $D_a f(M_0)$ שווה לטנגנס הזווית δ שיוצר המשיק לעקום $\Phi(t)$ בנקודה $t = 0$ עם הכיוון החיובי של הישר L (ראה איור בעמוד הבא) והשווה אותו לאיור בעמוד 171.



תרגילים:

1. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+y)^2}{x^4+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

בנקודה $(0,0)$ ובכיוון $\mathbf{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $(0 \le \alpha < 2\pi)$.

2. מצא נגזרת מכוונת של $u = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ בנקודה $(2,1)$ בכיוון מהנקודה הנ"ל לראשית.

3. הוכח שהנגזרת המכוונת של $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ בנקודה $M(x,y,z)$ כלשהי בכיוון מ- M לראשית שווה ל- $-\dfrac{2u}{r}$, כאשר $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $u = \ln(x^2+y^2)$ בנקודה $M_0(x_0, y_0)$ בכיוון הנורמל לקו הגובה העובר דרך M_0.

5. חשב את הנגזרת המכוונת של $u = \sqrt[3]{x^2y}$ בנקודה $(0,0)$ בכיוון $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $(0 \le \alpha < 2\pi)$.

8. שדה סקלרי. גרדיאנט של שדה סקלרי

הגדרה 7: אם בכל נקודה M של הגוף V מוגדרת הפונקציה $f(M)$, אזי אומרים ש- $u = f(M)$, $(M \in V)$ מגדירה **שדה סקלרי** מעל הגוף V.

את השדה הסקלרי מאפיינים משטחי גובה, זאת אומרת מקום גיאומטרי של נקודות M מ- V שבהן לפונקציה $f(M)$ אותו ערך קבוע (ראה סעיף 7.4).

בסעיף 7.4 ראינו כי דרך נקודה $M_0 \in V$ עובר משטח גובה (רמה) יחיד.

דוגמה 19: מצא משטח רמה של השדה הסקלרי $u = 3x^2 + 5y^2 + z^2$ העובר דרך הנקודה $M_0(1, -1, 2)$.

פתרון: כל משטחי רמה הם אליפסואידים $3x^2 + 5y^2 + z^2 = c$, נמצא c מהתנאי שהמשטח עובר דרך $M_0(1, -1, 2)$, כלומר $c = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2^2 = 12$ לכן המשטח הוא $3x^2 + 5y^2 + z^2 = 12$.

מושגים נוספים של שדה סקלרי הם נגזרות חלקיות $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ ונגזרת מכוונת $D_{\mathbf{a}} f(M_0)$.

המשמעות הגיאומטרית שלהם הוא קצב ההשתנות של השדה הסקלרי u בנקודה M_0 בכיוון של ציר x, ציר y, ציר z ווקטור **a** בהתאמה.

נמצא כיוון בו קצב ההשתנות של השדה הסקלרי יהיה מקסימלי, במילים אחרות לפי איזה כיוון **a** הנגזרת המכוונת $D_{\mathbf{a}} f(M_0)$ תהיה מקסימלית.

אנו מניחים שכל הנגזרות החלקיות של $f(M)$ רציפות בסביבת M_0 ולפחות אחת מהן שונה מאפס בנקודה M_0.

נגדיר וקטור

$$\mathbf{g}(M_0) = f'_x(M_0)\mathbf{i} + f'_y(M_0)\mathbf{j} + f'_z(M_0)\mathbf{k} \tag{1}$$

נשתמש בוקטור **g** ונרשום $D_{\mathbf{a}} f$, מהנוסחה 7.6, כמכפלה סקלרית של שני וקטורים **g** ו- **a** (מ-7.2).

$$D_{\mathbf{a}} f = \mathbf{a} \cdot \mathbf{g} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{g}| \cos\theta = |\mathbf{g}| \cos\theta \tag{2}$$

כאשר θ היא הזווית בין הוקטורים **a** ו- **g**.

מ-(2) נובע שהנגזרת המכוונת $D_{\mathbf{a}} f$ תהיה מקסימלית כאשר $\cos\theta = 1$, כלומר הנגזרת היא מקסימלית בכיוון הוקטור **g** והערך המקסימלי של הנגזרת הוא $|\mathbf{g}|$.

הגדרה 8: הוקטור $\mathbf{g}=(f_x(M_0), f_y(M_0), f_z(M_0))$ נקרא **גרדיאנט** של שדה סקלרי $u=f(x,y,z)$ בנקודה M_0.

מסמנים ∇u (דל u) או grad u.

נוח להשתמש באופרטור ∇ (**נבלה**) הבא

$$\nabla\cdot = \frac{\partial\cdot}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\cdot}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\cdot}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (3)$$

הפועל על פונקציה u לפי הכלל

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (4)$$

תוך שימוש באופרטור ∇ ניתן לרשום את הנוסחאות (7.6) ו-(1) באופן הבא

$$D_{\mathbf{a}} f(M_0) = \mathbf{a}\cdot\nabla f(M_0) \qquad (5)$$

$$\mathbf{g}(M_0) = \nabla f(M_0) \qquad (6)$$

דוגמה 20: חשב גרדיאנט של השדה הסקלרי $u=|\mathbf{r}|$ כאשר $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ בנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

פתרון: נרשום את השדה בצורה $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ונשתמש בנוסחה (6)

$$\text{grad}\,u = \nabla u = \frac{x_0\mathbf{i}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+\frac{y_0\mathbf{j}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+\frac{z_0\mathbf{k}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} = \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|}$$

$$(\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k})$$

דוגמה 21:

א. מצא את הכיוון בו קצב ההשתנות של השדה הסקלרי $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ בנקודה $M_0(1,2,1)$ הוא מקסימלי.

ב. מצא את הערך המקסימלי של הנגזרת המכוונת של u מסעיף א' ב- M_0.

פתרון:

א. הכיוון הנדרש הוא $\nabla u = \left(\dfrac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2}\right)(1,2,1) = \dfrac{2}{6}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})$

ב. מ-(2) הערך המקסימלי של $D_{\mathbf{a}}f(M_0)$ שווה למודול הגרדיאנט של $u=f(M)$ בנקודה M_0 ולכן הערך המקסימלי של הנגזרת הוא

$$\max D_{\mathbf{a}} f(M_0) = \left|\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})\right| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

דוגמה 22: הפונקציה $f(u,v,w)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בכל המרחב ו- $\nabla f(2,1,5)=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$. נגדיר פונקציה $\varphi(x,y)=f(x^2y, x, x^2+y^2)$. חשב:

א. $\nabla\varphi(1,2)$. ב. $D_L\varphi(1,2)$ כאשר $L=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

פתרון: תוך שימוש בנוסחה (6) נרשום

$$\nabla f(2,1,5) = \frac{\partial f}{\partial u}(2,1,5)\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial v}(2,1,5)\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial w}(2,1,5)\mathbf{k} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

לכן $\dfrac{\partial f}{\partial u}(2,1,5)=2 \;,\; \dfrac{\partial f}{\partial v}(2,1,5)=1 \;,\; \dfrac{\partial f}{\partial w}(2,1,5)=-1$

נסמן $u=x^2y \;,\; v=x \;,\; w=x^2+y^2$.

קל לראות ש- $u(1,2)=2 \;,\; v(1,2)=1 \;,\; w(1,2)=5$.

נחשב את הנגזרות החלקיות של $\varphi(x,y)$ בנקודה $(1,2)$.

$$\varphi'_x(1,2) = f'_u(2,1,5)\cdot u'_x(1,2)+f'_v(2,1,5)\cdot v'_x(1,2)+f'_w(2,1,5)\cdot w'_x(1,2) = 2\cdot 4+1\cdot 1+(-1)\cdot 2 = 7$$

באופן דומה מקבלים $\varphi'_y(1,2)=-2$, לכן $\nabla\varphi(1,2)=7\mathbf{i}-2\mathbf{j}$

ב. נחשב וקטור יחידה $\mathbf{a}$ בכיוון L ונקבל $\mathbf{a}=\frac{3}{5}\mathbf{i}+\frac{4}{5}\mathbf{j}$ מהנוסחה (5)

$$D_{\mathbf{a}}\varphi(1,2) = \left(\frac{3}{5}\mathbf{i}+\frac{4}{5}\mathbf{j}\right)\cdot(7\mathbf{i}-2\mathbf{j}) = \frac{21}{5}-\frac{8}{5}=\frac{13}{5}$$

נסיים את הסעיף **בתכונות של וקטור הגרדיאנט**.

I. גרדיאנט של שדה סקלרי בנקודה M_0 הוא בכיוון הנורמל למשטח הגובה העובר דרך הנקודה M_0 (או קו גובה אם השדה הוא במישור).

II. קצב ההשתנות המקסימלי של השדה הסקלרי u הוא בכיוון הוקטור ∇u.

III. הערך המקסימלי של הנגזרת המכוונת של הפונקציה $u=f(x,y,z)$ בנקודה M_0 הוא

$$\max Df(M_0) = |\nabla f(M_0)| = \sqrt{f_x'^2(M_0)+f_y'^2(M_0)+f_z'^2(M_0)}$$

תרגילים:

1. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי:

א. $u = xe^{|r|}$, $(\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ בנקודה $(0,0,0)$.

ב. $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ בנקודה $(1,1,1)$.

2. מצא נקודות במישור שבהן הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u = \sin(x + y)$ שווה ל- $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

3. תהי $u = x^2 + y^2 + z^2$, חשב הזווית בין הוקטורים $\nabla u(2,0,0)$ ו- $\nabla u(0,2,0)$.

4. מצא נקודות שבהן $\nabla u = \mathbf{i} - \frac{16}{9}\mathbf{j}$, כאשר $u = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$.

5. יהי φ ו- f פונקציות דיפרנציאביליות ו- c מספר קבוע, הוכח:

א. $\nabla(f \pm \varphi) = \nabla f \pm \nabla\varphi$. ב. $\nabla(c \cdot f) = c\nabla f$.

ג. $\nabla(f \cdot \varphi) = f\,\nabla\varphi + \varphi\nabla f$. ד. $\nabla\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi}{\psi^2}$.

ה. $\nabla(f)^n = n(f)^{n-1}\nabla f$. ו. $\nabla f(\varphi) = f'(\varphi)\cdot\nabla\varphi$.

6. מצא הזווית בין הגרדיאנטים של השדות $v = x + y + 2\sqrt{xy}$, $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ בנקודה $(1,1)$.

7. מצא משטחי גובה לשדות:

א. $u = 10^{2x+3y-5z}$. ב. $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

ג. $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$.

8. תהי $f : R^3 \to R$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל נקודה ומקיימת:

א. $f(x, y, 2x^2 + y^2) = 3x - 5y$ לכל (x,y).

ב. הניגזרת המכוונת של f בנקודה $M_0(1,2,6)$ בכיוון $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ שווה ל- 1. חשב $\nabla f(M_0)$.

פרק 13
ניגזרות חלקיות מסדר גבוה. נוסחת טיילור

1. ניגזרות חלקיות מסדר גבוה

תהי $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ניגזרת חלקית לפי x_i של הפונקציה $u = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ המוגדרת בתחום D. אם u'_{x_i} גם היא מוגדרת בכל נקודה של D, אזי היא פונקציה של k משתנים. לכן ניתן להגדיר (אם הן קיימות) את הניגזרות שלה לפי x_j ולקבל ניגזרות חלקיות מסדר שני של הפונקציה המקורית והסימון יהיה

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \text{ או } f^{(2)}_{x_i, x_j} \text{ או } f^{(2)}_{ij} \;,\; (i, j = 1, 2, \dots, k)$$

הגדרה 1: אם $i \neq j$ אזי הניגזרת $f^{(2)}_{ij}$ נקראת **ניגזרת מעורבת** מסדר שני.

דוגמה 1: מצא את הניגזרות החלקיות מסדר שני של $u = \ln(x^2 + y^2)$.

פתרון:

$$u'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad u'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$u''_{xx} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad u''_{yy} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$u''_{xy} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad u''_{yx} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

באופן דומה, מגדירים ניגזרות חלקיות מסדר שלישי, רביעי וכו'.

דוגמה 2: יהי $u = x^2 y^3 z^4$ חשב $u^{(4)}_{xyzx}$, $u^{(4)}_{x^2yz}$, $u^{(3)}_{x^3}$.

פתרון: $u'_x = 2xy^3z^4$, $u''_{xx} = 2y^3z^4$, $u^{(3)}_{x^3} = 0$.

היות ו- $u''_{x^2} = 2y^3z^4$, נקבל $u^{(4)}_{x^2yz} = 24y^2z^3$, $u^{(3)}_{x^2y} = 6y^2z^4$.

היות ו- $u'_x = 2xy^3z^4$, נקבל $u^{(4)}_{xyzx} = 24y^2z^3$, $u^{(3)}_{xyz} = 24xy^2z^3$, $u^{(2)}_{xy} = 6xy^2z^4$.

סופית:
$$u^{(4)}_{x^2yz} = u^{(4)}_{xyzx} = 24y^2z^3 \ , \ u^{(3)}_{x^3} = 0$$

בדוגמאות הנ"ל ראינו שניגזרות מעורבות מאותו סדר ולפי אותם משתנים שוות.

באופן כללי זה לא כך. נביא דוגמה.

דוגמה 3: נחשב את הניגזרות המעורבות מסדר שני בנקודה $(0,0)$ של

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

פתרון: נחשב ניגזרות חלקיות מסדר ראשון:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases} \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ניגזור לפי הגדרה את f'_x לפי y בנקודה $(0,0)$ ונקבל $f''_{xy}(0,0) = -1$.

באותה דרך ניגזור את f'_y לפי x בנקודה $(0,0)$ ונקבל $f''_{yx}(0,0) = 1$.

כלומר $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

משפט 1: אם הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת בתחום D ובעלת ניגזרות חלקיות $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ רציפות בסביבת הנקודה $M_0(x_0,y_0) \in D$, אזי בנקודה זו הניגזרות המעורבות שוות $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

הוכחה: נבנה פונקצית עזר

$$w = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0,y_0)}{hk} \tag{1}$$

כאשר k ו- h שונים מאפס וכאילו שהמלבן $[x_0, x_0+h] \times [y_0, y_0+k]$ נמצא ב- D.

נגדיר פונקציה

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k} \tag{2}$$

ברור ש-

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0+k) - f'_x(x,y_0)}{k} \tag{3}$$

נרשום את w באופן הבא:

$$w = \frac{1}{h}\left(\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)}{k} - \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}\right) =$$
$$= \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}$$

לפי משפט לגרנז', תוך שימוש ב-(3), נקבל

$$w = \varphi'(x_0+\theta h) = \frac{f'_x(x_0+\theta h, y_0+k) - f'_x(x_0+\theta h, y_0)}{k} \ , \ 0<\theta<1 \tag{4}$$

היות וקיימת f''_{xy} ניתן להשתמש במשפט לגרנז' לפונקציה $f'_x(x_0+\theta h, y)$ בקטע $[y_0, y_0+k]$ ונקבל מ-(4).

$$w = f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k) \ , \ (0<\theta \ , \ \theta_1<1) \tag{5}$$

נגדיר עתה פונקצית עזר $\psi(y) = \dfrac{f(x_0+h, y) - f(x_0, y)}{h}$,

באופן דומה נקבל

$$w = f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_3 k) \ , \ (0<\theta_2 \ , \ \theta_3<1) \tag{6}$$

מ-(5) ו-(6) נובע

$$f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k) = f_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_3 k)$$

נעבור לגבול כאשר $k \to 0, h \to 0$. תוך שימוש ברציפות של הניגזרות המועורבות נקבל $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$. ■

הגדרה 2: הפונקציה $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ שייכת **למחלקה** C בתחום D אם היא רציפה ב- D. הפונקציה $f(M)$ שייכת **למחלקה** C^n אם היא רציפה ובעלת ניגזרות חלקיות רציפות עד סדר n (כולל) בתחום D.

ננסח משפט כללי יותר.

משפט 2: תהי הפונקציה $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ מוגדרת בתחום k ממדי D ושייכת למחלקה C^n אזי ערך הניגזרות המעורבות מסדר n אינו תלוי בסדר הגזירה.

תרגילים:

1. חשב z''_{xy} כאשר $z=\sqrt{y^2+2xy}$.
2. חשב z''_{xy} כאשר $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.
3. חשב $u''_{xx}, u''_{yy}, u''_{xy}$ כאשר $u=xy+xz+yz$.
4. הוכח כי הפונקציות $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ ו- $u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ הן פתרונות של המשוואה $u''_{xx}+u''_{yy}=0$.

2. ניגזרות חלקיות מסדר גבוה של פונקציה מורכבת

בסעיף זה נביא דוגמאות לשימוש בכלל השרשרת לחישוב ניגזרות מסדר גבוה של פונקציות המקיימות את תנאי משפט 2.

דוגמה 4: נתונה הפונקציה $u=\frac{1}{r}$ כאשר $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, חשב

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

פתרון: נחשב

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{r^3}$$

באופן דומה

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$$

נעבור לחישוב ניגזרות מסדר שני

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

באופן דומה

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$

לכן

$$\Delta u = -\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3} = 0$$

דוגמה 5: נתונה הפונקציה $f(u,v)$ כאשר $u=x^2+y^2$, $v=xy$.

חשב: $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$.

פתרון: נחשב ניגזרות חלקיות מסדר ראשון.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_u\frac{\partial u}{\partial x}+f'_v\frac{\partial v}{\partial x} = 2xf'_u+yf'_v \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_u\frac{\partial u}{\partial y}+f'_v\frac{\partial v}{\partial y} = 2yf'_u+xf'_v$$

ניגזור f'_x לפי x, נקבל

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f'_u+2x\left(f''_{uu}\frac{\partial u}{\partial x}+f''_{uv}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+y\left(f''_{vu}\frac{\partial u}{\partial x}+f''_{vv}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$

$$= 2f'_u+4x^2f''_{uu}+4xyf''_{uv}+y^2f''_{vv}$$

נעבור לחישוב f''_{yy}

$$f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2f'_u+2y[2yf''_{uu}+xf''_{uv}]+x[2yf''_{vu}+xf''_{vv}] =$$

$$= 4y^2f''_{uu}+4xyf''_{uv}+x^2f''_{vv}+2f'_u$$

נחשב את הניגזרת המעורבת

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial y}(f'_u)+f'_v+y\frac{\partial}{\partial y}(f'_v) =$$

$$= 2x[2yf''_{uu}+xf''_{uv}]+f'_v+y[2yf''_{vu}+xf''_{vv}] = 4xyf''_{uu}+2(x^2+y^2)f''_{uv}+xyf''_{vv}+f'_v$$

תרגילים:

1. חשב $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ אם $u=f(x,y,z)$ וכאשר $z=\varphi(x,y)$.
2. הוכח שאם הפונקציה $u(x,y)$ מקיימת את משוואת לפלס $\Delta u=u''_{xx}+u''_{yy}=0$, אזי גם הפונקציה $v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ מקיימת את אותה משוואה, זאת אומרת $v''_{xx}+v''_{yy}=0$.

3. הוכח שאם $u(x,y)$ הוא הפתרון של המשוואה $u'_y = u''_{xx}$ אזי גם הפונקציה $v = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{4x}} \cdot u\left(\frac{y}{x}, -\frac{1}{x}\right)$ פותרת את המשוואה $v'_x = v''_{yy}$.

4. יהי הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- R^2. נגדיר $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.
חשב $xu'_x + yu'_y + zu'_z$.

5. יהי $f(u,v,w)$ פונקציה דיפרנציאבילית ב- R^3. נגדיר $k(x,y,z) = f(x, xy, xyz)$.
רשום תנאי על f המבטיח כי הפונקציה $k(x,y,z)$ אינה תלויה במשתנה x.

3. החלפת משתנים

בתורת המשוואות הדיפרנציאליות (רגילות וחלקיות) יש צורך להחליף משתנים, כלומר לעבור ממשתנים נתונים למשתנים אחרים כדי לפשט את הביטויים הנתונים.

בפונקציה $z = f(x,y)$ נעבור למשתנים חדשים s,t הקשורים עם x ו- y על ידי

$$\begin{cases} s = s(x,y) \\ t = t(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

נחשב את הנגזרות $z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}$ על ידי נגזרות חלקיות לפי המשתנים s ו-t, תוך שימוש בכלל השרשרת, נקבל

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_s \cdot s'_x + z'_t \cdot t'_x \\ z'_y &= z'_s \cdot s'_y + z'_t \cdot t'_y \end{aligned} \tag{2}$$

נחשב z''_{xx}, נקבל

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= (z'_s)'_x \cdot s'_x + z'_s \cdot s''_{xx} + (z'_t)'_x \cdot t'_x + z'_t \cdot t''_{xx} = \\ &= s'_x (z''_{ss} \cdot s'_x + z''_{st} \cdot t'_x) + z'_s \cdot s''_{xx} + t'_x (z''_{ts} \cdot s'_x + z''_{tt} \cdot t'_x) + z'_t \cdot t''_{xx} \end{aligned}$$

לאחר כינוס איברים

$$z''_{xx} = z''_{ss} \cdot {s'_x}^2 + z''_{tt} \cdot {t'_x}^2 + 2z''_{st} \cdot s'_x \cdot t'_x + z'_s \cdot s''_{xx} + z'_t \cdot t''_{xx} \tag{3}$$

באופן דומה מקבלים

$$z''_{yy} = z''_{ss} \cdot {s'_y}^2 + z''_{tt} \cdot {t'_y}^2 + 2z''_{st} \cdot s'_y \cdot t'_y + z'_s \cdot s''_{yy} + z'_t \cdot t''_{yy} \tag{4}$$

$$z''_{xy} = z''_{ss} \cdot s'_x \cdot s'_y + z''_{tt} \cdot t'_x \cdot t'_y + z''_{ts}(s'_x \cdot t'_y + s'_y \cdot t'_x) + z'_s \cdot s''_{xy} + z'_t \cdot t''_{xy} \tag{5}$$

דוגמה 6: פתור את המשוואה הדיפרנציאלית $yz'_x - xz'_y = 0$ תוך החלפת משתנים $t = x^2 + y^2$, $s = x$.

פתרון: נשתמש בנוסחאות (2), נקבל

$$z'_x = z'_s \cdot 1 + z'_t \cdot 2x = z'_s + 2xz'_t \quad , \quad z'_y = z'_s \cdot 0 + z'_t \cdot 2y = 2y \cdot z'_t$$

נציב במשוואה ונקבל

$$yz'_s + 2xyz'_t - 2xyz'_t = 0 \quad \text{או} \quad z'_s = 0$$

מכאן ש- z אינו תלוי ב- s, לכן $z = \varphi(t)$ כאשר φ פונקציה גזירה כלשהי.

סופית: $z = \varphi(x^2 + y^2)$ פתרון המשוואה.

דוגמה 7: רשום את הלפלסיאן $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$ בקואורדינטות קוטביות

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{6}$$

פתרון: כדי להשתמש בנוסחאות (3) ו-(4) נחלץ את ρ ו- φ מ-(6) וניגזור אותם לפי x ו- y.

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

לכן

$$\rho'_x = \frac{x}{\rho} = \frac{\rho\cos\varphi}{\rho} = \cos\varphi \quad , \quad \rho'_y = \sin\varphi$$
$$\varphi'_x = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{\sin\varphi}{\rho} \quad , \quad \varphi'_y = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

נחשב נגזרות מסדר שני

$$\rho''_{xx} = -\sin\varphi \cdot \varphi'_x = \frac{\sin^2\varphi}{\rho} \quad , \quad \rho''_{xy} = -\sin\varphi \cdot \varphi'_y = -\frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\rho}$$
$$\rho''_{yy} = \cos\varphi \cdot \varphi'_y = \frac{\cos^2\varphi}{\rho} \quad , \quad \varphi''_{xx} = -\frac{\rho\cos\varphi \cdot \varphi'_x - \sin\varphi \cdot \rho'_x}{\rho^2} = \frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}$$
$$\varphi''_{yy} = -\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2} \quad , \quad \varphi''_{xy} = \frac{2\rho^2\sin^2\varphi - \rho}{\rho^2}$$

נציב את כל הנגזרות הנ"ל ב-(3) ו-(4) ואחר-כך ב- Δu, נקבל

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}u''_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho}u'_{\rho} + u''_{\rho\rho}$$

תרגילים:

1. עבור למשתנים s,t בביטוי $(1+x^2)z''_{xx}+(1+y^2)z''_{yy}+xz'_x+yz'_y$, כאשר $s=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $t=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

2. פתור את המשוואה $u''_{yy}=a^2u''_{xx}$ (רמז: עבור למשתנים $t=x-ay, s=x+ay$).

3. הפונקציה $u=f(x,y,z)$ היא הומוגנית מסדר n אם $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$. למשל הפונקציה $u=\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$ הומוגנית מסדר 1, כיוון ש- $f(tx,ty,tz)=\frac{t^3x^3+t^3y^3+t^3z^3}{t^2x^2+t^2y^2+t^2z^2}=t\cdot\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}=tu$.

הוכח: אם הפונקציה f הומוגנית מסדר n, אזי $xf'_x+yf'_y+zf'_z=nf(x,y,z)$.

4. דיפרנציאל מסדר גבוה

תהי $u=f(x,y)$ רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר n, בסביבת נקודה M_0. הדיפרנציאל שלה הוא (ראה סעיף 12.6)

$$du = f'_x dx + f'_y dy \qquad (1)$$

היות ו- x,y הם משתנים בלתי תלויים נתייחס ל- dx ו- dy כאל קבועים. לכן, הדיפרנציאל du מהווה פונקציה של x ו-y בסביבת הנקודה M_0. נדגיש שהפונקציות $f'_x(M), f'_y(M)$ הן דיפרנציאביליות בנקודה M_0 (נובע מרציפות הנגזרות מסדר שני).

נגדיר דיפרנציאל מסדר שני, כי $d^2u=d(du)$. נשתמש ב-(1), נקבל

$$d^2u = d[f'_x dx+f'_y dy] = d[f'_x]dx+d[f'_y]dy =$$

$$= (f''_{xx}dx+f''_{xy}dy)dx+(f''_{yx}dx+f''_{yy}dy)dy$$

כיוון ש- $f''_{xy}=f''_{yx}$, נקבל

$$d^2u = f''_{xx}dx^2+2f''_{yx}dx\,dy+f''_{yy}dy^2 \qquad (2)$$

נגדיר **אופרטור** $d\cdot$

$$d\cdot = \frac{\partial\cdot}{\partial x}dx + \frac{\partial\cdot}{\partial y}dy \qquad (3)$$

הפועל לפי הכלל

$$du = \left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}dx+\frac{\partial\cdot}{\partial y}dy\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

נגדיר חזקה של האופרטור $d\cdot$ כבינום של פולינום, למשל

$$d^2\cdot = \left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}dx+\frac{\partial\cdot}{\partial y}dy\right)^2 = \frac{\partial^2\cdot}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2\cdot}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2\cdot}{\partial y^2}dy^2$$

באינדוקציה מתמטית ניתן להוכיח כי הדיפרנציאל ה-n-י שווה

$$d^n u = \left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}dx+\frac{\partial\cdot}{\partial y}dy\right)^n u \qquad (4)$$

דוגמה 8: חשב את הדיפרנציאל השלישי של הפונקציה $u=x^2\ln y$ בנקודה $(1,1)$.

פתרון: נחשב את הנגזרות החלקיות מסדר שלישי בנקודה $(1,1)$

$$u_x = 2x\ln y\,,\quad u_y=\frac{x^2}{y}\,,\quad u_{xxy}(1,1)=\frac{2}{y}(1,1)=2$$

$$u_{xx}=2\ln y\,,\quad u_{yy}=-\frac{x^2}{y^2}\,,\quad u_{yyx}(1,1)=-\frac{2x}{y^2}(1,1)=-2$$

$$u_{xxx}=0\,,\quad u_{yyy}(1,1)=\frac{2x^2}{y^3}(1,1)=2$$

נשתמש ב-(4) עבור $n=3$, נקבל

$$d^3u = u_{xxx}dx^3+3u_{xxy}dx^2dy+3u_{xyy}dx\,dy^2+u_{yyy}dy^3 = 6dx^2dy-6dx\,dy^2+2dy^3$$

שים לב אם x ו- y **אינם** בלתי תלויים, כלומר הם פונקציות של משתנים אחרים, אזי נוסחה (2) לדיפרנציאל השני מקבלת את הצורה

$$d^2u = \left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}dx+\frac{\partial\cdot}{\partial y}dy\right)^2 u+\frac{\partial u}{\partial x}d^2x+\frac{\partial u}{\partial y}d^2y \qquad (5)$$

הערה 1: במקרה של פונקציות מ- k משתנים בלתי תלויים הדיפרנציאל ה-n-י הוא:

$$d^n u = \left(\frac{\partial\cdot}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\cdot}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial\cdot}{\partial x_k}dx_k\right)^n u$$

הערה 2: אם הפונקציה $\varphi(t)$ במשתנה אחד, אזי הדיפרנציאל ה-n-י שלה הוא

(6) $$d^n\varphi(t_0)=\varphi^{(n)}(t_0)\,dt^n$$

תרגילים:

1. מצא d^2u לפונקציות הבאות:

א. $u=e^{xy}$. ב. $u=xyz$.

ג. $u=w^v$ כאשר $v=xy,\ w=\frac{x}{y}$. ד. $u=f(w,v)$ כאשר $v=ye^x,\ w=xe^y$.

2. חשב d^3z כאשר $z=e^x\cos y$.

5. נוסחת טיילור

בסעיף זה נקבל נוסחת טיילור לפונקציה $u=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ המוגדרת בסביבת נקודה $M_0(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0)$.

משפט 2: תהי $u=f(x_1,\dots,x_k)$ פונקציה השייכת למחלקה C^{n+1} בסביבת הנקודה M_0 ותהי $\Delta u=f(M)-f(M_0)$ התוספת של הפונקציה u בנקודה M_0, אזי קיימת נקודה N על הקטע המחבר את הנקודות M ו- M_0 כך שמתקיימת

(1) $$\Delta u=du(M_0)+\frac{1}{2!}d^2u(M_0)+\dots+\frac{1}{n!}d^nu(M_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u(N)$$

כאשר $dx_i=x_i-x_i^0,\ (i=1,2,\dots,k)$ שווים בכל אחד מהדיפרנציאלים של (1).

הוכחה: נוכיח את משפט לפונקציה $u=f(x,y)$.

נזכיר את נוסחת טיילור לפונקציה של משתנה אחד $F(t)$ בסביבת t_0 (ראה 7.3, [1]).

(2) $$F(t)=F(t_0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{F^{(i)}(t_0)}{i!}(t-t_0)^i+\frac{F^{(n+1)}(t_1)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}$$

כאשר t_1 נקודה מסביבת t_0.

t משתנה בלתי תלוי, לכן $dt=\Delta t=t-t_0$ ו- $d^iF(t_0)=F^{(i)}(t_0)\cdot(dt)^i$ (ראה הערה 2), את (2) נרשום

(3) $$F(t)-F(t_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}d^iF(t_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_1)$$

ניקח נקודה $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ מסביבת $M_0(x_0,y_0)$ ונחבר אותה עם M_0 על ידי קטע ישר שמשוואתו

(4) $$\begin{cases}x=x_0+t\Delta x\\ y=y_0+t\Delta y\end{cases},\ (0\le t\le 1)$$

לאורך הקו הישר (4) הפונקציה $u=f(x,y)$ היא פונקציה מורכבת הבאה

$$F(t)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$$

נפתח את נוסחת טיילור לפונקציה $F(t)$ סביב נקודה $t_0=0$. נקבע בנוסחה (3) את $\Delta t=1$. האגף השמאלי ב-(3) הוא

(5) $$F(1)-F(0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\Delta u$$

מצד שני, כיוון ש- $dt=\Delta t=1-0=1$ ומ-(4) $dx=\Delta x\,dt=\Delta x$, $dy=\Delta y\,dt=\Delta y$ מקבלים

(6) $$d^kF(M_0)=d^ku(M_0)$$

נציב (5) ו-(6) ב-(3) ונקבל את נוסחת טיילור (1).

באופן דומה ניתן להוכיח את המשפט במקרה הכללי. ■

נרשום את נוסחה (1) בצורה מפורשת:

(7) $$f(x,y)=f(x_0,y_0)+[f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)]+$$

$$+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2]+$$

$$+\dots+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial\cdot}{\partial y}(y-y_0)\right)^{n+1}f(N)$$

דוגמה 9: מצא שלושה איברים ראשונים בנוסחת טיילור לפונקציה $f(x,y)=x^3+y^3+2x^2-4y^2+x-1$ בסביבת הנקודה $(1,2)$.

פתרון: על מנת להשתמש בנוסחה (7) נחשב את כל הנגזרות החלקיות בנקודה $(1,2)$.

$$f(1,2) = -5 \quad , \quad f'_x(1,2) = (3x^2+4x+1)(1,2) = 8$$

$$f''_{xx}(1,2)=10 \;,\; f^{(3)}_{xxx}(1,2)=6 \;,\; f''_{xy}(1,2)=0 \;,\; f^{(3)}_{xxy}(1,2)=0 \;,\; f^{(3)}_{xyy}(1,2)=0$$

$$f'_y(1,2)=-4 \;,\; f''_{yy}(1,2)=4 \;,\; f^{(3)}_{yyy}(1,2)=6$$

נציב ב-(7) ונקבל

$$f(x,y)=-5+[8(x-1)-4(y-2)]+\frac{1}{2!}[10(x-1)^2+4(y-2)^2]+\frac{1}{3!}[6(x-1)^3+6(y-2)^3]$$

דוגמה 10: רשום את פיתוח טיילור לפונקציה $u=\ln\frac{x}{y}$ בסביבת נקודה $M_0(1,1)$ (עד סדר שני).

פתרון: את החישוב של הניגזרות החלקיות בנקודה $(1,1)$ נשאיר לקורא.

נרשום את התוצאה

$$\ln\frac{x}{y} = (x-1)-(y-1)+\frac{1}{2!}[-(x-1)^2+(y-1)^2]+R_2$$

דוגמה 11: רשום את נוסחת טיילור לפונקציה $u=\frac{1}{1-x+2y}$ סביב נקודה $(0,0)$.

פתרון: נסמן $t=x-2y$. נשתמש בפיתוח של טור גיאומטרי

$$u = \frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\ldots+t^n+R_n$$

לכן

$$u=1+(x-2y)+(x-2y)^2+\ldots+(x-2y)^n+R_n$$

תרגילים:

פתח לפי נוסחת טיילור סביב $(0,0)$ (עד סדר שלישי) את הפונקציות:

א. e^{x+y}.

ב. $\cos x \cdot \cos y$.

ג. $\mathrm{arctg}\frac{1+x}{1-y}$.

פרק 14
פונקציות סתומות.
מערכת של פונקציות סתומות

1. הגדרת פונקציה סתומה

תהי $F(x,y)$ פונקציה המוגדרת בתחום D. אם המשתנים x ו- y קשורים על ידי משוואה פונקציונלית

$$F(x,y) = 0 \qquad (1)$$

ולכל x מקטע מסויים קיים y יחיד (או מספר ערכים של y), כך שהזוג (x,y) מקיים את (1), אזי המשוואה (1) מגדירה פונקציה $y=f(x)$ (או מספר פונקציות), כזאת ש-

$$F(x,f(x)) = 0 \qquad (2)$$

באופן זהותי יחסית ל- x.

הגדרה 1: הפונקציה $y=f(x)$ נקראת **פונקציה סתומה** אם היא נתונה כפתרון של המשוואה $F(x,y)=0$.

דוגמה 1: נתונה משוואה $x^2+y^2 = R^2$.

מצא את הפונקציה $y=f(x)$ ב- $[-R,R]$ המקיימת אותה.

פתרון: הפתרון הטבעי ביותר הוא $f_1(x)=\sqrt{R^2-x^2} \;,\; f_2(x)=-\sqrt{R^2-x^2}$

אך קיימים אינסוף פתרונות נוספים של המשוואה הנתונה, נביא שתיים מהם:

$$f_3(x)=\begin{cases}\sqrt{R^2-x^2}, & 0\le x\le R\\ -\sqrt{R^2-x^2}, & -R\le x<0\end{cases} \;,\; f_4(x)=\begin{cases}\sqrt{R^2-x^2}, & -\frac{R}{2}\le x\le\frac{R}{3}\\ \sqrt{R^2-x^2}, & -R\le x<-\frac{R}{2},\ \frac{R}{3}<x\le R\end{cases}$$

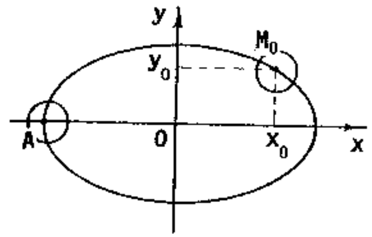
הפונקציות $f_4(x), f_3(x), f_2(x), f_1(x)$ הן פונקציות סתומות ו- $f_1(x)$ ו- $f_2(x)$ רציפות בתחום הגדרתן אך הפונקציות $f_4(x)$, $f_3(x)$ אינן רציפות ב- $[-R,R]$.

הגדרה 2: הפונקציה $y=\varphi(x)$ הנתונה על ידי ביטוי אלגברי היא **פונקציה מפורשת**. לפונקציה מפורשת ניתן גם להתייחס כפתרון של המשוואה $y-\varphi(x)=0$, לכן זוהי הדוגמה הפשוטה ביותר של פונקציה סתומה.

ברוב המיקרים קשה מאוד למצוא צורה מורשת של פונקציה סתומה ולעיתים קרובות אפילו בלתי אפשרי, לדוגמה $e^{xy^2}+\ln xy+5=0$.

יתר על כן, לא כל משוואה מהסוג של (1) מגדירה פונקציה סתומה למשל, למשוואה $\sin(x^2+y^2)+\cos(xy)-3=0$ אין פתרונות ממשיים (כיוון ש- $|\sin x|<1$, $|\cos x|<1$).

השאלה העיקרית היא, האם משוואה (1) מגדירה פונקציה סתומה יחידה, רציפה וגזירה. נתבונן בדוגמה הבאה.



דוגמה 2: נתבונן במשוואה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. $M_0(x_0,y_0)$ נקודה על פני האליפסה ($y_0\neq0$). מהציור רואים שבסביבה מספיק קטנה של הנקודה M_0 לכל x קיים y יחיד הנמצא על האליפסה, כלומר בסביבת x_0 קיימת פונקציה יחידה $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

למרות זאת, אם ניקח את הנקודה $A(-a,0)$, אזי בסביבתה לא מוגדרת פונקציה סתומה, מכיוון שלכל x מסביבת A קיימים שני ערכים של y, לכן קיום של פונקציה סתומה תלוי בבחירת הנקודה M_0 ששיעוריה מקיימים את המשוואה $F(x_0,y_0)=0$.

נוכיח את משפט הקיום ויחידות של פונקציות סתומות.

משפט 1: תהי הפונקציה $F(x,y)$ מוגדרת במלבן $R=[a,b]\times[c,d]$ ותהי $M_0(x_0,y_0)$ נקודה פנימית של המלבן R. אם:

1. $F(x_0,y_0)=0$.
2. $F(x,y)$ שייכת למחלקה C^1 בסביבת M_0.
3. $F'_y(x_0,y_0)\neq0$.

אזי קיימת סביבה של הנקודה M_0 שבה מוגדרת פונקציה יחידה $y=f(x)$ כזאת ש- $F(x,f(x))=0$ ובעלת התכונות הבאות:

א. $y_0=f(x_0)$.

ב. $f(x)$ רציפה ב- x_0.

ג. $f(x)$ גזירה ב- x_0 ו- $f'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$.

הוכחה:

1. נוכיח קיום של פונקציה סתומה. נתבונן בפונקציה $F(x_0,y)$ של משתנה אחד y. לפי 3) $F'_y(x_0,y_0)\neq0$. נניח כי $F'_y(x_0,y_0)>0$. לכן קיימת סביבה $[y_0-\beta,y_0+\beta]$ של y_0 שבה הפונקציה $F(x_0,y)$ מונוטונית עולה והואיל ו- $F(x_0,y_0)=0$ מקבלים

$$F(x_0,y_0-\beta)<0\quad,\quad F(x_0,y_0+\beta)>0 \tag{3}$$

נתבונן בפונקציה $F(x,y_0-\beta)$. היא רציפה ומקיימת את (3) ולכן קיימת סביבה $(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$ שבה היא שלילית, כלומר לכל

$$F(x,y_0-\beta)<0\ ,\ x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$$

באופן דומה נחקור את הפונקציה $F(x,y_0+\beta)$, כלומר קיים δ_2, כך שלכל $x\in(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)$ מתקיים $F(x,y_0+\beta)>0$.

נבחר $\alpha=\min(\delta_1,\delta_2)$ ונקבל שלכל $x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$, מתקיים

$$F(x,y_0-\beta)<0\quad,\quad F(x,y_0+\beta)>0 \tag{4}$$

נסמן את הקטעים $\Delta_1=(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$, $\Delta_2=(y_0-\beta,y_0+\beta)$ ואת המלבן $\Delta=\Delta_1\times\Delta_2$.

נבחר α,β כה קטנים שהמלבן Δ יהיה כולו ב- R.

כלומר, קיבלנו שלכל x קבוע מ- Δ_1 הפונקציה $F(x,y)$ עולה ממש. ניקח, $x'\in\Delta_1$ קבוע ונתבונן במשוואה $F(x',y)=0$ על ידי שימוש ב-(4)

$$F(x',y_0-\beta)<0\quad,\quad F(x',y_0+\beta)>0$$

מרציפות הפונקציה $F(x',y)$ מקבלים שקיימת נקודה y' מ- Δ_2 כך ש- $F(x',y')=0$.

מהמונוטוניות של $F(x',y)$ נובע ש- y' יחיד. לכן קיבלנו שלכל $x'\in\Delta_1$ קיים y' יחיד מ- Δ_2. כלומר, על Δ_1 מוגדרת הפונקציה $y=f(x)$ המקיימת $F(x,f(x))=0$.

למשוואה $F(x_0,y)=0$ קיים פתרון יחיד מ- Δ_2 והוא $f(x_0)$ ומכיוון ש- $F(x_0,y_0)=0$ מקבלים ש- $y_0=f(x_0)$.

2. נוכיח כי הפונקציה $y=f(x)$ רציפה בכל נקודה x מהקטע $(x_0+\alpha,x_0-\alpha)$. היות ולכל נקודה x מהקטע הנ"ל מתקיים $F(x,f(x))=0$ מספיק להוכיח את הרציפות בנקודה $M_0(x_0,y_0)$. כלומר, צריך להוכיח כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\alpha>0$ כך שעבור כל x המקיימים $|x-x_0|<\alpha$ מתקיים $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.
אם ניקח $\varepsilon=\delta$ מהחלק הראשון של ההוכחה ונציין ש- δ יכול להיות קטן כרצוננו, נקבל את הרציפות של $f(x)$.

3. נוכיח את קיום הנגזרת של $f(x)$ בנקודה x_0. היות ו- $F(x_0,y_0)=0$ ו- $F(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=0$ ומתנאי 2) נובע כי $F(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- M_0 ולכן ניתנת להצגה (ראה סעיף 3, פרק 12)

$$\Delta F = F'_x(M_0)\Delta x + F'_y(M_0)\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y = 0$$

כאשר $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(\Delta x,\Delta y)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta(\Delta x,\Delta y)=0$. כיוון ש- $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$ נקבל

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} + \frac{\alpha(\Delta x,\Delta y)}{F'_y(x_0,y_0)} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\beta(\Delta x,\Delta y)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

נעבור לגבול כאשר $\Delta x\to 0$ (לכן גם $\Delta y\to 0$), נקבל

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} \qquad (5)$$ ■

ננסח משפט יותר כללי.

משפט 2: תהי $F(x_1,x_2,\dots,x_k,y)$ מוגדרת בסביבת הנקודה $N_0(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0,y_0)$. נניח ש-

1. $F(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0,y_0)=0$.
2. $F(x_1,x_2,\dots,x_k,y)$ רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות בסביבת N_0.
3. $F'_y(N_0)\neq 0$.

אזי קיימת סביבה של הנקודה N_0 שבה המשוואה $F(x_1,x_2,\dots,x_k,y)=0$ מגדירה פונקציה יחידה $y=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ כזאת ש- $F(x_1,\dots,x_k,f(x_1,x_2,\dots,x_k))=0$ ובעלת התכונות:

א. $y_0=f(x_1^0,\dots,x_k^0)$.

ב. $y=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ רציפה בנקודה $M_0(x_1^0,\dots,x_k^0)$.

ג. $y=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ גזירה חלקית בנקודה M_0 ו-

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = -\frac{F'_{x_i}(N_0)}{F'_y(N_0)}, \quad i=1,2,\dots,k \qquad (6)$$

ההוכחה של משפט זה דומה להוכחת המשפט הקודם.

שים לב: תנאי משפט 1 הם מספיקים בלבד. למשל: לפונקציה $F(x,y)=(x-y)^2$ נגזרות חלקיות $F'_x(x,y)=2(x-y)$ ו- $F'_y(x,y)=-2(x-y)$ מתאפסות בכל נקודה (x_0,x_0), למרות זאת קיימת פונקציה יחידה $y=x$ בכל סביבה של הנקודה הנ"ל המוגדרת על ידי המשוואה $F(x,y)=(x-y)^2=0$.

דוגמה 3: נתונה המשוואה $3x^2y-yz^2-4xz=7$ בסביבת נקודה $M_0(-1,1,2)$.

א. בדוק שהמשוואה הנ"ל מגדירה פונקציה סתומה $y=\varphi(x,z)$ בסביבת M_0.

ב. הוכח שהפונקציה $y=\varphi(x,z)$ דיפרנציאבילית ב- $(-1,2)$.

ג. האם המשוואה הנתונה מגדירה פונקציה סתומה $z=f(x,y)$ בסביבת M_0.

פתרון:

א. נבדוק את התנאים של משפט 2. הפונקציה $F(x,y,z)=3x^2y-yz^2-4xz-7$ היא פולינום ולכן רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות. נחשב

$$F(M_0) = F(-1,1,2)=3(-1)^2\cdot 1-1\cdot 2^2-4(-1)\cdot 2-7=0$$

$$F'_y(M_0) = F'_y(-1,1,2) = (3x^2-z^2)(-1,1,2) = 3-4 = -1 \neq 0$$

לפי משפט 2 קיימת פונקציה יחידה $y=\varphi(x,z)$ רציפה וגזירה חלקית בסביבת הנקודה $(-1,2)$.

ב. נשתמש בנוסחאות (7) לחישוב φ'_x ו- φ'_z בסביבת הנקודה $(-1,2)$.

$$\varphi'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{6xy-4z}{3x^2-z^2}, \quad \varphi'_z = -\frac{F'_z}{F'_y} = \frac{4x+2z}{3x^2-z^2}$$

קל לראות שבסביבת הנקודה $(-1,2)$ הפונקציות φ'_z, φ'_x רציפות ולכן לפי משפט 9.3 הפונקציה $\varphi(x,z)$ דיפרנציאבילית ב- $(-1,2)$.

ג. נבדוק את התנאים של משפט 2.

הפונקציה $F(x,y,z)=3x^2y-yz^2-4xz-7$ שייכת למחלקה C^1 (סעיף א'), $F(M_0)=0$. רואים ש- $F'_z(M_0)=(-2yz-4x)(-1,1,2)=0$, לכן משפט 2 לא עונה על השאלה וצריך להמשיך לחקור. נתייחס למשוואה הנתונה כמשוואה ריבועית, ביחס ל- z: $yz^2+4xz+7-3x^2y=0$ ופתרונותיה:

$$z_1 = \frac{-2x+\sqrt{4x^2+3x^2y-7}}{y}, \quad z_2 = \frac{-2x-\sqrt{4x^2+3x^2y-7}}{y}$$

הביטוי $4x^2+3x^2y-7$ מקבל בסביבת הנקודה $(-1,1)$ גם ערכים שליליים שבהם שורש ריבועי אינו קיים, לכן אינה קיימת פונקציה סתומה $z=f(x,y)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$.

דוגמה 4: כתוב את משוואת המישור המשיק למשטח הרמה של הפונקציה $u=3xyz^2+x^2yz+xy^2+3$ העובר דרך הנקודה $M_0(1,-2,1)$.

פתרון: נמצא את משוואת משטח הרמה העובר דרך $(1,-2,1)$. היות ו- $u(1,-2,1)=-1$ לכן משטח הרמה הוא

$$3xyz^2+x^2yz+xy^2+3=-1$$

או

$$3xyz^2+x^2yz+xy^2+4=0 \qquad (7)$$

נבדוק שמשטח (7) מגדיר פונקציה סתומה $z=f(x,y)$ בסביבת M_0. קל לבדוק ש: $F(x,y,z)=3xyz^2+x^2yz+xy^2+4$ רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות ו- $F'_z=6xyz+x^2y$ רציפה בנקודה M_0, $F'_z(1,-2,1)=-14$, לכן לפי משפט z קיימת פונקציה סתומה $z=f(x,y)$ כפתרון של המשוואה (7).

נרשום את משוואת המישור המשיק (סעיף 9.2)

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

נשתמש בנוסחה (7) לחישוב נגזרות חלקיות ונקבל

$$z-z=-\frac{F'_x(M_0)}{F'_z(M_0)}(x-x_0)-\frac{F'_y(M_0)}{F'_z(M_0)}(y-y_0)$$

או

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0 \qquad (8)$$

נחשב $F'_x(1,-2,1)=-6$, $F'_y(M_0)=0$. נציבם ב-(8), נקבל

$$-6(x-1)+0\cdot(y+2)-14(z-1)=0$$

או $3x+7z=10$ וזהו המישור המשיק הנדרש.

הערה 1: בדוגמה 4 הוכחנו שאם לפחות אחת מהנגזרות החלקיות F'_x,F'_y,F'_z של הפונקציה $F(x,y,z)$ לא מתאפסת בנקודה M_0 אזי (8) היא **משוואת מישור המשיק למשטח** $F(x,y,z)=F(M_0)$ בנקודה M_0, הוקטור

$$\nabla F=F'_x(M_0)\mathbf{i}+F'_y(M_0)\mathbf{j}+F'_z(M_0)\mathbf{k}$$

הוא וקטור **נורמל** למשטח הנ"ל.

דוגמה 5: נתונה המשוואה $z^3-3xyz=4$ והנקודה $M_0(2,1,-2)$. חשב

$$z''_{xx}(2,1)\ ,\ z''_{xy}(2,1)\ ,\ z''_{yy}(2,1)\ ,\ d^2z(2,1)$$

פתרון: המשוואה הנתונה מגדירה בסביבת הנקודה M_0 פונקציה סתומה $z=f(x,y)$ (בדוק). נחשב

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1)=-\frac{F'_x(M_0)}{F'_z(M_0)}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}(2,1,-2)=-1$$

ניגזור $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}$ לפי x, נשים לב ש- $z=f(x,y)$ ו- $f(2,1)=-2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(z^2-xy)y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-yz\left(2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(z^2-xy)^2}=$$

$$=\frac{(z^2-xy)y\cdot\frac{yz}{z^2-xy}-xy\left(\frac{2yz^2}{z^2-xy}-y\right)}{(z^2-xy)^2}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$$

לכן

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2,1)=-\frac{2\cdot 2\cdot 1(-2)}{(4-2)^3}=1$$

נחשב

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,1)=\left(\frac{xz}{z^2-xy}\right)(2,1,-2)=-2$$

ניגזור $\frac{\partial z}{\partial x}$ לפי y ונחשב את הניגזרת בנקודה (2,1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(2,1)=\frac{(z^2-xy)\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)}{(z^2-xy)^2}(2,1)=$$

$$=\frac{(4-2)[-2+1(-2)]-1(-2)[2(-2)(-2)-2]}{(4-2)^2}=1$$

באופן דומה מקבלים

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2,1)=\frac{2x^3yz}{(x^2-xy)^3}(M_0)=4$$

נרשום

$$d^2z(2,1)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(2,1)=dx^2+2\,dx\,dy+4\,dy^2$$

תרגילים:

1. הוכח שקיימת פונקציה יחידה $y(x)$ המקיימת את $\sin x+\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}+1=0$.
2. נתון המשטח $xy-z\ln y+e^{xz}=1$:
   א. האם ניתן לפי משפט 1 לתארו כגרף של פונקציה סתומה $z=f(x,y)$ או $y=g(x,z)$ בסביבת הנקודה $(0,1,1)$?
   ב. בדוק את הדיפרנציאביליות של הפונקציה $g(x,z)$ ב- $(0,1)$.
3. מצא את משוואת המישור המשיק למשטח $x^2+2y^2+3z^2=21$ המקביל למישור $x+4y+6z=0$.

2. נקודות סינגולריות

נושא הסעיף הוא מחוץ למסגרת הספר ודורש חקירה יותר עדינה.
נתבונן במשטח $F(x,y,z)=0$ (או בעקום $F(x,y)=0$) ותהי נקודה M_0 על המשטח (על העקום), כלומר $F(M_0)=0$.

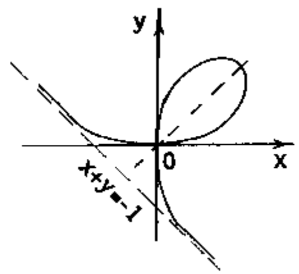
הגדרה 3: אומרים שהנקודה M_0 היא **נקודה סינגולרית** של המשטח (העקום), אם כל הנגזרות החלקיות של הפונקציה F מתאפסות בנקודה M_0 $(\nabla F(M_0)=0)$ או לפחות אחת מהן לא קיימת בנקודה M_0.

דוגמה 6: מצא את כל הנקודות הסינגולריות של החרוט $x^2+y^2-z^2=0$.

פתרון:

נסמן $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ ונחשב גרדיאנט F, נקבל $\nabla F=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}-2z\mathbf{k}=0$. לכן הנקודה הסינגולרית היחידה היא $(0,0,0)$. ידוע שהראשית היא חוד החרוט (ראה ציור בעמוד 134) ובה אין לחרוט מישור משיק.

דוגמה 7: מצא את כל הנקודות הסינגולריות של העקום $F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$.

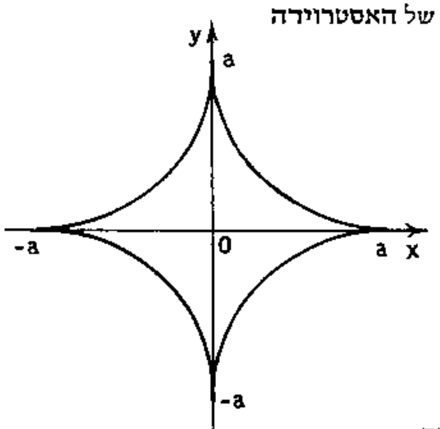


פתרון: מ-
$$\begin{cases}F'_x=3x^2-3y=0\\ F'_y=3y^2-3x=0\end{cases}$$

הנקודות $(0,0)$ ו-$(1,1)$ הן פתרונות המערכת. הנקודה $(1,1)$ לא נמצאת על העקום משום ש- $F(1,1)=-1\neq 0$. כלומר הנקודה $(0,0)$ היא הנקודה הסינגולרית היחידה (ראה איור).

הנקודה $(0,0)$ היא **נקודה כפולה**.

דוגמה 8: מצא את הנקודות הסינגולריות של **האסטרואידה**
$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$



פתרון: נחשב $F'_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},\ F'_y=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$.

הנגזרות החלקיות לא קיימות בנקודות $(\pm a,0)$ ו- $(0,\pm a)$ הנמצאות על העקום ולכן הן נקודות סינגולריות (ראה איור).

תרגילים:

מצא את הנקודות הסינגולריות של העקומים:

1. $|x|+|y|=1$.
2. $y^2(a-x)=x^3$.
3. $y^2=-x^2+x^4$.
4. $a^4y^2=a^2x^4-x^6$.

3. מערכת של פונקציות סתומות

הסעיף הראשון דן בקיום וגזירות של פונקציה סתומה המוגדרת על ידי משוואה אחת.

בסעיף זה נחקור בעיה דומה. למערכת של m פונקציות סתומות המוגדרות על ידי מערכות של m משוואות.

לשם פשטות ניקח $m=3$. נתונה מערכת

$$\begin{cases}F(x_1,\dots,x_k,y_1,y_2,y_3)=0\\ G(x_1,\dots,x_k,y_1,y_2,y_3)=0\\ H(x_1,\dots,x_k,y_1,y_2,y_3)=0\end{cases}\tag{1}$$

אנו מחפשים פתרון למערכת (1) בצורה

$$\begin{cases}y_1=\varphi_1(x_1,\dots,x_k)\\ y_2=\varphi_2(x_1,\dots,x_k)\\ y_3=\varphi_3(x_1,\dots,x_k)\end{cases}\tag{2}$$

כלומר, אם נציב את הפונקציות (2) ב-(1) נקבל זהות.

נניח שהפונקציות F,G,H דיפרנציאביליות בסביבת הנקודה $N_0(x_1^0,\dots,x_k^0,y_1^0,y_2^0,y_3^0)$ וקיימות פונקציות y_1,y_2,y_3 כפתרון של מערכת (1) ובעלות נגזרות חלקיות בסביבת הנקודה $M_0(x_1^0,\dots,x_k^0)$.

נחשב את הנגזרות $1\le j\le k$, $\frac{\partial y_1}{\partial x_j}$, $\frac{\partial y_2}{\partial x_j}$, $\frac{\partial y_3}{\partial x_j}$.

למען זה ניגזור כל אחת מהמשוואות (1) לפי x_j (נשים לב שהמשתנים $x_1,x_2,\dots,x_k$ בלתי תלויים). לפי כלל השרשרת נקבל

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial y_3}\cdot\frac{\partial y_3}{\partial x_j}=0\\ \frac{\partial G}{\partial x_j}+\frac{\partial G}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial G}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\frac{\partial G}{\partial y_3}\cdot\frac{\partial y_3}{\partial x_j}=0\\ \frac{\partial H}{\partial x_j}+\frac{\partial H}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial H}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\frac{\partial H}{\partial y_3}\cdot\frac{\partial y_3}{\partial x_j}=0 \end{cases} \qquad (3)$$

קיבלנו מערכת של שלוש משוואות עם שלושה נעלמים $\frac{\partial y_1}{\partial x_j}$, $\frac{\partial y_2}{\partial x_j}$, $\frac{\partial y_3}{\partial x_j}$.

לפי משפט קרמר למערכת קיים פתרון יחיד אם ורק אם הדטרמיננט

$$\begin{vmatrix} F'_{y_1} & F'_{y_2} & F'_{y_3}\\ G'_{y_1} & G'_{y_2} & G'_{y_3}\\ H'_{y_1} & H'_{y_2} & H'_{y_3} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

שונה מאפס.

לדטרמיננט (4) קוראים **היעקוביאן** של המערכת (1) יחסית למשתנים y_1,y_2,y_3 ומסמנים $J=\frac{D(F,G,H)}{D(y_1,y_2,y_3)}$.

נחליף את העמודה הראשונה ביעקוביאן (4) בעמודה של מקדמים חופשיים מ-(3) $(F'_{x_j},G'_{x_j},H'_{x_j})$ ונקבל דטרמיננט שנסמנו $J_1=\frac{D(F,G,H)}{D(x_j,y_2,y_3)}=\begin{vmatrix} F'_{x_j} & F'_{y_2} & F'_{y_3}\\ G'_{x_j} & G'_{y_2} & G'_{y_1}\\ H'_{x_j} & H'_{y_2} & H'_{y_3} \end{vmatrix}$,

באופן דומה אם נחליף את העמודה השנייה ב-(4) לעמודה של איברים חופשיים, נקבל

$J_2=\frac{D(F,G,,H)}{D(y_1,x_j,y_3)}$ ואם נחליף את העמודה השלישית בעמודה של האיברים החופשיים, נקבל $J_3=\frac{D(F,G,,H)}{D(y_1,y_2,x_j)}$.

תוך שימוש במשפט קרמר נקבל את הפתרונות של מערכת (3) שהם הניגזרות החלקיות הדרושות.

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}=-\frac{J_i}{J}\ ,\quad (i=1,2,3\ ,\ j=1,2,\dots,k) \qquad (5)$$

הערה 2: על מנת לקבל ניגזרות חלקיות מסדר גבוה יותר צריך להמשיך לגזור את נוסחאות (5).

ננסח את משפט הקיום ויחידות מערכת הפונקציות הסתומות (2) המוגדרות על ידי (1).

משפט 3: יהיו הפונקציות $F(N),G(N),H(N)$ ממחלקה C^1 בסביבת הנקודה $N_0(x_1^0,\dots,x_k^0,y_1^0,y_2^0,y_3^0)$ ו- $F(N_0)=G(N_0)=H(N_0)=0$ וכן היעקוביאן (4) שונה מאפס בנקודה N_0, אזי עבור $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ מספיק קטנים קיימת סביבה של הנקודה $M_0(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0)$ שבה קיימת מערכת יחידה של פונקציות (2) המקיימות $|y_i-y_i^0|<\varepsilon_i\ ,\ (i=1,2,3)$ והן פתרונות של מערכת (1). הפונקציות y_1,y_2,y_3 רציפות וגזירות חלקית בנקודה M_0. את הניגזרות החלקיות מחשבים לפי (5). ■

דוגמה 9: בדוק שהמערכת $\begin{cases} xe^{u+v}+2uv=1\\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x \end{cases}$ מגדירה פונקציות גזירות $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ בסביבת הנקודה $x_0=1\ ,\ y_0=2\ ,\ u_0=v_0=0$ וחשב $du(1,2)\ ,\ dv(1,2)$.

פתרון: נסמן

$$F(x,y,u,v)=xe^{u+v}+2uv-1\quad ,\quad G(x,y,u,v)=ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}-2x$$

נחשב את היעקוביאן בנקודה $M_0(1,2,0,0)$

$$J(M_0)=\frac{D(F,G)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} xe^{u+v}+2v & xe^{u+v}+2u\\ ye^{u-v}-\frac{1}{1+v} & -ye^{u-v}-\frac{1}{(1+v)^2} \end{vmatrix}(M_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3$$

מכיוון שהפונקציות F ו- G רציפות ובעלות ניגזרות חלקיות רציפות בסביבת $M_0(1,2,0,0)$ (בדוק!) אזי לפי משפט 3 המערכת הנתונה מגדירה שתי פונקציות $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ יחידות רציפות וגזירות.

נחשב את הדיפרנציאל של המערכת הנתונה

$$(xe^{u+v}+2v)du+(xe^{u+v}+2u)dv+e^{u+v}dx=0$$

$$\left(ye^{u-v}-\frac{1}{1+v}\right)du-\left(ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2}\right)dv+e^{u-v}dy-2dx=0$$

ובנקודה $(1,2,0,0)$

$$\begin{cases} du+dv+dx=0\\ du-2dv-2dx+dy=0\end{cases}$$

מכאן $du(1,2)=-\frac{1}{3}dy$, $dv(1,2)=\frac{1}{3}dy-dx$.

דוגמה 10: מצא תחום במישור xy שבו המערכת

$$x=u+v\ ,\ y=u^2+v^2\ ,\ z=u^3+v^3 \tag{6}$$

מגדירה פונקציה יחידה $z=z(x,y)$. חשב z'_x ו- z'_y.

פתרון: נתונה מערכת של שלוש משוואות עם חמישה משתנים והיא מגדירה שלוש פונקציות $u(x,y)$, $v(x,y)$, $z(x,y)$. לכן, משתי המשוואות הראשונות נחשב u ו- v כפונקציות של x ו- y ונציב במשוואה השלישית ונקבל את הפונקציה המבוקשת $z=z(x,y)$, כלומר מערכת (6) מגדירה פונקציה יחידה $z(x,y)$ אם המערכת

$$x=u+v\ ,\ y=u^2+v^2 \tag{7}$$

מגדירה פתרון יחיד $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. נבדוק את התנאים לקיום פתרון של (7). נסמן $F=u+v-x$ ו- $G=u^2+v^2-y$. הפונקציות F ו- G רציפות ובעלות ניגזרות חלקיות רציפות. נחשב יעקוביאן

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}1&1\\2u&2v\end{vmatrix}=2(v-u)=2\sqrt{2(u^2+v^2)-(u+v)^2}=2\sqrt{2y-x^2}\neq 0$$

כלומר, לכל הנקודות (x,y) המקיימות $2y-x^2>0$ או $y>\frac{x^2}{2}$ המערכת (7) מגדירה פונקציות רציפות וגזירות $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ ולכן מערכת (6) מגדירה פונקציה יחידה רציפה וגזירה חלקית

$$z=z(x,y)=[u(x,y)]^3+[v(x,y)]^3 \tag{8}$$

נחשב עתה את הניגזרות החלקיות של z. מ-(8) נקבל $dz=3u^2du+3v^2dv$ כאשר du ו- dv מחשבים ממערכת (7), כלומר

$$\begin{cases}dx=du+dv\\ dy=2udu+2vdv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{2(u-v)}(dy-2vdx)\\ dv=-\frac{1}{2(u-v)}(dy-2udx)\end{cases}$$

נציב ב- dz, נקבל

$$dz=\frac{3u^2(dy-2vdx)}{2(u-v)}-\frac{3v^2(dy-2udx)}{2(u-v)}=-3uvdx+\frac{3}{2}(u+v)dy$$

לכן $\frac{\partial z}{\partial x}=-3uv$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}(u+v)$

דרך שניה לחישוב z'_x ו- z'_y. נמצא צורה מפורשת של z. נרשום

$$z=u^3+v^3=(u+v)^3-3(u+v)uv=(u+v)^3-3(u+v)[(u+v)^2-(u^2+v^2)]\frac{1}{2}=$$

$$=x^3-3x(x^2-y)\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}xy$$

לכן $z'_y=\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}(u+v)$, $z'_x=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y=-3uv$.

דוגמה 11: נתונה המערכת

$$\begin{cases}x=a\cos\varphi\cdot\cos\theta\\ y=b\sin\varphi\cdot\cos\theta\ ,\ (a>0\ ,\ b>0\ ,\ c>0)\\ z=c\sin\theta\end{cases} \tag{9}$$

המגדירה θ,φ,z כפונקציות של x ו- y. חשב את הניגזרות החלקיות של פונקציות אלה לפי x ו- y בנקודה P_0 המתאימה לערכים $\varphi_0=\theta_0=\frac{\pi}{6}$.

פתרון: נחשב את הדיפרנציאל של מערכת (9) ונקבל

$$\begin{cases}dx+a\sin\varphi\cos\theta\,d\varphi+a\cos\varphi\sin\theta\,d\theta=0\\ dy-b\cos\varphi\cos\theta\,d\varphi+b\sin\varphi\sin\theta\,d\theta=0\\ dz-c\cos\theta\,d\theta=0\end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} dx - \frac{a\sqrt{3}}{4}\,d\varphi + \frac{a\sqrt{3}}{4}\,d\theta = 0 \\ dy - \frac{3}{4}\,b\,d\varphi + \frac{1}{4}\,b\,d\theta = 0 \\ dz - \frac{c\sqrt{3}}{2}\,d\theta = 0 \end{cases}$$

נציב $\varphi = \theta = \frac{\pi}{6}$, נקבל

במערכת האחרונה dx ו- dy הינם משתנים בלתי תלויים. נמצא $dz, d\theta, d\varphi$ על ידי dx ו- dy ונקבל

$$d\varphi = -\frac{1}{a\sqrt{3}}dx - \frac{1}{b}dy \quad , \quad d\theta = -\frac{\sqrt{3}}{a}dx - \frac{1}{b}dy \quad , \quad dz = -\frac{3c}{2a}dx - \frac{c\sqrt{3}}{2b}dy$$

מכאן מקבלים

$$\varphi'_x(P_0) = -\frac{1}{a\sqrt{3}} \quad , \quad \varphi'_y(P_0) = -\frac{1}{b} \quad , \quad \theta'_x(P_0) = -\frac{\sqrt{3}}{a} \quad , \quad \theta'_y(P_0) = -\frac{1}{b} \; ,$$

$$z'_x(P_0) = -\frac{3c}{2a} \quad , \quad z'_y = -\frac{c\sqrt{3}}{2b}$$

נציין שאת הניגזרות הנדרשות ניתן לקבל על ידי גזירה ישירה של הפונקציות z, θ, φ שניתן למצוא בצורה מפורשת מ-(9)

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad , \quad \theta = \arcsin\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad , \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{ay}{bx}$$

דוגמה 12: מערכת (9) מהדוגמה הקודמת מגדירה z, y, φ כפונקציות של x ו- φ. חשב $z'_x(P_0)$, $z'_\varphi(P_0)$.

פתרון: באופן דומה לתרגיל הקודם, נקבל את מערכת (10), אך עתה $d\varphi$ ו- dx הם משתנים בלתי תלויים. מהמשוואה הראשונה והשלישית ב-(10) נקבל

$d\theta = -\frac{4}{a\sqrt{3}}dx - d\varphi$, $dz = c\frac{\sqrt{3}}{2}d\theta$, לכן $dz = -\frac{2c}{a}dx - \frac{c\sqrt{3}}{2}d\varphi$ מכאן

$$z'_x(P_0) = -\frac{2c}{a} \quad , \quad z'_\varphi(P_0) = -\frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

תרגילים:

1. הוכח שהמערכת $\begin{cases} xyz = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ מגדירה מערכת של פונקציות סתומות $z(x), y(x)$ בסביבת הנקודה $(1,1,2)$. חשב $z''(x), y''(x), z'(x), y'(x)$ בנקודה (x,y,z), $(y \neq z)$.

2. חשב z'_y, z'_x אם z היא פונקציה של (x,y) הנתונה על ידי המערכת:

   א. $z = cv$, $y = u\sin v$, $x = u\cos v$.

   ב. $z = uv$, $y = u - v$, $x = u + v$.

   ג. $z = uv$, $y = e^{u-v}$, $x = e^{u+v}$.

3. הוכח שהפונקציה $z = z(x,y)$ הנתונה על ידי המערכת

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z = f(\alpha) \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = f'(\alpha) \end{cases}$$

כאשר $\alpha = \alpha(x,y)$ פונקציה דיפרנציאלית ו- $f(\alpha)$ פונקציה גזירה, מקיימת את המשוואה $(z'_x)^2 + (z'_y)^2 = z^2$.

4. הפונקציות $v = v(x,y)$, $u = u(x,y)$ מוגדרות על ידי המערכת

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + 2x + x^3 = \frac{1}{4}u^4 + \ln v \\ \frac{1}{3} + y - \frac{1}{3}u^3 + e^{v-1} = 0 \end{cases}$$

חשב את הניגזרות v'_y, v'_x, u'_y, u'_x בנקודה $(x,y) = (0,-1)$ שבה $u(0,-1) = 1$, $v(0,-1) = 1$.

4. שימושים גיאומטריים (משיק, נורמל, מישור משיק)

בסעיף זה נקבל את משוואת המשיקים לקווים הנתונים על ידי המשוואה $F(x,y) = 0$ או לקו החיתוך של המשטחים $g(x,y,z) = 0$ ו- $h(x,y,z) = 0$. יתר על כן נקבל משוואת מישור המשיק למשטח הנתון בצורה $h(x,y,z) = 0$.

בסעיף זה אנו מניחים כי כל הפונקציות g, F ו- h ממחלקה C^1.

משיק לעקום במישור

תהי $F(x,y)=0$ משוואתו של עקום במישור ותהי $M_0(x_0,y_0)$ נקודה עליו. נניח שנקודה זו אינה סינגולרית, כלומר $\nabla F(x_0,y_0)\neq 0$. לכן למשל $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. זאת אומרת, שבסביבת הנקודה M_0 קיימת פונקציה יחידה $y=f(x)$ כזאת ש- $y_0=f(x_0)$ ו- $f'(x_0)=-\frac{F'_x(M_0)}{F'_y(M_0)}$. לכן משוואת המשיק לעקום בנקודה M_0

$$y-y_0=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}\cdot(x-x_0) \qquad (1)$$

או

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)=0 \qquad (1^*)$$

אם $F'_y(M_0)=0$ אזי $F'_x(M_0)\neq 0$. משיקולים דומים נקבל ש- $x=x_0$ הוא המשיק לעקום הנתון.

דוגמה 13: מצא את משוואת המשיק **ללמניסקטה ברנולי**

$$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$$

בנקודות: א. $M_0\left(\frac{\sqrt6}{4}a,\frac{\sqrt2}{4}a\right)$. ב. $M_1(a,0)$.

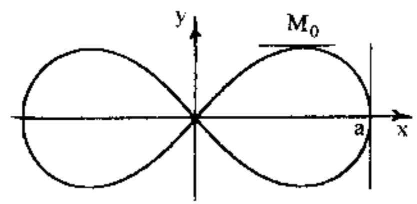
פתרון:

א. נחשב F'_y,F'_x בנקודה M_0

$$F'_x(M_0)=[4x(x^2+y^2)-2xa^2](M_0)=\frac{4a\sqrt6}{4}\left(\frac{6a^2}{16}+\frac{2a^2}{16}\right)-\frac{2a^3\sqrt6}{4}=0$$

$$F'_y(M_0)=[4y(x^2+y^2)+2ya^2](M_0)=\sqrt2a^3$$

נשתמש בנוסחה (1) ונקבל את משוואת המשיק $y-\frac{\sqrt2}{4}a=0$.



ב. נחשב $F'_y(a,0)$ ו- $F'_x(a,0)$, נקבל

$$F'_x(a,0)=2a^3\ ,\ F'_y(a,0)=0$$

לכן $x=a$ היא משוואת המשיק לעקום הנתון בנקודה $(a,0)$, ראה איור.

נציין שהנקודה $(0,0)$ היא סינגולרית.

דוגמה 14: מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2-\frac{5}{2}x+y^2=0$ בנקודה $M_0(2,1)$.

פתרון: נחשב $F'_x(2,1)=\left(2x-\frac{5}{2}\right)(2,1)=\frac{3}{2}$, $F'_y(2,1)=2$.

מנוסחה (1) נקבל $y-1=-\frac{3}{4}(x-2)$ וסופית משוואת המשיק היא $3x+4y=10$.

נורמל ומישור משיק למשטח

יהי S משטח הנתון על ידי המשוואה $h(x,y,z)=0$ והנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ עליו, כפי שראינו (הערה 1). הוקטור $\nabla h(M_0)=h'_x(M_0)\mathbf{i}+h'_y(M_0)\mathbf{j}+h'_z(M_0)\mathbf{k}$ הוא וקטור הנורמל למשטח S בנקודה M_0. לכן משוואת הנורמל היא

$$\frac{x-x_0}{h'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{h'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{h'_z(M_0)} \qquad (2)$$

והמישור

$$(x-x_0)h'_x(M_0)+(y-y_0)h'_y(M_0)+(z-z_0)h'_z(M_0)=0 \qquad (3)$$

הוא **מישור המשיק למשטח** S בנקודה M_0.

משיק לקו החיתוך של משטחים

יהיו $g(x,y,z)=0\ ,\ h(x,y,z)=0$ שני משטחים. הנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ משותפת לשניהם. כלומר, $g(M_0)=h(M_0)$. הוקטור $\nabla g(M_0)$ הוא הנורמל למשטח הראשון ו- $\nabla h(M_0)$ הוא הנורמל למשטח השני בנקודה M_0. המשיק לקו המשותף לשני המשטחים נמצא במישור המשיק למשטח הראשון וגם במישור המשיק למשטח השני ולכן הוא מאונך לקוטורים $\nabla g(M_0)$ ו- $\nabla h(M_0)$. מסיבה זו המשיק $\vec{T}$ הוא בכיוון המכפלה הוקטורית $\nabla h(M_0)\times\nabla g(M_0)$, כלומר

$$\vec{T}=\nabla g\times\nabla h=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ g'_x & g'_y & g'_z\\ h'_x & h'_y & h'_z\end{vmatrix}= \qquad (4)$$

$$=(g_yh'_z-h'_yg'_z)\mathbf{i}+(g_zh'_x-g'_xh'_z)\mathbf{j}+(g'_xh'_y-g'_yh_x)\mathbf{k}$$

כאשר כל הנגזרות מחושבות בנקודה M_0. נרשום את משוואת המשיק:

$$\frac{x-x_0}{g'_yh'_z-h'_yg'_z}=\frac{y-y_0}{g'_zh'_x-g'_xh'_z}=\frac{z-z_0}{g'_xh'_y-g'_yh'_x} \qquad (5)$$

דוגמה 15: מצא את משוואת המשיק לקו החיתוך של המשטחים

$$S_1:\ F_1(x,y,z)=x^2+2x+2xy+y^2+z^2-7=0$$

$$S_2:\ F_2(x,y,z)=2x^2+xz-y^2-2=0$$

בנקודה $(1,1,1)$.

פתרון: נחשב את הנורמלים ל- S_1 ו- S_2

$$\begin{cases}\nabla F_1=(2x+2+2y)\mathbf{i}+(2x+2y)\mathbf{j}+2z\mathbf{k}\\ \nabla F_2=(4x+z)\mathbf{i}+2y\,\mathbf{j}+x\,\mathbf{k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla F_1(1,1,1)=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}\\ \nabla F_2(1,1,1)=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}\end{cases}$$

נחשב את הוקטור $\vec{T}$ בכיוון המשיק על ידי שימוש ב-(4), נקבל

$$\vec{T}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\6&4&2\\5&-2&1\end{vmatrix}=8\mathbf{i}+4\mathbf{j}-32\mathbf{k}$$

לכן משוואת המשיק היא $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-32}$.

תרגילים:

1. רשום את משוואת הנורמל והמישור המשיק למשטחים:
   א. $z=x^2+y^2$ בנקודה $(1,2,5)$. ב. $x^2+y^2+z^2=169$ בנקודה $(3,4,12)$.
   ג. $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$ בנקודה $(2,2,1)$.
2. רשום את משוואת המשיק לעקומים הנתונים על ידי חיתוך המשטחים:
   א. $z=x^2,\ y=x$ בנקודה $(1,1,1)$.
   ב. $x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=6$ בנקודה $(1,-2,1)$.

5. מערכת של פונקציות הפוכות. העתקה חד-חד ערכית של שתי קבוצות

בסעיף זה נביא תנאים לקיום מערכת של פונקציות הפוכות ושימושיהם להעתקות בין קבוצות במישור ובמרחב.

נתבונן במערכת הפונקציות

$$y_i=y_i(x_1,x_2,\dots,x_k)\ ,\ i=1,2,\dots,k \qquad (1)$$

בעלת היעוקביאן

$$J=\frac{D(y_1,y_2,\dots,y_k)}{D(x_1,x_2,\dots,x_k)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}&\frac{\partial y_1}{\partial x_2}&\dots&\frac{\partial y_1}{\partial x_k}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}&\frac{\partial y_2}{\partial x_2}&\dots&\frac{\partial y_2}{\partial x_k}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{\partial y_k}{\partial x_1}&\frac{\partial y_k}{\partial x_2}&\dots&\frac{\partial y_k}{\partial x_k}\end{vmatrix} \qquad (2)$$

משפט 4: תהי (1) מערכת של פונקציות ממחלקה C^1 בסביבת הנקודה $M_0(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0)$. נניח שהיעקוביאן (2) שונה מאפס בנקודה M_0, אזי קיימת סביבה של הנקודה $N_0(y_1^0,y_2^0,\dots,y_k^0)$ כאשר $y_i(M_0)=y_i^0\ ,\ (i=1,2,\dots,k)$ שבה מוגדרת מערכת יחידה של פונקציות $x_i=x_i(y_1,y_2,\dots,y_k)\ ,\ (i=1,2,\dots,k)$ (ההפוכות לפונקציות y_i מ-(1)) והן שייכות ל- C^1 בסביבת N_0.

המשפט הזה הוא מסקנה של משפט 3 בניסוח כללי יותר. ■

נעבור לאחד מהשימושים של המשפט הנ"ל.

יהיו

$$u=f(x,y,z)\ ,\ v=g(x,y,z)\ ,\ w=h(x,y,z) \qquad (3)$$

פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

אם לכל נקודה $M(x,y,z)$ מאותה סביבה מתאימה נקודה $N(u,v,w)$ מהקבוצה $\{N\}$, אזי אומרים ש-(3) מעתיקה את סביבת M_0 על הקבוצה $\{N\}$.

הגדרה 4: העתקה נקראת חד-חד ערכית אם לכל נקודה M מסביבתה של M_0 מתאימה נקודה יחידה N מהקבוצה $\{N\}$ ולהיפך: לכל נקודה מקבוצה $\{N\}$ מתאימה נקודה יחידה מסביבת M_0.

מהגדרה 4 נובע ש-(3) היא העתקה חד-חד ערכית בסביבה די קטנה של M_0 אם ורק אם מערכת (3) מגדירה מערכת של פונקציות סתומות

$$x=F(u,v,w)\ ,\ y=G(u,v,w)\ ,\ z=H(u,v,w) \qquad (4)$$

לכן מערכת (3) מהווה העתקה חד-חד ערכית אם היא מקיימת את תנאי משפט 3, כלומר אם הפונקציות f,g,h דיפרנציאביליות בסביבת הנקודה M_0 והיעקוביאן

$$J=\begin{vmatrix}f'_x&f'_y&f'_z\\ g'_x&g'_y&g'_z\\ h'_x&h'_y&h'_z\end{vmatrix} \qquad (5)$$

שונה מאפס, אזי (3) מגדירה מערכת יחידה (4) שבה הפונקציות H,G,F דיפרנציאביליות ב-$\{N\}$. מערכת (4) עושה טרנספורמציה הפוכה, והיעקוביאן שלה הוא

$$J^*=\begin{vmatrix}F'_u & F'_v & F'_w\\ G'_u & G'_v & G'_w\\ H'_u & H'_v & H'_w\end{vmatrix} \qquad (6)$$

על הקשר בין היעקוביאן של העתקה (3) ושל העתקה הפוכה (4) נלמד מהמשפט הבא.

משפט 5: אם $J\neq 0$ אזי $J\cdot J^*=1$.

הוכחה: מ-(5) ו-(6) נקבל

$$\begin{vmatrix}f'_x & f'_y & f'_z\\ g'_x & g'_y & g'_z\\ h'_x & h'_y & h'_z\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}F'_u & F'_v & F'_w\\ G'_u & G'_v & G'_w\\ H'_u & H'_v & H'_w\end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix}f'_x & f'_y & f'_z\\ g'_x & g'_y & g'_z\\ h'_x & h'_y & h'_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}F'_u & F'_v & F'_w\\ G'_u & G'_v & G'_w\\ H'_u & H'_v & H'_w\end{pmatrix}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix}f'_xF'_u+f'_yG'_u+f'_zH'_u & f'_xF'_v+f'_yG'_v+f'_zH'_v & f'_xF'_w+f'_yG'_w+f'_zH'_w\\ g'_xF'_u+g'_yG'_u+g'_zH'_u & g'_xF'_v+g'_yG'_v+g'_zH'_v & g'_xF'_w+g'_yG'_w+g'_zH'_w\\ h'_xF'_u+h'_yG'_u+h'_zH'_u & h'_xF'_v+h'_yG'_v+h'_zH'_v & h'_xF'_w+h'_yG'_w+h'_zH'_w\end{vmatrix}$$

נחשב כל אחד מאברי הדטרמיננטה האחרונה. מכלל השרשרת נקבל

$$f'_xF'_u+f'_yG'_u+f'_zH'_u=\frac{df}{du}=1 \quad , \quad f'_xF'_v+f'_yG'_v+f'_zH'_v=\frac{df}{dv}=0$$

באופן דומה מחשבים את יתר האיברים ומקבלים $J\cdot J^*=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$. ■

דוגמה 16: מצא את תמונת התחום $y\ge 0\,,\,x\ge 0\,,\,1\le x^2+y^2\le 4$ על-ידי העתקה $x=\rho\cos\varphi\,,\;y=\rho\sin\varphi\,,\;\rho\ge 0$.

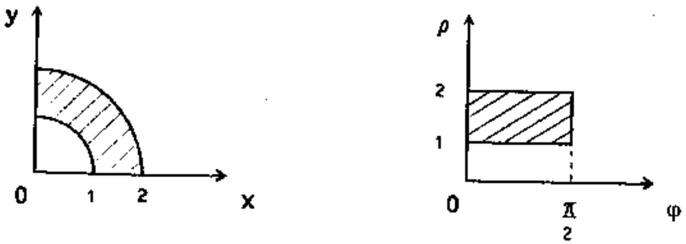
פתרון: נחשב את היעקוביאן $J=\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho$, $\rho\neq 0$ והעתקה היא חד-ערכית.

נמצא את תמונת התחום הנתון. לשם כך נמצא את תמונתו של $x^2+y^2=4$ בהעתקה הנ"ל. נציב את x ו- y נקבל

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4 \;\rightarrow\; \rho^2=4 \;\rightarrow\; \rho=2$$

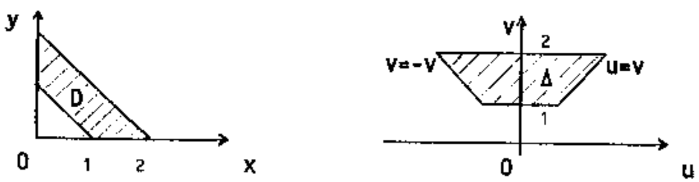
כלומר, המעגל $x^2+y^2=4$ עובר לישר $\rho=2$. באופן דומה $x^2+y^2=1$ עובר לקו ישר $\rho=1$ במישור (ρ,φ). התמונה של הישר $x=0$ היא $\rho\cos\varphi=0$ לכן $\varphi=\frac{\pi}{2}$, התמונה של $y=0$ היא $\rho\sin\varphi=0$ לכן $\varphi=0$. כלומר, התחום המתקבל על ידי ההעתקה במישור (ρ,φ) הוא מלבן $1\le\rho\le 2\,,\;0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ (ראה איור).

קל לראות שבמקרה זה ההעתקה היא חד-חד ערכית.



דוגמה 17: מצא את תמונת התחום $D=\{(x,y): x\ge 0\;,\;y\ge 0\;,\;1\le x+y\le 2\}$ על ידי ההעתקה $u=x-y\;,\;v=x+y$. האם ההעתקה היא חד-חד ערכית?

פתרון: הישר $x+y=2$ עובר ל- $v=2$ ו- $x+y=1$ עובר ל- $v=1$, מרכיב נוסף של השפה $x=0$ עובר ל- $u=-y\;,\;v=y$ או לקו $v=-u$. אם $y=0$ נקבל $v=u=x$. לכן התחום D עובר לטרפז Δ במישור (u,v) (ראה איור)



נחשב את היעקוביאן $J^*=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2$.

ההעתקה היא חד-חד ערכית.

דוגמה 18: מצא את תמונת התחום D מהדוגמה הקודמת על ידי ההעתקה $u=\frac{x-y}{x+y}\ ,\ v=x+y$.

פתרון: כמו קודם $1\le v\le 2$. אם $x=0$ נקבל $u=-1$, אם $y=0$ אזי $u=1$ לכן קיבלנו את התמונה של D והיא מלבן $\Lambda=\{(u,v);\ -1\le u\le 1\ ,\ 1\le v<2\}$.

נחשב את היעקוביאן של המערכת

$$J^*=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{2y}{(x+y)^2} & -\frac{2x}{(x+y)^2}\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{2}{x+y}=\frac{2}{v}\neq 0$$

ההעתקה היא חד-חד ערכית.

דוגמה 19: מצא את תמונת הגוף

$$\{(x,y,z)\ z\le x^2+y^2\le 4z\ ,\ 1\le xy\le 2\ ,\ x\le y\le 2x\}$$

לאחר העתקה $u=\frac{x^2+y^2}{z}\ ,\ v=xy\ ,\ w=\frac{y}{x}$.

פתרון: קל לראות שהתמונה היא תיבה $1\le u\le 4\ ,\ 1\le v\le 2\ ,\ 1\le w\le 2$.

נחשב את היעקוביאן של המערכת

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{2x}{z} & \frac{2y}{z} & -\frac{x^2+y^2}{z^2}\\ y & x & 0\\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0\end{vmatrix}=-\frac{x^2+y^2}{z^2}\cdot\frac{2y}{x}\neq 0$$

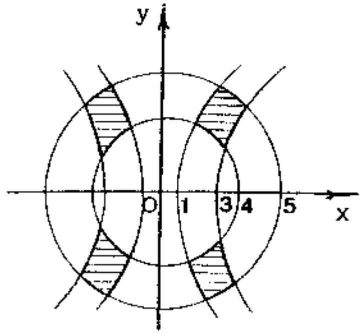
ההעתקה היא חד-חד ערכית.

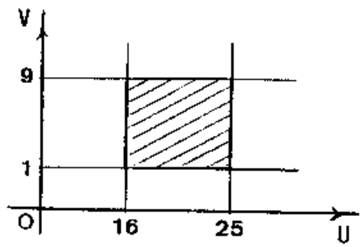
בדוגמאות 16-19 העתקות של התחומים היו חד-חד ערכיות. נציין שתכונה זו היא לוקלית (מקומית) בלבד והתנאי שהיעקוביאן שונה מאפס בתחום הוא מספיק בלבד (לא הכרחי) לחד-חד ערכיות.

נדגים טענה זאת בדוגמה הבאה.

דוגמה 20: מצא את תמונתו של התחום $D=\{16\le x^2+y^2\le 25\ ,\ 1\le x^2-y^2\le 9\}$ על ידי העתקה $u=x^2+y^2\ ,\ v=x^2-y^2$.

פתרון: ההעתקה הנתונה מעבירה את המעגל $x^2+y^2=16$ לישר $u=16$ ואת המעגל $x^2+y^2=25$ לישר $u=25$. ההיפרבולות $x^2-y^2=9$ ו- $x^2-y^2=1$ עוברות על ידי ההעתקה הזאת לישרים $v=9\ ,\ v=1$ בהתאמה, לכן התחום הנתון עובר למלבן (ראה איור).





היעקוביאן של המערכת הוא

$$J^*=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ 2x & -2y\end{vmatrix}=-8xy$$

ושונה מאפס בכל הנקודות של התחום D, אבל רואים שהעתקה היא חד-ערכית בלבד ואינה חד-חד ערכית. ההעתקה הנ"ל הופכת להיות חד-חד ערכית אם ניקח בתור תחום D רק את אחד מארבעת מרכיביו.

תרגילים:

1. מצא את תמונת האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ על ידי ההעתקה $x=au\ ,\ y=bv$ $(a>0,b>0)$. האם ההעתקה היא חד-חד ערכית?
2. מצא את תמונתו של התחום $D=\{(x,y):x-y\ge 0\ ,\ x+y\le 0\ ,\ x-2y\le 2\}$ לאחר ההעתקה $u=2x-y\ ,\ v=x-2y$.
3. מצא את התחום D אם תמונתו היא $1\le u\le 4\ ,\ 9\le v\le 16$ לאחר ההעתקה $x=\sqrt{\frac{u+v}{2}}\ ,\ y=\sqrt{\frac{v-u}{2}}$. האם ההעתקה היא חד-חד ערכית?

4. מצא את תמונתו של הכדור $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2\le 4$ לאחר ההעתקה
$$x=2+\rho\cos\varphi\cdot\cos\theta\ ,\ \ y=3+\rho\sin\varphi\cdot\cos\theta\ ,\ \ z=-1+\rho\sin\theta$$

5. מצא את תמונתם של התחומים:

א. $\{x\ge 0, y\ge 0, 2x+y\le 1\}$ על ידי ההעתקה $u=2x+y\ ,\ v=2x-y$.

ב. $\{0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\}$ על ידי ההעתקה $u=2xy\ ,\ v=x^2-y^2$.

ג. $\{x^2+y^2\le 9\ ,\ 0\le y\le x\}$ על ידי ההעתקה $u=x+y\ ,\ v=y-x$.

ד. $\{x^2+y^2\le 2x\}$ על ידי ההעתקה $x=\rho\cos\varphi\ ,\ y=\rho\sin\varphi$.

ה. $\{y\ge 0, x\le 4, 1\le x^2-y^2\le 4\}$ על ידי ההעתקה $u=x^2-y^2\ ,\ v=x^2$.

ו. התחום D נמצא בין הישרים $x=3y$ ו- $x=-3y$ ובין ההיפרבולות $x=\sqrt{1+y^2}$ ו- $x=\sqrt{4+y^2}$ על ידי ההעתקה $u=x^2-y^2\ ,\ v=\frac{y}{x}$.

פרק 15
אקסטרמום של פונקציות של מספר משתנים

בפרק זה נחקור בעיות מקסימום ומינימום (אקסטרמום) של פונקציות ממשתנים אחדים.

1. אקסטרמום לוקלי (מקומי) ותנאי הכרחי לקיומו

תהי הפונקציה $u=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ מוגדרת בתחום D הנמצאת במרחב אוקלידי E_k ו- $M_0(x_1^0,x_2^0,\dots x_k^0)$ הנקודה ב- D.

הגדרה 1: לפונקציה $u=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ יש **מקסימום (מינימום) לוקלי (מקומי)** בנקודה M_0, אם קיימת סביבה של M_0 כזאת שלכל M מהסביבה הנ"ל $f(M)\le f(M_0)$ $[f(M)\ge f(M_0)]$.

נסמן ב- $\Delta u=f(M)-f(M_0)$ את תוספת הפונקציה $u=f(M)$ בנקודה M_0 אם לכל M מהסביבה הנ"ל:

א. $\Delta u\le 0$, אזי ב- M_0 יש לפונקציה u מקסימום לוקלי (מקומי).

ב. $\Delta u\ge 0$, אזי ב- M_0 יש לפונקציה u מינימום לוקלי (מקומי).

ברור שגם ההיפך נכון: אם לפונקציה u יש מקסימום (מינימום) מקומי ב- M_0, אזי $\Delta u\le 0$, $(\Delta u\ge 0)$.

משפט 1: **(תנאי הכרחי לקיום אקסטרמום).** אם לפונקציה $u=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ יש אקסטרמום בנקודה M_0 ובנוסף היא בעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון בנקודה זו, אזי כל הנגזרות האלו שוות לאפס.

הוכחה: נניח שבנקודה M_0 לפונקציה $u=f(M)$ יש מקסימום. נקבע את המשתנים $x_2,x_3,\dots,x_k$ ונתבונן בפונקציה $u=f(x_1,x_2^0,\dots,x_k^0)$ בעלת משתנה אחד x_1. לפונקציה הנ"ל יש מקסימום מקומי ב- x_1^0 והיא גזירה באותה נקודה. לפי תנאי הכרחי לקיום אקסטרמום לפונקציה של משתנה אחד ([1], 8.3) הנגזרת שלה בנקודה x_1^0 שווה לאפס, כלומר $f'_{x_1}(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0)=0$.

באופן דומה מוכיחים שכל יתר הנגזרות החלקיות מתאפסות גם הן בנקודה M_0. קיבלנו

$$f'_{x_i}(x_1^0,x_2^0,\dots,x_k^0)=0\ ,\ (i=1,2,\dots,k)\qquad(1)$$ ■

את משפט 1 ניתן לנסח באופן הבא.

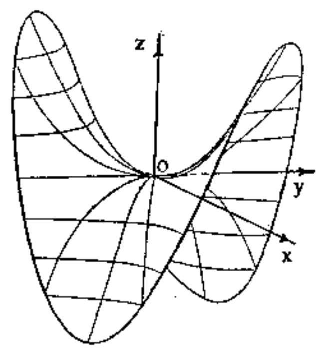
משפט 1*: אם לפונקציה $u=f(M)$ יש אקסטרמום מקומי בנקודה M_0 והיא דיפרנציאבילית באותה נקודה, אזי

$$du(M_0)=0\qquad(2)$$

אם הפונקציה $u=f(M)$ בעלת שניים או שלושה משתנים, אזי את (2) ניתן לרשום בצורה וקטורית

$$\nabla f(M_0)=0\qquad(3)$$

את ההוכחה שמ-(1) נובע (2) ולהיפך, נשאיר לקורא. ■



נציין שתנאי (1) ((2) או (3)) הוא **תנאי הכרחי** בלבד.

למשל, לפונקציה $z=xy$ נגזרות חלקיות שוות לאפס ב-$(0,0)$, אך אין בה אקסטרמום כי לכל סביבה של הנקודה $(0,0)$ הפונקציה $z=xy$ מקבלת ערכים שליליים וחיוביים ולכן אין אקסטרמום (ראה איור).

הגדרה 2: אומרים שהנקודה M_0 היא **נקודה קריטית** (חשודה לאקסטרמום) אם עשוי להיות בה אקסטרמום לוקלי.

כל נקודה קריטית של הפונקציה $u=f(M)$ היא נקודה שבה מתקיים (1) או שהנגזרות החלקיות לא קיימות באותה נקודה.

דוגמה 1: מצא את כל הנקודות הקריטיות של הפונקציות:

א. $f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$. ב. $f(x,y)=|x|+x^2y^2$.

פתרון:

א. נשווה את הנגזרות החלקיות לאפס $\begin{cases} f'_x=8x^3-2x=0\\ f'_y=4y^3-4y=0\end{cases}$.

פותרים את המערכת ומקבלים תשע נקודות קריטיות.

$$M_1(0,0)\ ,\ M_{2,3}(0,\pm1)\ ,\ M_{4,5}(\pm\frac{1}{2},0)\ ,\ M_{6,7}(\frac{1}{2},\pm1)\ ,\ M_{8,9}(-\frac{1}{2},\pm1)$$

ב. למציאת נקודות קריטיות נגזור $f(x,y)$.

$$f'_x=\begin{cases}1+2xy^2, & x>0\\ -1+2xy^2, & x<0\\ \text{לא קיים}, & x=0\end{cases}\ ,\qquad f'_y=2x^2y$$

קל לראות שלמערכת $f'_y=0\ ,\ f'_x=0$ אין פתרונות. לכן כל הנקודות הקריטיות הן $M(0,y)$ שבהן לא קיימת נגזרת לפי x. מסיבות גיאומטריות ברור שהפונקציה הנתונה מקבלת את הערך המינימלי שלה לאורך ציר ה-y, כלומר בנקודות $(0,y), -\infty<y<\infty$.

2. סעיף עזר. תבניות ריבועיות

בסעיפים הבאים נמיין את הנקודות הקריטיות. לשם כך נזדקק למשפט מאלגברה על תבניות ריבועיות (ראה [3], XI).

הגדרה 3: פונקציה של k משתנים מהצורה

$$\Phi(y_1,\dots,y_k)=\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}y_iy_j\ ,\ (a_{ij}=a_{ji})\qquad(1)$$

נקראת **תבנית ריבועית** של $y_1,y_2,\dots,y_k$ והמטריצה הסימטרית

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{pmatrix}\qquad(2)$$

היא **מטריצה של תבנית ריבועית.**

דוגמה 2:

א. הפונקציה $\Phi=6y_1^2+5y_2^2+14y_3^2+4y_1y_2-8y_1y_3$ היא תבנית ריבועית בעלת מטריצה סימטרית $A=\begin{pmatrix}6&2&-4\\2&5&0\\-4&0&14\end{pmatrix}$.

ב. תהי $u=f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית ב-$M_0(x_0,y_0,z_0)$, אזי הדיפרנציאל השני $d^2u(M_0)$ הוא תבנית ריבועית של המשתנים dx,dy,dz.

$$d^2u(M_0) = f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + f''_{zz}dz^2 + 2f''_{xy}dxdy + 2f''_{xz}dxdz + 2f''_{yz}dydz \qquad (3)$$

כל הנגזרות מחושבות בנקודה M_0.

המטריצה של התבנית הריבועית היא

$$A = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

הגדרה 4: התבנית הריבועית (1) נקראת **חיובית** (**שלילית**) אם לכל הערכים של המשתנים $y_1, y_2, \dots, y_k$, שאינם מתאפסים בבת אחת, הפונקציה Φ מקבלת ערכים חיוביים (שליליים) בלבד.

אם Φ מקבלת ערכים חיוביים ושליליים, אזי אומרים ש-(1) היא **תבנית ריבועית מעורבת**. אם Φ מקבלת ערכים לא שליליים (לא חיוביים), אזי אומרים שהתבנית הריבועית (1) **לא שלילית** (**לא חיובית**).

דוגמה 3:

א. $\Phi = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ היא תבנית ריבועית חיובית.

ב. $\Phi = -y_1^2 + 2y_1y_2 - y_2^2$ היא תבנית ריבועית לא חיובית כי ניתן לרשום $\Phi = -(y_1 - y_2)^2$, כלומר Φ מתאפסת כאשר $y_2 = y_1 \neq 0$.

ג. התבנית הריבועית $\Phi = y_1^2 + 3y_1y_2 + y_2^2$ מעורבת כי, למשל, בנקודה $(1,1)$ מקבלים $\Phi(1,1) = 5$ ובנקודה $(1,-1)$ היא שווה ל- $\Phi(-1,1) = -1$.

נביא ללא הוכחה את המשפט הבא.

משפט 2: (**סילבסטר, J.J. Sylvester**). התבנית הריבועית (1) חיובית אם ורק אם כל המינורים הראשיים של המטריצה (2) חיוביים, כלומר

$$A_1 = a_{11} > 0\ ,\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0\ ,\ A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0\ , \dots ,\ A_k = \det A > 0$$

התבנית הריבועית (1) שלילית אם ורק אם הסימנים של המינורים הראשיים מתחלפים לסירוגין כאשר הראשון מהם שלילי, כלומר $A_1 < 0\ ,\ A_2 > 0\ ,\ A_3 < 0$. ■

דוגמה 4: הוכח שהתבנית הריבועית $\Phi = 6y_1^2 + 5y_2^2 + 14y_3^2 + 4y_1y_2 - 8y_1y_3$ חיובית.

פתרון: בדוגמה 2א' קיבלנו את המטריצה של התבנית. נחשב את המינורים הראשיים שלה

$$A_1 = 6\ ,\ A_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 26\ ,\ A_3 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 286$$

כל המינורים הראשיים חיוביים ולכן התבנית הריבועית הנתונה חיובית.

תרגילים:

איזה מהתבניות הבאות חיובית, שלילית או מעורבת:

1. $y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 + 4y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3$.
2. $2y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2 - 2y_1y_2 + 4y_1y_3 - 3y_2y_3$.
3. d^2u בנקודה $(1,1,1)$ כאשר $u = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$.

3. מיון נקודות קריטיות

בסעיף זה נשתמש בתבניות ריבועיות לקבלת תנאי מספיק לקיום או אי-קיום של אקסטרמום לוקלי.

משפט 3: תהי $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ נקודה קריטית לפונקציה $u = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$. נניח ש- $u = f(M)$ שייכת למחלקה C^2 (בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר שני).

אם התבנית הריבועית $d^2u(M_0)$ של המשתנים $dx_i\ ,\ i = 1, 2, \dots, k$:

א. חיובית, אזי ב- M_0 לפונקציה $u = f(M)$ יש מינימום מקומי.

ב. שלילית, אזי ב- M_0 לפונקציה $u = f(M)$ יש מקסימום מקומי.

ג. מעורבת, אזי לפונקציה $u = f(M)$ אין אקסטרמום בנקודה M_0.

הוכחה: נשתמש בנוסחת טיילור. נקבל $\Delta u = du(M_0) + \frac{1}{2}d^2u(N)$, כאשר N נקודה מסביבת M_0. היות והנקודה M_0 קריטית, $du(M_0) = 0$, נקבל

$$\Delta u = \frac{1}{2}d^2u(N) \qquad (1)$$

נסמן $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)$, ברור ש- $(i,j=1,2,\dots,k)$, $a_{ij}=a_{ji}$.

נתבונן ב- $f''_{x_ix_j}(N)$. מכיוון שכל הניגזרות רציפות ניתן לרשום

$$f''_{x_ix_j}(N) = f''_{x_ix_j}(M_0)+\alpha_{ij} = a_{ij}+\alpha_{ij}$$

כאשר $\alpha_{ij}\to 0$ אם $\Delta x_1\to0\ ,\ \Delta x_2\to 0\ ,\ \dots\ ,\ \Delta x_k\to 0$.

כלומר את (1) ניתן לרשום באופן הבא:

$$\Delta u = \frac12\sum_{i,j=1}^k a_{ij}\Delta x_i\Delta x_j + \frac12 \sum_{i,j=1}^k \alpha_{ij}\Delta x_i \Delta x_j \tag{2}$$

האיבר הראשון ב-(2) הוא תבנית ריבועית של המשתנים $(i=1,2,\dots,k)$, Δx_i.

נסמן

$$y_i = \frac{\Delta x_i}{\rho}\quad ,\quad \rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\dots+\Delta x_k^2} \tag{3}$$

ברור ש-

$$\sum_{i=1}^k y_i^2 = y_1^2+y_2^2+\dots+y_k^2 = 1 \tag{4}$$

נציב $\Delta x_i = \rho y_i$ מ-(3) ב-(2), נקבל

$$\Delta u = \frac{\rho^2}{2}\left(\sum_{i,j=1}^k a_{ij}y_iy_j + \sum_{i,j=1}^k \alpha_{ij}y_iy_j\right)$$

נניח עתה שהתבנית הריבועית $\sum_{i,j=1}^k a_{ij}\Delta x_i\Delta x_j$ חיובית. מכאן נובע שהתבנית הריבועית

$$\Phi(y_1,\dots,y_k)=\sum_{i,j=1}^k a_{ij}y_iy_j \tag{5}$$

גם חיובית לכל נקודה $(y_1,y_2,\dots,y_k)$ המקיימת את (4).

היות ו-(4) הוא כדור k-ממדי סגור וחסום והפונקציה Φ מ-(5) רציפה לפי משפט ווירשטרס 8.8 היא מקבלת את הערך המקסימלי (מינימלי) שלה, כלומר $0<m\le\Phi(y_1,\dots,y_k)\le M$. נתבונן עתה בסכום השני ב-(2). היות ו- $\alpha_{ij}\to0$ כאשר $(j=1,2,\dots,k)$, $\Delta x_j\to 0$ ניתן לבחור סביבה של הנקודה M_0 כה קטנה שבה

$\left|\sum_{i,j=1}^k \alpha_{ij}\Delta x_i\Delta x_j\right|<m$. כלומר מצאנו סביבה של הנקודה M_0 כך ש- $\Delta u>0$. זאת אומרת שב- M_0 יש לפונקציה $u=f(M)$ מינימום לוקלי.

באופן דומה מוכיחים שאם $\sum_{i,j=1}^k a_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$ תבנית ריבועית שלילית, אזי לפונקציה $u=f(M)$ יש מקסימום לוקלי ב- M_0. את הוכחת סעיף ג' נשאיר לקורא, רק נציין שצריך להוכיח שבכל סביבה של M_0 קיימות נקודות שבהן Δu מ-(2) חיובי ונקודות שבהן Δu שלילי. ■

הערה 1: המשפט לא נותן תשובה כאשר $d^2u(M_0)$ תבנית ריבועית לא שלילית (לא חיובית). במקרה זה חוקרים ישירות את סימני Δu בסביבת הנקודה הקריטית.

מסקנה 1: כתוצאה ממשפט 3 וסעיף 2 נקבל תנאי מספיק לאקסטרמום של פונקציה משני משתנים. יהי $u=f(x,y)$ ו- $du(M_0)=0$, אזי אם

$$\Delta = f''_{xx}(M_0)\cdot f''_{yy}(M_0) - [f''_{xy}(M_0)]^2 > 0$$

לפונקציה $u=f(M)$ יש אקסטרמום והוא מינימום מקומי במקרה ש- $f''_{xx}(M_0)>0$ ומקסימום מקומי כאשר $f''_{xx}(M_0)<0$. אם $\Delta<0$ לפונקציה $u=f(M)$ אין אקסטרמום בנקודה M_0, ולכן M_0 היא נקודת **אוכף**.

דוגמה 5: מצא אקסטרמום לוקלי של הפונקציות:

א. $u=x^3+y^3-3xy$. ב. $u=4-\sqrt{x^2+y^2}$.

ג. $u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$, $(x>0\ ,\ y>0\ ,\ z>0)$.

ד. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$.

ה. $u=x^3-y^3-3x^2+6y^2+3x-12y+8$.

פתרון:

א. נמצא את הנקודות הקריטיות מהמערכת

$$\left.\begin{aligned} u'_x&=3x^2-3y=0\\ u'_y&=3y^2-3x=0\end{aligned}\right\}\to M_1(0,0)\ ,\ M_2(1,1)$$

נחשב $\Delta = u''_{xx}\cdot u''_{yy}-(u''_{xy})^2$ בנקודות M_2,M_1

$$u''_{xx} = 6x \quad , \quad u''_{xx}(M_1) = 0 \quad , \quad u''_{xx}(M_2) = 6$$
$$u''_{xy} = -3$$
$$u''_{yy} = 6y \quad , \quad u''_{yy}(M_1) = 0 \quad , \quad u''_{yy}(M_2) = 6$$

בנקודה M_1 מקבלים $\Delta = 0 - 9 < 0$. לכן M_1 נקודת אוכף.

בנקודה M_2: $\Delta = 27$ ו- $f_{xx}(M_2) > 0$, לכן M_2 נקודת מינימום ו- $u_{min} = -1$.

ב. קל לראות שלמערכת $u_x = 0 , u_y = 0$ אין פתרונות ולכן הנקודה הקריטית היחידה היא $M(0,0)$ שבה הנגזרות לא קיימות (בדוק!) לכן לא ניתן להשתמש במשפט 3. נבנה Δu

$$\Delta u = u(0+\Delta x, 0+\Delta y) - u(0,0) = -\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < 0$$

לכן (הגדרה 1) לפונקציה הנתונה יש מקסימום לוקלי ב- $(0,0)$ ו- $u_{max} = 4$.

ג. מהמערכת

$$u'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \quad , \quad u'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \quad , \quad u'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0$$

מקבלים שהנקודה $M(½,1,1)$ היא נקודה קריטית יחידה. נבנה את הדיפרנציאל השני

$$d^2u = u''_{xx}dx^2 + u''_{yy}dy^2 + u''_{zz}dz^2 + 2u''_{xy}dx\,dy + 2u''_{xz}dx\,dy + 2u''_{yz}dx\,dz$$

מכיוון ש-

$$u_{zz}(M) = 6 \; , \; u''_{yz}(M) = -2 \; , \; u''_{yy}(M) = 3 \; , \; u''_{xz}(M) = 0 \; , \; u''_{xy}(M) = -2 \; , \; u''_{xx}(M) = 4$$

נקבל $d^2u(M) = 4dx^2 + 3dy^2 + 6dz^2 - 4dx\,dy - 4dy\,dz$

נבנה את המטריצה של התבנית הנ"ל ונחשב את המינורים הראשיים.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} , \; A_1 = 4 \; , \; A_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \; , \; A_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32$$

לכן d^2u חיובית בנקודה $M(½,1,1)$ ו- $u_{min} = 4$.

ד. הפונקציה $z = z(x,y)$ נתונה על ידי משוואה, כלומר z פונקציה סתומה. נסמן $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11$.

נמצא נקודות קריטיות מהמערכת $z'_x = 0 , z'_y = 0$ וכן נקודות נוספות שבסביבתן הפונקציה הסתומה לא קיימת.

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x-2}{2z-6} = 0 \\ z'_y &= -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y+4}{2z-6} = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

נציב $x = 1 , y = -2$ במשוואה הנתונה נקבל $z^2 - 6z - 16 = 0$, כלומר $z_1 = 8 , z_2 = -2$. קיבלנו שתי נקודות קריטיות $M_1(1,-2,-2) , M_2(1,-2,8)$. נקודות קריטיות נוספות מקבלים מהתנאי ש- $F'_z = 0$. כלומר $z = 3$. לכן כל הנקודות על המעגל $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$ הן נקודות קריטיות. למיון הנקודות הקריטיות ניתן לעבוד לפי השיטה מהתרגיל הקודם, אך כאן נוח יותר לרשום את z בצורה מפורשת. המשוואה הנתונה היא משוואה ריבועית יחסית ל- z ולכן היא מגדירה שתי פונקציות סתומות

$$z_1 = 3 + \sqrt{20 - x^2 - y^2 + 2x - 4y} \quad , \quad z_2 = 3 - \sqrt{20 - x^2 - y^2 + 2x - 4y}$$

קל לראות של- z_1 יש מקסימום מקומי בנקודה $M_2(1,-2,8)$ ומינימום קצה בנקודות שבהם $z = 3$ ו- (x,y) על המעגל $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$. לפונקציה z_2 יש מינימום לוקלי ב- $M_1(1,-2,-2)$ ומקסימום קצה ב- $z = 3$ ו- (x,y) על המעגל $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$;

ה. נמצא נקודות קריטריות $M(1,2)$

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= 3x^2 - 6x + 3 = 0 \\ u'_y &= -3y^2 + 12y - 12 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow M(1,2)$$

נחשב את הנגזרות מסדר שני

$$u_{xx}(1,2) = 0 \; , \; u_{yy}(1,2) = 0 \; , \; u_{xy}(1,2) = 0$$

לכן הדיפרנציאל השני הוא אפס. קל לראות שערך הפונקציה בנקודה $(1,2)$ הוא $u(1,2) = 1$. בכל הנקודות בעלות הקואורדינטות $(1,y)$ כאשר $y < 2$ ערך הפונקציה

$$u(0,y) = -y^3 + 6y^2 - 12y + 8 = -(y-2)^3 + 1 > 1$$

ואם $y > 2$ מקבלים $u(0,y) < 1$ ולכן בנקודה $M(1,2)$ לפונקציה u אין אקסטרמום. M נקודת אוכף.

תרגילים:

מצא את האקסטרמום של הפונקציות הבאות:

1. $u = 4(x-y) - x^2 - y^2$.
2. $u = 2x^2 + 3y^2 - x - 7y$.
3. $u = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.
4. $u = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$.
5. $u = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.
6. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.
7. $z = x + y + 4\sin x \cdot \sin y$.
8. $u = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z)\ ,\ (a > 0)$.
9. $x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0, (a > 0)$.
10. $u = (x+1)^4 + (y-2)^4 + 5$.

4. אקסטרמום בתנאי. כופלי לגרנז'

בסעיפים הקודמים מצאנו אקסטרמום של פונקציות שכל משתניהן היו בלתי תלויים. יחד עם זאת, בבעיות רבות מופיעים תנאים נוספים המקשרים בין המשתנים.

אקסטרמום של פונקציות שהמשתנים שלהן מקיימים תנאים נוספים, נקרא **אקסטרמום בתנאי** או **אקסטרמום עם אילוצים**.

דוגמה 6: מצא את האקסטרמום של הפונקציה $z = x^2 + y^2$ עם האילוץ $x + y = 1$.

פתרון: בתרגיל זה עלינו למצוא את האקסטרמום של z לא מעל כל המישור xy אלא אך ורק מעל הישר $x + y = 1$. בדוגמה 17 מפרק 10 ראינו שהערך של z מעל הישר הנתון הוא $z = 2x^2 - 2x + 1$, לכן הבעיה היא למצוא את האקסטרמום הלוקלי של הפונקציה $z = 2x^2 - 2x + 1$. קל לראות ש- $z' = 4x - 2$ ו- $x = \frac{1}{2}$ היא נקודת מינימום. לכן לפונקציה z יש מינימום בתנאי בנקודה $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

דוגמה 7: מצא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y$ על חצי המעגל העליון $C = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\ ,\ y \ge 0\}$.

פתרון: נמצא אקסטרמום של z מעל שני קווים: הראשון הוא $y = \sqrt{1 - x^2}$, כאשר $|x| \le 1$ והשני $y = 0$ כאשר $|x| \le 1$.

א. מעל $y = \sqrt{1 - x^2}$ מקבלים $z = x^2 + 1 - x^2 + 2x - 2\sqrt{1 - x^2}$ או

$$z = 2x - 2\sqrt{1 - x^2} + 1\ ,\ -1 \le x \le 1$$

$$z' = 2 + \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \to x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

לכן הנקודות הקריטיות הן $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ ,\ M_2(-1,0)\ ,\ M_3(1,0)$.

הנקודות M_3, M_2 הן הקצוות של הקטע $[-1,1]$.

ב. מעל הקו $y = 0$ מקבלים $z = x^2 + 2x$, כאשר $-1 \le x \le 1$ הנקודות הקריטיות הן M_2 ו- M_3. היות והעקום C סגור וחסום והפונקציה הנתונה רציפה, לכן לפי משפט ויירשטרס היא מקבלת את הערך הגדול והקטן ביותר שלה מעל C. נחשב $z(M_1) = 1 - 2\sqrt{2}\ ,\ z(M_2) = -1\ ,\ z(M_3) = 3$. לכן $\max z = 3$ בנקודה $M_3(1,0)$ ו- $\min z = 1 - 2\sqrt{2}$ בנקודה $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

נציין שלא בכל המקרים ניתן בקלות כה רבה לחלץ את המשתנים מהאילוץ.

תנאי הכרחי לאקסטרמום בתנאי.

בסעיף זה למען פשטות הכתיבה, נסתפק בחקירת אקסטרמום של פונקציה עם שלושה אילוצים בלבד. יהי

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}) \tag{1}$$

והאילוצים

$$\begin{cases} F(x_1, \ldots, x_{k+3}) = 0 \\ G(x_1, \ldots, x_{k+3}) = 0 \\ H(x_1, \ldots, x_{k+3}) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

תהי הנקודה $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k+3}^0)$ על האילוצים, כלומר

$$F(M_0) = 0\ \ ,\ \ G(M_0) = 0\ \ ,\ \ H(M_0) = 0 \tag{2*}$$

הגדרה 5: לפונקציה (1) יש **מקסימום (מינימום) בתנאי** (2) בנקודה M_0 המקיימת את (*2) אם קיימת סביבה של הנקודה M_0, כך שלכל $M(x_1, x_2, \ldots, x_{k+3})$ מהסביבה הנ"ל הנמצאת על האילוצים $(F(M) = G(M) = H(M) = 0)$ מתקיים $f(M) \ge f(M_0)$ (או $f(M) \le f(M_0)$).

נניח שהפונקציות H, G, F, f רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות בסביבת M_0.

נשתמש בסימנים $(i=1,2,\ldots,k+3)$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}=F'_i$, $\frac{\partial G}{\partial x_i}=G'_i$, $\frac{\partial H}{\partial x_i}=H'_i$.

נניח שדרגת המטריצה

$$\begin{pmatrix} F'_1 & F'_2 & \cdots & F'_{k+3} \\ G'_1 & G'_2 & \cdots & G'_{k+3} \\ H'_1 & H'_2 & \cdots & H'_{k+3} \end{pmatrix}$$

שווה לשלוש, כלומר לפחות אחד מהדטרמיננטים מסדר שלוש שונה מאפס. נניח, למשל,

$$\frac{D(F,G,H)}{D(x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3})}=\begin{vmatrix} F'_{k+1} & F'_{k+2} & F'_{k+3} \\ G'_{k+1} & G'_{k+2} & G'_{k+3} \\ H'_{k+1} & H'_{k+2} & H'_{k+3} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{3}$$

אזי, לפי משפט 3 מפרק 14, המערכת (2) מגדירה מערכת יחידה

$$x_{k+1}=\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_k)\ ,\ x_{k+2}=\varphi_2(x_1,\ldots,x_k)\ ,\ x_{k+3}=\varphi_3(x_1,\ldots,x_k) \tag{4}$$

לכן מציאת אקסטרמום של פונקציה (1) עם אילוץ (2) הופכת לבעיית מציאת אקסטרמום מקומי לפונקציה

$$u=f(x_1,\ldots,x_k\ ,\ \varphi_1(x_1,\ldots,x_k)\ ,\ \varphi_2(x_1,\ldots,x_k)\ ,\ \varphi_3(x_1,\ldots,x_k)) \tag{5}$$

לפונקציה זו ניתן להשתמש בתוצאות מסעיפים 2 ו-3.

ברור שמ-(5) ניתן למצוא תנאים הכרחיים לקיום אקסטרמום, אך לשם כך יש לדעת את הפונקציות המפורשות (4). כדי להתגבר על קושי זה נשתמש בשיטת כופלי לגרנז'.

נניח שבנקודה $M_0(x_1^0,\ldots,x_{k+3}^0)$ לפונקציה (1) יש אקסטרמום בתנאי (2).

לכן בנקודה $N_0(x_1^0,\ldots,x_k^0)$ לפונקציה u מ-(5) יש אקסטרמום לוקלי. לפי משפט 1* $du=0$, כלומר

$$\sum_{i=1}^{k+3} f'_i dx_i = 0 \tag{6}$$

כל הנגזרות החלקיות מחושבות בנקודה M_0.

נשים לב ש- $dx_{k+1},dx_{k+2},dx_{k+3}$ הם דיפרנציאלים של פונקציות (4) של המשתנים $x_1,\ldots,x_k$ ולכן תלויים ב- $dx_1,dx_2,\ldots,dx_k$. מסיבה זו מ-(6) לא ניתן להסיק מסקנה שכל הנגזרות החלקיות מ-(6) מתאפסות. נשתמש **באילוצים** מ-(2) ונחשב את הדיפרנציאל של כל אחת מהפונקציות F,G,H

$$\sum_{i=1}^{k+3} F'_i dx_i = 0\ ,\quad \sum_{i=1}^{k+3} G'_i dx_i = 0\ ,\quad \sum_{i=1}^{k+3} H'_i dx_i = 0 \tag{7}$$

נכפיל כל אחת מהמשוואות של (7) ב- $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ בהתאמה ונחבר למשוואה (6), נקבל

$$\sum_{i=1}^{k+3} (f'_i+\lambda_1 F'_i+\lambda_2 G'_i+\lambda_3 H'_i)dx_i = 0 \tag{8}$$

נבחר $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ כך ש-

$$\begin{cases} f'_{k+1}+\lambda_1 F'_{k+1}+\lambda_2 G'_{k+1}+\lambda_3 H'_{k+1} = 0 \\ f'_{k+2}+\lambda_1 F'_{k+2}+\lambda_2 G'_{k+2}+\lambda_3 H'_{k+2} = 0 \\ f'_{k+3}+\lambda_1 F'_{k+3}+\lambda_2 G'_{k+3}+\lambda_3 H'_{k+3} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

מכיוון שהדטרמיננט של המערכת (9) הוא (3) ו- $\frac{D(F,G,H)}{D(x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3})}\neq 0$, אזי לפי משפט קרמר קיים פתרון יחיד $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

למספרים אילו קוראים **כופלי לגרנז'**. אם נציב אותם ב-(8), נקבל

$$\sum_{i=1}^{k} (f'_i+\lambda_1 F'_i+\lambda_2 G'_i+\lambda_3 H'_i)dx_i = 0$$

היות ו- $dx_i\ ,\ (i=1,\ldots,k)$ בלתי תלויים ליניארית מקבלים שכל המקדמים שלהם הם אפס. כלומר

$$f'_i+\lambda_1 F'_i+\lambda_2 G'_i+\lambda_3 H'_i = 0\ ,\quad i=i,2,\ldots,k \tag{10}$$

קיבלנו שאם M_0 היא נקודת אקסטרמום, אזי היא מקיימת את (9), (10) ו-(2).

מסקנה 2: על מנת למצוא נקודות קריטיות יש לפתור מערכת של $k+6$ משוואות (2), (9) ו-(10) עם $k+6$ נעלמים שהם $x_1,\ldots,x_{k+3},\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ולפתרונות שלה יש להוסיף את כל הנקודות שבהן הנגזרות לא קיימות והנקודות שבהן מתאפס הדטרמיננט של (9).

נרכז את כל התנאים שקיבלנו.

נבנה פונקצית עזר (**פונקצית לגרנז'**):

$$\psi = f+\lambda_1 F+\lambda_2 G+\lambda_3 H \tag{11}$$

מ-(2), (9) ו-(10), נקבל ש-

$$\psi'_i=0\ ,\ (i=1,\ldots,k+3)\ ,\ F=0\ ,\ G=0\ ,\ H=0 \tag{12}$$

הפתרונות של מערכת (12) הן הנקודות הקריטיות. לזה יש להוסיף את הנקודות שהוזכרו במסקנה 2.

דוגמה 8: מצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה $u = x^2 + y^2 + z^2$, מעל האילוץ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , \quad (a>b>c>0)$$

פתרון: נבנה את פונקצית לגרנז' $\psi = x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$.

נשתמש ב-(12) למציאת הנקודות הקריטיות

$$\psi'_x = 2x+2\lambda\frac{x}{a^2}=0 \ ,\ \psi'_y=2y+2\lambda\frac{y}{b^2}=0 \ ,\ \psi'_z=2z+2\lambda\frac{z}{c^2}=0 \ ,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

נפתור את המערכת ונקבל

$$\lambda_{1,2}=-c^2, M_{1,2}(0,0,\pm c) \ ,\ \lambda_{3,4}=-b^2, M_{3,4}(0,\pm b,0) \ ,\ \lambda_{5,6}=-a^2, M_{5,6}(\pm a,0,0)$$

תוך שימוש במשפט ויירשטרס מקבלים שלפונקציה הנתונה הערך המקסימלי עם אילוץ בנקודות $M_{5,6}$ והערך המינימלי ב- $M_{1,2}$.

דוגמה 9: מצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה $u=2x^4+y^4-x^2-2y^2$ מעל האילוץ $x^2+y^2=1$.

פתרון:

דרך א': כמו בתרגיל הקודם נבנה פונקצית לגרנז'

$$\psi = 2x^4+y^4-x^2-2y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$$

ולמציאת נקודות קריטיות נקבל מערכת משוואות

$$\begin{cases}\psi_x = 8x^3-2x+2\lambda x=0\\ \psi_y=4y^3-4y+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

פתרונותיה $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$, $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{6}},-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$, $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{6}},\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$ הן נקודות קריטיות.

דרך ב': בשיטת לגרנז' מקבלים מערכת משוואות שלא תמיד ניתן לפתור בקלות. לעיתים נוח יותר לחלץ משתנה אחד מן האילוץ ולהציב בפונקציה.

מהאילוץ נקבל $y^2=1-x^2$ (*), נציב ב- u, נקבל

$$u = 2x^4+(1-x^2)^2-x^2-2(1-x^2) = 3x^4-x^2-1$$

נמצא נקודות קריטיות של הפונקציה הנ"ל $u'=12x^3-2x=0$, נקבל $x=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$.

תוך שימוש ב-(*) נקבל נקודות קריטיות

$$\left(-\sqrt{\frac{1}{6}},\pm\sqrt{\frac{5}{6}}\right),\ \left(\sqrt{\frac{1}{6}},\pm\sqrt{\frac{5}{6}}\right),\ (0,\pm1)$$

לנקודות אלו נצרף נקודות שבהן הנגזרת החלקית לפי y של האילוץ שווה לאפס $F'_y=2y=0$, כלומר $y=0$ והנקודות הן $(0,\pm1)$.

שים לב: למציאת נקודות קריטיות בשיטת ההצבה יש להוסיף נקודות שבהן נגזרת החלקית המתאימה של האילוץ מתאפסת ו/או שני הנגזרות החלקיות יחד מתאפסות.

תנאי מספיק למיון נקודות קריטיות.

נניח שבנקודה M_0 מתקיימים התנאים ההכרחיים (12) ובנוסף מניחים שהפונקציות f, F, G, H בעלות נגזרות חלקיות רציפות עד סדר שני.

לכל נקודה M מסביבת M_0 המקיימת את (2), כלומר

$$H(M)=H(M_0)=0 \ ,\ G(M)=G(M_0)=0 \ ,\ F(M)=F(M_0)=0$$

נחשב את התוספת לפונקצית לגרנז' בנקודה M_0.

$$\Delta\psi = \psi(M)-\psi(M_0) = f(M)+\lambda_1F(M)+\lambda_2G(M)+\lambda_3H(M)-$$
$$-[f(M_0)+\lambda_1F(M_0)+\lambda_2G(M_0)+\lambda_3H(M_0)] = f(M)-f(M_0) = \Delta u$$

כלומר $\Delta\psi=\Delta u$. זאת אומרת שהפונקציה f עם האילוצים (2) ו- ψ הן בעלות אותו אקסטרמום.

לפונקציה ψ ניתן להשתמש בתוצאות סעיף 3. כלומר: אם $d^2\psi(M_0)>0$ אזי לפונקציה ψ (זאת אומרת גם ל- f) יש מינימום לוקלי, ואם $d^2\psi(M_0)<0$ אזי יש מקסימום לוקלי.

במקרה שהתבנית הריבועית $d^2\psi(M_0)$ מעורבת אין אקסטרמום לפונקציה ψ, אזי גם ל- f.

נחשב $d^2\psi$. נשים לב ש- $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}$ אינם משתנים בלתי תלויים

$$d^2\psi = \left(\sum_{i=1}^{k+3} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i\right)^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x_{k+1}} d^2x_{k+1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_{k+2}} d^2x_{k+2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_{k+3}} d^2x_{k+3}$$

ומשום שבנקודה M_0 מתקיים $\psi'_{k+1} = \psi'_{k+2} = \psi'_{k+3} = 0$ מקבלים נוסחה ל- $d^2\psi$ באותה צורה כמו בסעיף 3

$$d^2\psi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_{k+3}} dx_{k+3}\right)^2 \psi \qquad (13)$$

בחישוב של $d^2\psi$ יש להציב במקום $dx_{k+3}, dx_{k+2}, dx_{k+1}$ את הערכים כפתרון המערכת (7).

דוגמה 10: מצא את נקודות האקסטרמום של הפונקציה $u = xyz$ עם האילוץ $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

פתרון: נבנה את פונקצית לגרנז' $\psi = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$. נשתמש ב-(12) למציאת נקודות קריטיות

$$\psi'_x = yz + 2\lambda x = 0 \ , \ \psi'_y = xz + 2\lambda y = 0 \ , \ \psi'_z = xy + 2\lambda z = 0 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

לאחר חישוב נקבל

1) $\lambda = \frac{1}{2}$, $M_1(-1,-1,-1)$, $M_2(-1,1,1)$, $M_3(1,-1,1)$, $M_4(1,1,-1)$

2) $\lambda = -\frac{1}{2}$, $M_5(1,1,1)$, $M_6(1,-1,-1)$, $M_7(-1,-1,1)$, $M_8(-1,1,-1)$

תוך שימוש ב-(13) והנגזרות $\psi''_{xx} = \psi''_{yy} = \psi''_{zz} = 2\lambda$, $\psi''_{xy} = z$, $\psi''_{yz} = x$, $\psi''_{xz} = y$ נרשום את $d^2\psi$

$$d^2\psi = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2z\,dx\,dy + 2y\,dx\,dz + 2x\,dy\,dz \qquad (14)$$

מהאילוץ מקבלים את הקשר בין dz, dy, dx

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz = 0 \qquad (15)$$

נחקור את (14) ו-(15) בנקודה $M_1(-1,-1,-1)$ עבור $\lambda = \frac{1}{2}$ נקבל

$d^2\psi = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dx\,dy - 2dx\,dz - 2dy\,dz$ ו- $dx + dy + dz = 0$ נציב $dz = -dx - dy$ בביטוי של $d^2\psi$ נקבל $d^2\psi = 4dx^2 + 4dx\,dy + 4dy^2$.

קל לבדוק שהתבנית הריבועית $d^2\psi$ חיובית ולכן בנקודה $M_1(-1,-1,-1)$ לפונקציה הנתונה יש מינימום בתנאי השווה ל- $u(-1,-1,-1) = -1$.

באופן דומה מקבלים שבנקודות M_4, M_3, M_2 יש מינימום ובנקודות M_5, M_6, M_7, M_8 יש מקסימום בתנאי (בדוק).

דוגמה 11: הוכח

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2$$

פתרון: נמצא את האקסטרמום של הפונקציה $u = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}{n}$ עם האילוץ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c$ (c – קבוע).

נבנה את פונקצית לגרנז' $\psi = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} + \lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - c)$

נמצא את הנקודות הקריטיות מהמערכת

$$\begin{cases} \psi'_i = \frac{2}{n} x_i + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots, n)$$

היות ו- $x_i = -\frac{\lambda n}{2}, (i = 1, 2, \ldots, n)$ מקבלים $-\left(\frac{\lambda n}{2} + \frac{\lambda n}{2} + \ldots + \frac{\lambda n}{2}\right) = c$, מכאן $\lambda = -\frac{2c}{n^2}$, כלומר יש נקודה קריטית יחידה $M\left(\frac{c}{n}, \frac{c}{n}, \ldots, \frac{c}{n}\right)$. היות ו- $\psi'_{ii} = \frac{2}{n}$ ו- $\psi'_{ij} = 0 \ , \ i \neq j$ מקבלים שהדיפרנציאל השני בנקודה M שווה ל-

$$d^2\psi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^2 \psi = \frac{2}{n}(dx_1^2 + \ldots + dx_n^2)$$

ולכן מקבלים תבנית ריבועית חיובית, כלומר לפונקציה u בנקודה M יש מינימום מקומי בתנאי והוא

$$u_{min} = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{c}{n}\right)^2 + \left(\frac{c}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{c}{n}\right)^2\right] = \frac{c^2}{n^2} = \frac{1}{n^2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$$

ולכן מכיוון ש- $u \geq u_{min}$ מקבלים את השיוויון הדרוש.

דוגמה 12: מצא את האקסטרמום של הפונקציה $u = xy + yz$ עם האילוצים: $y + z = 2$, $x^2 + y^2 = 2$, $(x > 0, y > 0)$.

פתרון: נבנה את פונקצית לגרנז' $\psi = xy + yz + \lambda_1(y + z - 2) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 2)$.

נפתור את המערכת

$$\psi'_x = y + 2\lambda_2 x = 0 \quad , \quad \psi'_y = x + z + 2\lambda_2 y + \lambda_1 = 0 \quad , \quad \psi'_z = y + \lambda_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2 \quad , \quad y + z = 2$$

ונקבל ש- $\lambda_1 = -1 , \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ והנקודה הקריטית היא $M(1,1,1)$. נחקור את הדיפרנציאל השני $d^2\psi$. לאחר חישוב הניגזרות בנקודה M נקבל

$$d^2\psi = -dx^2 - dy^2 + 2dx\,dy + 2dy\,dz$$

מהאילוצים נקבל $2x\,dx + 2y\,dy = 0$, $dy + dz = 0$ ובנקודה M: $dx + dy = 0$, $dy + dz = 0$
לכן $dx = dz = -dy$.

נציב ב- $d^2\psi$ נקבל $d^2\psi = -6dx^2$ שלילית ולכן בנקודה $M(1,1,1)$ לפונקציה יש מקסימום מקומי בתנאי השווה ל- $u_{max} = u(1,1,1) = 2$.

תרגילים:

בתרגילים 1-4 חקור על האקסטרמום את הפונקציות הבאות:

1. $u = x + y + z$ כאשר $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.
2. $u = xy^2z^3$ כאשר $x + 2y + 3z = 6$, $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$.
3. $u = \sum_{i=1}^{k} x_i^n$ כאשר $\sum_{i=1}^{k} x_i = ka$, $(a > 0)$.
4. $u = xyz$ כאשר $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.
5. על הפרבולה $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$ מצא את הנקודה הקרובה ביותר לישר $9x - 7y + 16 = 0$ (רמז: המרחק מהנקודה (x_0, y_0) עד הישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$).
6. מצא נקודה על הפרבולה $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$ הקרובה ביותר לישר $3x - 6y + 4 = 0$.

7. מצא את המרחק הגדול ביותר של נקודות המישור xy מהמשטח $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6$.
8. מצא את הנקודות על האליפסויד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ הקרובות ביותר והרחוקות ביותר מן המישור $3x + 4y + 12z = 288$.

5. אקסטרמום מוחלט

בסעיף זה נחקור פונקציות רציפות מעל תחום חסום וסגור D. לפי משפט וויירשטרס פונקציה רציפה מקבלת את הערך המקסימלי והערך המינימלי שלה ב- D. את הערכים האלו הפונקציה עשויה להשיג בנקודות הקריטיות הנמצאות בתוך התחום D או בנקודות קריטיות על השפה של D או בנקודות סינגולריות של שפת D. לכן כדי למצוא את הערך המקסימלי והמינימלי יש למצוא את כל הנקודות הקריטיות (הפנימיות ועל השפה, כולל נקודות סינגולריות של השפה) ועל ידי השוואת ערכי הפונקציה בנקודות אלו נמצא מקסימום ומינימום מוחלטים בתחום D.

דוגמה 13: מצא את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום $D = \{(x,y) : x + y \ge -3, x \le 0, y \le 0\}$.

פתרון: נמצא תחילה נקודות קריטיות לאקסטרמום לוקלי (סעיף 1)

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 2x - y + 1 = 0 \\ z'_y &= 2y - x + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

כלומר $M_1(-1,-1)$ היא נקודה קריטית ונמצאת בתחום D.

נעבור למציאת נקודות קריטיות על השפה.

השפה מורכבת משלושה ישרים: 1) $x = 0$. 2) $y = 0$. 3) $x + y = -3$ ונקודות סינגולריות (פינתיות) $M_2(0,-3)$, $M_3(-3,0)$, $M_4(0,0)$.

נטפל בכל אחד מהמקרים הנ"ל:

1. על הישר $x = 0$ נקבל את הפונקציה $z = y^2 + y$, $z' = 2y + 1 = 0$ מקבלים $y = -\frac{1}{2}$. לכן הנקודה $M_5(0,-\frac{1}{2})$ היא נקודה קריטית נוספת.
2. על הישר $y = 0$ נקבל $z = x^2 + x$, באופן דומה נקבל את הנקודה הקריטית הבאה $M_6(-\frac{1}{2},0)$.

3. על הישר $y=-x-3$ נקבל $z=x^2+(-x-3)^2-x(-x-3)+x+(-x-3)$ או $z=3x^2+9x+6$, $z'=6x+9=0$, $x=-\frac{3}{2}$.

לכן הנקודה $M_7\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ היא גם חשודה לאקסטרמום.

נרכז את הנקודות הקריטיות ואת ערכי הפונקציה בנקודות אלו בטבלה:

M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
z(M)	-1	6	6	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$

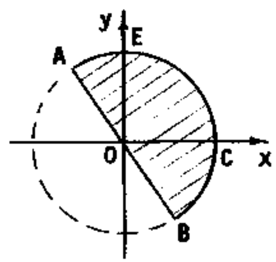
אנו רואים כי הפונקציה מקבלת מעל התחום D ערך מקסימלי בנקודה M_3 ו- M_2 השווה ל- 6 וערך מינימלי בנקודה M_1 השווה ל- -1.

דוגמה 14: מצא את הערך הגדול והקטן ביותר של $z=x^2+y^2-12x+16y$, בתחום $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\ ,\ 3x\ge -y\}$.

פתרון:

א. נמצא נקודות חשודות לאקסטרמום של הפונקציה הנתונה (סעיף 1)

$$\left.\begin{array}{l} z'_x=2x-12=0 \\ z'_y=2y+16=0\end{array}\right\} \to M_1(6,-8)$$



הנקודה M_1 נמצאת מחוץ לתחום D ולכן אינה קריטית.

ב. נמצא נקודות של אקסטרמום בתנאי.

על החלק המעגלי של שפת D נבנה פונקצית לגרנז'

$$\psi=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

ונקבל $\psi'_x=2x-12+2\lambda x=0$, $\psi'_y=2y+16+2\lambda y=0$, $x^2+y^2=1$.

לאחר פתירת המערכת מקבלים שתי נקודות $M_2\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ ו- $M_3\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

הנקודה M_3 נמצאת מחוץ לתחום D ולכן אינה נקודה קריטית. קיבלנו נקודה קריטית נוספת M_2.

נמצא נקודות קריטיות מעל המרכיב השני של שפת D והוא $3x=-y$.

נציב $y=-3x$ בפונקציה z ונקבל $z=10x^2-60x$ מכאן $z'=20x-60=0, x=3$.
לכן נקודה $M_4(3,-9)$ נקודה קריטית אך אינה נמצאת בתחום שלנו D.

ג. נמצא את כל הנקודות הסינגולריות של שפת התחום והן: A ו-B נקודות הקצה. קל לראות $A\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

נרכז את כל הנקודות הקריטיות וערכי הפונקציה באותן הנקודות בטבלה:

נקודה M	M_2	A	B
z(M)	6.6	$1+6\sqrt{10}$	$1-6\sqrt{10}$

לכן הפונקציה מקבלת את הערך המקסימלי שלה בנקודה A והערך המינימלי בנקודה B.

תרגילים:

מצא את הערך המקסימלי והמינימלי של הפונקציות הבאות בתחומים הנתונים:

1. $u=x^2y(4-x-y)$ ב- $\{(x,y):x+y\le 6, x\ge 0, y\ge 0\}$.
2. $u=e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$ ב- $\{(x,y):x^2+y^2\le 4\}$.
3. $u=y^2+4z^2-4yz-2xz-2xy$ ב- $\{(x,y,z):2x^2+3y^2+6z^2\le 1\}$.
4. $u=x^3+y^3-3xy$ ב- $\{(x,y):x^2+y^2\le 2\}$.
5. $u=2x^4+y^4-x^2-2y^2$ ב- $\{(x,y):x^2+y^2\le 2\}$.
6. $u=(x^2+2xy+2y^2)e^{-x^2-y^2-xy}$ ב- $\{(x,y):x^2+xy+y^2\le\frac{1}{4}\}$.

תרגילים נוספים:

1. רשום את פיתוח טיילור של $F(x,y)=(x^2+5y+1)^2$ בסביבת הנקודה (1,1).
2. המישור $x+y+z=1$ חותך את הפרבולויד $z=x^2+y^2$ באליפסה. מצא על האליפסה הנ"ל נקודה מרוחקת ביותר ונקודה הקרובה ביותר לראשית.

3. יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות רציפות ובעלות נגזרות רציפות עד סדר שני. הוכח שהפונקציה $u=f(x+\sqrt{y})+g(x-\sqrt{y})$ מקיימת את המשוואה $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

4. הוכח כי $u=e^{x^2 z \; yz}$ מקיימת את המשוואה $x\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}-2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

5. $f(x,y)$ רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות בכל המישור ו- $\nabla f(-3,6)=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$. נגדיר $g(x,y,z)=f(x^2-y^2,xyz)$, חשב $\nabla g(1,2,3)$.

6. יהיו הפונקציות $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ דיפרנציאביליות והפונקציה $f(u,v)$ רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות. נגדיר פונקציה $F(x,y,z)=f(u(x,y,z),v(x,y,z))$. הוכח כי $\nabla f=\frac{\partial f}{\partial u}\nabla u+\frac{\partial f}{\partial v}\nabla v$.

7. המשוואה $xy^2+yz^2+2x^2z=4$ מגדירה פונקציה $z=z(x,y)$ המקיימת $z(1,2)=0$. חשב $\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,2)$.

8. תהי פונקציה $f(x,y,z)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בכל נקודה של העקום L $\frac{1}{2}\le t\le 2$, $z=\sin\frac{\pi t}{2}$, $y=(1+t^4)$, $x=3+\ln(t^3)$ ו- $f(3,2,1)=0$ ו- $\nabla f(3,2,1)=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$:

א. הוכח כי $(3,2,1)$ נקודת חיתוך של העקום L עם המשטח $f(x,y,z)=0$ וחשב קוסינוס הזווית בין המשיק ל- L ובין הוקטור הניצב למשטח $f(x,y,z)=0$ בנקודה זו.

ב. תהי $g(x,y)=f(\sqrt{y},x,\sqrt{y}-x)$ עבור פונקציה f מסעיף א', חשב $\nabla g(2,9)$.

9. מצא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציות:

א. $f(x,y)=2x-y$ מעל התחום $\{(x,y):|x|\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$.

ב. $f(x,y)=x^2-2y^2$ מעל התחום $\{(x,y):y\ge|x|,\ x^2+(y+1)^2\le 25\}$.

ג. $f(x,y)=xy$ מעל העקום $\{(x,y):x^2+4y^2=5,\ y\ge 0,\ y\ge -x\}$.

10. נתונה הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3 y\sin y}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א. בדוק רציפות בנקודה $(0,0)$. ב. מצא $f'_y(0,0)$, $f'_x(0,0)$.

ג. בדוק דיפרנציאביליות ב- $(0,0)$.

11. מצא בתחום $D=\{x^2-y^2\le 1,\ -\frac{3}{4}\le y<\frac{3}{4}\}$ נקודה שבה הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)=x^3+\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}$ בכיוון הוקטור $\mathbf{a}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ מקבלת ערך מקסימלי.

12. מצא את הנקודה הגבוהה ביותר על המשטח $z=(y-x^2-1)x+1$ הנמצאת מעל התחום החסום על ידי העקומים $y=x^2$ ו- $x+y=2$.

13. מצא את z'_x ו- z'_y כאשר $z=u\ln v+x$, $u=x^2$, $v=\frac{x}{1+y}$ ורשום את משוואות המשיק למשטח $z=z(x,y)$ בנקודה $(1,0\ 1)$.

14. הוכח כי מערכת

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-u^2+v^2=1\\ x^2-y^2+z^2+u^2+v^2=17\end{cases}$$

מגדירה פונקציות סתומות $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ בסביבת הנקודה $x_0=y_0=1, z_0=v_0=2, u_0=3$ וחשב $\frac{\partial v}{\partial x}$ בנקודה $(1,1,2)$.

15. נתונה המערכת $u=e^y\cos[\pi(e^x+e^{-x})], v=e^y\sin[\pi e^x-e^{-x}]$. בדוק כי המערכת מגדירה מערכת של פונקציות סתומות $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ בסביבת הנקודה $(u,v)=(1,0)$ שבה $x(1,0)=y(1,0)=0$. חשב $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$ באותה נקודה.

16. יהיו $z=f(x,y)$ ו- $u=g(x,y)$ מוגדרות על ידי המערכת

$$\begin{cases}\sin(xy)+x^2-y^2+z^3-u^3=6\\ xz-yu+e^x=0\end{cases}$$

חשב $\nabla f(0,1)$ אם ידוע כי $f(0,1)=2$ ו- $g(0,1)=1$.

17. מצא את משוואת המשיק לאליפסה $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 8 \end{cases}$ בנקודה $(1,2,5)$.

18. תהי הפונקציה $F(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$. הוכח אם לכל x מתקיים $F(x,x^2) = F(x,2x) = 2$ אזי $F'_x(0,0) = F'_y(0,0)$.

19. האם הפונקציה $f(x,y) = (x+y)\sqrt{x^2+y^2}$ דיפרנציאבילית בנקודה:

א. $(0,0)$. ב. $(1,2)$.

20. מצא את משוואת המשיק לעקום $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 5x \end{cases}$ בנקודה $(1,2,\sqrt{20})$.

21. מצא את האקסטרמום של $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ עם האילוצים $x + y + z + t = 8$, $2x + 3y - z + 2t = 0$.

22. מצא נקודה על האליפסה $x^2 + 2.5y^2 - 2xy - 16 = 0$ הקרובה ביותר והרחוקה ביותר מראשית הצירים.

רשימת מקורות

[1] **בן-ציון קון, סמי זעפרני**, חדו"א 1, בק חיפה 2000.

[2] **בן-ציון קון**, וקטורים וגיאומטריה אנליטית, בק חיפה 1998.

[3] **אברהם ברמן, בן-ציון קון**, אלגברה ליניארית, בק חיפה 1999.

[4] **ר. מייזלר**, חשבון אינפיניטסימלי, בהוצאת אקדמון.

[5] **ש. גירון**, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי במספר משתנים (ספר תרגילים), אקדמיה 2000.

[6] **אלכס קופרמן**, חדו"א 2, חוברת תרגילים, מכלול, הטכניון.

[7] **G.M. Fikhtengolts**, The Foundamentals of Mathematical Analysis, V.I,II, Pergamon Press.

[8] **Thomas & Finney**, Calculus and Analytic Geometry, Addison-Wesley Publishing Company, 7th Ed., 1988.

[9] **R. Courant**, Differential and Integral Calculus, Vol. II, Blackie & Son Limoted.

[10] **Walter Rudin**, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill.

סימנים

$\sum_{k=1}^{n} a_k$	הסכום של k איברים
$\{a_n\}$	סדרת מספרים
$\{f_n(x)\}$	סדרת פונקציות
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \vec{AB}$	וקטורים
a, b, α	סקלרים

מספר ליד הסימן מציין את המקום בה הוא מופיע בפעם הראשונה:

E_k	מרחב אוקלידי	138
$d(M_1, M_2)$	מרחק בין שתי נקודות	138
C, C^n	מחלקות של פונקציות	199
$D_L f(M_0)$, $D_a f$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial L}$	נגזרת מכוונת	189
$\nabla \cdot$	אופרטור נבלה	194
∇u	גרדיאנט u	194
$\Delta \cdot$, $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$	אופרטור לפלס	200, 201
$d \cdot$	אופרטור הדיפרנציאל	205
du	דיפרנציאל u	186
$d^k u$	דיפרנציאל מסדר k	204

מפתח מונחים

תשובות

לעמוד 3: **1.** א. $1+0+1+0+1+\dots$. ב. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{10}+\frac{2}{17}+\dots$.
ג. $\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\dots$. **2.** א. n^2. ב. $n(n+2)$.
ג. $n^{(-1)^{n+1}}$. ד. $\frac{2n}{3n+2}$. **3.** א. $S_{2n}=\frac{2n}{4n+1}$, $S_{2n+1}=\frac{2n+1}{4n+3}$.
ב. $S_{2n}=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}$, $S_{2n+1}=S_{2n}-\frac{1}{2n+2}$.
ג. $S_{2n}=\frac{1}{10}-\frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}-\frac{1}{2}\frac{1}{3^{2n}}$, $S_{2n+1}=S_{2n}-\frac{2^{2n+1}+1}{3^{2n+1}}$.
ד. $S_{2n}=2n(1+2n)$, $S_{2n+1}=2(n+1)(2n+1)$. **4.** א. $|x|<\frac{1}{2}$.
ב. $|x|>1$.

לעמוד 4: **1.** $\frac{1}{6}$. **2.** $1-\sqrt{2}$. **3.** $\frac{1}{12}$. **4.** $\frac{1}{2(p+1)(p+2)}$. **5.** $\frac{1}{\ln 3}$.

לעמוד 8: **3.** א. $S=7.38, n=7$. ב. $S=1.98, n=11$.

לעמוד 10: **5.** לא, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

לעמוד 14: **1.** הטורים א׳,ג׳,ד׳,ו׳,ז׳ מתכנסים, טור ב׳ מתבדר. **5.** טורים א׳,ב׳,ג׳ מתכנסים, טור ד׳ מתבדר. **7.** טורים ב׳,ה׳ מתכנסים, טורים א׳,ג׳,ד׳ מתבדרים.

לעמוד 19: הטורים 1, 2, 4, 5, 7-15. הטורים 3, 6, 16 מתבדרים.

לעמוד 22: **2.** טורים א׳,ג׳,ד׳ מתכנסים, טור ב׳ מתבדר.
3. $p>1$, $\frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}$. **4.** 1.193.

לעמוד 25: **2.** הטורים א׳,ב׳,ד׳ מתכנסים, טור ג׳ מתבדר.

לעמוד 29: **1.** א׳,ג׳ – כן. ב. לא.

לעמוד 37: **1.** הטורים ב׳,ג׳,ד׳,ה׳ מתכנסים, טור א׳ מתבדר. **3.** $|R_4|<\frac{1}{120}$,
$|R_5|<\frac{1}{720}$. **4.** א. $n=99$. ב. $n=10^6$.

לעמוד 41: 1, 2, 3, 4 מתכנסים.

לעמוד 44: **1.** מתכנס. **2.** מתכנס.
תרגילים נוספים: **3.** מתכנס בהחלט עבור $\alpha>1$, מתכנס בתנאי כאשר $0<\alpha\le 1$. **4.** מתכנס. **5.** מתכנס בתנאי. **6.** מתכנס בהחלט כאשר $p>1$, אם $0<p\le 1$ מתכנס בתנאי. **7.** מתבדר. **8.** בהחלט עבור $\alpha>2$, בתנאי כאשר $0<\alpha\le 2$. **9.** בהחלט עבור $\alpha>1$, בתנאי כאשר $0<\alpha\le 1$. **10.** מתכנס לכל a. **11.** מתכנס. **12.** **13.** מתכנס בהחלט. **14.** **15.** **16.** מתכנס. **17.** מתבדר. **18.** $-\frac{2}{7}$.

לעמוד 54: **1.** א. $f(x)=0$, כן. ב. $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$, לא. **2.** $f(x)=0$, כן.
3. א. $f(x)=0$, לא. ב. כן. **4.** $f(x)=x$, כן. **5.** $f(x)=\frac{\pi}{2}$, לא.
6. $f(x)=\frac{\pi}{2}x$, כן. **7.** $f(x)=\ln x$, כן. **9.** $\alpha<1$.

לעמוד 57: **1.** $x>1$. **2.** $1<x<e$ בהחלט, $x\ge e$ בתנאי. **3.** $-\infty<x<\infty$.
4. $-\infty<x<\infty$. **5.** $x<0$ בהחלט, $x\ge 0$ מתבדר. **6.** $x\ge\frac{16}{3}$, $x<\frac{14}{3}$.
7. $|x|>1$. 8. $\frac{1}{3}<|x|<1$. **9.** $x\le-\frac{2}{3}$, $x>0$. **10.** $-1<x\le 1$.
11. $-\infty<x<\infty$.

לעמוד 66: **1.** א. רציפה ב-$|x|<1$. ב. רציפה ב-$|x|<\infty$. ג. רציפה ב-$|x|<\infty$ פרט ל-$x=0$ שבה היא לא רציפה. ד. רציפה ב-$0<x<\infty$, לא רציפה ב-$x=0$. ה. לא רציפה ב-$x=0$. ו. רציפה.

לעמוד 71: **1.** כן, פרט ל-$x=0$. **2.** כן. **3.** כן, פרט ל-$x=0$. **4.** כן. **5.** כן.

לעמוד 76: **1.** $|x|<\frac{1}{7}$. **2.** $-\frac{4}{3}\le x<-\frac{2}{3}$. **3.** $-1\le x<1$. **4.** $|x|\le 1$. **5.** $|x|<1$.
6. $|x|<\infty$. **7.** $-7<x<-3$. **8.** $-e-2<x<e-2$.

לעמוד 80: **1.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$. **2.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $|x|<1$. **3.** $\frac{2}{(1-x)^3}$, $|x|<1$.
4. $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$. **5.** 3.

לעמוד 87: **1.** $\sum_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n 2^{n+1}]x^n,\ |x|<\frac{1}{2}$. **2.** $-\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n,\ |x|<1$.
3. $2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)3^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ |x|<\infty$.
4. $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2^{3n+1}\cdot n!}x^{2n},\ |x|<2$. **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2},|x|\le 1$.
6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},|x|<\infty$. **7.** $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1}-3^{-n-1})(x+4)^n,-6<x<-2$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1},|x|<\infty$. **9.** $e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!},|x|<\infty$.
10. $|R|<\frac{1}{11}$. **11.** 0.4931. **12.** 0.026. **13.** $|x|<0.69$.
14. $\text{arctg}2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$.

לעמוד 88: תרגילים נוספים: **5.** לא. **6.** $n=2$, $\frac{7}{16}$. **7.** א. $1\le x\le 2$. ב. $1\le x\le 2$.
ג. $x\in[\alpha,\beta]\subset(1,2)$.

לעמוד 90: **2.** א. $G_1(a,-b)$. ב. $G_2(-a,b)$. ג. $G_3(-a,-b)$. **3.** א. $X=1,Y=3$.
ב. $X=-4,Y=-2$. ג. $X=1,Y=-7$. ד. $X=5,Y=3$. **4.** א. $\sqrt{10}$.
ב. $2\sqrt{5}$. ג. $5\sqrt{2}$. ד. $\sqrt{34}$. **5.** 34. **6.** $8\sqrt{3}$. **7.** $(-2,0),(6,0)$.

לעמוד 91: **1.** $D(1,-5),C(5,-3)$. **2.** $(3,1),(2,-1)$.
3. $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

לעמוד 92: **1.** 14. **2.** 20. **3.** $(5,0)$ או $\left(-\frac{1}{3},0\right)$.

לעמוד 94: **1.** $(8,-17),(5,-9),(-2,5),(1,-3)$. **2.** $(-2,-1)$. **3.** $A(10,-5)$.
5. $(6,-6)$. **6.** $n=-2,m=7$. **7.** א. $a\ne 3$. ב. $a=3,b\ne 2$.
ג. $a=3,b=2$. **8.** א. $2x+2y=7,4x+4y=-3$. ב. $8y=-13,4x=-1$.
9. $x-3y=5$ או $3x+y=5$.

לעמוד 96: **1.** א. $x^2+y^2=16$. ב. $(x-1)^2+y^2=1$. ג. $(x+2)^2+(y+1)^2=20$.
ד. $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ או $\left(x+\frac{202}{49}\right)^2+\left(y-\frac{349}{49}\right)^2=\left(\frac{185}{49}\right)^2$.
2. $2x-5y+19=0$. **4.** $4y=7x$.

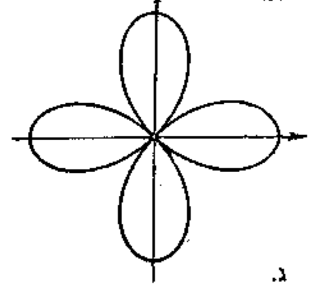
לעמוד 98: **1.** $x^2+4y^2=20$. **2.** $\frac{4}{9}\sqrt{5}$. **3.** $x=\pm 3y$. **4.** $5x+6y=11$.
5. $y+2x=\pm 12$. **6.** $2x+5y=4$.

לעמוד 100: **1.** $x^2-y^2=18$. **3.** $5x-6y=\pm 27$. **4.** $13x+18y=-15$, $5x-6y=9$.

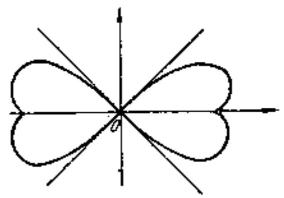
לעמוד 101: **1.** א. $\left(\frac{5}{4},0\right)$, $x=-\frac{5}{4}$. ב. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $x=\frac{1}{2}$. ג. $\left(0,-\frac{3}{4}\right)$, $y=\frac{3}{4}$.
2. א. $x+6y=-18$. ב. $8x-12y+27=0$.

לעמוד 104:

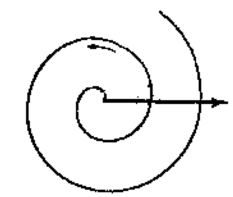
א.



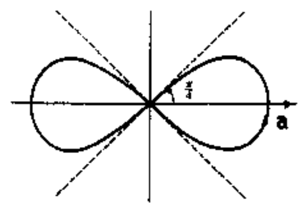
ב.



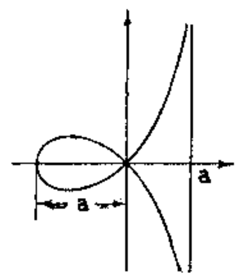
ג.



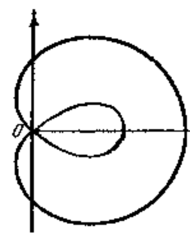
ד.



ה.



ו.



לעמוד 105: **1.** א. $x=a\cos t, y=a\sin t$. ב. $x=a\cos^4 t, y=a\cos^3 t\cdot\sin t$.
ג. $x=a\sqrt{\cos 2t}\cdot\cos t, y=a\sqrt{\cos 2t}\cdot\sin t$.
ד. $x=a(1+\cos t)\cdot\cos t, y=a(1+\cos t)\cdot\sin t$. ה. $x=t^3, y=t^2$.
ו. $x=t^2, y=t^3$. **2.** א. $x^3+y^3=3axy$. ב. $y^2=\frac{x^3}{a-x}$.
ג. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. ד. $x+\sqrt{y(2a-y)}=a\cdot\arccos\frac{a-y}{a}$.

לעמוד 109: **2.** $\vec{OA}=\vec{EF}, \vec{OB}=\vec{FA}, \vec{OC}=\vec{AB}, \vec{OD}=\vec{BC}, \vec{OE}=\vec{CD}, \vec{OF}=\vec{DF}$.
4. $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{109}, |\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\sqrt{229}$. **5.** א.ד. **a** ו- **b** קוליניאריים ובעלי אותו כיוון. ב.ג. **a**, **b** קוליניאריים בעלי כיוונים נגדיים.

לעמוד 116: **1.** $y=-7, y=11$.
2. א. $(1,1,1),(-1,-1,-1)$. ב. שמונה נקודות בעלות קואורדינטות ± 1.
3. $\frac{1}{21}(-19\mathbf{i}+4\mathbf{j}-8\mathbf{k})$. **4.** $(18,17,-17)$, $(-14,-19,31)$.
5. $\alpha=-7.5, \beta=-0.8$. **7.** א. $(-2,3,0)$. ב. 9.
8. $\approx 55°, \approx 125°, \approx 235°, \approx 305°$. **9.** א. $60°, 120°, 240°, 300°$.
ב. לא קיים. ג. $90°, 270°$. **10.** $(2,10,\pm 11)$, $\cos\alpha=\frac{2}{15}, \cos\gamma=\pm\frac{11}{15}$.

לעמוד 118: **1.** א. -6. ב. 9. ג. 13. ד. 36. **3.** $\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. **4.** $\frac{4\sqrt{91}}{91}$.

לעמוד 122: **1.** 22.5. **2.** $5\sqrt{3}$. **4.** $3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$. **5.** א. 4. ב. 10.

לעמוד 127: **1.** $x+4y-2z+7=0$. **2.** $x+y-2z-3=0$. **3.** א. $y=2$.
ב. $4x+3z=1$. ג. $4x+5y+3z=11$. **4.** $(2,0,0), \left(\frac{11}{43},0,0\right)$. **5.** 8.
6. $3x+6y-2z+28=0$, $3x+6y-2z=14$. **7.** $\frac{7}{75}$.

לעמוד 132: **1.** א. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-3}$. ב. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{5}, z=-4$.
ג. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-2}$. ד. $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{13}=\frac{z+1}{5}$. **2.** $\frac{\sqrt{153}}{3}$.
3. $3x-2y+3z+1=0$. **4.** $(-4,-11,-14)$.

לעמוד 144: **2.** א. סגור. ב.ד. פתוח. **3.** א.ג. **4.** א.ב.ד.

לעמוד 146: **1.** $(0,0)$. **2.** לא קיים. **3.** $\left(e^2,\frac{1}{2}\right)$.

לעמוד 149: **1.** א. 0. ב. $\frac{110}{9}$. ג. $y^2x+\frac{x^2}{y}$. ד. $\frac{1}{x^2y}+\frac{x}{y^2}$. ה. $\left(x^2y+\frac{y^2}{x}\right)$.

2. א. $\{(x,y):x\ge 2y,x\ge -2y\}$. ב. $\{(x,y):x>2y,x>-2y\}$.
ג. $\{(x,y):x\ge 0,y\ge -1,x^2\ge y+1\}$. ד. $x^2+y^2=4$.
ה. $\{x<0,2x<y<2x+1\}\cup\{x>0,y>2x+1\}$. ו. $x>-1,y>2,z>0$.

3. א. $z=\left(\frac{uv}{u+v}\right)^u+u, u=(x+y)^2, v=(x-y)^2$.

ב. $z=\left(\frac{u+v}{v-u}\right)^3+\frac{u}{v}, u=x^2+y^2, v=(x+y)^2$.

4. א. $z=(x+y)^{x-y}+(x+y)^{y-x}$.

ב. $u=a^2-\frac{a}{4}[a^2+3(x+y+z)^4], a=x^2+y^2+z^2$. **5.** א. היפרבולות

$x^2-y^2=c$. ב. ריבועים $|x|+|y|=c,(c\ge 0)$. ג. מעגלים
$c(x^2+y^2)=2y$.

6. א. מישורים $2x+3y-z=c$. ב. $c\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x^2+y^2-2z^2=c$.

לעמוד 156: **1.** 4. **2.** לא קיים. **3.** לא קיים. **4.** לא קיים. **5.** 0. **6.** $-\frac{3}{2}$. **7.** $\frac{1}{3}$.

לעמוד 161: **1.** א. לא ב-$(0,0)$, כן ב-$(1,2)$. ב. כן. ג. כן ב-$(0,0)$, לא ב-$(1,2)$.
2. א. כן. ב. כן. ג. לא. ד. לא.

לעמוד 170: **1.** א. $z'_x=3x^2-\frac{1}{y}, z'_y=6y+\frac{x}{y^2}$. ב. $z'_x=-ye^{\cos xy}\cdot\sin xy$,

$z'_y=-xe^{\cos xy}\cdot\sin xy$. ג. $z'_x=-\frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$,

$z'_y=\frac{yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$. ד. $u'_x=\frac{x}{u}, u'_y=\frac{y}{u}, u'_z=\frac{z}{u}$. ה. $z'_x=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{y^5}{x}}$

כאשר $x\neq 0$, $z'_x(0,0)=0$, $z'_y=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2y^2}$. ו. $u'_x=\frac{3x^2}{x^3+y^3-z^3}$,

$u'_y=\frac{3y^2}{x^3+y^3-z^3}$, $u'_z=\frac{-3z^2}{x^2+y^2-z^3}$. **2.** $f'_x=1, f'_y=\frac{1}{2}, f'_z=\frac{1}{2}$.

5. א. $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. ב. $f'_x=f'_y=0$.

לעמוד 172: **1.** א. $2x+3y-2\sqrt{3}z=25$. ב. $z=-5$. **2.** $z=(2x+y-3)e$.

לעמוד 178: **1.** א. לא. ב. כן. **2.** א. כן. ב. כן. **3.** א. לא. ב. כן. **4.** א. כן. ב. כן.
5. א. לא. ב. כן.

לעמוד 184: **1.** $e^{2t}\left(\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{2t\ln^2 t}\right)$. **2.** $\sin 2t+2e^{2t}+3t^2\sin t+t^3\cos t$.

3. $\frac{1}{1+x^2}$. **4.** $\varphi'_u=0, \varphi'_v=1$. **6.** 0.

לעמוד 188: **1.** 0.076. **2.** 0.028. **3.** $0.2dz-0.12dx-0.16dy$. **4.** א. 1.054.
ב. 0.502. **5.** 4730, 2.1%. **6.** 4.25 מטר.

לעמוד 192: **1.** $\frac{2\cos^2\alpha}{\sin\alpha}, \alpha\neq 0,\pi$ ו-0 כאשר $\alpha=0,\pi$. **2.** $-\sqrt{5}$.

4. $2(x_0^2+y_0^2)^{-\frac{1}{2}}$. **5.** $\sqrt[3]{\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}$.

לעמוד 196: **1.** א. i. ב. $\frac{1}{3}i+\frac{1}{3}j+\frac{1}{3}k$. **2.** $y=-x+2\pi n, n=0,\pm 1,\ldots$. **3.** $\frac{\pi}{2}$.

4. $\left(\frac{7}{3},-\frac{3}{4}\right),\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$. **6.** 0. **7.** א. מישורים מקבילים

$2x+3y-5z=c$. ב. כדורים $x^2+y^2+z^2=c$. ג. פרבולוידים
$x^2+y^2=cz$. **8.** $7\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

לעמוד 200: **1.** $\frac{xy}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. **2.** 0. **3.** $u''_{xx}=u''_{yy}=0, u''_{xy}=1$.

לעמוד 201: **1.** $u''_{xx}=f''_{xx}+2f''_{xz}\varphi'_x+f''_{zz}(\varphi'_x)^2+f'_z\varphi''_{xx}$.
4. 0. **5.** $uf'_u+vf'_v+wf'_w=0$.

לעמוד 204: **1.** $z''_{ss}+z''_{tt}$. **2.** $f(x-ay)+g(x+ay)$ כאשר f ו-g הן פונקציות גזירות
פעמיים.

לעמוד 206: **1.** א. $e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dx\,dy]$. ב. $2(xdy\,dz+ydx\,dz+zdx\,dy)$.

ג. $du=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left(y\ln\frac{ex}{y}dx+x\ln\frac{x}{ey}dy\right)$,

$$d^2u=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left(y^2\ln^2\frac{ex}{y}+\frac{y}{x}\right)dx^2+2\left(xy\ln\frac{ex}{y}\ln\frac{x}{ey}+\ln\frac{x}{y}\right)dx\,dy+\left(x^2\ln^2\frac{x}{ey}-\frac{x}{y}\right)dy^2$$

ד. $d^2u=(ye^x f'_v+e^{2y}f''_{ww}+2ye^{x+y}f''_{wv}+y^2e^{2x}f''_{vv})\,dx^2+$
$+2[e^y f'_w+e^x f'_v+xe^{2y}f''_{ww}+e^{x+y}(1+xy)f''_{wv}+ye^{2x}f'_{vv}]\,dx\,dy+$
$+(xe^y f'_w+x^2e^{2y}f''_{ww}+2xe^{x+y}f''_{wv}+e^{2x}f''_{vv})\,dy^2$

2. $e^x(\cos y\,dx^3-3\sin y\,dx^2dy-3\cos y\,dx\,dy^2+\sin y\,dy^3)$.

לעמוד 208: א. $1+(x+y)+\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3!}(x+y)^3$.

ב. $1-\frac{x^2+y^2}{2!}+\frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}$. ג. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{4}(x^2-y^2)$.

לעמוד 216: **2.** $f(x,y)$ לא, $g(x,y)$ כן. **3.** $x+4y+6z=\pm 21$.

לעמוד 217: **1.** $(\pm1,0),(0,\pm1)$. **2.** $(0,0)$. **3.** $(0,0)$. **4.** $(0,0)$.

לעמוד 223: **1.** $y'=\frac{y(z-x)}{x(y-z)}$, $z'=\frac{z(x-y)}{x(y-z)}$,

$y''=-z''=\frac{2}{x^3(y-z)^3}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$.

2. א. $z'_x=-\frac{c\sin v}{u}$, $z'_y=\frac{c\cos v}{u}$. ב. $z'_x=\frac{1}{2}(u+v)$, $z'_y=\frac{1}{2}(v-u)$,

ג. $z'_x=\frac{1}{2}e^{-u-v}(u+v)$, $z'_y=\frac{1}{2}e^{v-u}(v-u)$. **4.** $u'_x=v'_x=1$, $u'_y=\frac{1}{2}$,

$v'_y=-\frac{1}{2}$.

לעמוד 226: **1.** א. $2x+4y-z=5$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$. ב. $3x+4y+12z=169$,

$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$. ג. $x+y-4z=0$, $x-2=y-2=\frac{z-1}{-4}$.

2. א. $x-1=y-1=\frac{z-1}{2}$. ב. $y=-2, x+z=2$.

לעמוד 231: **1.** $u^2+v^2\le 1$, כן. **2.** $\{(u,v): u\le v, u\ge -v, v\le 2\}$.

3. $\{(x,y): 9\le x^2+y^2\le 16, 1\le x^2-y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$, כן.

4. $\{(\rho,\varphi,\theta): 0\le\rho\le 2, 0\le\varphi\le 2\pi, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$, כן.

5. א. $\{(u,v): u\ge v, u\ge -v, u\le 1\}$.

ב. $\{(u,v): \frac{u^2}{4}-1\le v\le 1-\frac{u^2}{4}, u\ge 0\}$.

ג. $\{(u,v): -u\le v\le 0, u^2+v^2\le 18\}$.

ד. $\{(\rho,\varphi): 0\le\rho\le 2\cos\varphi, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}$. ה. $\{(u,v): u\le v\le 16, 1\le u\le 4\}$.

ו. $\{(u,v): 1\le u\le 4, -\frac{1}{3}\le v\le\frac{1}{3}\}$.

לעמוד 237: **1.** מעורבת. **2.** חיובית. **3.** שלילית.

לעמוד 242: **1.** $u_{max}(2,-2)=8$. **2.** $u_{min}\left(\frac{1}{4},\frac{7}{6}\right)=-\frac{101}{24}$. **3.** $u_{max}=\frac{ab}{3\sqrt3}$ בנקודות

$\left(\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3}\right),\left(-\frac{a}{\sqrt3},-\frac{b}{\sqrt3}\right)$, $u_{min}=-\frac{ab}{3\sqrt3}$ בנקודות $\left(\frac{a}{\sqrt3},-\frac{b}{\sqrt3}\right)$,

$\left(-\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3}\right)$, ראה איור 1. **4.** $u_{max}(0,0)=1$, ראה איור 2.

5. $u_{max}(1,-1)=\sqrt3$, ראה איור 3. **6.** $u_{min}=u(-1,-2,3)=-14$.

7. $z_{max}=(2k-1)\pi+2+\sqrt3+\frac{\pi}{6}$, $z_{min}=2\pi k-2-\sqrt3-\frac{\pi}{6}, k=0,\pm1,\ldots$,

ראה איור 4. **8.** $u_{max}=\left(\frac{a}{7}\right)^7$ בנקודה $\left(\frac{a}{7},\frac{a}{7},\frac{a}{7}\right)$. **9.** מקסימום

בנקודות $(\pm a,\pm a,a\sqrt{1+\sqrt3}),(0,0,-a\sqrt2)$, מינימום בנקודות

$(\pm a,\pm a,-a\sqrt{1+\sqrt3}),(0,0,a\sqrt2)$. **10.** $u(-1,2)=5$, ראה איור 5.

לעמוד 250: **1.** $u_{min}(3,3,3)=9$. **2.** $u_{max}(1,1,1)=1$. **3.** $u_{min}(a,\ldots,a)=ka^n$.

4. $u_{min}=-\frac{1}{3\sqrt6}$ בנקודות $\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)$,

$\left(-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)$, $u_{max}=\frac{1}{3\sqrt6}$ בנקודות $\left(-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right)$,

$\left(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right)$. **5.** (3.5). **6.** $\left(-\frac{5}{9},-\frac{1}{9}\right)$.

7. $z_{max}=2$. **8.** $\left(9,\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right)$, $\left(-9,-\frac{1}{8},-\frac{3}{8}\right)$.

לעמוד 253: **1.** $u_{max}(2,1)=4$, $u_{min}(4,2)=-64$. **2.** $u_{min}(0,0)=0, u_{max}(0,\pm1)=\frac{3}{e}$,

ראה איור 6. **3.** $u_{max}=1$, $u_{min}=-\frac{1}{2}$. **4.** $u_{max}(2,-1)=13$,

$u_{min}(0,-1)=u_{min}(1,1)=-2$. **5.** $u_{min}=-\frac{9}{8}, u_{max}=6$.

6. $u_{min}(0,0)=0, u_{max}(0,\pm 0.5)=0.5e^{\frac{1}{4}}$, ראה איור 7.

לעמוד 253: **תרגילים נוספים:**

1. $F(x,y)=49+28(x-1)+70(y-1)+\frac{1}{2}[36(x-1)^2+$

$$+40(x-1)(y-1)+50(y-1)^2]+\frac{1}{6}[24(x-1)^3+60(x-1)^2(y-1)]+\frac{1}{24}(x-1)^4$$

2. הנקודה הקרובה $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right)$, הרחוקה $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right)$. **5.** $-6i-18j-4k$. **7.** $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}=-2$.

8. א. $\frac{14}{15}$. ב. $i+\frac{1}{2}j$. **9.** א. $\min f=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\max f=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ב. $\min f=-32, \max f=0$.

ג. $\max f=f\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{5}{8}}\right)=\frac{5}{4}$, $\min f=f(-1,1)=-1$. **10.** א. רציפה.

ב. $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. ג. דיפרנציאבילית. **11.** $\left(\pm\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$.

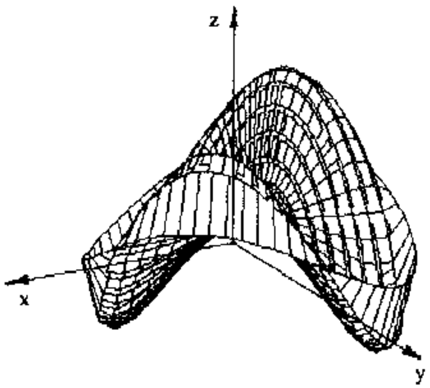
12. $(-2,4,3)$. **13.** $z'_x=x+1+2x\ln\frac{x}{1+y}, z'_y=-\frac{x^2}{1+y}$. **14.** $-\frac{1}{4}$.

15. $x'_v=\frac{1}{2\pi}, y'_v=1, x'_u=y'_v=0$. **16.** $\frac{2}{3}i-\frac{1}{12}j$.

17. $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-5}{-2}$. **19.** א. כן. ב. כן.

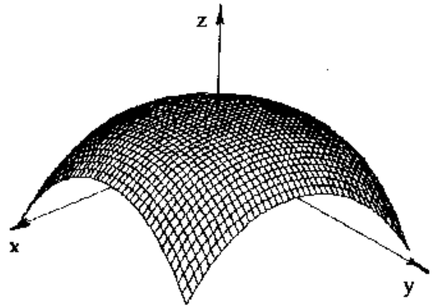
20. $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-\sqrt{20}}{-\sqrt{5}}$. **21.** $\min f=f(\frac{4}{3},0,\frac{4}{3},\frac{16}{3})=32$.

איורים לתשובות



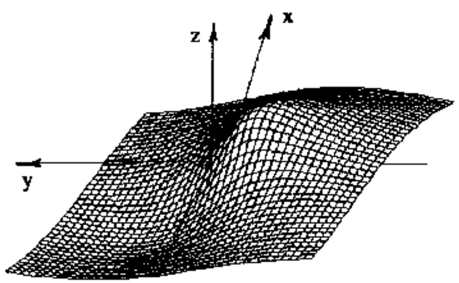
$u=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$

איור 1



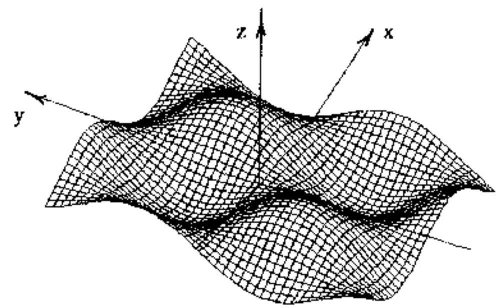
$u=1-(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$

איור 2



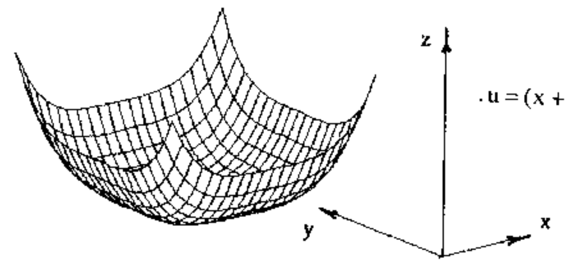
$u=\frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

איור 3



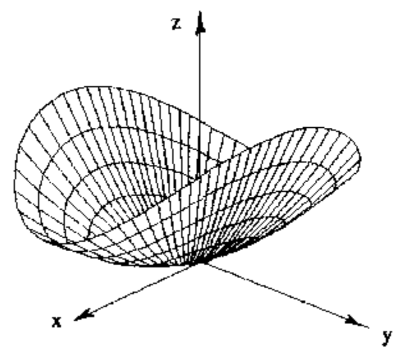
$.z = x + y + 4\sin x \cdot \sin y$

איור 4



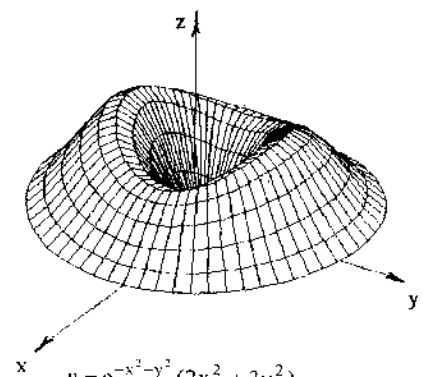
$.u = (x+1)^4 + (y-2)^4 + 5$

איור 5



$u = (x^2 + 2xy + 2y^2)e^{-x^2-y^2 \cdot xy}$

איור 6



$u = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$

איור 7