

פתרון מבחן מועד א' בקורס 88133

חשבון אינפיניטסימלי 2

שאלה 1. חשב את הביטוי $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ בקירוב של מאית. הצדק את צעדיך.

פתרון: בטור מקלורן של e^x : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ נציב $x = -t^2$ ונקבל את הטור: $e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}$.

רדיוס ההתכנסות של טור החזקות הזה הוא ∞ ולפיכך הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סופי ב- $\mathbb{R}$.
אם כן בפרט באינטרוול הנתון, האינטגרל של הטור שווה לטור האינטגרלים:

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$$

קיבלנו טור לייבניץ. שאריתו מקיימת: $|r_n| < a_{n+1}$. לפיכך נדרוש: $\frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < \frac{1}{100}$

וזו נכון החל מ- $n=3$, כלומר נזדקק לפיתוח מסדר 3: $\int_0^1 e^{-t^2} dt \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2! \cdot 5} - \frac{1}{3! \cdot 7}$.

שאלה 2. קבע היכן הטור (+)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \cos \frac{1}{t} dt}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{1} = 1 \quad \text{ניעזר במשפט לופיטל:}$$

הגזירה של המונה מתבססת על המשפט היסודי של החדו"א.

שאלה 4.

א. הראה כי הפרש של שתי סדרות פונקציות המתכנסות במ"ש בקטע מתכנס אף הוא במ"ש שם.

ב. הראה כי אם טור פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I , אז גם סדרת הפונקציות

$$\{f_k(x)\} \text{ מתכנסת במ"ש לאפס ב- } I \text{ (אפשר להיעזר בתוצאה של סעיף א').}$$

פתרון:

א. תהיינה שתי סדרות המתכנסות במ"ש בקטע $I: a_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a(x), b_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b(x)$

כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ (הגדול מבין השניים שמתקבלים בסדרות) כך ש:

$$\forall n > n_0, x \in I: |a_n(x) - a(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, |b_n(x) - b(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

לפיכך:

$$\begin{aligned} \forall n > n_0, x \in I: |a_n(x) - b_n(x) - (a(x) - b(x))| &= |a_n(x) - a(x) - (b_n(x) - b(x))| \\ &\leq |a_n(x) - a(x)| + |b_n(x) - b(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

כלומר הפרש הסדרות $a_n(x) - b_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- I לפונקציה הגבול: $a(x) - b(x)$.

ב. טור פונקציות מתכנס במ"ש בקטע אם הסכ"ח שלו $S_n(x)$ מתכנסת במ"ש שם לסכום: $S(x)$.

$$\text{נרשום: } f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(x) - S(x) = 0$$

שההתכנסות היא במ"ש לאפס בקטע.

$$\text{שאלה 5. הראה כי: } \frac{1}{2e} \ln 2 \leq \int_0^{\pi/4} e^{-x^2} \tan x dx \leq \frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{נמק!}$$

פתרון: עפ"י משפט ערך הממוצע האינטגרלי קיימת נקודה $0 < c < \frac{\pi}{4}$ בה מתקיים:

$$\int_0^{\pi/4} e^{-x^2} \tan x dx = e^{-c^2} \int_0^{\pi/4} \tan x dx$$

$$dt = -\sin x dx \quad \text{לגבי האינטגרל שנותר:} \quad \int_0^{\pi/4} \tan x dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$t: 1 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{נציב: } t = \cos x \quad \text{ונקבל:}$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dt}{t} = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{ולפיכך:}$$

$$\frac{1}{e} < e^{-c^2} < 1 \Leftrightarrow 1 < e^{c^2} < e \Leftrightarrow 0 < c^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < c < \frac{\pi}{4} < 1 \quad \text{כמו כן נרשום:}$$

נעת אם נכפיל את שתי התוצאות שקיבלנו נקבל את התוצאה המבוקשת.

שאלה 6. יהא C מספר קבוע ותהא $f(x)$ פונקציה אינטגרלית בקטע $[a, b]$ כך שבכל נקודה

$$\int_a^b f(x) dx = C(b-a) \quad \text{הראה כי בהכרח:} \quad f(x) = C.$$

פתרון: בכל חלוקה של $[a, b]$, בכל תת-קטע של החלוקה, נמצא בהכרח מספר רציונלי. ולכן לכל $\delta > 0$

קיימת חלוקה T עם $\lambda(T) < \delta$ ובחירת נקודות רציונליות בה כך שסכום רימן המתקבל הוא:

$$\sum_{i=1}^n C \cdot \Delta x_i = C(b-a) \quad \text{נתון שהפונקציה היא אינטגרלית בקטע, כלומר שגבול כל סכומי הרימן הוא}$$

מספר אחד. מכאן שהוא חייב להיות עפ"י בחירת הנקודות הרציונליות ל: $C(b-a)$.